Il quanto di luce e la fisica quantistica

- motivazioni della scelta
- ripensare all'*energia* in fisica classica: aspetti "corpuscolari" e "ondulatori"
- dal "quanto di azione" di Planck al "quanto di luce" di Einstein
- il metodo della "somma sui molti cammini"

Riferimenti

R.Feynman, "*QED, la strana teoria della luce"* ADELPHI 1985

E.F.Taylor, *Computers in Physics* 12 (1998) 190

E.Fabri, "*Come introdurre la fisica moderna nella scuola secondaria superiore*" LFNS 29, Suppl.n.1, p.63-80 (1996)

L.Borello et al.,*"Il metodo della somma sui molti cammini di Feynman per l'introduzione della Meccanica Quantistica"* LFNS 35, Suppl.n.2, p.119-124 (2002)

M.Romita, *"Il paradigma onto-semiotico nella didattica per la Meccanica Quantistica: una proposta di formazione per i docenti di scuola superiore"* LFNS 46, Suppl.n.1, p.147-153 (2013)

Sito web *http://www.iapht.unito.it/qm/*

Motivazioni della scelta

La proposta nasce nel 2000 (avvio corsi SIS e progetto SECIF-Guidoni)

Scopo: introdurre la fisica dei quanti con un percorso che

- *richieda prerequisiti ragionevoli di conoscenze matematiche* (NO all'uso di numeri complessi e di equazioni differenziali)
- *richieda prerequisiti ragionevoli di conoscenze fisiche* (concetti di energia, spazio, tempo, massa, velocità, quantità di moto, frequenza)
- *eviti di porre in contrapposizione fisica "classica" e fisica "quantistica",* anzi rinforzi i concetti fondamentali della fisica classica
- *permetta una "visualizzazione" ragionevole dei concetti fondamentali della meccanica quantistica (dibattito Schrödinger-Heisenberg)*
- *eviti il "dualismo onda-particella"*
- *fornisca una chiave di interpretazione degli esperimenti*

tutto è ricondotto sostanzialmente alla sola relazione di Planck

$$E = h f$$

Che cosa c'è da capire nella relazione di Planck

$E = h\,f$: E = energia, h = quanto di azione, f = frequenza

- lega l'energia E alla frequenza f,
- con un coefficiente di proporzionalità, h, che è una "costante naturale"

In fisica classica, energia e frequenza sono concetti che appartengono a fenomeni diversi, perché

- l'*energia è una proprietà che, nella fisica classica, associamo abitualmente a un corpo materiale*, ben localizzato nello spazio-tempo, al quale però è difficile associare una "frequenza"
- la *frequenza è caratteristica di un fenomeno periodico,* al quale però è difficile associare una "energia" ben localizzata nello spazio-tempo

↓

È quindi essenziale ripensare al ruolo

che il concetto di energia ha nella fisica classica

Energia: la cenerentola della fisica classica

- in *fisica classica* l'*energia* ha spesso, rispetto ad altri concetti, un ruolo marginale nella descrizione e comprensione dei fenomeni
- in *meccanica quantistica* l'*energia* è invece la grandezza cruciale: l'equazione di Schrödinger è una relazione fra "l'operatore energia" e i suoi "autovalori"
- l'energia va quindi ricondotta, fin dalla fisica classica, al suo ruolo centrale di "*variabile di stato*" e, come tale, *descrittore fondamentale e unificante* dei fenomeni

anche il ruolo della *quantità di moto* è mal utilizzato in fisica classica:

- viene usato principalmente per risolvere in modo abbreviato problemi in cui interviene la legge di conservazione della quantità di moto
- e non come descrittore di una *proprietà caratteristica dell'oggetto in moto*, come avviene invece in MQ
- anche la quantità di moto va ricondotta, fin dalla fisica classica, al suo ruolo di descrittore di una caratteristica del corpo in moto e non solo della sua interazione con altri corpi

Energia e quantità di moto in meccanica

- *nella meccanica classica* l'approccio al moto è calato in un'ottica newtoniana che finisce con il condizionarlo
- l'*energia* viene introdotta attraverso la via forza → lavoro → energia
- in questo modo, il concetto di energia è ancillare a quello di lavoro, a sua volta ancillare a quello di forza
- rimane in secondo piano la proprietà dell'energia di essere una "variabile di stato", cioè qualcosa che il corpo (o il sistema) porta con sé e lo caratterizza,
- l'essere una variabile di stato è ciò che determina essenzialmente il ruolo importante che l'energia ha in meccanica quantistica
- anche la *quantità di moto* dovrebbe essere vista come la vera proprietà *dinamica* che descrive il corpo in moto
- è molto più importante della velocità, che descrive invece la caratteristica cinematica del moto del corpo e che, in meccanica quantistica, perde significato
- mentre la quantità di moto mantiene, anche in MQ, il suo ruolo importante (è l'operatore che descrive la variazione spaziale della funzione d'onda!)

L'energia in elettromagnetismo

- *in elettromagnetismo* il ruolo riservato all'energia nell'approccio tradizionale è ancora più confuso che in meccanica
- manca soprattutto il concetto di energia "immagazzinata" in un *campo elettrico* o in un *campo magnetico*
- esperimenti cruciali:

  - per caricare un condensatore occorre un'energia $E_{el} = \frac{1}{2} \varepsilon E^2 V$ che poi rimane immagazzinata come energia elettrostatica nel volume V del condensatore

  - nel campo magnetico di un solenoide c'è un'energia $E_{mg} = \frac{1}{2} \mu \boldsymbol{H}^2 V$, immagazzinata nel volume V del solenoide

- sono concetti essenziali per capire che un'onda elettromagnetica trasporta energia in quantità proporzionale al quadrato dei campi ***E*** e ***H***
- peraltro l'idea di "campo" e di energia associata al "campo" è ormai famigliare anche a un ragazzino di scuola media!

Riassumendo, che cosa si dovrebbe aver chiaro dalla fisica classica nei riguardi dell'energia:

- che l'energia è una proprietà caratteristica del corpo in sé (o del sistema di corpi)
- che può essere *trasferita* da un corpo all'altro in modi diversi attraverso interazioni diverse
- che può essere *trasportata* anche mediante onde, in particolare onde elettromagnetiche, senza che vi sia trasporto di massa
- che *l'energia portata da un'onda non è localizzata* è distribuita in un volume di dimensioni finite, a differenza di quella portata da un corpo materiale che, idealmente, può avere dimensioni piccole a piacere
- che l'energia può essere trasferita da un'onda a un corpo dotato di massa attraverso interazioni opportune

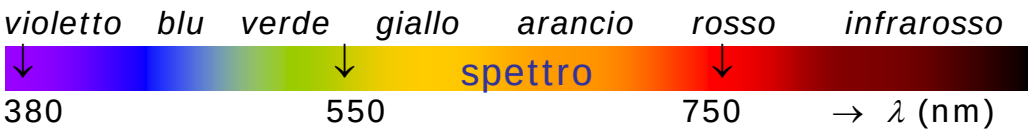
Tutto ciò vale per fenomeni macroscopici:
è ancora valido a dimensioni microscopiche?

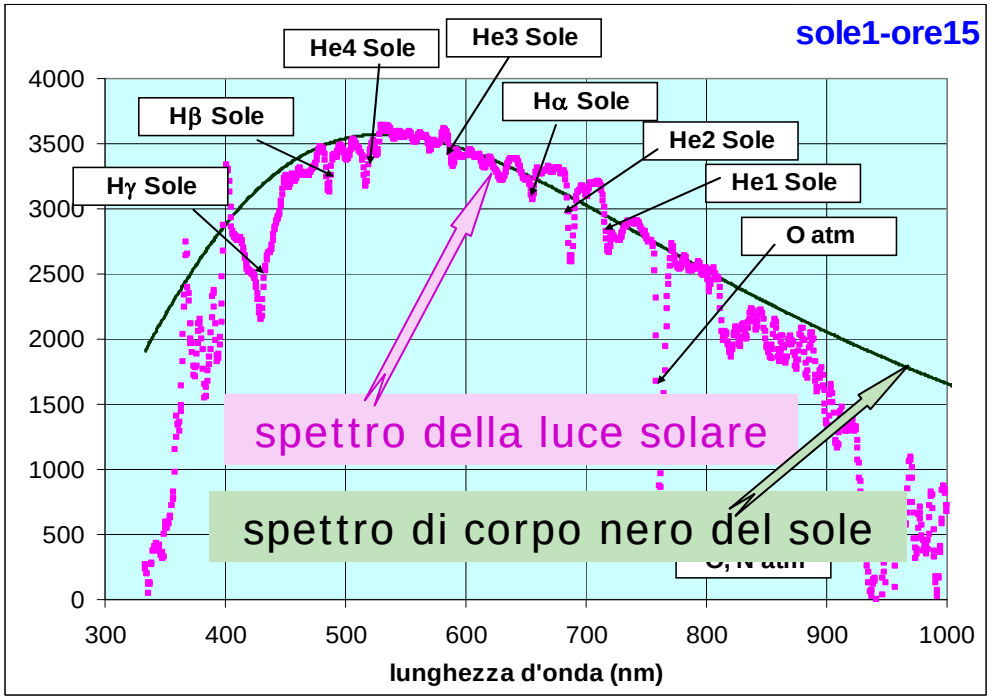
L'inizio della storia: la relazione di Planck, $E = h\,f$

