Il significato fisico dei postulati della relatività, la nuova teoria della relatività di A. Einstein e la sua originaria[1]

Erich Kretschmann

Sommario: Introduzione. Oggetto e risultati del lavoro. - I. Il significato fisico dei postulati della relatività. - II. La misurabilità in linea di principio delle componenti $g_{\mu\nu}$ del potenziale gravitazionale di Einstein. - III. Restrizione della covarianza delle equazioni di Einstein. 1. Utilizzo delle "direzioni degli assi" del tensore di curvatura come direzioni delle coordinate. 2. L'introduzione di invarianti assoluti come coordinate spaziotemporali. 3. Determinazione più completa del sistema di riferimento mediante condizioni imposte alle $g_{\mu\nu}$. - IV. Determinazione geometrica del postulato della relatività soddisfatto fisicamente dalla nuova teoria della relatività di Einstein e confronto con la teoria della relatività originaria. - Conclusione: la ragione per la quale il postulato della relatività generale non può essere soddisfatto.

Introduzione.

Le forme nelle quali diversi autori hanno espresso il postulato della teoria della relatività di Einstein-Lorentz[2], e in particolare di recente Einstein il suo postulato di relatività generale[3], consentono l'idea o addirittura, per Einstein, la esigono, secondo la quale un sistema di leggi fisiche soddisfa un postulato di relatività quando le equazioni mediante le quali è rappresentato sono covarianti rispetto al gruppo di trasformazioni delle coordinate spaziotemporali associato al postulato[4]. Se si riconosce per giusta quest'idea e si tiene presente che tutte le osservazioni fisiche consistono in ultima analisi nella determinazione di relazioni puramente topologiche [coincidenze[5]] tra oggetti della percezione spaziotemporali e che per questo immediatamente nessun sistema di coordinate è privilegiato rispetto a qualunque altro[6], si è costretti alla conclusione che ogni teoria fisica, senza mutamento del suo - qualsivoglia - contenuto verificabile con osservazioni, può essere portata in accordo con ogni qualsivoglia postulato di relatività - anche il più generale - mediante una trasformazione puramente matematica, e associata alle difficoltà matematiche più gravi[7], delle equazioni che la rappresentano.

Dev'esser tuttavia possibile conferire ai postulati di relatività anche un altro significato, non solo matematico e formale. Infatti solo con l'esistenza di questo si

[1]Über den physikalischen Sinn der Relativitätspostulate, A. Einsteins neue und seine ursprüngliche Relativitätstheorie, Annalen der Physik **53**, 575-614 (1917).

[2]Vedi per esempio H. Minkowski: "Spazio e tempo". B.G. Teubner 1909. p. 4 - M. v. Laue: "Il principio di relatività". Vieweg 1911. p. 33, §6. M. Abraham: "Teoria dell'elettricità". B.G. Teubner 1908. p. 379 e 380.

[3]A. Einstein, Ann. d. Phys. **49**, p. 776. 1916.

[4]Ho usato ancora nel senso di questa interpretazione le espressioni "postulato di relatività" e "teoria della relatività" nel mio lavoro "Sulla determinabilità in linea di principio... ", Ann. d. Phys. **48**, p. 907-982; vedi loc. cit. p. 910, nota 5. In pratica tuttavia questo non ha evidentemente alcuna importanza per l'oggetto trattato là.

[5]A. Einstein, l.c.

[6]Su questo punto inoltre: E. Kretschmann, l.c. p. 914 - 924.

[7]vedi G. Ricci e T. Levi-Cività: "Methodes de calcul differentiel absolu et leur applications". Math. Ann. **54**. p. 125. 1901.

può per esempio chiarire l'impossibilità lampante e a tutti nota di introdurre nella teoria della relatività originaria di Einstein il concetto di corpo rigido, che può essere determinato nel modo più semplice mediante puri contrassegni topologici[8].

Nella prima parte del presente lavoro si cerca con un esempio di spiegare questo significato fisico dei postulati della relatività mediante considerazioni geometriche tetradimensionali, e di far valere un postulato di relatività qualsiasi in una formulazione valida in generale. L'applicazione nei paragrafi seguenti del concetto di relatività ottenuto - essenzialmente diverso da quello di Einstein - alla nuova teoria della gravitazione di Einstein porta al risultato (§25) che per il suo contenuto fisico questa teoria va considerata come una teoria perfettamente assoluta, che di fatto non soddisfa alcun postulato di relatività. Di contro l'originaria teoria della relatività di Einstein risulta quella più ampia pensabile sotto certe ipotesi generali (§26).

In conclusione si mostra che il postulato della relatività generale potrebbe essere soddisfatto fisicamente nel senso dell'anzidetta interpretazione solo da leggi naturali la cui forma generale - incondizionata, affermativa - fosse nel modo più fondamentale diversa da quella - condizionata, cioè negativa - delle leggi proposte finora.

Come ben si comprende da quanto detto, la contrapposizione nella quale i risultati del presente lavoro stanno rispetto ai punti di vista espressi da Einstein nelle sue ricerche sulla teoria della gravitazione deriva solo dalla diversità, a mio giudizio significativa, nell'interpretazione e nella definizione concettuale dei postulati di relatività. Questa contrapposizione riguarda solo la posizione della teoria della relatività "generale" di Einstein e di quella sua originaria nella serie delle teorie della relatività pensabili. La questione dell'effettiva validità delle nuove leggi di natura proposte da Einstein rimane invece del tutto intoccata.

I. Il significato fisico dei postulati della relatività.

§1. Il suo postulato della covarianza delle equazioni fisiche per trasformazioni di coordinate continue arbitrarie Einstein[9] lo fonda essenzialmente sul fatto che tutta l'esperienza fisica consiste in ultima analisi nell'osservazione di pure relazioni topologiche ovvero "coincidenze" tra oggetti della percezione spaziotemporali. Quindi nell'esperienza non è data alcuna base per preferire rispetto a tutti gli altri un qualche sistema di riferimento per lo spazio ed il tempo come il solo legittimo. Perciò per esempio i sistemi di riferimento $\Sigma(x_1 = x,\, x_2 = y,\, x_3 = z,\, x_4 = ict)$, nei quali è soddisfatta le nota equazione di propagazione della luce della teoria della relatività di Einstein originaria

$$(x_1 - x_1^0)^2 + \cdots + (x_4 - x_4^0)^2 = 0, \tag{1}$$

non hanno di fatto alcun privilegio rispetto a un qualche altro sistema di riferimento. Perde per questo la teoria della relatività originaria come tale ogni contenuto fisico? Non mi pare affatto che questo sia il caso.

§2. Secondo la teoria della relatività originaria, per ogni sistema di riferimento scelto a piacere se ne ha una serie completamente determinata di ugualmente legittimi, nei quali le leggi fisiche assumono la stessa forma matematica. I

[8] Vedi E. Kretschmannn, l.c. p. 967 e 968 §55.

[9] A. Einstein: "Die Grundlagen der allgemeinen Relativitätstheorie", Ann. d. Phys. **49**. p. 769-822. 1916; vedi p. 776 e 777.

sistemi di riferimento rettilinei ortogonali, nei quali l'equazione di propagazione della luce ha la forma (1) risultano l'uno dall'altro mediante le trasformazioni del gruppo che si ottiene quando si compone il gruppo di Lorentz con il gruppo delle traslazioni $x_1' = x_1 + \alpha_1, \dots x_4' = x_4 + \alpha_4$, e con il gruppo delle dilatazioni uniformi $x_1' = \lambda \cdot x_1, \dots x_4' = \lambda \cdot x_4$. Se si passa ad altri sistemi di riferimento, per esempio a coordinate polari, muta anche la forma dell'equazione (1) e allo stesso tempo la forma delle trasformazioni "legittime", che la lasciano invariante.

Ma il gruppo che di volta in volta comprende le trasformazioni "legittime" rimane sempre "simile" a quello originario. Esso ha in comune con quello tutte le proprietà indipendenti dalla scelta del sistema di riferimento (per esempio il numero dei parametri eccetera) che sono le sole essenziali dal punto di vista della teoria dei gruppi, di modo che secondo Lie gruppi simili qualsiansi vanno riassunti sotto l'idea di un gruppo (invariante). Con l'utilizzo di questa idea di gruppo invariante si ottiene per ora per un postulato di relatività (speciale) qualsivoglia la seguente espressione generale: le leggi fisiche sono - ugualmente valide, in qualunque sistema di coordinate siano scritte - covarianti rispetto al gruppo G di trasformazioni (invariante).

Qui per G s'ha da intendere un gruppo associato univocamente al postulato di relatività considerato. Pertanto anche per postulati di relatività che non richiedono la covarianza generale si è trovata un'espressione totalmente indipendente dalla scelta del sistema di riferimento.

§3. Ciononostante il contenuto fisico di un postulato di relatività che corrisponde ad un gruppo invariante G nella forma data non è completamente chiaro. Lo si riconosce facilmente con l'esempio dell'equazione della luce (1). È infatti facilissimo portare questa equazione, senza mutare minimamente il suo contenuto fisico, in una forma invariante rispetto a trasformazioni di coordinate del tutto arbitrarie. Basta introdurre il modo di espressione della teoria della relatività generale e al posto dell'equazione (1) scrivere[10]:

$$(2) \quad \delta \int ds = 0, \; ds^2 \equiv \sum_{\mu\nu} g_{\mu\nu} \cdot dx_\mu \cdot dx_\nu = 0, \; (\lambda\nu, \mu\tau) \equiv 0 \; (\lambda, \nu, \mu, \tau = 1 \dots 4).$$

Qui ds indica l'elemento di linea invariante e $(\lambda\nu, \mu\tau)$ le componenti del tensore di curvatura riemanniano della varietà spazio - temporale[11], per l'annullarsi identico delle quali è noto che le leggi della nuova teoria della relatività di Einstein vanno a coincidere con quelle dell'originaria.

Secondo l'interpretazione generale prima data di un postulato di relatività, le stesse leggi di propagazione della luce dovrebbero quindi soddisfare, a seconda della forma di rappresentazione, una volta - essendo rappresentate dalla (2) - al postulato di relatività più generale, e nell'altra forma, (1), soltanto a un postulato di relatività speciale. Lo stesso varrebbe per tutte le leggi fisiche. Allora secondo le ricerche di Ricci e Levi-Cività[12] non vi dovrebbe essere alcun dubbio che ogni sistema di equazioni fisico senza variazione del suo contenuto dimostrabile con le osservazioni

[10] vedi per esempio A: Einstein e M. Grossmann: "Entwurf einer verallgemeinerten Relativitätstheorie . . . ". B.G. Teubner 1913. p. 6 §2 e p. 8 §3.

[11] S. Christoffel, Crelles Journal **70**, p. 54.

