Principio di Doppler e condizione delle frequenze di Bohr[1]

Erwin Schrödinger

Se ci si rammenta di come nella teoria delle bande di Schwarzschild, Heurlinger, Lenz la frequenza della singola riga della banda si realizza mediante 1. il termine elettronico o di configurazione, 2. il termine di oscillazione nucleare, 3. il termine di rotazione, non si può fare a meno di proseguire tentativamente questa serie decrescente di grandezze e interrogarsi sul possibile significato di un 4. termine di traslazione. Nel caso che esso abbia in primo luogo un significato, esso - e naturalmente non solo per gli spettri di bande - può solo essere in rapporto con l'allargamento Doppler delle righe spettrali. Questa idea si accorda qualitativamente assai bene col fatto che - come Bohr[2] ha dimostrato in modo convincente - il moto di traslazione, come moto non periodico, non può essere quantizzato, ma presenta una sequenza continua di valori consentiti dell'energia; perciò esiste uno spettro *continuo* all'interno di una certa regione - nel caso presente la *riga spettrale allargata in modo finito.*

Ora Försterling[3] ha già cercato di giungere al principio di Doppler applicando la condizione delle frequenze di Bohr in un sistema di riferimento nel quale il baricentro della molecola abbia una velocità di traslazione. Il risultato era poco incoraggiante. Risultava infatti soltanto l'"effetto Doppler trasversale", ovvero, altrimenti detto, solo la nota piccola correzione relativistica al valore classico dell'effetto Doppler. In proposito W. Pauli jun. ha detto nella sua recensione (Physik. Ber. **2**, 489, 1921): "Va tuttavia osservato che la formula di trasformazione per l'energia emessa usata dall'autore è giusta solo quando ... *complessivamente non venga emesso alcun impulso lineare*".

Ma questo non è vero in nessun sistema di riferimento; piuttosto sulla base data da Einstein alla teoria della radiazione[4] il quanto emesso $h\nu$ porta con sè sempre - e in particolare in ogni sistema di riferimento - l'impulso lineare $h\nu/c$, il massimo che in linea di principio possa essere associato a questo ammontare di energia. Nel seguito dimostriamo che il "salto di velocità" prodotto in tal modo per la condizione delle frequenze di Bohr dà proprio lo spostamento Doppler, e con tutte le sottigliezze che sono richieste dalla teoria della relatività.

La situazione di gran lunga più facile salta agli occhi al meglio se si fanno i conti in modo approssimato e solo per il caso lineare, cioè se si fa coincidere la direzione dell'impulso emesso con la direzione della velocità del baricentro della molecola già presente prima. Sia questa v_1, e dopo l'emissione v_2; inoltre sia m la massa della molecola. Allora il "termine di traslazione" che dà lo spostamento Doppler è

$$d\nu = \frac{1}{h}\left(\frac{m}{2}v_1^2 - \frac{m}{2}v_2^2\right). \tag{1}$$

Per la legge dell'impulso è

$$mv_1 = \frac{h\nu}{c} + mv_2 \tag{2}$$

[1] Dopplerprinzip und Bohrsche Frequenzbedingung, Physik. Zeitschr. **23**, 301-303, 1922.
[2] N. Bohr, Kopenhagener Akademie 1918, seconda parte, p. 99.
[3] K. Försterling, Zeitschr. f. Phys. **3**, 404, 1920.
[4] A. Einstein, Zeitschr. f. Phys. **18**, 121, 1917.

ossia

$$m\,(v_1 - v_2) = \frac{h\nu}{c}.$$

Sostituendo nella (1) questo dà

$$\frac{d\nu}{\nu} = \frac{v_1 + v_2}{2c}. \tag{3}$$

Questa è la formula di Doppler elementare, soltanto che in essa come velocità della molecola interviene la media aritmetica delle velocità prima e dopo l'emissione. Un esame particolareggiato mostra che anche il segno è quello giusto: se la molecola si muove con velocità considerevole verso di me e mi lancia contro il suo quanto, sarà frenata dal rinculo, il termine di traslazione (1) è positivo, lo spostamento risulta verso il violetto.

Calcoleremo ora in modo più esatto. Ma manteniamo ancora provvisoriamente l'ipotesi semplificatrice che l'impulso emesso cada nella direzione della velocità originaria della molecola (oppure in quella opposta). Dobbiamo ora tener conto che anche la massa della molecola cambia durante l'emissione, e prima di tutto che il concetto "differenza d'energia di una determinata transizione" e quindi anche il concetto "frequenza non spostata" perdono il loro significato netto ed univoco, poichè la molecola prima e dopo l'emissione non si trova a riposo nello stesso *sistema di riferimento consentito* .