- formulata da Planck nel 1901 per interpretare una anomalia dello "*spettro di corpo nero*" non spiegata dal modello classico
- introdotta in modo confuso e spesso errato nei testi di fisica per seguire lo sviluppo storico

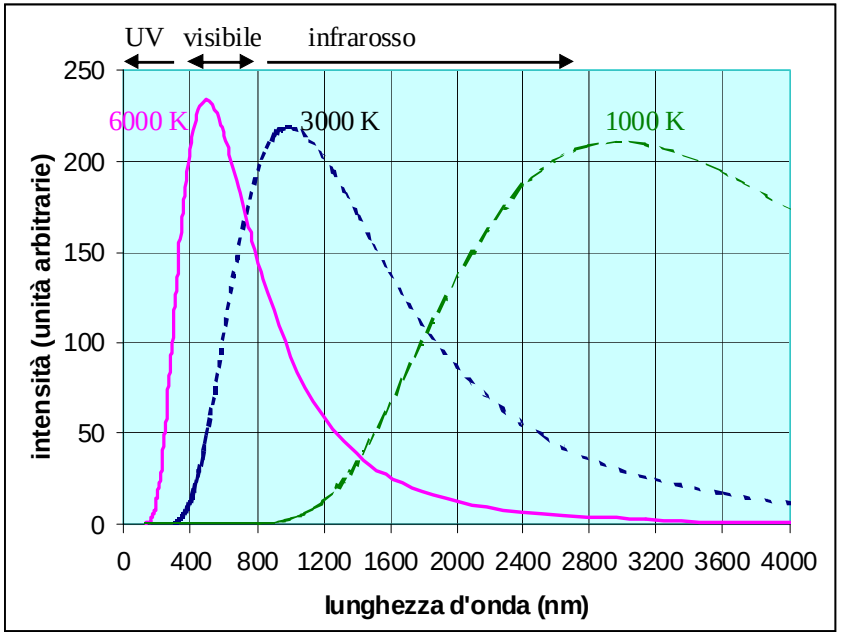
un po' di chiarezza fra i termini:

- "spettro": separazione della luce (radiazione elettromagnetica) nelle diverse lunghezze d'onda (colori). Si ottiene con un prisma o con un reticolo di diffrazione
- "spettro della luce solare": intensità luminosa (*energia*/tempo) in un intervallo di lunghezza d'onda. Si misura con un fotodiodo che cattura l'energia solo in quel dato intervallo di lunghezza d'onda
- "spettro di corpo nero": è una curva teorica che si calcola ipotizzando un equilibrio fra la radiazione elettromagnetica emessa o assorbita da un corpo a temperatura *T*. L'andamento dello spettro solare è ben approssimato da uno spettro di corpo nero con una temperatura di circa 6500 K sulla superficie del Sole con sovrapposte le righe di assorbimento dell'atmosfera solare





Lo spettro di corpo nero



- l'andamento "a campana" dello spettro di corpo nero era già stato modellizzato nella seconda metà dell'Ottocento con ragionamenti classici di elettromagnetismo e di meccanica statistica

$$I(f) = Cf^3 \boxed{e^{-Bf/k_BT}} \rightarrow e^{-E/k_BT}$$

termine di Boltzmann, con "energia" E proporzionale alla frequenza f

- idea base: la radiazione e.m. viene emessa di preferenza alla frequenza f a cui oscillano gli elettroni presenti nel corpo, che è legata alla temperatura assoluta T

- legge di Wien (1985): la frequenza a cui si verifica il picco di intensità è proporzionale alla temperatura assoluta T del corpo che ha emesso la radiazione, $f_{max} = 5AT$ ($A = 3 \cdot 10^{-3}$ m·K, costante di Wien). Dal valore di A si ottiene $B \approx 6{,}6 \cdot 10^{-34}$ J·s $\approx h$!

- *"l'anomalia infrarossa":* l'intensità a piccole frequenze del modello di Wien era troppo bassa Planck aggiunge sostanzialmente l'ipotesi che l'energia E della radiazione emessa da un singolo oscillatore sia un multiplo intero di una energia fondamentale $E_o = hf$, $E = nE_o = nhf$

- e ottiene l'espressione corretta dello spettro:
  - con il termine "-1" aggiunto al denominatore della formula di Wien, che cura "l'anomalia infrarossa"

$$\boxed{I(f) = \frac{2hf^3c^{-3}}{e^{hf/k_BT} - 1}}$$

  - e il valore della costante C del modello di Wien, $C = 2hc^{-3}$, che determina il *valore assoluto* della potenza emessa per unità di angolo solido: primo esempio di calcolo statistico quantizzato!

Il significato della relazione di Planck

$$I(f) = \frac{2hf^3c^{-3}}{e^{E/k_BT}-1} = \frac{2hf^3c^{-3}}{e^{hf/k_BT}-1} \longrightarrow E = hf$$

- Planck ipotizza sostanzialmente che materia e radiazione scambino energia in quantità elementari che sono pari al prodotto del "quanto di azione" *h* moltiplicato per la frequenza *f*

$E = hf$ E=energia h=quanto di "azione" f=frequenza

- la relazione di Planck è rivoluzionaria perché esprime un legame fra l'energia *E* ceduta da un corpuscolo "puntiforme" (l'elettrone) e la frequenza la frequenza *f* di un campo e.m.:

E = proprietà tipica dei "corpuscoli materiali" *f* = proprietà caratteristica di "un'onda"

- domanda chiave:

l'energia del campo e.m. è "di per sé" quantizzata in multipli di *hf*,

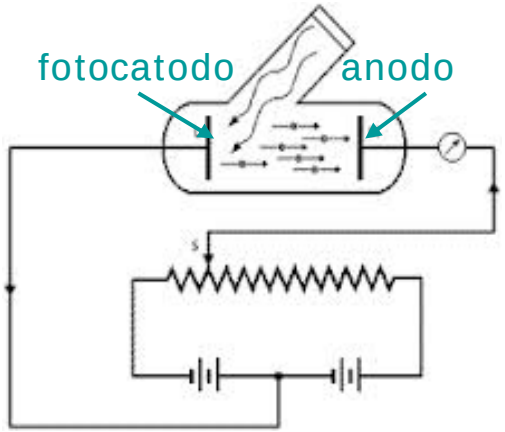
oppure si comporta come se fosse quantizzata solo quando viene scambiata

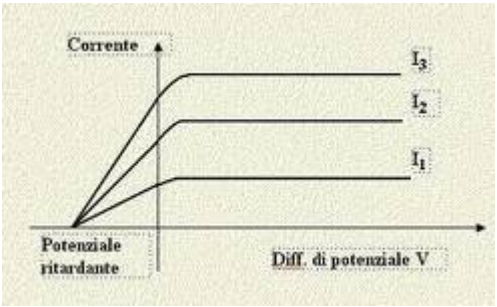
con oggetti materiali come gli elettroni?