[12] G. Ricci et T. Levi-Cività: "Méthodes de calcul différentiel absolu et leurs applications". Math. Ann. **54**. p. 125. 1901.

può essere portato in una forma generalmente covariante. Ciò risulta chiaro a priori, quando si faccia presente che a rigore sono osservabili solo i puri fatti topologici degli eventi naturali ovvero, secondo Einstein, le coincidenze.

Se l'affermazione che un sistema di equazioni soddisfa un postulato di relatività speciale e non uno più esteso deve possedere un significato fisico effettivo e non solo uno formale e matematico, l'idea generale di un postulato di relatività deve essere definita in modo tale che secondo essa per ogni dato sistema di leggi fisiche possa essere determinato uno ed un solo postulato di relatività - rispettivamente il gruppo invariante che vi corrisponde - come il più esteso, al quale le leggi soddisfanno, solo in base al suo contenuto topologico, indipendentemente dalla forma di rappresentazione scelta.

§4. Che e come ciò sia possibile, lo si riconosce nel modo più semplice con la legge della propagazione della luce della teoria della relatività originaria. Assumeremo riguardo a questa, come sempre nel seguito con i sistemi di leggi di volta in volta considerati, che il suo contenuto osservabile sia verificato nella realtà. Se si parte di nuovo dalla forma (1) della legge, si vede immediatamente che tra i sistemi di riferimento della realtà, che vanno pensati dotati di regoli e di segnali orari perfettamente precisi, quelli, nei quali l'equazione (1) è ovunque e sempre soddisfatta si distinguono da tutti quelli, nei quali ciò non avviene, per i risultati dell'osservazione che bisogna aspettarsi in essi in linea di principio, cioè a prescindere da tutte le difficoltà tecniche. Allora, in ognuno di questi ultimi, almeno uno tra tutti gli impulsi luminosi teoricamente possibili, che prima o poi, qua o là , attraversano l'etere, deve esibire una linea d'universo, della quale almeno un paio di punti abbia differenze delle coordinate che non stanno nella relazione prescritta dalla (1). E si presuppone che i regoli e gli orologi che realizzano il sistema di riferimento in questione, in modo che si possano leggere le coordinate del punto d'universo che ad esse corrisponde, siano in posizione al momento giusto, cosa sempre possibile in linea di principio, cosicché ogni deviazione può essere determinata mediante pure letture di scale, quindi con osservazioni puramente topologiche, e il sistema di riferimento, nel quale essa avviene, può essere scartato come inammissibile secondo la (1). Come per l'equazione (1) vi sono evidentemente per tutte le equazioni o equazioni differenziali tra le coordinate delle cose accertabili materialmente. Le derivate rispetto alle coordinate possono invero essere misurate solo approssimativamente anche con strumenti di misura precisi; ma poiché la precisione in linea di principio non è limitata, anche in questo caso la scoperta di ogni difetto del sistema di riferimento è assicurata[13].

§5. L'equazione (1) e le equazioni che si ottengono da questa per trasformazioni di coordinate indicano quindi, ognuna individualmente, la serie di sistemi di riferimento, nei quali essa è soddisfatta, e quindi tutte insieme il gruppo invariante, le trasformazioni di sistema di riferimento del quale legano tra loro gli elementi di una serie. Ma se si scrive la stessa legge di propagazione della luce in una forma diversa da tutte queste, il gruppo individuato da questa e dalle sue trasformate sarà un altro. Per esempio se al posto della (1) si scrive:

$$(x_1 - x_1^0)^2 + \cdots + (x_3 - x_3^0)^2 + c^2(x_4 - x_4^0)^2 = 0,\ c = \text{cost.} \tag{3}$$

[13] La dimostrazione opposta, che un sistema di riferimento sia compatibile con un dato sistema di equazioni, ovvero che lo siano le letture degli strumenti di misura corrispondenti, a prescindere da casi particolari si può fornire solo mediante una serie infinita di misure. (si veda E. Kretschmann, Ann. d. Phys. **48**, p. 943-959.)

questa rappresentazione, oltre alle trasformazioni del gruppo di (1), a causa dell'indeterminatezza di c consente ora il gruppo di trasformazioni

$$x_4' = \mu \cdot x_4,\ x_1' = x_1,\ x_2' = x_2,\ x_3' = x_3.$$

Il gruppo corrispondente alla (2) comprende tutte le trasformazioni continue, e se si aggiungono alla (2) le condizioni accessorie $g_{\mu\nu} = 0$ per $\mu \neq \nu$, si ottiene un sistema di equazioni fisicamente equivalente a quello di prima, che è invariante rispetto a tutte le trasformazioni

$$x_1' = f_1(x_1 \ldots x_4) \ldots x_4' = f_4(x_1 \ldots x_4),$$

che soddisfano le condizioni

$$g_{\mu\nu} = 0 = \sum_{\alpha\beta} \frac{\partial x_\alpha'}{\partial x_\mu} \frac{\partial x_\beta'}{\partial x_\nu} g_{\alpha\beta}' = \sum_{\alpha} \frac{\partial x_\alpha'}{\partial x_\mu} \frac{\partial x_\alpha'}{\partial x_\nu} g_{\alpha\alpha}'$$

$$(\mu, \nu, \alpha, \beta = 1 \ldots 4);\ \mu \neq \nu$$

e che di nuovo costituiscono un altro gruppo. Questi esempi si possono moltiplicare a piacere.

Si cerca tuttavia un gruppo di trasformazioni che sia determinato solo dal contenuto fisico delle leggi indipendentemente dalla forma d'espressione scelta.

§6. Si arriva direttamente ad un gruppo siffatto se per ogni sistema di equazioni si pensano tracciate nella varietà delle coordinate tutte le linee d'universo di impulsi luminosi compatibili con quel sistema e si confrontano tra loro le immagini geometriche tetradimensionali che così si formano.

Tutte le linee d'universo della luce possibili secondo la (1) si ottengono disegnando da ogni punto d'universo $x_1^0 \ldots x_4^0$ tutte le parti del cono di luce del futuro con l'equazione (1)[14]. Ogni equazione che si ottiene per trasformazione dalla (1) rappresenta parimenti una serie infinita di linee d'universo della luce, che differisce in generale da quella di prima nei rapporti metrici, ma che in tutte le proprietà topologiche indipendenti da questi è del tutto uguale ad essa. Secondo l'equazione (3) invece da ogni punto d'universo escono al posto di un cono del futuro un'infinità di questi, ossia uno per ogni valore della costante c lasciata indeterminata. Nella (2), e nella forma di rappresentazione che ne risulta con la condizione aggiuntiva $g_{\mu\nu} = 0$ per $\mu \neq \nu$, compaiono anche delle funzioni indeterminate - le dieci $g_{\mu\nu}$ ovvero le quattro $g_{\mu\mu}$ - al posto della costante indeterminata c, e la molteplicità del cono di luce di ugual origine sarà corrispondentemente maggiore. Il significato di queste equazioni non è naturalmente che possano davvero uscire dallo stesso punto dell'etere allo stesso tempo anche solo due onde di luce estese spazialmente e individuanti una superficie chiusa. Piuttosto in ogni caso la singola serie di linee d'universo, che si ottiene con una determinazione completa (numerica) delle incognite, cioè delle funzioni univoche $g_{\mu\nu}$ delle coordinate ovvero della costante c, sarà una immagine completa dei cammini della luce insieme e reciprocamente possibili nella realtà. Ciascuna di queste immagini singole naturalmente coincide completamente in senso topologico con la serie di linee d'universo determinato dalla (1),

[14]Per quanto riguarda la coordinata immaginaria x_4 si deve pensare di prendere il valore assoluto.

e l'immagine complessiva dei tre diversi sistemi di equazioni è un riassunto delle infinite immagini date dalla (1) e dalle equazioni originate dalla (1) per trasformazione. Per la rappresentazione di ciò che è possibile in realtà secondo le leggi considerate basta, come già detto, una sola di queste immagini. Ogni altra è dal punto di vista fisico completamente superflua[15].

Ma d'altra parte la singola serie di linee d'universo che è rappresentata dalla (1) o dall'equazione ottenuta dalla (1) per trasformazione non si può in generale ridurre senza con ciò introdurre una nuova legge della propagazione della luce che oltrepassa la (1). Tra i fenomeni luminosi possibili secondo la (1) non ne esiste evidentemente alcuno che da solo permetta all'equazione (1) di escludere una qualche altra equazione come incompatibile con essa. Ne segue che ogni sistema di equazioni, che esprime in qualche modo le leggi contenute nella (1) e solo queste, deve per lo meno rappresentare completamente una serie di linee d'universo che corrispondono alla (1) e alle sue forme trasformate come immagine dei cammini della luce possibili e mutuamente compatibili, e ciò deve verificarsi anche in tutti i sistemi di riferimento nei quali vale questa immagine, ossia la corrispondente equazione, ottenuta per trasformazione dalla (1). Il gruppo di trasformazioni invariante, che collega questi sistemi di riferimento, è di conseguenza il più ristretto che si può distinguere fisicamente da tutti gli altri mediante una qualsiasi forma di rappresentazione delle leggi contenute nella (1). Esso è, come richiesto, determinato solamente dal contenuto fisico delle leggi indipendentemente dal modo della loro rappresentazione ed è, secondo quanto dimostrato, evidentemente il solo gruppo per cui ciò vale. Geometricamente il gruppo è indicato come il gruppo di trasformazioni che riportano in sé la serie di tutte le linee d'universo della luce che secondo le leggi sono possibili insieme nella stessa varietà coordinata. Il postulato di relatività che corrisponde a questo gruppo, e nessun altro, è soddisfatto quindi in senso fisico da ciascuno dei sistemi di equazioni (1), (2) e (3) equivalenti per contenuto.

§7. La definizione data in precedenza del postulato di relatività soddisfatto dalle leggi di propagazione della luce considerate si può estendere senz'altro a sistemi qualsiansi di leggi fisiche. Si deve solo, per tener conto di tutte le possibilità, considerare anche il caso che l'estensione del gruppo di trasformazioni fisicamente assegnato dipenda anche da circostanze fisiche non determinate da leggi, "casuali"[16]. Poiché (in generale) può evidentemente risultare soddisfatto soltanto un postulato di relatività, basta quello indipendente dalle circostanze che in linea di principio si possono modificare arbitrariamente.

Se si chiama "fisicamente legittimo"[17] un sistema di riferimento per una data forma di rappresentazione di un sistema di leggi, quando risultano compatibili con esso tutte le osservazioni che non sono escluse dal sistema di leggi dato, e che

[15]Il riassunto di un'intera serie di immagini fisicamente equivalenti in una forma di rappresentazione può tuttavia in certe situazioni offrire dei vantaggi matematici (vedi nel seguito il §24).

