Corso di Fisica Quantistica

Dip.to di Fisica, Università di Pavia

UNIVERSITÀ DI PAVIA

DIPARTIMENTO DI FISICA

Esercizi sulla radiazione di corpo nero e i quanti di Planck:

6 febbraio 2018

Lucio Andreani

Web: http://fisica.unipv.it/dida/corso-fisica-quantistica.htm

Eventuali errori possono essere segnalati a lucio.andreani@unipv.it Grazie!

Bibliografia

[CF] A. Caforio, A. Ferilli, *Fisica!* Le Monnier Scuola

[HRK] D. Halliday, R. Resnick, K.S. Krane, *Fisica 2*, Casa Editrice Ambrosiana

[MNV] P. Mazzoldi, M. Nigro, C. Voci: *Fisica – Vol II* , EdiSES

Formule utili

$$\lambda_{\max} T = 2.90 \cdot 10^{-3}\ m \cdot K = 2.90 \cdot 10^{3}\ \mu m \cdot K$$

Legge di spostamento di Wien

$$\varepsilon_{\mathrm{cn}} = \sigma T^4, \quad \sigma = 5.6705 \cdot 10^{-8}\ \frac{W}{m^2 K^4}$$

Potere emissivo integrale del corpo nero: legge di Stefan-Boltzmann

$$\varepsilon_{\lambda,\mathrm{cn}} = \frac{2\pi c^2 h}{\lambda^5} \frac{1}{e^{hc/(\lambda k_B T)} - 1}$$

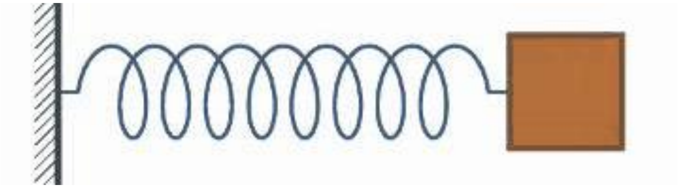
$$\varepsilon_{\nu,\mathrm{cn}} = \frac{2\pi h \nu^3}{c^2} \frac{1}{e^{h\nu/(k_B T)} - 1}$$

Potere emissivo specifico del corpo nero: legge di Planck (in λ o in $\nu = c/\lambda$)

$$E_n = E_0 + nhf$$

Energia di un oscillatore a frequenza f: ipotesi dei quanti di Planck

HR cap. 49 esempio 3



Un corpo di massa *m* pari a 300 g, legato a una molla di costante elastica *k* pari a 3 N/m, oscilla con un'ampiezza *A* di 10 cm. Considerando questo sistema come un oscillatore quantistico, si trovi (a) l'intervallo di energia fra i livelli quantici contigui, e (b) il numero quantico che descrive le oscillazioni.

Soluzione: La frequenza di oscillazione è data da

$$\nu = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{3\,\mathrm{N/m}}{0.3\,\mathrm{kg}}} = 0.5\,\mathrm{s}^{-1}\,.$$

L'intervallo di energia fra livelli contigui è dato da $\Delta E = h\nu = 3.3\cdot 10^{-34}$ J. Si tratta di un'energia minuscola a livello macroscopico, per cui i salti fra livelli quantizzati (dovuti ad es. a perdita di energia dovuta all'attrito) non sono misurabili.

Per il punto (b) bisogna prima calcolare l'energia meccanica, che è data da

$$E = \frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}\left(3\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}\right)(0.1\,\mathrm{m})^2 = 0.015\,\mathrm{J}.$$