Dobbiamo assumere che ad un determinato stato stazionario corrisponda un'energia E esattamente determinata in un sistema di riferimento nel quale il baricentro della molecola è a riposo. Siano E_1 ed E_2 questi valori dell'energia per la transizione quantica considerata e siano questi proprio i *valori assoluti* dell'energia, di modo che

$$\frac{E_1}{c^2},\ \frac{E_2}{c^2}$$

siano le corrispondenti *masse a riposo*. Il sistema di riferimento nel quale prima e rispettivamente dopo il rinculo la molecola ha la velocità v_1 e rispettivamente v_2 lo chiameremo per brevità "lo spettrometro". Le energie riferite allo spettrometro sono quindi

$$\frac{E_1}{\sqrt{1 - v_1^2/c^2}},\ \frac{E_2}{\sqrt{1 - v_2^2/c^2}} \tag{4}$$

e la condizione delle frequenze di Bohr si scrive

$$h\nu = \frac{E_1}{\sqrt{1 - v_1^2/c^2}} - \frac{E_2}{\sqrt{1 - v_2^2/c^2}}. \tag{5}$$

Inoltre il bilancio dell'impulso rispetto allo spettrometro risulta

$$\frac{E_1 v_1}{c^2\sqrt{1 - v_1^2/c^2}} = \frac{E_2 v_2}{c^2\sqrt{1 - v_2^2/c^2}} + \frac{h\nu}{c}. \tag{6}$$

La (5) e la (6) servono al calcolo di ν e di v_2 per v_1 dato, inoltre E_1 ed E_2 devono naturalmente valere come quantità date - dalla natura della transizione quantica.

La dipendenza così fissata della frequenza ν dalle velocità v_1 e v_2 è *una generalizzazione naturale del principio di Doppler della teoria della relatività* - è del tutto comprensibile che la comparsa di due valori della velocità, che si scambiano proprio nell'istante dell'emissione, porti con sè una certa complicazione.

Per dimostrarlo eliminiamo dalle (5) e (6) la frequenza ν e troviamo facilmente

$$E_1\sqrt{\frac{c-v_1}{c+v_1}} = E_2\sqrt{\frac{c-v_2}{c+v_2}}. \tag{7}$$

Sia per brevità

$$\varphi_i = \sqrt{\frac{c-v_i}{c+v_i}},\ i=1,2. \tag{8}$$

Risulta perciò

$$E_1\varphi_1 = E_2\varphi_2. \tag{7a}$$

Inoltre si calcola facilmente

$$v_i = c\frac{1-\varphi_i^2}{1+\varphi_i^2},\ \sqrt{c^2-v_i^2} = \frac{2c\varphi_i}{1+\varphi_i^2}. \tag{9}$$

Sostituita nella (5) questa dà

$$h\nu = E_1\frac{1+\varphi_1^2}{2\varphi_1} - E_2\frac{1+\varphi_2^2}{2\varphi_2}$$

e per la (7a)

$$h\nu = \frac{1}{2}\left(\frac{E_1}{\varphi_1}-\frac{E_2}{\varphi_2}\right) = \frac{1}{2}\frac{E_1^2-E_2^2}{E_1\varphi_1} = \frac{1}{2}\frac{E_1^2-E_2^2}{E_2\varphi_2} \tag{5a}$$

ovvero formando la media geometrica

$$h\nu = \frac{1}{\sqrt{\varphi_1\varphi_2}}\frac{E_1^2-E_2^2}{2\sqrt{E_1E_2}}. \tag{10}$$

Introduciamo la frequenza ν^*

$$\nu^* = \frac{E_1^2-E_2^2}{2h\sqrt{E_1E_2}}, \tag{11}$$

il cui significato risulterà chiaro immediatamente, e badiamo al significato di φ secondo la (8); otteniamo

$$\nu^* = \nu\sqrt{\varphi_1\varphi_2} = \nu\sqrt{\frac{c-v_1}{\sqrt{c^2-v_1^2}}\cdot\frac{c-v_2}{\sqrt{c^2-v_2^2}}}. \tag{12}$$

Si confronti con questa la relazione che sussisterebbe secondo la teoria dell'effetto Doppler tra le frequenze ν^* e ν, qualora la prima fosse la frequenza a riposo, la seconda la frequenza in un sistema di riferimento nel quale la molecola volasse verso l'osservatore con la velocità v. Questa relazione si scriverebbe

$$\nu^* = \nu \frac{c - v}{\sqrt{c^2 - v^2}}. \tag{13}$$

La frequenza ν^* definita dalla (11) gioca quindi il ruolo della frequenza a riposo. Da essa si deriva secondo la (12) la frequenza osservata ν per mezzo di un fattore che è la media geometrica dei due fattori che secondo la teoria consueta sono costruiti dalle due velocità v_1 e v_2, prima e rispettivamente dopo l'atto di emissione.