[16]Un caso siffatto si verifica nella teoria della gravitazione di Einstein, quando per certi comportamenti singolari delle proprietà di curvatura della varietà spaziotemporale, che secondo Einstein dipendono proprio dalla distribuzione e dal moto accidentali della materia, il gruppo fisicamente individuato permette eccezionalmente più trasformazioni del solito; vedi §25.

[17]Non occorre che le trasformazioni tra i sistemi di riferimento "fisicamente legittimi" lascino in ogni caso il corrispondente sistema di equazioni invariante anche dal punto di vista matematico. Per esempio la nota forma $\mathfrak{Div}\,\mathfrak{T} = 0$ della legge di conservazione dell'energia e dell'impulso rimane invariante solo rispetto a trasformazioni lineari, senza che a causa di essa sola con osservazioni fisiche si possa riconoscere un qualche sistema di riferimento come fisicamente illegittimo. (vedi E. Kretschmann, Ann. d. Phys. **48**, p. 932. 1915.)

quindi sono da considerarsi come possibili in linea di principio[18], si dà la seguente proposizione generale:

Un sistema di leggi fisiche soddisfa allora e solo allora il postulato di relatività di un gruppo di trasformazioni invariante G quando per ogni rappresentazione formata a piacere di tutte le leggi del sistema, e solo di quelle leggi, i sistemi di riferimento fisicamente legittimi per la rappresentazione - e quindi distinguibili in linea di principio da tutti gli altri mediante l'osservazione - in tutte le situazioni fisicamente possibili secondo le leggi costituiscono un insieme così grande che l'insieme delle trasformazioni ad essi associate contiene in qualche forma il gruppo G come parte, o è uguale ad esso.

Quindi la validità o meno di un postulato di relatività per un sistema di leggi fisiche è del tutto indipendente dalla forma della sua espressione matematica ed è determinata solo dal suo contenuto fisico.

§8. Nel seguito si dovrà ora cercare a quale postulato di relatività così inteso soddisfi la "teoria della relatività generale" di Einstein. Non deve a questo proposito restare nascosto che Einstein intende evidentemente per postulato di relatività qualcosa di completamente differente da me; infatti secondo lui una fisica "soddisfa al postulato di relatività generale" quando soddisfa al seguente postulato:

"Le leggi generali della natura sono espresse mediante equazioni che valgono per tutti i sistemi di coordinate, cioè che sono covarianti rispetto a sostituzioni arbitrarie (generalmente covarianti)"[19].

Il requisito della relatività generale è qui valutato immediatamente e solo dall'espressione delle leggi naturali, la cui influenza, secondo la mia interpretazione di un postulato di relatività, è proprio esclusa. Secondo questa interpretazione un postulato di relatività è soddisfatto solo quando la relatività del sistema di riferimento da esso pretesa è *necessaria* e non può essere evitata mediante nessuna forma d'espressione delle leggi di natura, mentre secondo Einstein il postulato di relatività più generale è già soddisfatto quando la generale uguale legittimità di tutti i sistemi di riferimento è solo *possibile* e trova espressione.

II. La misurabilità in linea di principio delle componenti $g_{\mu\nu}$ del potenziale gravitazionale di Einstein.

§9. Per trovare le proprietà di covarianza inerenti alla teoria di Einstein in modo necessario e indipendente dalla scelta dell'espressione, si dovrà cercare di portarla in una forma il più possibile poco covariante senza modificazione del suo contenuto fisico. Basta che questo succeda con una parte delle equazioni di Einstein, e si sceglieranno per questo le leggi del moto della luce e del punto materiale in un campo di gravitazione, dalle quali discende l'intera teoria. Come prima l'equazione di propagazione della luce della teoria della relatività originaria poteva essere portata in forma generalmente covariante con l'introduzione dei coefficienti indeterminati $g_{\mu\nu}$ nell'espressione dell'elemento di linea, così si realizza inversamente ogni trasformazione delle equazioni di Einstein in una forma meno covariante con lo stesso significato fisico fissando tutti o una parte degli elementi di determinazione

[18] Come criterio di possibilità in linea di principio si può qui far uso sempre solo del sistema di leggi considerato di volta in volta e, come detto, assunto come giusto dal punto di vista del contenuto. Un criterio illimitato di possibilità potrebbe essere dato solo con una conoscenza illimitatamente certa delle leggi naturali.

[19] A. Einstein, Ann. d. Phys. **49**, p. 776. 1916.

delle funzioni delle coordinate $g_{\mu\nu}$ che dipendono solo dalla scelta del sistema di riferimento. Ma per sapere come il sistema di riferimento, nel quale valgono le restrizioni su $g_{\mu\nu}$ di cui si tratta, sia distinto dai rimanenti non solo matematicamente, ma anche per l'osservazione, che sola decide sulla validità del postulato di relatività come qui è inteso, si deve prima di tutto cercare quali affermazioni sui valori di $g_{\mu\nu}$ in un sistema di riferimento dato empiricamente possono essere verificate con osservazioni nella teoria di Einstein. Ciò avverrà nel seguito.

§10. Siano $\gamma_{\mu\nu}(x_1 \ldots x_4)$ i valori che sono attribuiti a $g_{\mu\nu}(x_1 \ldots x_4)$ in un sistema di riferimento $\Sigma(x_1 \ldots x_4)$ realizzato mediante strumenti di misura del tutto precisi, e si deve verificare la loro coincidenza con i valori $g_{\mu\nu}(x_1 \ldots x_4)$ che soddisfano le equazioni della relatività generale in Σ. Le differenze eventualmente esistenti tra $\gamma_{\mu\nu}$ e $g_{\mu\nu}$ possono essere in ogni caso determinate con l'osservazione, poiché quando si sostituiscono le $\gamma_{\mu\nu}$ al posto di $g_{\mu\nu}$ nelle equazioni del moto della luce o in quelle di un punto materiale sollecitato solo dalla gravitazione[20], queste non le soddisfano in $\Sigma(x_1 \ldots x_4)$. Oltre a queste compaiono in queste equazioni solo rapporti dei differenziali delle coordinate, che con gli strumenti di misura assegnati possono essere determinati con qualsivoglia approssimazione.

Le direzioni $dx_1 : dx_2 : dx_3 : dx_4$ delle linee d'universo della luce che escono da un qualsiasi punto d'universo soddisfano in Σ secondo la teoria della relatività generale l'equazione[21]:

$$ds^2 \equiv \sum_{\mu,\nu}^{1..4} g_{\mu\nu} dx_\mu dx_\nu = 0$$

ovvero

$$0 = \sum_{\mu,\nu}^{1..4} g_{\mu\nu} \frac{dx_\mu}{dx_4} \frac{dx_\nu}{dx_4}. \tag{4}$$

Se la differenza tra $\gamma_{\mu\nu}$ e $g_{\mu\nu}$ dev'essere inosservabile, assieme alla (4) deve parimenti valere

$$0 = \sum_{\mu,\nu}^{1..4} \gamma_{\mu\nu} \frac{dx_\mu}{dx_4} \frac{dx_\nu}{dx_4}. \tag{5}$$

Per ottenere le relazioni tra $\gamma_{\mu\nu}$ e $g_{\mu\nu}$ che da qui discendono, si ponga:

$$a)\ g'_{\alpha\beta} = \sum_{\mu\nu} u^\mu_\alpha u^\nu_\beta g_{\mu\nu},$$

$$b)\ \gamma'_{\alpha\beta} = \sum_{\mu\nu} u^\mu_\alpha u^\nu_\beta \gamma_{\mu\nu},$$

$$c)\ \sum_\mu dx'_\mu u^\alpha_\mu = dx_\alpha \ (\alpha, \beta, \mu, \nu = 1 \ldots 4)$$

[20] A. Einstein: "Die Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie". Ann. d. Phys. **49**, p. 769 – 822. 1916; vedi p. 777, 778 e 790 §9.

[21] vedi nota precedente.

e si scelgano le 16 quantità u^μ_α in modo tale che il determinante $|u^\mu_\alpha| \neq 0$ e che per $\alpha \neq \beta$ si abbia[22]: $g'_{\alpha\beta} = 0$ e $\gamma'_{\alpha\beta} = 0$.

Allora le (4) e (5) diventano:

$$(4') \qquad 0 = \sum_\alpha g'_{\alpha\alpha} \left(\frac{dx'_\alpha}{dx'_4}\right)^2 \equiv g'_{11} \left(\frac{dx'_1}{dx'_4}\right)^2 + \cdots + g'_{33} \left(\frac{dx'_3}{dx'_4}\right)^2 + g'_{44}.$$

$$(5') \qquad 0 = \sum_\alpha \gamma'_{\alpha\alpha} \left(\frac{dx'_\alpha}{dx'_4}\right)^2 \equiv \gamma'_{11} \left(\frac{dx'_1}{dx'_4}\right)^2 + \cdots + \gamma'_{33} \left(\frac{dx'_3}{dx'_4}\right)^2 + \gamma'_{44}.$$

Si ha[23]:

$$g'_{11} \cdot g'_{22} \cdot g'_{33} \cdot g'_{44} = |g'_{\alpha\beta}| = |u^\mu_\alpha|^2 \cdot |g_{\mu\nu}|$$

e parimenti

$$\gamma'_{11} \cdot \gamma'_{22} \cdot \gamma'_{33} \cdot \gamma'_{44} = |\gamma'_{\alpha\beta}| = |u^\mu_\alpha|^2 \cdot |\gamma_{\mu\nu}|.$$

Se $|g_{\mu\nu}|$ si annullasse in una regione finita delle coordinate, per la

$$|g'_{\mu\nu}| = \left|\frac{dx_\alpha}{dx'_\sigma}\right|^2 \cdot |g_{\mu\nu}|$$

in generale a ogni punto d'universo della regione sarebbero associati infiniti punti coordinati. Questo va escluso ed è anche controllabile in linea di principio con l'osservazione, di modo che si deve assumere a priori $|\gamma_{\mu\nu}| \neq 0$, a meno di punti singolari.