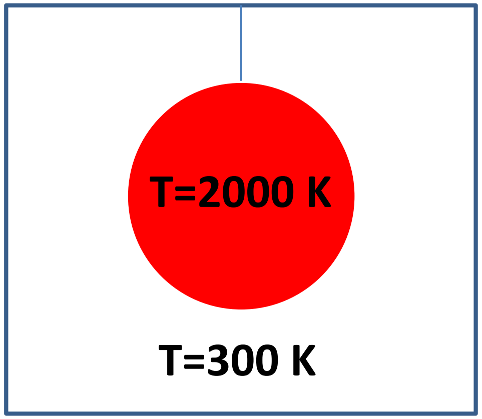
Poiché le energie dei livelli quantizzati sono espresse da $E_n = E_0 + nh\nu$, il numero quantico è dato da (trascuriamo $E_0 << E_n$):

$$n = \frac{E}{h\nu} = \frac{0.015\,\mathrm{J}}{3.3\cdot 10^{-34}\,\mathrm{J}} = 4.6\cdot 10^{31}.$$

Si tratta di un numero enorme, $n >>> 1$: l'oscillatore si trova in regime classico.

MNV Esempio 8.1

Una sferetta di tungsteno di raggio r=1 cm è sospesa al centro di un grande recipiente cavo alla temperatura T_0=300 K che la circonda completamente. Determinare la potenza richiesta per mantenere la sferetta a una temperatura T=2000 K. Si assuma che a questa temperatura il coefficiente di assorbimento del tungsteno sia a=0.35.



Soluzione: il potere emissivo della sferetta è pari a $\varepsilon = a\varepsilon_{cn} = a\sigma T^4$. Detta $\Sigma = 4\pi r^2$ la superficie della sferetta, essa emette un'energia per unità di tempo pari a $\varepsilon\Sigma = a\Sigma\sigma T^4$. D'altra parte l'energia radiante assorbita dalla sferetta per unità di tempo è pari a $a\Sigma\sigma T_0^4$. Quindi per mantenere la sferetta a una temperatura $T>T_0$ occorre fornire una potenza pari a

$$P = a\Sigma\sigma(T^4 - T_0^4) = 0.35\cdot 4\pi\cdot(10^{-2}\,\mathrm{m})^2\cdot 5.67\cdot 10^{-8}\,\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2\mathrm{K}^4}(2000^4 - 300^4)\mathrm{K}^4 \cong 400\ \mathrm{W}.$$

Si noti che il termine di assorbimento è trascurabile rispetto all'emissione: $(300/2000)^4 = 5\cdot 10^{-4}$.

La lampadina a incandescenza!

La lampada a incandescenza, inventata da Thomas Edison nel 1878, è stata la fonte di illuminazione per eccellenza fino a pochi anni fa, quando è stato imposta per legge la sua sostituzione con le più efficienti lampade a fluorescenza (alogene) oppure con le lampade a LED. La lampada a incandescenza è costituita da un bulbo contenente un filamento di tungsteno, che viene riscaldato ad una temperatura dell'ordine di T=2700 K (il punto di fusione del tungsteno è 3422 °C). A questa temperatura possiamo assumere un coefficiente di assorbimento a=0.35.

Con questi dati, seguendo l'esempio per problema precedente, (a) si stimi l'area superficiale del filamento di tungsteno in una lampadina di potenza 100 W, (b) si calcoli la lunghezza d'onda di massima emissione della lampadina.
(c) Come si può calcolare l'efficienza luminosa, ossia la frazione della potenza elettrica che viene emessa sotto forma di luce visibile? Perché una lampadina "scalda"?

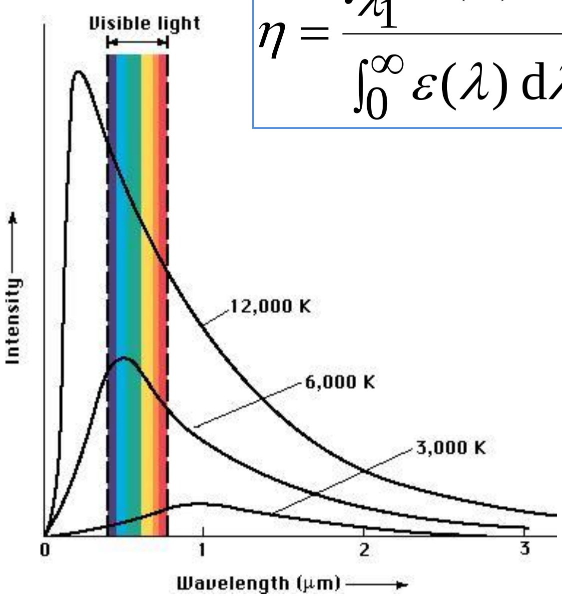
Soluzione: (a) Assumendo di poter trascurare il termine di assorbimento, la potenza elettrica assorbita viene emessa sotto forma di radiazione di corpo nero:

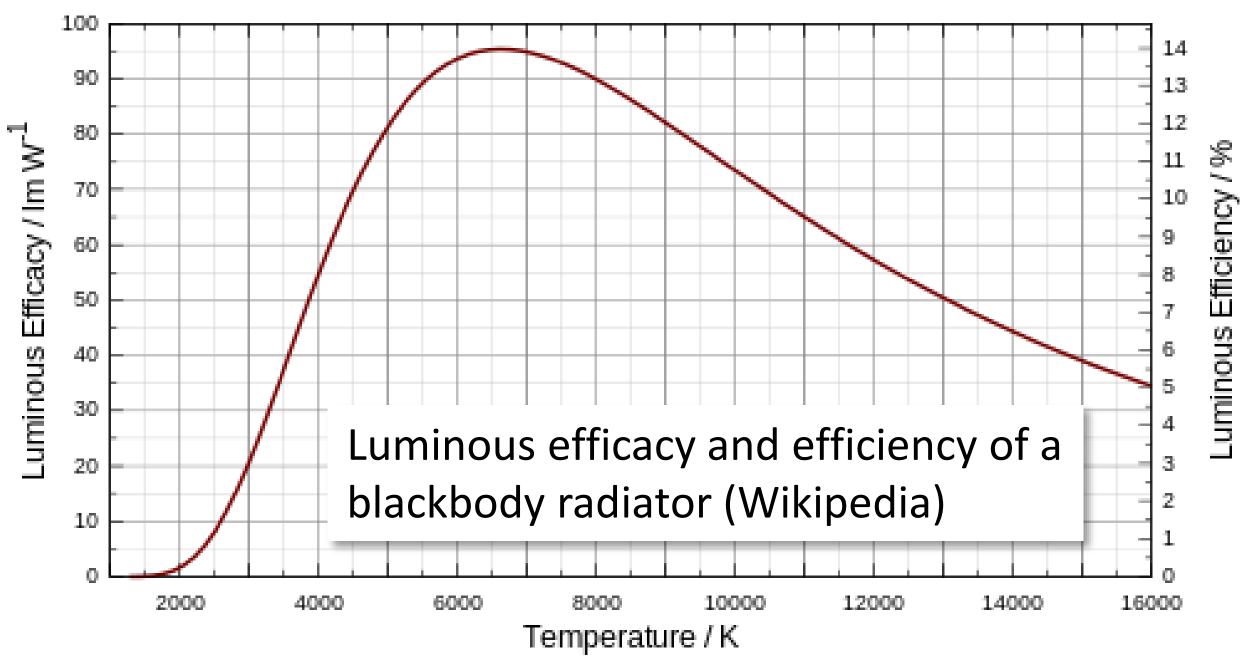
$$P = a\Sigma\sigma T^4 \quad \Rightarrow \quad \text{superficie } \Sigma = \frac{P}{a\sigma T^4} = 9.48\cdot 10^{-5}\ \mathrm{m}^2 \approx 1\,\mathrm{cm}^2.$$

(b) La lunghezza d'onda di massima emissione è $\lambda_{max} = \dfrac{2.90\cdot 10^{-3}\ \mathrm{m/K}}{2700\ \mathrm{K}} = 1.074\ \mu\mathrm{m}.$

(c) L'efficienza luminosa è data dalla potenza emessa alle lunghezze d'onda visibili (da λ_1=390 nm a λ_2=700 nm), divisa per la potenza totale emessa. A T=2700 K l'efficienza luminosa è attorno al 2%: la maggior parte dell'energia viene emessa sotto forma di radiazione infrarossa, che "scalda" ma non è visibile.