Da Planck a Einstein

L'interpretazione dell'effetto fotoelettrico

L'effetto fotoelettrico (Lénard, 1902)





- sul fotocatodo incide luce di frequenza *f*
- gli elettroni che escono sono attirati verso l'anodo dalla differenza di potenziale *V*
- la corrente va a zero per un valore del potenziale di arresto che dipende linearmente da *f*

$$eV = a + hf$$

$$h = 6{,}6 \cdot 10^{-34}\ \mathrm{J \cdot s}$$

h = costante di Planck

l'interpretazione di Einstein (1905)

- l'energia di un campo elettromagnetico è "quantizzata"
- il valore del "quanto elementare" di energia di frequenza *f* è

$$E_f = hf$$

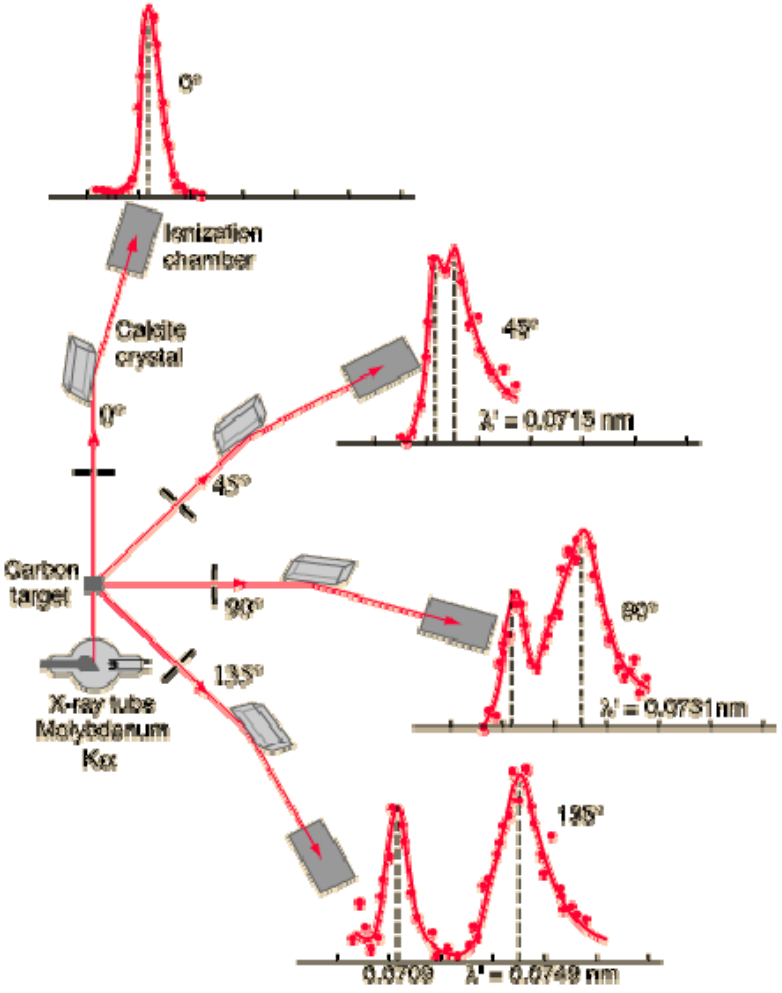
- *h* è la "costante di Planck"

$$h = 6{,}6 \cdot 10^{-34}\ \mathrm{J \cdot s}$$

- la quantizzazione dell'energia non avviene al momento dell'interazione con la materia, ma è il campo e.m. stesso che si comporta come una particella (il "fotone") che ha contemporaneamente aspetti *corpuscolari* (*E*) e *ondulatori* (*f*)

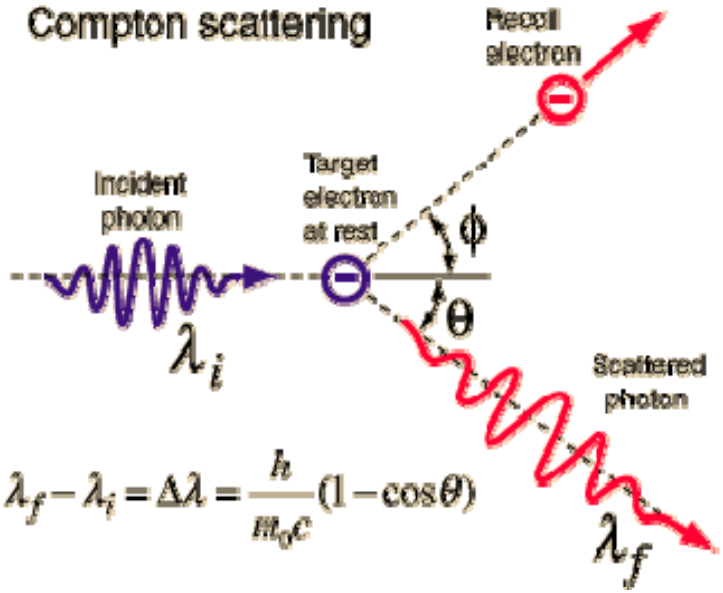
L'effetto Compton (1922)

- un fotone di energia $E=hf$ ha una quantità di moto $p = hf / c = E / c$
- *Il fotone si comporta come una particella di massa nulla dotata di energia e quantità di moto*



L'esperimento:

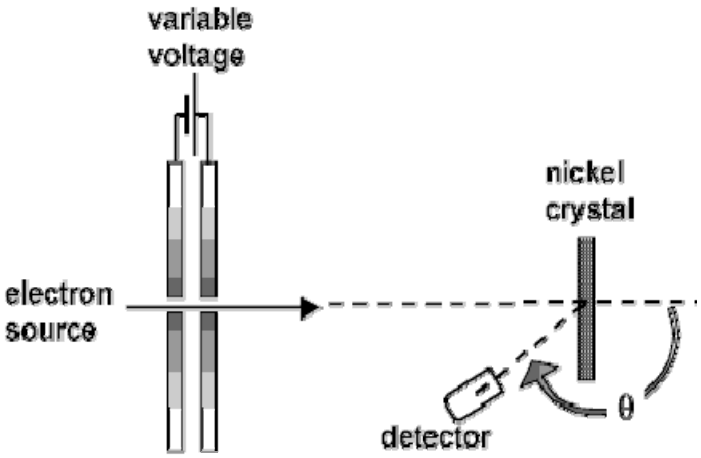
- Un fascio di raggi X di λ=0,0709 nm viene diffuso dagli elettroni di atomi di carbonio
- I fotoni che escono a un angolo θ hanno λ maggiori, compatibili con l'ipotesi che il fotone cede all'elettrone energia e quantità di moto compatibili con le leggi di conservazione

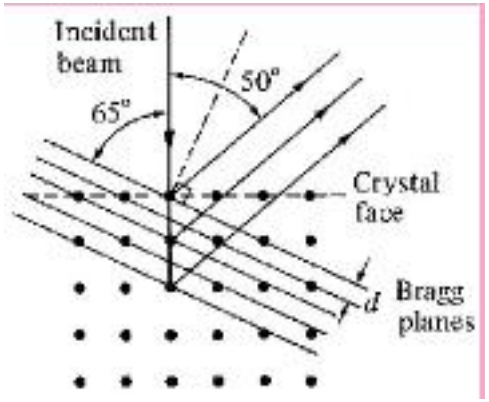


$$\lambda_f - \lambda_i = \Delta\lambda = \frac{h}{m_0 c}(1-\cos\theta)$$

Bohr e l'interpretazione delle righe spettrali dell'atomo di idrogeno

- anche l'elettrone ha proprietà ondulatorie
- la sua lunghezza d'onda vale $\lambda = h / p$
- ipotesi confermata (1927) dagli esperimenti di Davidsson, Germer e, indipendentemente, da G.P.Thomson





Perché è difficile vedere effetti ondulatori in interazioni di elettroni

- Energia di un elettrone accelerato con una differenza di potenziale di 100 V:

$$E = 1{,}6 \cdot 10^{-17}\ \text{J} = 100\ \text{eV}$$

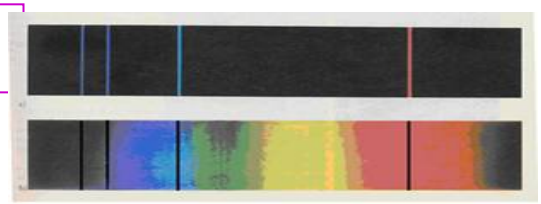
- Quantità di moto: $p = \sqrt{2mE} \approx 5{,}4 \cdot 10^{-24}$ kg m/s
- Lunghezza d'onda:

$$\lambda = h / p \approx 1{,}2\ \text{nm}$$

λ è estremamente piccola anche per elettroni di bassa energia!

Negli esperimenti storici come quello di J.J.Thomson λ è così piccola che gli effetti ondulatori sono trascurabili: l'elettrone si comporta come una particella "classica"!