Poiché nessuna delle quantità $g'_{\alpha\alpha}$ e $\gamma'_{\alpha\alpha}$ è uguale a zero, si deve poter determinare in ogni punto coordinato una quantità λ in generale non nulla e indipendente dai rapporti dx'_α/dx'_4, in modo tale che per valori arbitrari di

$$\frac{dx'_1}{dx'_4}, \ \frac{dx'_2}{dx'_4}, \ \frac{dx'_3}{dx'_4},$$

sia:

$$0 = \sum_\alpha (\gamma'_{\alpha\alpha} - \lambda g'_{\alpha\alpha}) \left(\frac{dx'_\alpha}{dx'_4}\right)^2.$$

Per derivazione rispetto a $(dx'_1/dx'_4)^2$ eccetera risulta da qui:

$$\gamma'_{\alpha\alpha} = \lambda g'_{\alpha\alpha} \ (\alpha = 1 \ldots 4)$$

[22]Ciò è possibile; secondo le a), b), c) gli u^μ_α rappresentano i coefficienti delle trasformazioni univoche più generali nell'infinitamente piccolo, per le quali $g_{\mu\nu}$ e $\gamma_{\mu\nu}$ si trasformano come componenti di tensori covarianti. È noto che si può prima ottenere con una trasformazione intermedia $g'_{11} = g'_{22} = g'_{33} = g'_{44} = 1$ e $g'_{\alpha\beta} = 0$ per $\alpha \neq \beta$, e poi per mezzo di una trasformazione di Lorentz si possono portare gli assi del sistema di riferimento a ricoprire gli assi principali del tensore γ, di modo che senza variazione dei valori di $g'_{\mu\nu}$ sarà anche $\gamma'_{\mu\nu} = 0$ per $\mu \neq \nu$.

[23]vedi A. Einstein, l.c. p. 788 e 789. Poiché per simmetria assumo la quarta coordinata x_4 immaginaria, risulta $|g_{\mu\nu}| > 0$ invece che < 0 come per Einstein.

e risolvendo le equazioni (a) e (b) rispetto a $g_{\mu\nu}$ e a $\gamma_{\mu\nu}$:

$$\gamma_{\mu\nu} = \lambda g_{\mu\nu} \; (\mu, \nu = 1 \ldots 4). \tag{6}$$

Le $\gamma_{\mu\nu}$ devono quindi essere proporzionali alle $g_{\mu\nu}$ in ogni punto coordinato. Il fattore di proporzionalità è una funzione delle coordinate diversa da zero, ma per il resto ancora indeterminata.

§11. Una determinazione più precisa di λ è prodotta dalle equazioni del moto del punto materiale nel campo di gravitazione. Secondo Einstein[24] queste si scrivono:

$$\sum_\alpha g_{\alpha\rho} \frac{d^2 x_\alpha}{ds^2} + \sum_{\mu\nu} \begin{bmatrix} \mu\nu \\ \rho \end{bmatrix}_g \frac{dx_\mu}{ds} \cdot \frac{dx_\nu}{ds} = 0, \tag{7}$$

dov'è

$$\begin{bmatrix} \mu\nu \\ \rho \end{bmatrix} \equiv \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{\mu\rho}}{\partial x_\nu} + \frac{\partial g_{\nu\rho}}{\partial x_\mu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\rho} \right).$$

Se si introduce $\gamma_{\mu\nu} = \lambda g_{\mu\nu}$, risulta:

$$d\sigma \equiv \sqrt{\sum_{\mu\nu} \lambda g_{\mu\nu} dx_\mu dx_\nu} = \sqrt{\lambda} ds,$$

$$\frac{dx_\alpha}{ds} = \frac{dx_\alpha}{d\sigma} \cdot \sqrt{\lambda}, \; \frac{d^2 x_\alpha}{ds^2} = \lambda \frac{d^2 x_\alpha}{d\sigma^2} + \frac{1}{2} \frac{d\lambda}{d\sigma} \frac{dx_\alpha}{d\sigma}$$

$$\begin{bmatrix} \mu\nu \\ \rho \end{bmatrix}_g = \frac{1}{\lambda} \begin{bmatrix} \mu\nu \\ \rho \end{bmatrix}_\gamma - \frac{1}{2\lambda^2} \left(\gamma_{\mu\rho} \frac{\partial \lambda}{\partial x_\nu} + \gamma_{\nu\rho} \frac{\partial \lambda}{\partial x_\mu} - \gamma_{\mu\nu} \frac{\partial \lambda}{\partial x_\rho} \right)$$

con

$$\begin{bmatrix} \mu\nu \\ \rho \end{bmatrix}_\gamma \equiv \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \gamma_{\mu\rho}}{\partial x_\nu} + \frac{\partial \gamma_{\nu\rho}}{\partial x_\mu} - \frac{\partial \gamma_{\mu\nu}}{\partial x_\rho} \right).$$

Con ciò l'equazione (7) diventa

$$\begin{aligned} &\sum_\alpha \gamma_{\alpha\rho} \frac{d^2 x_\alpha}{d\sigma^2} + \sum_{\mu\nu} \begin{bmatrix} \mu\nu \\ \rho \end{bmatrix}_\gamma \frac{dx_\mu}{d\sigma} \frac{dx_\nu}{d\sigma} + \sum_\alpha \frac{1}{2\lambda} \frac{d\lambda}{d\sigma} \gamma_{\alpha\rho} \frac{dx_\alpha}{d\sigma} \\ &- \sum_{\mu\nu} \frac{1}{2\lambda} \left(\gamma_{\mu\rho} \frac{\partial \lambda}{\partial x_\nu} + \gamma_{\nu\rho} \frac{\partial \lambda}{\partial x_\mu} - \gamma_{\mu\nu} \frac{\partial \lambda}{\partial x_\rho} \right) \frac{dx_\mu}{d\sigma} \frac{dx_\nu}{d\sigma} = 0. \end{aligned} \tag{7a}$$

Ora, se le equazioni del moto devono essere soddisfatte anche con $\gamma_{\mu\nu}$ al posto di $g_{\mu\nu}$, i primi due termini della (7a) devono annullarsi. Il terzo, poiché

$$\frac{d\lambda}{d\sigma} = \sum_\nu \frac{\partial \lambda}{\partial x_\nu} \frac{dx_\nu}{d\sigma},$$

si trasforma in

$$\sum_{\alpha\nu} \frac{1}{2\lambda} \gamma_{\alpha\rho} \frac{\partial \lambda}{\partial x_\nu} \frac{dx_\alpha}{d\sigma} \frac{dx_\nu}{d\sigma} \equiv \sum_{\mu\nu} \frac{1}{2\lambda} \gamma_{\mu\rho} \frac{\partial \lambda}{\partial x_\nu} \frac{dx_\mu}{d\sigma} \frac{dx_\nu}{d\sigma}.$$

---

[24] A. Einstein l.c. p. 791, Eq. (20d) e (21).

Poiché

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{g_{\mu\nu}}{\gamma_{\mu\nu}} \neq 0$$

risulta quindi

$$0 = \sum_{\mu\nu} \left(\gamma_{\nu\rho} \frac{\partial \lambda}{\partial x_\mu} - \gamma_{\mu\nu} \frac{\partial \lambda}{\partial x_\rho} \right) \frac{dx_\mu}{ds} \cdot \frac{dx_\nu}{ds}$$

ovvero

$$0 = \sum_{\mu\nu} \left(g_{\nu\rho} \frac{\partial \lambda}{\partial x_\mu} - g_{\mu\nu} \frac{\partial \lambda}{\partial x_\rho} \right) \frac{dx_\mu}{ds} \cdot \frac{dx_\nu}{ds}.$$

I coseni direttori dx_μ/ds devono solo soddisfare la condizione

$$\sum_{\mu,\nu} g_{\mu\nu} \frac{dx_\mu}{ds} \cdot \frac{dx_\nu}{ds} = 1.$$

Mediante lo stesso procedimento con il quale l'equazione (6) è stata derivata dalla (4) e dalla (5), dalle ultime due equazioni segue:

$$g_{\nu\rho} \frac{\partial \lambda}{\partial x_\mu} - g_{\mu\nu} \frac{\partial \lambda}{\partial x_\rho} = \Lambda \cdot g_{\mu\nu}.$$

Ciò vale per valori arbitrari degli indici $\mu, \nu, \rho = 1, 2, 3, 4$. Se si pone $\mu = \rho$ risulta $\Lambda = 0$. Si ha quindi in generale

$$g_{\nu\rho} \frac{\partial \lambda}{\partial x_\mu} - g_{\mu\nu} \frac{\partial \lambda}{\partial x_\rho} = 0 \quad \text{ovvero} \quad \frac{g_{\nu\rho}}{g_{\nu\mu}} = \frac{\frac{\partial \lambda}{\partial x_\rho}}{\frac{\partial \lambda}{\partial x_\mu}} \; (\mu, \nu, \rho = 1 \dots 4).$$

Poiché i termini di due righe del determinante $|g_{\mu\nu}| \neq 0$ non possono essere proporzionali tra di loro, tutte le derivate di λ rispetto alle coordinate devono annullarsi. Risulta quindi:

(8) $$\lambda = \text{cost.}$$

§12. Dai sistemi di riferimento nei quali valga una qualche condizione sulle $g_{\mu\nu}$ considerate come funzioni delle coordinate, senza osservare il moto della luce e di masse non cariche, si possono distinguere solo quegli altri sistemi di riferimento nei quali tutti i rapporti dei valori delle $g_{\mu\nu}$ che dipendono dalle condizioni abbiano i valori che loro competono dello stesso punto *coordinato* o di uno diverso. Per le derivate di $g_{\mu\nu}$ rispetto alle coordinate, che possono essere approssimate a piacere con rapporti di differenze, il soddisfacimento di ogni condizione a loro imposta si può sempre dimostrare con l'esperienza, a meno degli scostamenti, che si possono ottenere mediante la moltiplicazione dei valori di $g_{\mu\nu}$ di tutti i punti coordinati per la stessa costante λ.

Una trasformazione di coordinate distinta dall'identità, che muti le funzioni $g_{\mu\nu}$ nel modo suddetto, sicché da $g_{\mu\nu} = f_{\mu\nu}(x_1 \dots x_4)$ in Σ si ottenga $g'_{\mu\nu} = \lambda \cdot f_{\mu\nu}(x'_1 \dots x'_4)$ nel sistema di riferimento trasformato Σ', non esiste in generale. Allora ogni invariante di curvatura J_σ omogeneo in $g_{\mu\nu}$ e nelle sue derivate (di grado n) dovrebbe trasformarsi da

$$J_\sigma = f_\sigma(x_1 \dots x_4) \;\text{ in }\; J'_\sigma = J_\sigma = \lambda^n \cdot f_\sigma(x'_1 \dots x'_4).$$

Ma le equazioni che ne seguono

$$f_\sigma(x_1 \ldots x_4) = \lambda^n \cdot f_\sigma(x'_1 \ldots x'_4) \tag{9}$$

poiché esistono più di quattro invarianti omogenei indipendenti J_σ[25] in $g_{\mu\nu}$ e $dg_{\mu\nu}$, possono in generale essere soddisfatte solo dalla trasformazione identica $x'_1 = x_1, \ldots x'_4 = x_4$. Sono da escludersi soltanto casi di dipendenza funzionale particolarmente ampia dei $J_\sigma(x_1 \ldots x_4)$ l'uno dall'altro, ossia una struttura del tutto particolare delle proprietà invarianti della curvatura della varietà spaziotemporale.