La frequenza ν^* ha il semplice significato seguente: sarà $\nu = \nu^*$ per $v_2 = -v_1$. Ciò si verifica quando la velocità iniziale della molecola è esattamente uguale a quella che in senso inverso si ha dopo il rinculo.

Dobbiamo ancora liberarci dalla restrizione che l'impulso emesso sia parallelo alla direzione iniziale. Quindi ora v_1 e v_2 saranno i valori assoluti delle velocità iniziale e finale, ϑ_1 e rispettivamente ϑ_2 gli angoli che esse individuano con la direzione dell'impulso emesso - tutte le affermazioni si riferiscono allo "spettrometro". La condizione delle frequenze (5) rimane immutata, al posto della (6) intervengono le due equazioni per l'impulso

$$\frac{E_1 v_1 \cos\vartheta_1}{c^2\sqrt{1 - v_1^2/c^2}} = \frac{E_2 v_2 \cos\vartheta_2}{c^2\sqrt{1 - v_2^2/c^2}} + \frac{h\nu}{c}, \tag{6'}$$

$$\frac{E_1 v_1 \sin\vartheta_1}{c^2\sqrt{1 - v_1^2/c^2}} = \frac{E_2 v_2 \sin\vartheta_2}{c^2\sqrt{1 - v_2^2/c^2}} \tag{6''}$$

Dalla (5) e dalla (6') risulta

$$\frac{E_1\,(c - v_1\cos\vartheta_1)}{\sqrt{c^2 - v_1^2}} = \frac{E_2\,(c - v_2\cos\vartheta_2)}{\sqrt{c^2 - v_2^2}}. \tag{7'}$$

Dalla (6") moltiplicando per c

$$\frac{E_1 v_1 \sin\vartheta_1}{\sqrt{c^2 - v_1^2}} = \frac{E_2 v_2 \sin\vartheta_2}{\sqrt{c^2 - v_2^2}}. \tag{7''}$$

Poniamo per brevità

$$\varphi_i = \frac{c - v_i\cos\vartheta_i}{\sqrt{c^2 - v_i^2}},\ \psi_i = \frac{v_i \sin\vartheta_i}{\sqrt{c^2 - v_i^2}},\ i = 1, 2. \tag{8'}$$

Sarà allora

$$E_1\varphi_1 = E_2\varphi_2,\ E_1\psi_1 = E_2\psi_2 \tag{7a'}$$

e si trova

$$\sqrt{c^2 - v_i^2} = \frac{2c\varphi_i}{1 + \varphi_i^2 + \psi_i^2}. \tag{9'}$$

Questa, sostituita nella (5) dà

$$h\nu = E_1 \frac{1+\varphi_1^2+\psi_1^2}{2\varphi_1} - E_2 \frac{1+\varphi_2^2+\psi_2^2}{2\varphi_2}$$

e per la (7a')

$$h\nu = \frac{1}{2}\left(\frac{E_1}{\varphi_1} - \frac{E_2}{\varphi_2}\right). \tag{5a'}$$

Questa coincide formalmente con la (5a), solo con significato mutato di φ_i secondo la (8'). Si ottiene ora al posto della (12)

$$\nu^* = \nu \sqrt{\frac{c - v_1 \cos\vartheta_1}{\sqrt{c^2 - v_1^2}} \cdot \frac{c - v_2 \cos\vartheta_2}{\sqrt{c^2 - v_2^2}}}. \tag{12'}$$

ν^* è la stessa frequenza di prima. Riguardo alla formula (12') si devono fare le stesse osservazioni come prima per la (12). Essa si differenzia dalla consueta formula di Doppler relativistica solo per il fatto che il fattore di ν è la media geometrica di quei due valori che si avrebbero in quella formula per la velocità iniziale e finale.

La velocità acquistata in seguito al rinculo è in generale assai piccola rispetto a quella termica, cioè la variazione di velocità dovuta all'emissione è relativamente assai piccola. Altrimenti sarebbe di notevole interesse verificare l'interpretazione quantistica dell'effetto Doppler qui esposta, come pure l'assai controversa presenza di un rinculo, così difficilmente conciliabile con l'ottica classica, mediante la larghezza sperimentale di righe spettrali adatte - se cioè essa corrisponde all'agitazione termica o è un po' più grande. Ma, come detto, anche sotto le condizioni più favorevoli - quando si faccia assorbire ultravioletto di Millikan estremo ($\lambda = 200 \mathring{A}$) in un gas a bassa temperatura - la variazione della velocità per una molecola di gas ammonta tuttavia solo a pochi per mille della velocità termica media.

Zurigo, 7 giugno 1922.

(Ricevuto il 7 giugno 1922)