Bohr e l'interpretazione delle righe spettrali



SPETTRI DI EMISSIONE E ASSORBIMENTO DELL'IDROGENO

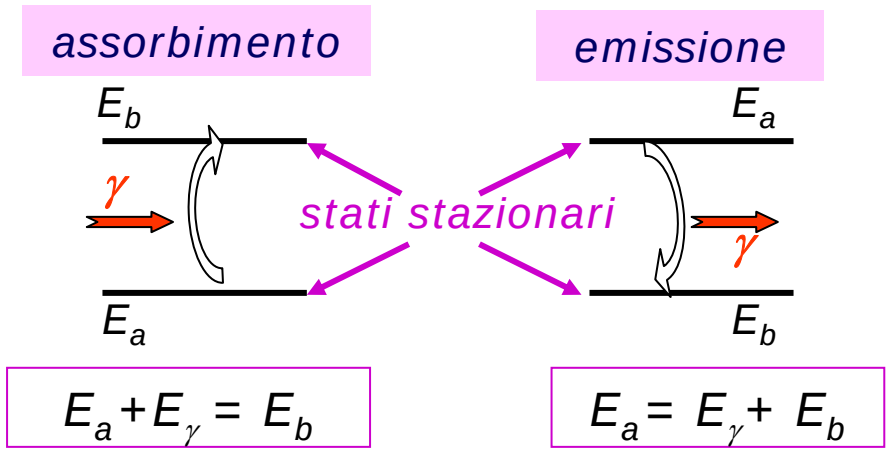
1859 leggi di Kirchoff sugli "spettri a righe" degli atomi

1885 serie di Balmer: $f \propto 1/n^2 - 1/m^2$ (f = frequenza della riga)

1913 ipotesi di Bohr sugli *stati stazionari* dell'elettrone nell'atomo di idrogeno e sulle *transizioni fra stati*: anche l'elettrone ha una "frequenza propria" calcolata dalla relazione di Planck in base all'energia cinetica

Modello di Bohr:

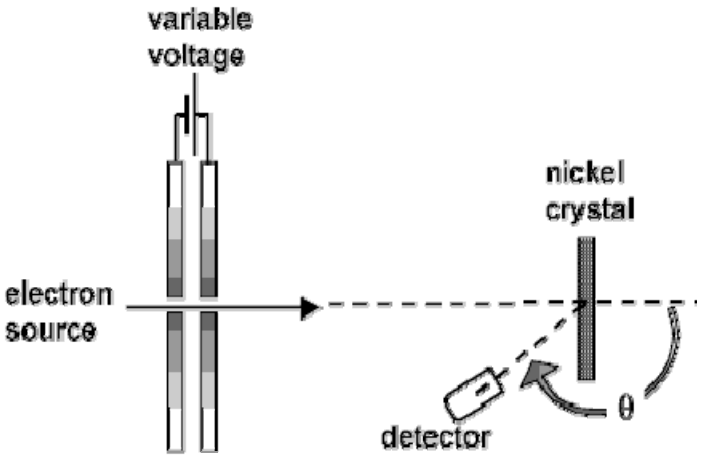
- *l'elettrone percorre un'orbita circolare di raggio r calcolato secondo la meccanica classica*
- *l'energia cinetica e quella potenziale dipendono dalla distanza media r dal nucleo come pure il periodo T e la pulsazione $\omega = 2\pi / T$*
- *non tutte le orbite sono stabili, ma solo quelle per cui la frequenza di rotazione è pari alla frequenza "propria" dell'elettrone calcolata dalla relazione di Planck in base all'energia cinetica*
- *di qui segue che il momento angolare orbitale è multiplo intero di $h/2\pi$ e che i valori permessi dell'energia totale $E_{tot} = E_{kin} + E_{pot}$ sono discreti (quantizzati) e sono espressi dalla relazione* $\boldsymbol{E_n = -R_H / n^2}$
- *per la proporzionalità tra frequenza ed energia della radiazione ($E_\gamma = h\, f_\gamma$), l'emissione o l'assorbimento della radiazione avviene a una frequenza "sintonizzata" non con la frequenza di rotazione dell'elettrone ma con la differenza di energia fra stati stazionari*

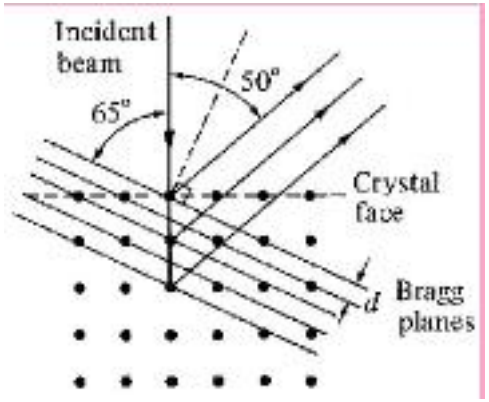


la quantizzazione delle frequenze coincide con la conservazione dell'energia

De Broglie e la lunghezza d'onda dell'elettrone (1924)

- l'elettrone ha proprietà ondulatorie
- la sua lunghezza d'onda vale $\lambda = h / p$
- ipotesi confermata (1927) dagli esperimenti di Davidsson, Germer e, indipendentemente, da G.P.Thomson





Perché è difficile vedere effetti ondulatori in interazioni di elettroni

- Energia di un elettrone accelerato con una differenza di potenziale di 100 V:

$$E = 1{,}6 \cdot 10^{-17}\ \text{J} = 100\ \text{eV}$$

- Quantità di moto: $p = \sqrt{2mE} \approx 5{,}4 \cdot 10^{-24}$ kg m/s
- Lunghezza d'onda:

$$\lambda = h / p \approx 1{,}2\ \text{nm}$$

λ è estremamente piccola anche per elettroni di bassa energia!

Negli esperimenti storici come quello di J.J.Thomson λ è così piccola che gli effetti ondulatori sono trascurabili: l'elettrone si comporta come una particella "classica"!

Il cambio di paradigma

Lo sviluppo storico della fisica classica ci ha abituati a pensare che

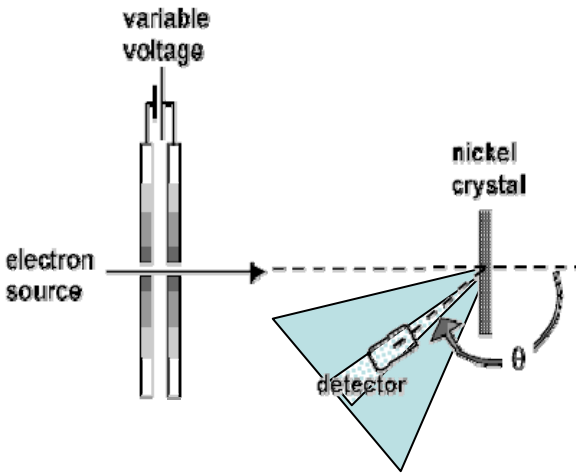
- un corpo dotato di una massa *m*, come l'elettrone, è una *particella* descrivibile come un "punto materiale" che segue le leggi della meccanica newtoniana: la descrizione del moto dei corpi dotati di massa come "punti materiali" risale infatti al XVII secolo e ha avuto innumerevoli verifiche sperimentali, mentre, per gli aspetti "ondulatori", bisogna arrivare al modello di Bohr (1913) e, per le prime evidenze sperimentali dirette, agli esperimenti di D.G.T (1927)
- la radiazione elettromagnetica è un'*onda* costituita da *campi* elettrici e magnetici che si propagano con un'ampiezza che varia secondo l'equazione dell'onda e che si *sovrappongono* nello spazio-tempo: la prima descrizione della luce come "onda" risale infatti al XVII secolo (Huygens), la prima verifica sperimentale è del 1801 (Young), mentre bisogna arrivare al 1902 per la prima evidenza sperimentale di aspetti "corpuscolari" e all'interpretazione di Einstein del 1905

Come dice Feynman fin dall'inizio del suo libro *"QED, la strana teoria della luce"*, il linguaggio e le leggi della fisica classica sono inadeguate a descrivere il moto nelle condizioni estreme come quelle che si verificano nel mondo microscopico per cui non solo è *obbligatorio* ricorrere alle leggi della meccanica quantistica ma dobbiamo anche staccarci, nel *linguaggio,* dal modo di esprimersi proprio della meccanica classica, che è quello a noi più congegnale, dato che, in fondo, anche noi siamo degli oggetti "classici"

Perché è difficile descrivere un oggetto che si comporta in “modo quanto-meccanico”

le associazioni mentali, evocate dall'uso di certe parole come "onda" o "corpuscolo", sono fuorvianti

- quando si dice che un elettrone ha “comportamenti ondulatori” non significa che l’elettrone si comporta come “un’onda classica”: un elettrone che viene rivelato da un dispositivo è rivelato “per intero”, con tutta la sua energia, mentre per un’onda classica viene rivelata generalmente solo la *frazione di onda* che il dispositivo intercetta perché cade nell’angolo solido di copertura
- quando si dice che un fotone ha “comportamenti corpuscolari” non significa che si comporta come una particella “classica” perché ha una frequenza *f* e un’energia pari a *hf*, la sua posizione spaziale è definita solo all’interno di una “figura di diffrazione”, ecc.