In generale quindi i sistemi di riferimento matematicamente distinti mediante qualche condizione per $g_{\mu\nu}$ anche dal punto di vista puramente fisico non sono più egualmente legittimi.

Nei suddetti casi eccezionali basta evidentemente un gruppo di trasformazioni ad un parametro, che porta da $g_{\mu\nu} = f_{\mu\nu}(x_1 \ldots x_4)$ a $g'_{\mu\nu} = \lambda \cdot f_{\mu\nu}(x'_1 \ldots x'_4)$, per generare dai sistemi di riferimento assegnati matematicamente tutti i sistemi di riferimento fisicamente legittimi[26].

III. Restrizione della covarianza delle equazioni di Einstein.

§13. Senza mutare il contenuto fisico delle equazioni di Einstein si possono imporre alle funzioni delle coordinate $g_{\mu\nu}$ che in esse intervengono tutte le condizioni che si possono soddisfare in ogni caso mediante un'opportuna scelta del sistema di riferimento, e che quindi affermano qualcosa solo riguardo a questo. Il nostro scopo è di individuare mediante una modificazione puramente formale della teoria un gruppo il più possibile ristretto di sistemi di riferimento "legittimi". Risulta che ciò si ottiene nella maniera più semplice, quando si colleghi nel modo il più possibile stretto il sistema di coordinate alla struttura naturale proposta da Einstein per la regione spaziotemporale, data dalla curvatura variabile da punto a punto[27].

1. Utilizzo delle "direzioni degli assi" del tensore di curvatura come direzioni delle coordinate.

Le componenti $(\lambda\nu, \mu\tau)$ del tensore di curvatura di Riemann-Christoffel R nello spazio $x_1 \ldots x_4$ con l'elemento di linea invariante

$$ds = \sqrt{\sum_{\mu\nu} g_{\mu\nu} dx_\mu dx_\nu}$$

[25] Per esempio le otto componenti principali del tensore di curvatura riferite a direzioni coordinate che coincidono con quelle dei suoi assi (vedi nel seguito §§14 e 17), e i sei angoli tra queste direzioni.

[26] Per la definizione del postulato di relatività soddisfatto realmente nel senso del §7 queste eccezioni sono prive di significato, poiché esse si verificano per una struttura del tutto particolare della situazione fisica casuale, cioè non fissata da leggi (distribuzione della materia), che secondo la teoria di Einstein codetermina il carattere di curvatura dell'universo, e pertanto possono essere eliminate con una variazione (arbitraria) di queste circostanze casuali.

[27] Questa possibilità di fissare in modo assoluto le direzioni delle coordinate proprio mediante la teoria della relatività generale me l'ha suggerita per lettera G. Mie già nel febbraio 1916.

sono date da[28]

$$R_{\lambda\nu,\mu\tau} = (\lambda\nu, \mu\tau) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 g_{\lambda\tau}}{\partial x_\nu \partial x_\mu} + \frac{\partial^2 g_{\nu\mu}}{\partial x_\lambda \partial x_\tau} - \frac{\partial^2 g_{\lambda\mu}}{\partial x_\nu \partial x_\tau} - \frac{\partial^2 g_{\nu\tau}}{\partial x_\lambda \partial x_\mu}\right) + \sum_{\alpha\beta} g^{\alpha\beta}\left(\begin{bmatrix}\lambda\tau\\ \alpha\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\nu\mu\\ \beta\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}\lambda\mu\\ \alpha\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\nu\tau\\ \beta\end{bmatrix}\right). \tag{10}$$

Si è posto:

$$\begin{bmatrix}\alpha\beta\\ \gamma\end{bmatrix} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{\beta\gamma}}{\partial x_\alpha} + \frac{\partial g_{\gamma\alpha}}{\partial x_\beta} - \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x_\gamma}\right)$$

e i $g^{\alpha\beta}$ sono gli aggiunti normalizzati di $g_{\alpha\beta}$ nel determinante $|g_{\mu\nu}|$ di $g_{\mu\nu}$. Tutti gli indici greci α, β, λ, ν eccetera vanno da 1 a 4.

Il tensore R è covariante di rango 4. Le sue componenti si trasformano secondo la legge:

$$(\lambda\nu, \mu\tau)' = \sum_{\alpha\beta\gamma\delta} \frac{\partial x_\alpha}{\partial x'_\lambda}\frac{\partial x_\beta}{\partial x'_\nu}\frac{\partial x_\gamma}{\partial x'_\mu}\frac{\partial x_\delta}{\partial x'_\tau}(\alpha\beta, \gamma\delta). \tag{11}$$

Valgono inoltre le identità:

$$(\lambda\nu, \mu\tau) \equiv (\mu\tau, \lambda\nu) \tag{10a}$$

$$(\lambda\nu, \mu\tau) \equiv -(\nu\lambda, \mu\tau) \equiv -(\lambda\nu, \tau\mu), \tag{10b}$$

quindi

$$(\lambda\lambda, \mu\tau) = (\lambda\nu, \mu\mu) = 0$$

e

$$(12, 34) + (23, 14) + (31, 24) \equiv 0, \tag{10c}$$

di modo che solo 20 delle componenti di R sono algebricamente indipendenti tra loro. Infatti ogni componente non nulla è uguale od opposta ad una delle 36 componenti $(\lambda\nu, \mu\tau)$ per le quali $\lambda\nu$ e $\mu\tau$ sono sempre una delle sei coppie di cifre $23, 31, 12, 34, 24, 14$. Queste 36 componenti costituiscono, quando si ordinino i $\lambda\nu$ in righe secondo la sequenza scritta, e altrettanto si faccia in colonne per $\mu\tau$, gli elementi di una matrice simmetrica M, la cui diagonale principale contiene le sei componenti della forma $(\lambda\nu, \lambda\nu)$, mentre la metà superiore della diagonale secondaria è costituita dai tre termini che stanno al primo membro della (10c). Dei 9 elementi diagonali distinti di M, che indicherò come componenti principali di R, solo 8 sono algebricamente indipendenti. Oltre ad esse vi sono pure come "componenti secondarie" parimenti indipendenti i 12 elementi di M fuori dalle diagonali, che compaiono due volte.

§14. Queste componenti secondarie si possono portare a zero in un punto d'universo qualsiasi mediante un'opportuna scelta delle direzioni degli assi del sistema di riferimento.

[28]Christoffel, Journ. f. Math. **70**. p. 54. 1869.

Sia infatti $\Sigma'(x'_1 \dots x'_4)$ il sistema di riferimento originario con valori di $(\lambda\nu, \mu\tau)'$ scelti a piacere, e $\Sigma(x_1 \dots x_4)$ quello cercato, nel quale, al punto P considerato, devono annullarsi le 12 componenti secondarie di R; ciò lo si ottiene sempre, determinando i valori delle 16 derivate

$$\frac{\partial x_\rho}{\partial x'_\sigma}\ (\rho, \sigma = 1 \dots 4)$$

e le otto componenti principali indipendenti di R nel punto P, misurate in Σ, in modo che le equazioni di trasformazione (11) siano soddisfatte, mentre tutte le componenti secondarie di R in Σ che intervengono al suo secondo membro si annullano. Si pensi che è sempre possibile scomporre la trasformazione di Σ' in Σ per l'intorno infinitamente piccolo di P in una trasformazione per la quale i quattro $\partial x_\rho / \partial x'_\rho$ sono uguali ad uno, ed in una successiva dilatazione degli assi, per la quale le restanti 12

$$\frac{\partial x_\rho}{\partial x'_\sigma}\ (\rho \neq \sigma)$$

si annullano, di modo che l'ultima trasformazione secondo le equazioni (11) non porta ad annullarsi nessuna nuova componente di R. Se il tensore R' si può portare alla forma normale desiderata, lo si può portare anche per

$$\frac{\partial x_\rho}{\partial x'_\rho} = 1\ (\rho = 1 \dots 4).$$

E ciò è possibile, perché il determinante funzionale delle venti componenti indipendenti assegnate, $(\lambda\nu, \mu\tau)'$ di R' in Σ', calcolato secondo la (11) rispetto alle dodici

$$\frac{\partial x_\rho}{\partial x'_\sigma}\ (\rho \neq \sigma)$$

e alle otto componenti principali indipendenti di R in Σ per

$$\frac{\partial x_\rho}{\partial x'_\rho} = 1$$

e per componenti secondarie di R in Σ che si annullano, non si annulla identicamente[29]. Da qui segue parimenti che in generale le

$$\frac{\partial x_\rho}{\partial x'_\sigma}\ (\rho \neq \sigma)$$

[29]Si calcoli il determinante funzionale nel caso più facile per

$$\frac{\partial x_\rho}{\partial x'_\sigma} = 0\ (\rho \neq \sigma).$$

Delle derivate delle otto componenti principali di R' sono diverse da zero solo quelle - che stanno sulla diagonale principale - rispetto alle corrispondenti componenti principali di R, e sono uguali ad uno. Nelle dodici righe rimanenti, relative alle componenti secondarie di R', compaiono solo proprio quelle tre componenti principali di R che si ottengono per derivazione della (11) rispetto a $\partial x_\rho / \partial x'_\sigma$, e così disposte, che l'intero determinante è uguale al prodotto di tre determinanti del quart'ordine non nulli, i cui elementi stanno nelle righe corrispondenti a (12,13)', (42,43)', (21,24)', (31,34)' ovvero a (23,24)', (13,14)', (32,31)', (42,41)', oppure rispettivamente (12,14)', (32,34)', (23,21)', (43,41)'.

sono funzioni determinate di $(\lambda\nu, \mu\tau)'$, e che quindi tutte le componenti secondarie del tensore di curvatura R si annullano in un dato punto d'universo solo per certe direzioni assegnate dei quattro assi coordinati.

§15. Questo sistema di direzioni, che in breve si possono chiamare le direzioni degli assi del tensore di curvatura R, per proprietà particolari di R possono naturalmente essere indeterminate o altrimenti degeneri. La forma particolare più importante di R nella teoria di Einstein è quella che R assume in campi di gravitazione "privi di materia"[30]. In questi si annulla il tensore di Einstein $B_{\mu\nu}$ delle sorgenti della gravitazione[31], e poiché, come si calcola facilmente[32], si ha identicamente

$$B_{\mu\nu} \equiv \sum_{\lambda\tau} (\lambda\nu, \mu\tau) g^{\lambda\tau},$$

risulta

$$B_{\mu\nu} \equiv \sum_{\lambda\tau} (\lambda\nu, \mu\tau) g^{\lambda\tau} = 0. \tag{12}$$

È ora possibile scegliere in un punto d'universo P privo di materia le direzioni e le scale delle coordinate in modo tale che in primo luogo sia

$$g^{\mu\nu} = 0 \text{ per } \mu \neq \nu \text{ e } g^{\nu\nu} = 1 \ (\mu, \nu = 1 \dots 4)$$

ovvero anche $g_{\mu\nu} = 0$ $(\mu \neq \nu)$ e $g_{\nu\nu} = 1$, cosa che notoriamente si può sempre realizzare, e che in secondo luogo tutte le componenti secondarie di R si annullino. Per le componenti principali di R seguono dalla (12) solo le quattro condizioni

$$\sum_{\lambda} (\lambda\nu, \lambda\nu) = 0,$$

che riducono a due indipendenti i sei termini $(\lambda\nu, \lambda\nu)$ della diagonale principale nella matrice M di $(\lambda\nu, \mu\tau)$. Parimenti secondo le (10c) e (10a) solo due elementi della diagonale secondaria sono tra loro indipendenti, di modo che complessivamente si hanno proprio quattro componenti principali indipendenti di R nel sistema di riferimento scelto.