$$\eta = \frac{\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \varepsilon(\lambda)\,\mathrm{d}\lambda}{\int_0^{\infty} \varepsilon(\lambda)\,\mathrm{d}\lambda}$$





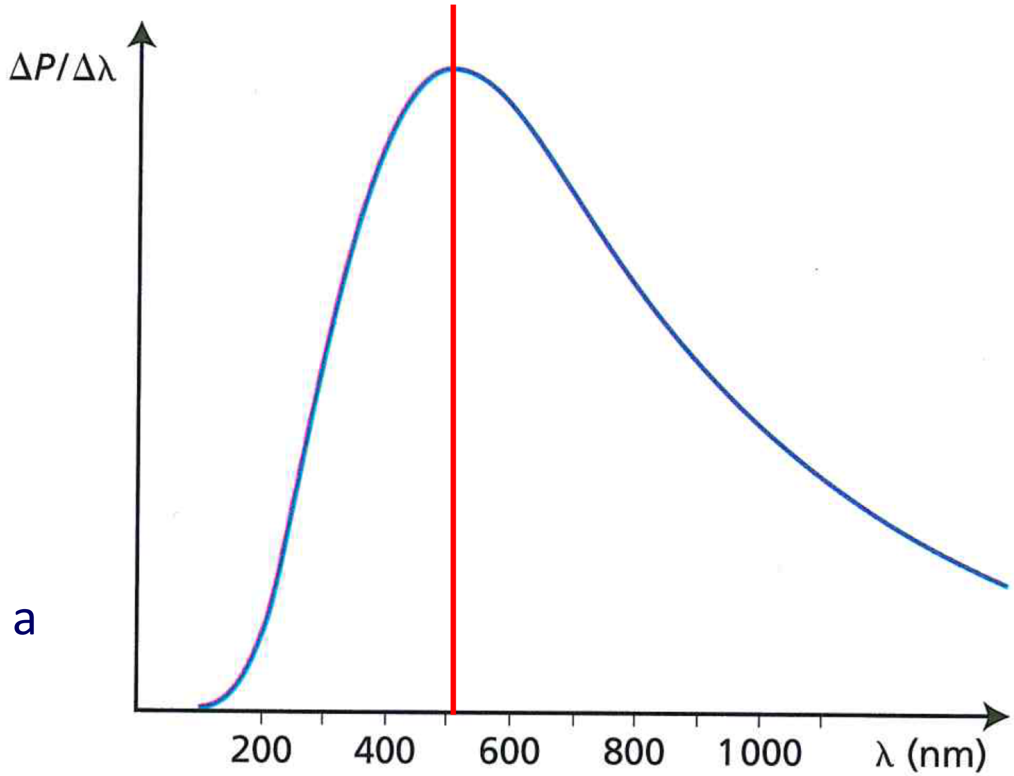
Luminous efficacy and efficiency of a blackbody radiator (Wikipedia)

CF unità 23 pb 8

La superficie del Sole emette con buona approssimazione secondo lo spettro di un corpo nero, come mostrato in figura.

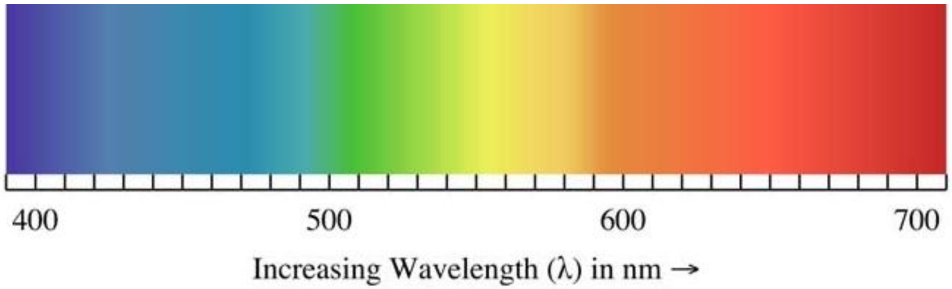
Qual è la temperatura superficiale del sole?