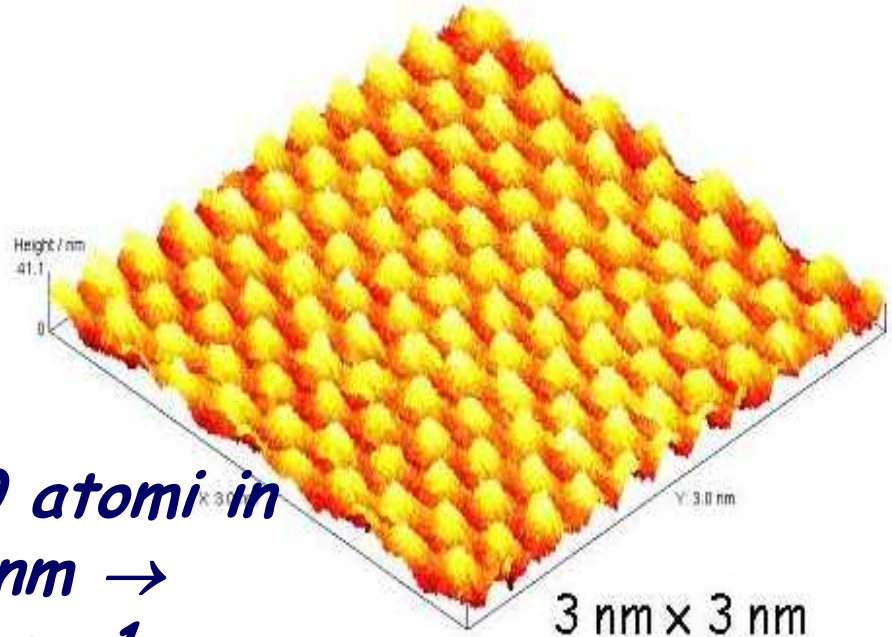
nell’esperimento di Davidson e Germer il rivelatore non rivela la frazione dell’onda “elettronica” che riesce a intercettare perché cade nel suo angolo solido, ma rivela sempre *l’intero elettrone* o non lo rivela per nulla

Dalla “fisica dei quanti” alla “meccanica quantistica”

- il modello ondulatorio di de Broglie: “l’onda di probabilità”
- l’equazione di Schrödinger (1926): la “funzione d’onda” e “l’ampiezza di probabilità”
- la meccanica delle matrici di Heisenberg (1925) e le relazioni di indeterminazione (1927)
- la scuola di Copenhagen e il dibattito sui fondamenti della meccanica quantistica

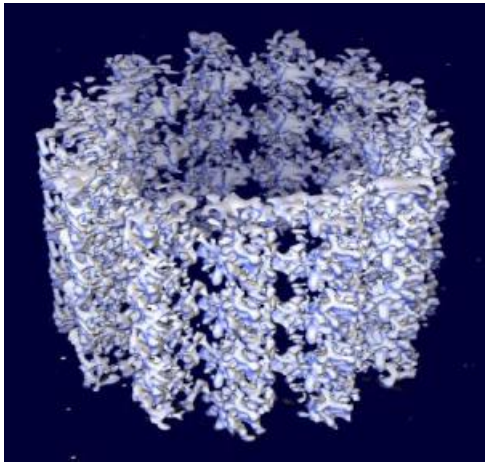
- è lecito tentare di “visualizzare” in qualche modo il comportamento di un corpo nelle condizioni in cui è richiesta la descrizione quantistica?
- il modello di Feynman va appunto in questa direzione: fu sviluppato (1985) per far capire agli “amici non fisici”, in modo semplificato ma ragionevolmente rigoroso, le peculiarità di un oggetto che si comporta in un "modo quanto-meccanico"
- oggi molte riserve sul linguaggio sono superate perché lo sviluppo del Microscopio a Forza Atomica (AFM) e altri strumenti simili ha permesso di ottenere immagini di oggetti a livello atomico

Immagini all'AFM: grafite e nanotubi di carbonio



3 nm x 3 nm
Atomi della grafite HOPG

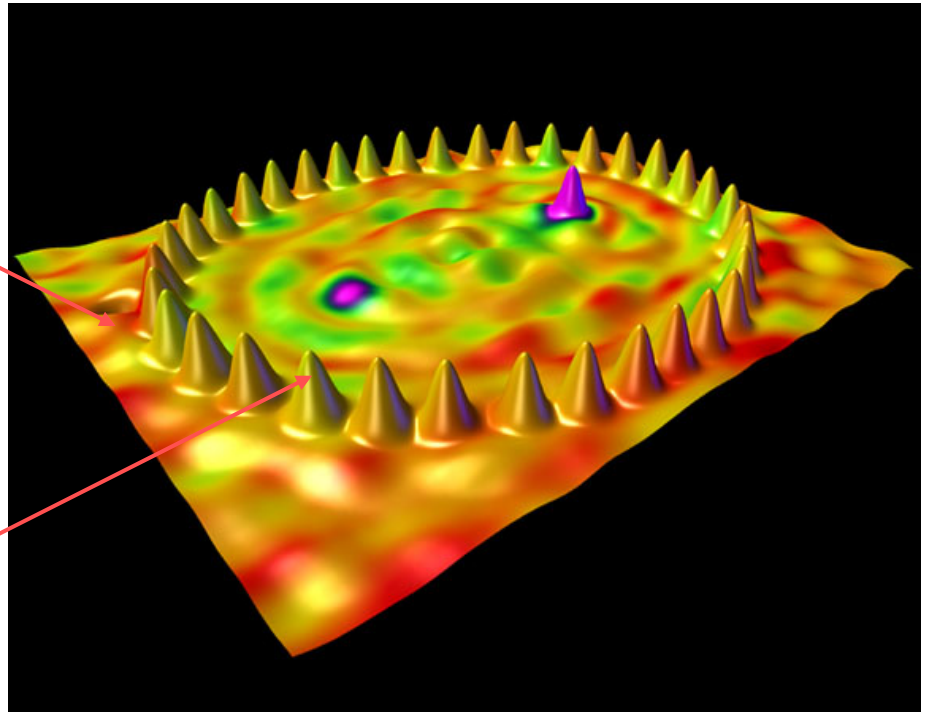
10 atomi in 3 nm → circa 1 atomo ogni 3 Å



Richard Errett Smalley (premio nobel per la chimica - 1996)

Un “miraggio” quantistico

"This STM image shows the direct observation of standing-wave patterns in the local density of states of the Cu(111) surface. These spatial oscillations are quantum-mechanical interference patterns caused by scattering of the two-dimensional electron gas off the Fe atoms and point defects."