Se ora si trasforma quest'ultimo mediante un'arbitraria trasformazione di Lorentz, di modo che si ottenga di nuovo $g_{\nu\nu} = 1$ e $g_{\mu\nu} = 0$ $(\mu \neq \nu)$, allora R secondo la (11) va in un tensore R' che, poiché la trasformazione di Lorentz anche rispetto alle componenti di R ha essenzialmente sei parametri[33], ha $4 + 6 = 10$ componenti

---

[30] A. Einstein, l.c. p. 802, 803 §14. A. Einstein designa "tutti i campi fuorché il campo gravitazionale come materia".

[31] vedi riferimento precedente.

[32] vedi A. Einstein e M . Grossmann, l.c. p. 35 e 36, Eq. (43), (44) e (46), e A. Einstein, l.c. p. 800 e 801, Eq. (43) e (44). L'ultima variante delle equazioni di Einstein delle sorgenti del campo gravitazionale (A. Einstein, Berl. Ber. p. 142-152. 1917) non potrebbe purtroppo essere più considerata.

[33] Per la dimostrazione basta provare che non esiste alcuna trasformazione di Lorentz infinitesima che porti R in se stesso. Ma poiché per la

$$\sum_{\sigma} (dx_\rho / \partial x'_\sigma)^2 = 1$$

mutuamente indipendenti. Tra le 20 componenti di R' non legate tramite le (10a, b, c) possono esservi quindi non più di 20 - 10=10 relazioni indipendenti, e queste devono essere evidentemente proprio le 10 equazioni che in modo del tutto generale seguono dalla (12) per $g^{\nu\nu} = 1$, $g^{\mu\nu} = 0$ $(\mu \neq \nu)$.

La suddetta possibilità di scegliere le direzioni delle coordinate in un punto d'universo privo di materia, $B_{\mu\nu} = 0$, in modo tale che esse coincidano con le direzioni degli assi di R e che parimenti sia $g_{\mu\nu} = 0$ per $\mu \neq \nu$ non significa quindi per R alcuna restrizione ulteriore rispetto alla (12) e sussiste in generale. Se si chiamano come al solito mutuamente ortogonali direzioni coordinate per le quali è $g_{\mu\nu} = 0$ $(\mu \neq \nu)$[34] , in ogni punto d'universo privo di materia le quattro direzioni degli assi del tensore di curvatura d'universo sono tra loro ortogonali. La presenza di "materia" in generale fà in modo che gli assi di R siano obliqui.

§16. Un sistema di riferimento, le cui direzioni degli assi coincidano ovunque con quelle del tensore di curvatura, non esiste in generale a causa delle condizioni di integrabilità per questo necessarie. Si potrà invece esigere senz'altro che la direzione x_4 $(dx_1 = dx_2 = dx_3 = 0)$ cada ovunque in una di queste direzioni[35]. Se si pensa questa ingiunzione espressa come condizione per le funzioni delle coordinate $g_{\mu\nu}$, che secondo la (10) determinano il tensore di curvatura R, e introdotta nelle equazioni di Einstein, il sistema di equazioni risultante non è in generale invariante per rotazioni continue della direzione x_4, cioè per vere trasformazioni della velocità. I sistemi di riferimento così matematicamente individuati sono secondo il §12 riconoscibili da tutti gli altri anche per l'osservazione.

Nel senso dell'interpretazione esposta nella sezione I la teoria di Einstein non soddisfa quindi in generale a nessun postulato di relatività della velocità[36].

2. L'introduzione di invarianti assoluti come coordinate spaziotemporali.

§17. I sistemi di riferimento si possono tuttavia fissare in un modo molto più definito e al tempo stesso più facile per mezzo degli invarianti assoluti che si possono costruire da R e da $g_{\mu\nu}$. Poiché solo 16 coefficienti, $\partial x_\nu / \partial x'_\rho$, entrano nelle leggi

---

che vale in una trasformazione siffatta, a meno di infinitesimi del second'ordine si ha $dx_\rho / \partial x'_\rho = 1$, ne segue l'asserto, poiché il determinante funzionale costruito dalla (11) delle 12 componenti secondarie di R' con i 12 coefficienti di trasformazione infinitesimi $dx_\rho / \partial x'_\sigma$ $(\rho \neq \sigma)$ è diverso da zero (vedi prima nota del §14; l'equazione (13) non cambia), questi coefficienti possono essere espressi mediante le componenti di R ed R' e pertanto per $R = R'$ possono avere il solo valore compatibile con la (11), cioè zero.

[34]Questo risulta immediatamente se il coseno dell'angolo α tra due direzioni

$$\left(\frac{dx_1}{ds}\right)_1, \dots \left(\frac{dx_4}{ds}\right)_1 \quad \text{e} \quad \left(\frac{dx_1}{ds}\right)_2, \dots \left(\frac{dx_4}{ds}\right)_2$$

si definisce:

$$\cos\alpha = \sum_{\mu\nu} g_{\mu\nu} \left(\frac{dx_\mu}{ds}\right)_1 \left(\frac{dx_\nu}{ds}\right)_2 .$$

Vedi per esempio L. Bianchi-Lukat: "Vorlesungen über Differentialgeometrie".

[35]Inoltre si potrebbe per esempio richiedere che per $x_4 = 0$ la direzione x_3, per $x_4 = x_3 = 0$ la direzione x_2 e infine l'asse x_1, $x_4 = x_3 = x_2 = 0$, cadano ovunque in una delle direzioni degli assi di R.

[36]Invece anche in seguito all'introduzione nel modo suddetto di sistemi di riferimento distinti le equazioni rimangono invarianti rispetto al gruppo infinito di trasformazioni che lasciano la direzione x_4 immutata.

di trasformazione delle componenti tensoriali $(\lambda\nu, \mu\tau)$ e $g_{\mu\nu}$, delle quali 20+10=30 sono indipendenti, così devono esistere in generale 30-16=14 di tali invarianti algebricamente indipendenti, e in regioni prive di materia, dove valgono le 10 equazioni (12), pur sempre 14-10=4. In questo caso gli invarianti devono essere evidentemente funzioni delle componenti principali (invarianti) di R, misurate nel sistema di riferimento ortogonale infinitesimo $\Sigma(dx_1, \ldots dx_4)$, le direzioni degli assi del quale coincidono con quelle di R e per il quale $g_{\nu\nu} = 1$. Nel caso generale, $B_{\mu\nu} \neq 0$, come mostrato, in un sistema di riferimento infinitesimo determinato nel modo corrispondente con posizioni e lunghezze, il numero delle componenti principali indipendenti di R cresce ad 8, e inoltre compaiono ora 6 quantità, che misurano l'angolo tra le quattro direzioni degli assi. Insieme costituiscono proprio 14 invarianti assoluti indipendenti, funzioni di $(\lambda\nu, \mu\tau)$ e di $g_{\mu\nu}$.

Siano ora J_1, J_2, J_3, J_4 quattro funzioni di questi invarianti, che siano mutuamente indipendenti sia per $B_{\mu\nu} \neq 0$ che per $B_{\mu\nu} = 0$; allora un sistema di riferimento è interamente fissato dal punto di vista matematico e, secondo il §12, anche dal punto di vista fisico, se si pone

$$x_1 = J_1,\ x_2 = J_2,\ x_3 = J_3,\ x_4 = J_4. \tag{13}$$

§18. L'introduzione di uno dei sistemi di riferimento definiti mediante equazioni del tipo (13) nella teoria della relatività generale, che in questo modo verrebbe portata dal punto di vista matematico nella forma di una perfetta "teoria assoluta", è tuttavia possibile solo postulando che in nessuna regione tetradimensionale finita gli invarianti $J_1 \ldots J_4$ scelti come coordinate siano mutuamente dipendenti; infatti in caso contrario interi continui di punti d'universo sarebbero associati ad un solo punto coordinato.

Dobbiamo ora chiederci se questo postulato necessario per l'introduzione del sistema di riferimento (13), che a causa dell'invarianza di $J_1 \ldots J_4$ ha indubbiamente significato fisico, aggiunga qualcosa di fisicamente nuovo alla teoria di Einstein. Solo se ciò non accade si può ritenere fornita la dimostrazione che, secondo l'interpretazione del postulato fisico di relatività esposta nella parte I, la teoria di Einstein è fisicamente una perfetta teoria assoluta.

Per l'universo reale sperimentabile, assunta la giustezza della teoria di Einstein, di fatto ogni mutua dipendenza funzionale di $J_1 \ldots J_4$ in una regione di estensione temporale e spaziale finita potrebbe risultare infinitamente improbabile o impossibile, poiché essa costituisce sempre solo un caso singolare tra un'infinità di casi di completa indipendenza mutua di $J_1 \ldots J_4$.

Le leggi della teoria di Einstein di per sé, come quelle di ogni altra teoria fisica, non determinano tuttavia ciò che realmente succede, ma piuttosto ciò che è in generale "possibile", cioè compatibile con esse. L'ipotesi dell'indipendenza di $J_1 \ldots J_4$ esclude certe possibilità aperte, anche se singolari; e inoltre a causa dell'invarianza delle J_ν esse sono distinte anche topologicamente da tutte le restanti, e quindi in linea di principio distinguibili da quelle con l'osservazione. In questo senso l'ipotesi suddetta costituisce un'aggiunta fisica alla teoria di Einstein.

3. Determinazione più completa del sistema di riferimento mediante condizioni imposte alle $\mathbf{g}_{\mu\nu}$.

§19. Perciò si cercherà ora di liberare nel modo più ampio possibile la teoria di Einstein dalle sue proprietà di covarianza solo formali in un'altra maniera, che non soggiace alle osservazioni su esposte. Il procedimento consiste semplicemente nel determinare più completamente nell'espressione dell'elemento di linea i coefficienti $g_{\mu\nu}$, che nella teoria della relatività generale appaiono come funzioni delle coordinate parzialmente indeterminate e che si possono scegliere liberamente, mediante condizioni arbitrarie, che si possono soddisfare senza nuovi postulati fisici solo con una scelta opportuna del sistema di riferimento, che risulta così determinato.