A quale colore corrisponde il massimo dello spettro di emissione?



Soluzione: Il massimo di emissione è a una lunghezza d'onda $\lambda_{max} \approx 510$ nm. Dalla legge di Wien otteniamo

$$T = \frac{2.90 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{mK}}{5.1 \cdot 10^{-7}\,\mathrm{m}} \approx 5700\ \mathrm{K}.$$



La lunghezza d'onda del massimo di emissione corrisponde al colore ***verde***.

Ma… di che colore è il Sole?

La luce del sole è una miscela di diversi colori, che appare ai nostri occhi come luce **bianca**. Questo si vede chiaramente in immagini del sole prese dallo spazio, al di fuori dell’atmosfera terrestre.

L’arcobaleno consiste di luce del sole, separate in tutti i colori dello spettro. Ogni colore ha una diversa lunghezza d’onda – massima per il rosso, minima per il blu.

Immagini dal sito http://solar-center.stanford.edu/SID/activities/GreenSun.html

E allora perché il Sole ci appare giallo, o rosso…?

Il Sole spesso ci appare giallo; osservandolo all'alba o al tramonto, quando è basso nel cielo, ci può apparire giallo, arancione, o rosso. Questo avviene perché i colori a piccola lunghezza d'onda (verde, blu, violetto) vengono diffusi dall'atmosfera, quindi solo i colori rosso/arancione/giallo raggiungono i nostri occhi attraverso un'atmosfera spessa.

Questa è la stessa ragione per cui, quando il Sole è alto sull'orizzonte, il cielo appare blu. La diffusione della luce da parte dell'atmosfera segue la legge di Rayleigh: $D \propto \omega^4 \propto \lambda^{-4}$.

Del resto, anche la luna può apparire rossa… come la Superluna del 31 gennaio 2018.

HR cap. 49 esempio 1

Consideriamo le stelle Sirio, Sole e Betelgeuse, che hanno le lunghezze d'onda di massima emissione di 240, 500 e 850 nm, rispettivamente:

(a) Quali sono le temperature di superficie di queste stelle?
(b) Quali sono le intensità di irraggiamento di queste tre stelle?

Soluzione: (a,b) Dalle leggi di Wien $T=2.90\cdot10^3/\lambda_{max}(\mu m)$ e di Stefan-Boltzmann $I=\sigma T^4$ otteniamo:

Stella	λ_{max} (nm)	Colore apparente	T (K)	I (W/m^2)
Sirio	240	Bianco-azzurro	12000	$1.2\cdot10^9$
Sole	500	Giallo	5800	$6.4\cdot10^7$
Betelgeuse	850	Rossa	3400	$7.6\cdot10^6$

(c) Sapendo che il raggio del Sole è R_s =0.7·10^6 km e quelli di Sirio e Betelgeuse sono rispettivamente 1.7R_s e 1180 R_s , calcolare la potenza totale irraggiata (ossia la luminosità L) di queste tre stelle.

Soluzione: La luminosità è data da $L=I\cdot 4\pi R^2$.

Stella	λ_{max} (nm)	Colore apparente	T (K)	I (W/m²)	R (m)	L (W)
Sirio	240	Bianco-azzurro	12000	$1.2\cdot 10^9$	$1.19\cdot 10^9$	$2\cdot 10^{28}$
Sole	500	Giallo	5800	$6.4\cdot 10^7$	$7\cdot 10^8$	$4\cdot 10^{26}$
Betelgeuse	850	Rossa	3400	$7.6\cdot 10^6$	$8\cdot 10^{11}$	$6\cdot 10^{31}$

N.b. Sirio è la stella più brillante del cielo notturno ed è fra le più vicine al Sole (8.6 a.l.). Betelgeuse ha una altissima luminosità (più di 10^5 volte quella del Sole), grazie alla sua enorme dimensione che compensa la temperatura più bassa. Pur distando 600 a.l. dal Sole è la decima stella più brillante del cielo notturno. È una *supergigante rossa* e concluderà la sua esistenza esplodendo in una supernova.