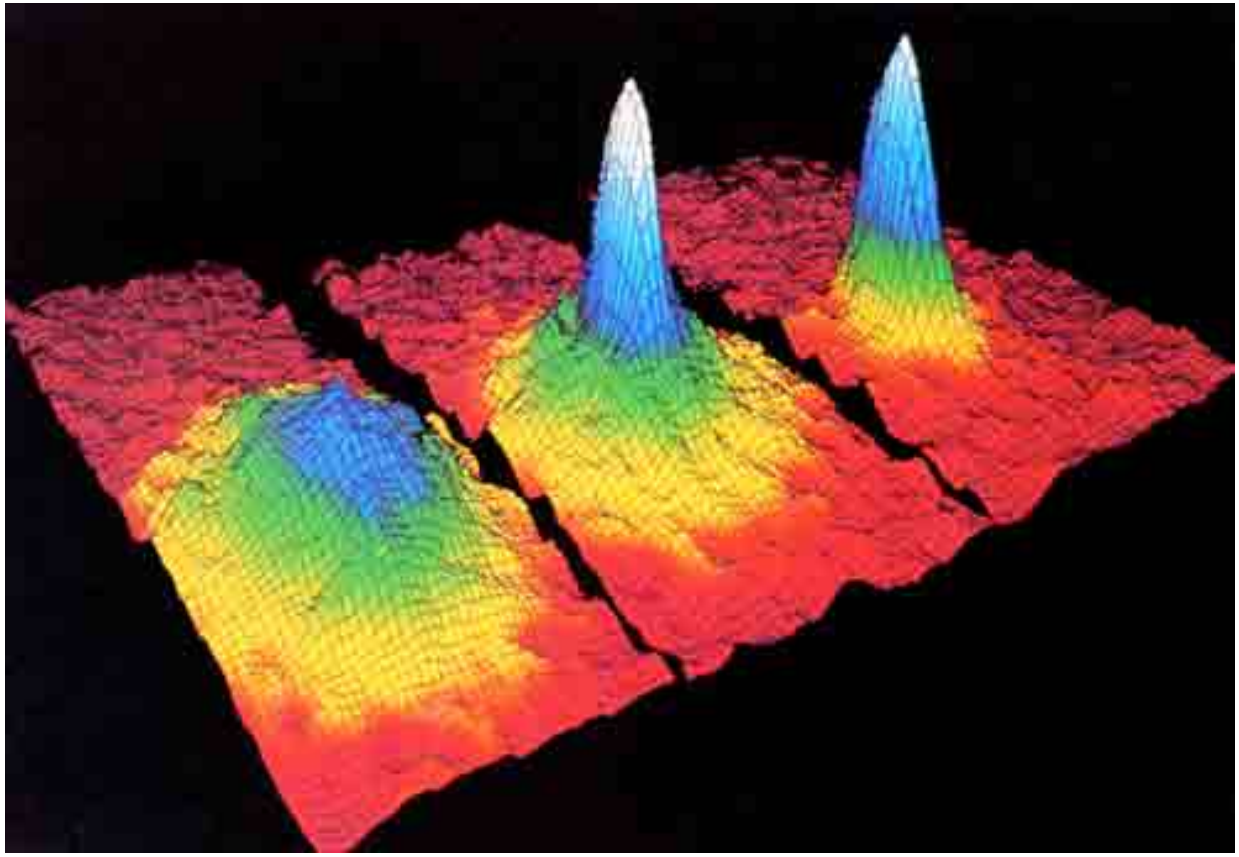


http://www.almaden.ibm.com/almaden/media/mirage5.html

La condensazione di Bose-Einstein

Un “superatomo” formato da circa 2000 atomi di rubidio raffreddati a temperature inferiori a 1 mK

E.Cornell e C.Wieman premio Nobel per la fisica 2001

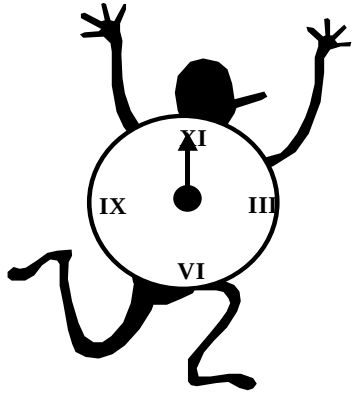


L'oggetto quantistico di Feynman: ipotesi e "regole"

Dato che le associazioni mentali, evocate dall'uso di certe parole come "onda" o "corpuscolo", sono fuorvianti, chiamiamo per brevità *oggetto quantistico* l'oggetto che si comporta in un "modo quanto-meccanico"

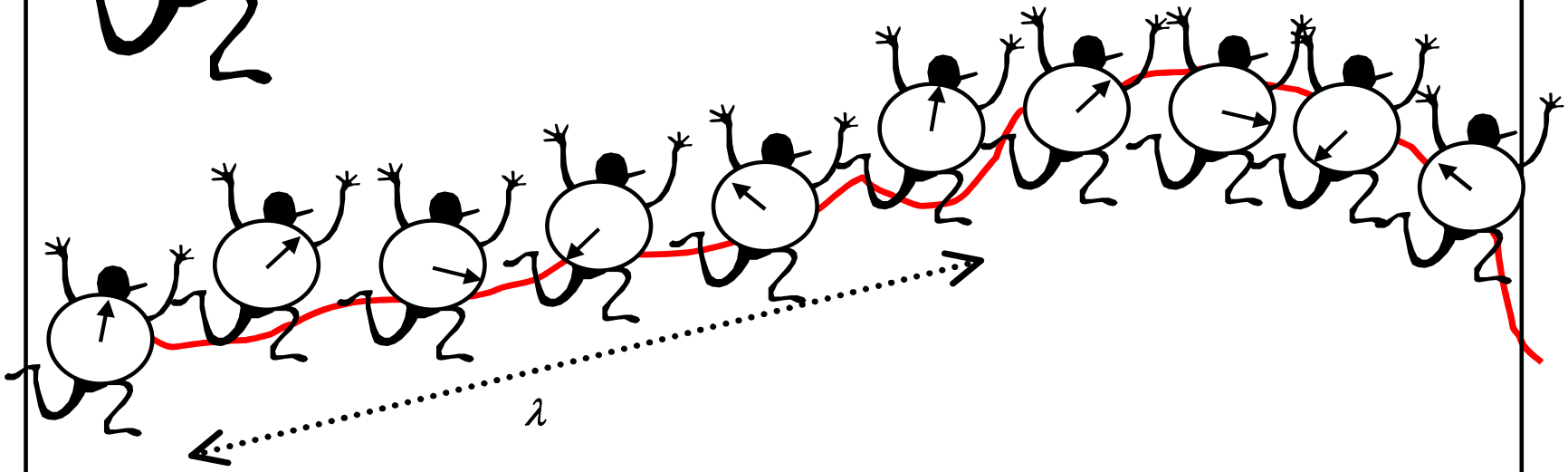
- ipotesi di partenza: la relazione di Planck $E = hf$
- l'*oggetto quantistico* è caratterizzato dall'*energia E* e dalla *frequenza f* , legata a *E* attraverso il *quanto di azione h,*
- ha quindi ha un suo *orologio interno* che gira con la frequenza *f*
- e una *fase* φ che varia periodicamente nel tempo con un periodo pari a $1/f$
- per andare da A a B, l'*oggetto quantistico* non percorre un dato cammino ma *una sovrapposizione di cammini possibili,*
- il risultato dell'osservazione in B dell'oggetto quantistico dipende dalla *sovrapposizione dei vettori di fase* in B (principio di sovrapposizione)

Il linguaggio dei “molti cammini”: frequenza, lunghezza d’onda, vettore di fase (fasore)

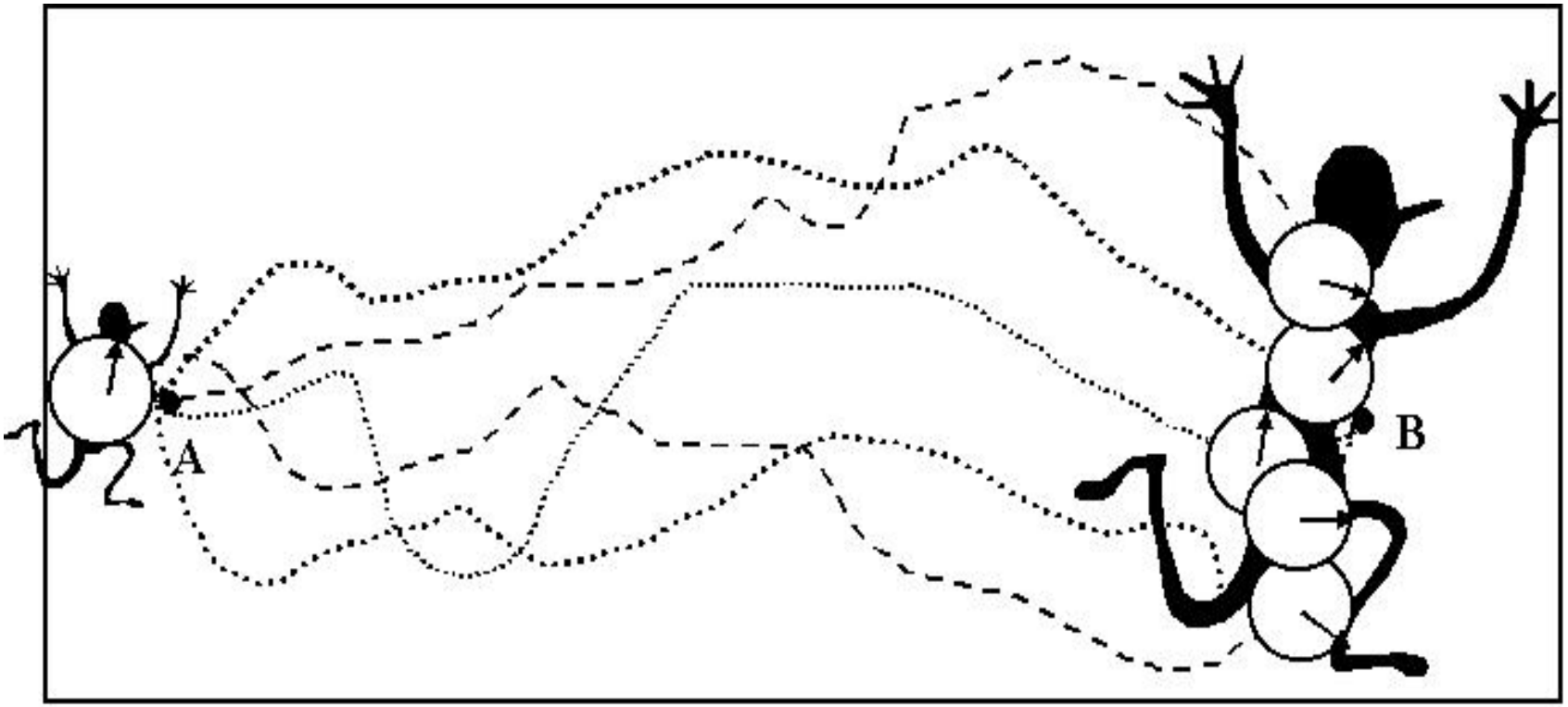


mentre il clock interno fa un giro completo

- *la fase varia di* 2π
- *l’oggetto quantistico percorre un cammino* λ
- *che dipende dalla quantità di moto p dell'oggetto e si calcola dalla relazione di de Broglie:* $\lambda = h / p$