Una tale condizione, cioè l'equazione $|g_{\mu\nu}| = 1$, Einstein stesso l'ha notoriamente introdotta per semplificare le sue equazioni[37], ed ha anche opportunamente osservato che in corrispondenza alle quattro coordinate che si possono scegliere a piacimento in generale quattro funzioni di $g_{\mu\nu}$ possono essere scelte liberamente come funzioni delle coordinate[38].

Se si prescrive per esempio

$$g_{11} = g_{22} = g_{33} = g_{44} \equiv 1 \text{ per ogni } x_1, x_2, x_3, x_4 \tag{14}$$

per trasformare un sistema di riferimento dato $\Sigma'(x'_1 \dots x'_4)$ in un sistema $\Sigma(x_1..x_4)$, nel quale valga la (14), si devono soddisfare solo le quattro equazioni differenziali

$$1 = \sum_{\mu\nu} g'_{\mu\nu}(\varphi_1, \dots \varphi_4) \frac{\partial \varphi_\mu}{\partial x_\alpha} \frac{\partial \varphi_\nu}{\partial x_\alpha} \ (\alpha = 1 \dots 4) \tag{15}$$

con un'opportuna scelta delle quattro funzioni $\varphi_\nu(x_1, \dots x_4) = x'_\nu$ o delle loro funzioni inverse $f_\nu(x'_1 \dots x'_4) = x_\nu$, che portano Σ' in Σ, cosa che è sempre possibile[39].

Le funzioni φ_ν possono anche esser scelte arbitrariamente in uno spazio x_ν=cost. ovvero $x_\nu = 0$ (vedi nota). Oltre alla (14) si può quindi con una determinazione più completa di φ_1 imporre

$$g_{12} = 0 \text{ per } x_1 = 0.$$

Si pensi - a grandi linee - di risolvere l'equazione differenziale per φ_ν che così risulta rispetto ad una delle derivate (indeterminate) di φ_1

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_2}, \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_3}, \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_4},$$

per esempio rispetto a $\partial\varphi_1/\partial x_2$; ne deriva che con la determinazione di φ_1 si può porre anche

$$g_{13} = 0 \text{ per } x_1 = x_2 = 0$$

e infine anche

$$g_{14} = 0 \text{ per } x_1 = x_2 = x_3 = 0.$$

---

[37] A. Einstein, l.c. p. 801. Secondo l'idea di Einstein ciò non prova tuttavia che la sua teoria (in altra forma) non possa soddisfare il postulato di relatività più generale possibile (vedi §8 e A. Einstein, l.c. p. 776 e 789.)

[38] A. Einstein, l.c. p. 812 e nota 1.

[39] In primo luogo si può pensare Σ' trasformato in un sistema di riferimento (indicato allo stesso modo) le direzioni degli assi del quale in nessun punto coincidono con la direzione, definita da $ds = 0$, delle falde del cono di luce del futuro o del passato. Allora si ha ovunque $g'_{\nu\nu} \neq 0$ $(\nu = 1 \dots 4)$, e le equazioni (15) si possono risolvere rispetto alle quattro derivate completamente indipendenti $\partial\varphi_\nu/\partial x_\nu$ $(\nu = 1 \dots 4)$.

Corrispondenti determinazioni delle restanti funzioni di trasformazione $\varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$ si ottengono da quella di φ_1 per permutazione ciclica. In totale oltre alla (14) si ottengono le condizioni:

$$
\begin{aligned}
&g_{12} = 0 \text{ per } x_1 = 0 \text{ e per } x_2 = x_3 = x_4 = 0,\\
&g_{23} = 0 \text{ per } x_2 = 0 \text{ e per } x_3 = x_4 = x_1 = 0,\\
&g_{34} = 0 \text{ per } x_3 = 0 \text{ e per } x_4 = x_1 = x_2 = 0,\\
&g_{41} = 0 \text{ per } x_4 = 0 \text{ e per } x_1 = x_2 = x_3 = 0,\\
&g_{24} = 0 \text{ per } x_2 = x_3 = 0 \text{ e per } x_4 = x_1 = 0,\\
&g_{31} = 0 \text{ per } x_3 = x_4 = 0 \text{ e per } x_1 = x_2 = 0.
\end{aligned}
\tag{16}
$$

Le condizioni (14) e (16) sono evidentemente scelte in modo tale che nell'origine $O(x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0)$ e per quanto possibile nel suo intorno sugli assi, sulle superfici e sugli spazi coordinati valga il sistema "naturale" di misura, $g_{\nu\nu} = 1$, $g_{\mu\nu} = 0$ $(\mu \neq \nu)$.

Secondo la trattazione provvisoria su esposta rimangono indeterminati soltanto: in primo luogo i valori di $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$ in O, ma in secondo luogo altri sei parametri che codeterminano le funzioni φ_ν, cioè i valori di sei derivate di φ_ν in O, poiché l'annullarsi delle sei quantità $g_{\mu\nu}$ $(\mu \neq \nu)$ in O è contato due volte nelle condizioni che determinano φ_ν. Pertanto in generale per una data forma della curvatura invariante dell'universo per ogni punto d'universo preso come origine esiste una serie di sistemi di riferimento che dipendono da sei parametri, nei quali le equazioni (14) e (16) sono soddisfatte matematicamente.

.
.
.
.

IV. Determinazione geometrica del postulato della relatività soddisfatto fisicamente dalla nuova teoria della relatività di Einstein e confronto con la teoria della relatività originaria.

§23. Quale gruppo sia questo, ovvero: quale postulato di relatività la teoria di Einstein soddisfi nel senso del §7, cioè indipendentemente dalla forma di rappresentazione della teoria e dalle condizioni fisiche casuali della realtà, lo si può riconoscere tuttavia in modo assai più facile e significativo di quando si tenti di accrescere fino al limite del consentito le condizioni imposte a $g_{\mu\nu}$, mediante la considerazione delle figure geometriche tetradimensionali con le quali si rappresentano la legge del moto, $\delta \int ds = 0$, della teoria di Einstein per impulsi luminosi $(ds = 0)$, e per punti materiali

$$(ds^2 = \sum g_{\mu\nu} dx_\mu dx_\nu < 0)$$

in una qualsiasi varietà coordinata $\Sigma(x_1 \ldots x_4)$. Per ogni sistema di funzioni delle coordinate dato a piacere $g_{\mu\nu} = f_{\mu\nu}(x_1 \ldots x_4)$, $(|g_{\mu\nu}| > 0)$, l'equazione

$$\delta \int ds = 0 \tag{22}$$

con $ds^2 \leq 0$ determina una serie infinita di linee d'universo, le estremali della varietà $\Sigma(x_1 \ldots x_4)$. Ognuna delle linee d'universo rappresenta secondo la teoria un moto possibile di un punto materiale ($ds < 0$) o di un impulso luminoso nell'etere, e la loro totalità la totalità dei moti possibili[40] di impulsi luminosi e di punti materiali nella stessa varietà spaziotemporale. L'insieme di tutte queste serie di linee d'universo associate ai diversi sistemi di funzioni $g_{\mu\nu} = f_{\mu\nu}(x_1 \ldots x_4)$ si suddivide ora in infiniti insiemi parziali, ciascuno dei quali comprende tutte le serie di linee d'universo, che sono topologicamente uguali ad una, e che quindi non possono essere distinte l'una dall'altra mediante pure osservazioni dei moti della luce e delle masse - senza porsi in relazione arbitrariamente con un sistema di riferimento determinato - . Ad ogni serie di estremali assegnata mediante un determinato sistema di funzioni $g_{\mu\nu} = f_{\mu\nu}(x_1 \ldots x_4)$ ne corrispondono inoltre per la parte II ∞^1 altre, che non solo sono ad esse topologicamente equivalenti, ma che coincidono con esse esattamente, cioè tutte quelle che corrispondono a sistemi di funzioni della forma $g_{\mu\nu} = \lambda \cdot f_{\mu\nu}(x_1 \ldots x_4)$, dove λ è indipendente da $x_1 \ldots x_4$. Ognuno dei suddetti insiemi parziali si può suddividere quindi in ∞^1 sottoinsiemi, dei quali ciascuno anche metricamente contiene esattamente le stesse serie di linee d'universo. Quelle differenze nelle proprietà di curvatura invarianti della varietà spaziotemporale, che sono determinate secondo il §12 dalla diversità del valore del parametro λ associato a questi sottoinsiemi non risultano espresse fisicamente nelle leggi del moto della teoria di Einstein per impulsi luminosi e punti materiali.

§24. L'invarianza matematica assoluta delle leggi del moto di Einstein richiede e si fonda evidentemente sulla circostanza che ognuno dei sunnominati sottoinsiemi contenga tutte le serie di linee d'universo che si possono ottenere l'una dall'altra mediante deformazioni continue; per quanto su esposto un passaggio di una serie di linee d'universo da un sottoinsieme ad un altro non è possibile con nessuna trasformazione continua.

Il contenuto fisico, verificabile mediante pure osservazioni (topologiche), di quanto rappresentato mediante le serie di linee d'universo di un sottoinsieme è tuttavia già dato completamente mediante ogni singola serie dell'insieme presa a piacere, poiché non sussiste alcuna differenza topologica tra le serie dello stesso insieme, e ogni serie si può sempre ricondurre ad ogni altra mediante una scelta opportuna del sistema di riferimento. Da ogni sottoinsieme si possono quindi escludere tutte le serie di linee d'universo salvo una a piacere, senza che per questo il contenuto fisico della rappresentazione relativamente alle equazioni di Einstein (22) sia ristretto o sia altrimenti mutato. Anzi, con questo procedimento saranno rimosse solo quelle parti dell'immagine fornita dalla (22) che di fatto non significano altro che rappresentazioni ripetute di possibilità fisiche già rappresentate una volta, sebbene, come detto, non siano non necessarie per produrre l'invarianza matematica della teoria e anche la sua forma matematicamente elegante. Di contro una rappresentazione del tipo precedentemente descritto[41] soddisfa il requisito della massima economia

[40] Possibili significa sempre: compatibili con le leggi assunte, e quindi qui: compatibili con le leggi del moto introdotte. Vedi terza nota del §7.

[41] Analiticamente ci si avvicina ad una tale rappresentazione mediante il procedimento sviluppato nella parte III, 3, introducendo delle condizioni per le $g_{\mu\nu}$ come funzioni delle coordinate, che si possano soddisfare solo mediante una scelta opportuna del sistema di riferimento indipendente dal carattere metrico invariante casuale della varietà spaziotemporale, e che perciò non possano escludere mai tutte le serie di estremali trasformabili l'una nell'altra e corrispondenti allo stesso λ. Che si possa seguire fino in fondo questa via che, come mostrato nei §§20 e 21, porta ben lontano, rimane una questione aperta. Tuttavia non occorre fornire una rappresentazione del tipo suddetto realmente in forma matematicamente chiusa, ma basta che essa sia pensabile in generale, anche

effettiva possibile[42].