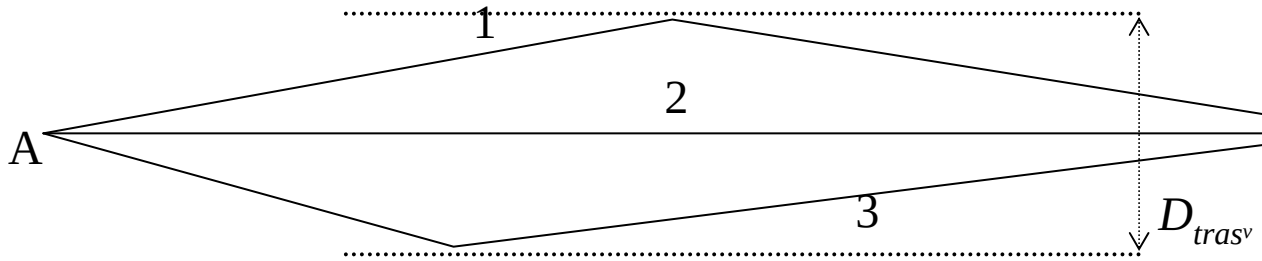
I diversi cammini

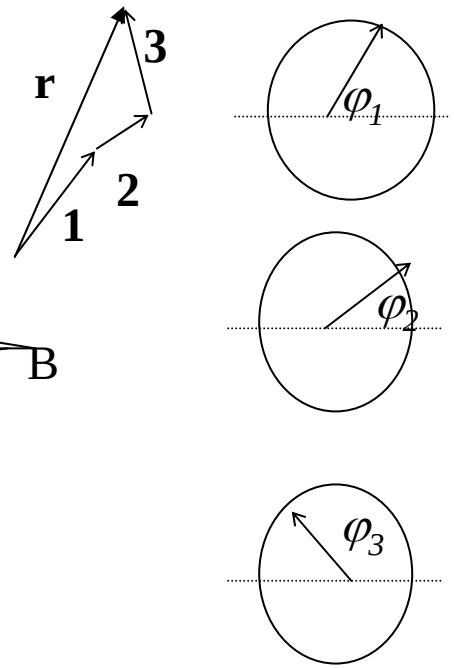


- per andare da A a B l'oggetto quantistico può percorrere cammini diversi, anzi percorre *tutti i possibili cammini*
- lungo ogni cammino il suo vettore di fase avanza per una fase proporzionale alla lunghezza del cammino
- è la *sovrapposizione dei vettori di fase* che determina la probabilità di rivelare l'oggetto in B (principio di sovrapposizione)

Un esempio: una fenditura che blocca tutti i percorsi al di fuori di una data finestra

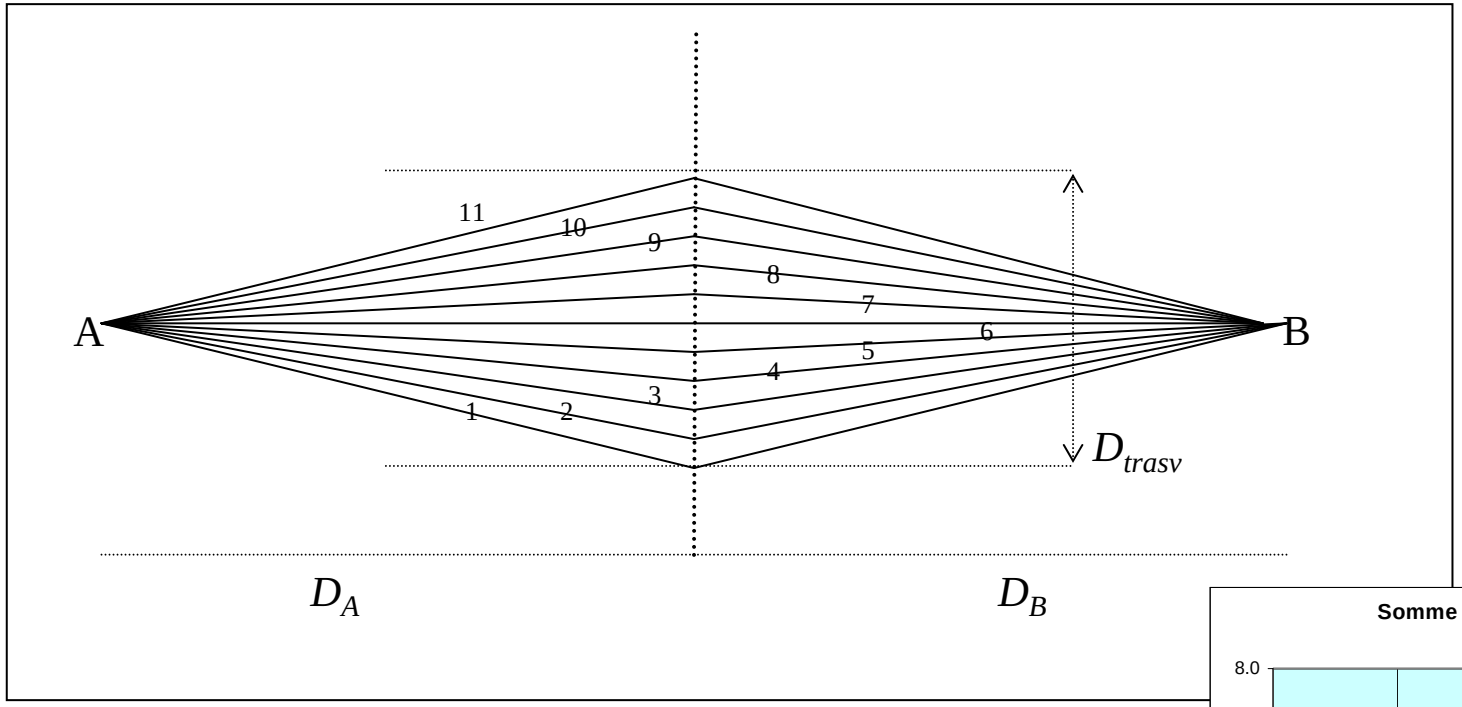
- 3 cammini fra A e B che stanno in una finestra di larghezza D_{trasv}
- 3 vettori di fase e la loro risultante ***r***



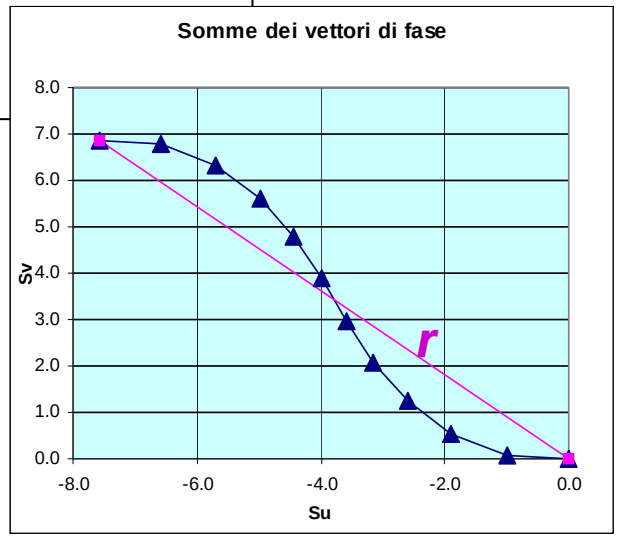


Attenzione: la risposta del rivelatore posto in B è sempre “sì” o “no”, ma la probabilità che sia “sì” è proporzionale a $\boldsymbol{r}^2$ (principio di sovrapposizione)

Un esempio di calcolo della somma sui molti cammini con un foglio “excel”