§25. I sistemi di riferimento della realtà, nei quali una tale rappresentazione è realizzata, cioè nei quali le linee d'universo degli impulsi luminosi e dei punti materiali reali appartengono ad una delle serie di estremali in essa contenute, possono a causa del carattere puramente cinematico di quanto rappresentato essere distinti da tutti gli altri in linea di principio mediante opportune osservazioni (vedi §4). La teoria di Einstein non soddisfa quindi fisicamente alcun postulato di relatività, rispetto al gruppo di trasformazioni invariante del quale ogni singola serie di estremali menzionata non sia per suo conto invariante; infatti poiché le serie o sono completamente distinte dal punto di vista topologico, o sono distinte secondo il §12 per il parametro λ in generale invariabile, la trasformazione di una nell'altra è in generale impossibile. Per la parte II una serie completa di estremali della varietà spaziotemporale può andare in se stessa solo per una trasformazione che lasci invariato a meno di un fattore costante λ il corrispondente sistema di funzioni $g_{\mu\nu} = f_{\mu\nu}(x_1 \dots x_4)$, e oltre a quella identica non esiste altra trasformazione di coordinate che compia ciò in generale. Rispetto ad ogni altra trasformazione l'invarianza sussiste solo in casi singolari e del tutto esclusi nella realtà (vedi §12).

Fisicamente nel senso di quanto esposto nel §7 *la teoria di Einstein non soddisfa dunque alcun postulato di relatività; il suo contenuto è quello di una teoria perfettamente assoluta.*

§26. Una teoria, che riconosce la legge del moto (22) per gli impulsi luminosi e i punti materiali, ovvero che dà alle estremali rappresentate dalla (22) in qualche altro modo un significato fisico, può soddisfare postulati di relatività nel senso del §7 soltanto quando essa consenta come possibile solo quella forma singolare della curvatura invariante dell'universo per la quale le funzioni $g_{\mu\nu} = f_{\mu\nu}(x_1 \dots x_4)$ si possono portare con trasformazioni di coordinate non identiche alla forma

$$g'_{\mu\nu} = \lambda \cdot f_{\mu\nu}(x'_1 \dots x'_4)$$

e con ciò la corrispondente serie di estremali può essere trasformata in se stessa. Quanto più una teoria restringe in questa direzione la possibilità di comportamenti della curvatura d'universo di tipo differente[43], tanto più comprensivo è il postulato di relatività che essa può soddisfare. Il limite estremo lo si raggiunge in ogni caso quando, come risulta nella teoria della relatività originaria di Einstein, il tensore di curvatura dell'universo è posto identicamente uguale a zero. In questo caso esiste notoriamente solo una serie di estremali, e questa è invariante rispetto al gruppo di Lorentz, composto con i gruppi della dilatazione uniforme e della traslazione, cioè essa va in se stessa per ogni rotazione, spostamento e stiramento uniforme della varietà spaziotemporale.

Con ciò risulta quindi: *una teoria fisica, che riconosce alle estremali (22) di una varietà spaziotemporale con forma normale minkowskiana dell'elemento di linea un significato accessibile all'osservazione, ovvero che considera il carattere metrico invariante della varietà in qualche altro modo come osservabile in linea di principio,*

---

solo come immagine geometrica.

[42]Si suppone che il parametro λ abbia un significato fisico reale. Altrimenti da ognuno degli insiemi contenuti nella rappresentazione sarebbero da eliminare tutte fuorché una le ∞^1 serie di linee d'universo topologicamente identiche e distinte solo per il corrispondente valore di λ.

[43]Lo si può mostrare con condizioni invarianti imposte a $g_{\mu\nu}$, delle quali l'estrema, $R_{\lambda\nu,\mu\tau} \equiv 0$, richiede l'annullarsi identico della curvatura d'universo.

non può soddisfare a un postulato di relatività (nel senso del § 7) più esteso di quello della teoria della relatività di Einstein originaria. Questa teoria appare quindi, alla luce dell'interpretazione qui data del significato del postulato fisico della relatività, non come una intermedia tra teorie della relatività ugualmente possibili, in parte più speciali, in parte più generali, ma come la realizzazione del postulato di relatività più ampio che possa essere soddisfatto in generale sotto l'ipotesi già ricordata, che le proprietà di curvatura invarianti dell'universo determinate mediante le estremali dell'universo siano in qualche modo osservabili in linea di principio. L'estremo opposto è realizzato nella nuova teoria di Einstein, che, come su esposto, fisicamente non soddisfa affatto alcun postulato di relatività.

Conclusione: La ragione per la quale il postulato della relatività generale non può essere soddisfatto.

§27. Come le leggi del moto considerate, anche altre leggi cinematiche determinano solo mediante il loro contenuto topologico, verificabile con l'osservazione, un gruppo di trasformazioni invariante a loro proprio, il cui postulato di relatività esse soddisfano.

Per esempio si pongano nella forma[44]

$$(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2 = r^2 = \text{ cost.}$$

$$t_1 - t_2 = 0$$

le leggi cinematiche del corpo rigido o, più precisamente, le leggi cinematiche di un punto materiale vincolato rigidamente; allora il gruppo di trasformazioni che mandano in se stessa la serie infinita di linee d'universo e di sistemi di linee d'universo rappresentati mediante le equazioni, considerato come gruppo invariante - non distinto da tutti quelli ad esso simili - è determinato solo mediante la topologia di questa serie di linee d'universo, e poiché le equazioni esprimono le leggi in esse contenute senza ripetizioni superflue, ogni rappresentazione delle stesse leggi deve soddisfare il postulato di relatività che corrisponde a questo gruppo. Esiste quindi in ogni caso invarianza fisica rispetto al gruppo di tutte le trasformazioni, sempre diversamente formato a seconda della scelta del sistema di riferimento, che lasciano invariante lo spazio con il tempo costante e le distanze spaziali di punti d'universo simultanei. Ogni trasformazione ulteriore è fisicamente illegittima, indipendentemente dal fatto che le equazioni siano espresse o meno nella loro forma invariante al riguardo.

§28. Ciò propone la domanda, su quale proprietà generale delle leggi cinematiche si fondi questo emergere di un determinato gruppo invariante di trasformazioni di coordinate come il solo fisicamente corretto, e se non siano pensabili leggi cinematiche, che soddisfino anche fisicamente il postulato di relatività più generale.

Assumiamo che un siffatto sistema di leggi sia dato. Si pensi inoltre il suo contenuto rappresentato mediante una serie o più in generale più (infinite) serie di linee d'universo, superfici d'universo eccetera, completamente distinte dal punto di vista topologico, che riproducano una totalità di moti e configurazioni possibili secondo il sistema di leggi nella stessa varietà spaziotemporale; allora ogni singola serie deve

[44]In questa forma non si tiene conto dell'incompenetrabilità dei corpi rigidi.

ritornare in se stessa per ogni deformazione continua arbitraria. Se si estrae da una qualsiasi serie una parte a piacimento, consistente in un certo sistema di linee d'universo, o cosa equivalente, questa parte non solo è contenuta nella forma e nella giacitura estratta dalla serie, ma anche in tutte le altre forme e giaciture deformate e spostate a piacimento, che vanno a coincidere e a compenetrarsi con la prima in ogni modo pensabile. Ma ciò significa: un sistema di leggi che soddisfi fisicamente il postulato della relatività generale non può escludere, per gli oggetti spaziotemporali per i quali vale, nessun tipo di mutua coincidenza e compenetrazione, che siano in generale geometricamente pensabili conservando il carattere topologico del singolo oggetto.

Invece un tale sistema di leggi può imporre benissimo il verificarsi (regolare) *incondizionato*[45] di determinate coincidenze e compenetrazioni. Se si pensa che queste si verifichino una volta nell'immagine geometrica delle leggi, allora dall'invarianza assoluta dell'immagine deriva che esse devono apparire anche in ogni altra posizione che risulta in essa per spostamento e per deformazione. Questa non può di per sé escludere o limitare la loro comparsa.

Pertanto è il contenuto negativo delle leggi cinematiche a noi note, cioè la restrizione e la negazione in esse contenute di possibilità di coincidenze, che rendono impossibile il soddisfacimento fisico del postulato della relatività generale.

§29. Nelle leggi prima trattate del moto della luce e delle masse nell'etere, che identificano le linee d'universo degli impulsi luminosi e dei punti materiali con estremali della varietà spaziotemporale, la parte negativa del contenuto consiste evidentemente nella legge conseguenza di questa identificazione, che per due punti d'universo distinti non si possano mai condurre due delle suddette linee d'universo che siano distinte. Infatti è proprio questa legge che restringe in ogni varietà coordinata la serie delle linee d'universo tra loro compatibili e con ciò parimenti il gruppo di trasformazioni che portano tale serie in se stessa - in generale è solo la trasformazione identica - poiché essa sarebbe violata da ogni ulteriore linea d'universo aggiunta alla serie.

Allo stesso modo, solo grazie all'esclusione della loro libera mobilità reciproca i sistemi di punti materiali vincolati rigidamente sono utilizzabili in linea di principio per misure (cioè come punti della scala di un regolo rigido) e quindi per l'assegnazione fisica di un determinato gruppo di trasformazioni.

Come esempio di una legge cinematica non condizionata puramente affermativa si potrebbe proporre la legge che ogni punto materiale col passar del tempo si incontri almeno con un altro e che poi debba restare unito permanentemente con esso. La figura geometrica che contiene la totalità delle linee d'universo che non contraddicono questa legge ipotetica deve andare in se stessa per ogni trasformazione continua; allora il suo sovrapporsi con un'immagine deformata a piacimento non può mai dar luogo a una linea d'universo che stia per conto suo, senza confluire con nessun'altra, e quindi a nessuna linea d'universo non contenuta nell'immagine originaria.

Di fatto pare tuttavia che leggi cinematiche di questo tipo puramente affermativo non siano mai state proposte. Ma *solo qualora esclusivamente tali leggi incondizionate e affermative governassero* l'*universo al posto di quelle sole note, negative*

[45]Se le coincidenze e le compenetrazioni fossero solo conseguenze necessarie di altre coincidenze, l'esistenza di queste ultime da sole sarebbe di nuovo esclusa, e le leggi non potrebbero soddisfare quindi il postulato della relatività generale.

e *condizionate, il postulato della relatività generale avrebbe validità effettiva nel senso del* § *7.*

Königsberg i. Pr., 6 agosto 1917.

(ricevuto il 14 agosto 1917.)