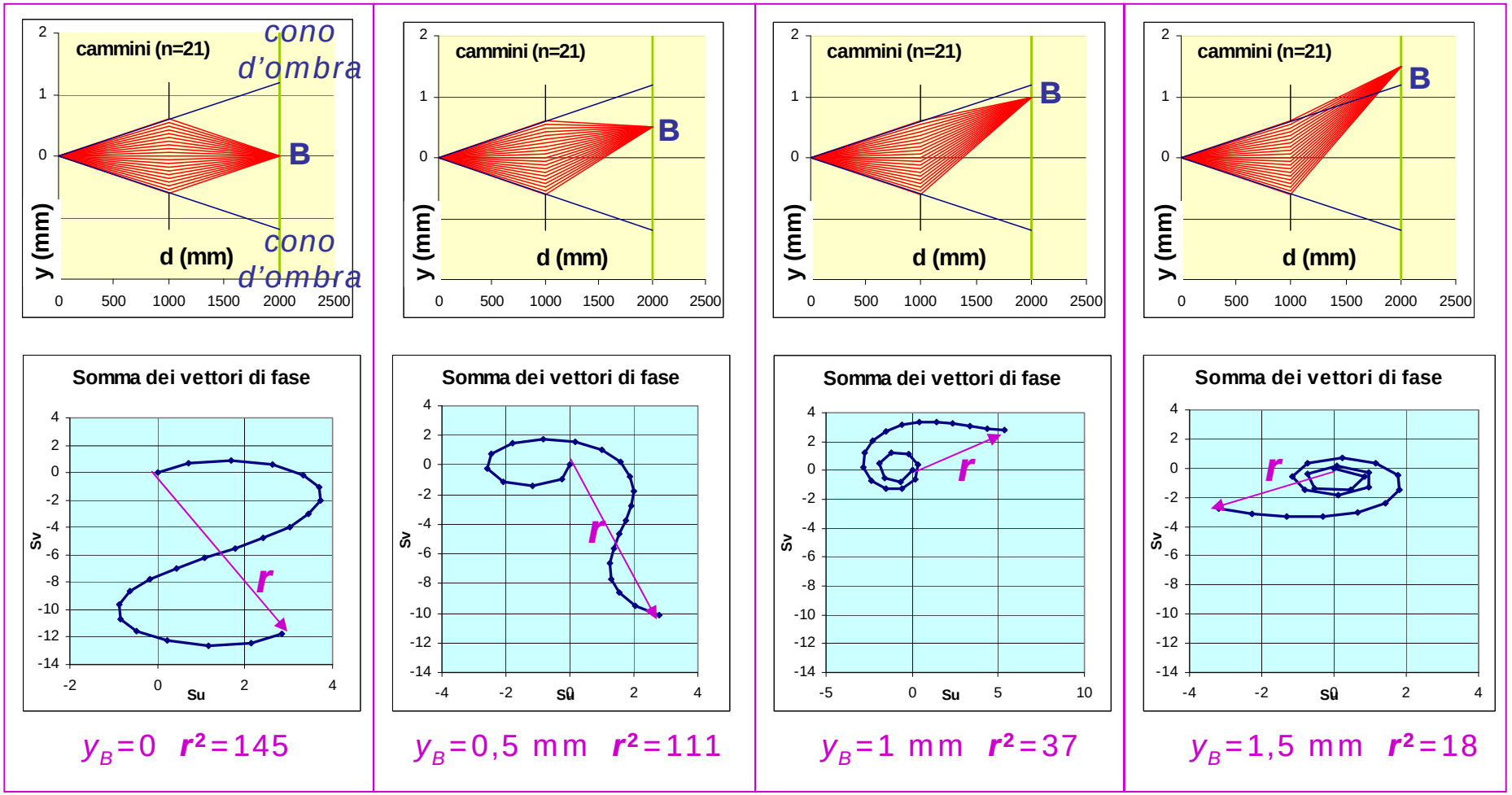


Parametri:
- D_A
- D_B
- D_{trasv}
- massa m
- energia E



- 11 cammini fra A e B
- con valori equispaziati dell’intersezione al centro della fenditura
- la probabilità di rivelare l’oggetto quantistico in B è proporzionale a r^2 per il principio di sovrapposizione

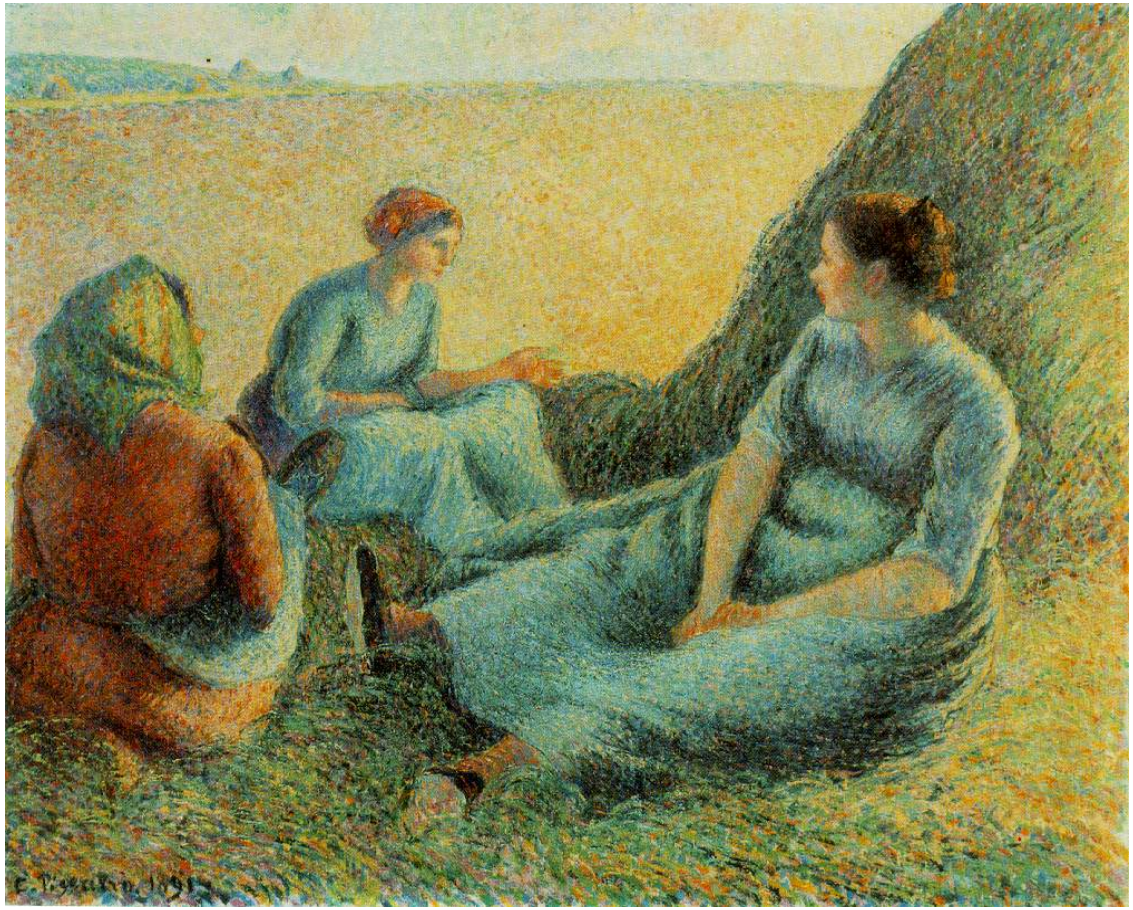
Il significato della sovrapposizione *r*



$y_B = 0$ $r^2 = 145$ | $y_B = 0{,}5$ mm $r^2 = 111$ | $y_B = 1$ mm $r^2 = 37$ | $y_B = 1{,}5$ mm $r^2 = 18$

- r^2 (e quindi la probabilità) diminuisce man mano che B si allontana dal centro della fenditura
- ma rimane >0 anche quando B entra nel cono d'ombra
- per un elettrone "classico" sarebbe stata =0 nel cono d'ombra e costante (=1) fuori

… e per concludere un'immagine "quantistica"



Pissarro
Haymakers rest

Il metodo della “somma sui molti cammini” di Feynman: il sito web

Panoramica
Motivazioni
L'oggetto quantistico
Ipotesi e regole
Impostazione del calcolo
- Tutorial →xls
- La probabilità quantistica →xls
- I cammini e gli ostacoli →xls
- Oscillazioni →xls
- Ombre →xls
- Diffrazione →xls
- Rifrazione →xls

Guida agli esperimenti
Letture
Sperimentazioni in classe
Download

Il sito web
http://www.iapht.unito.it/qm/