



UNIVERSITÀ  
DI PAVIA

# Corso di Fisica Quantistica

*Dip.to di Fisica, Università di Pavia*



DIPARTIMENTO  
DI FISICA

## Esercizi su spettri atomici e modelli dell'atomo:

### 14 febbraio 2018

### Lucio Claudio Andreani

Web: <http://fisica.unipv.it/dida/corso-fisica-quantistica.htm>

Eventuali errori possono essere segnalati a [lucio.andreani@unipv.it](mailto:lucio.andreani@unipv.it) Grazie!

# Bibliografia

- [CF] A. Caforio, A. Ferilli, *Fisica!* Le Monnier Scuola
- [HRK] D. Halliday, R. Resnick, K.S. Krane, *Fisica 2*,  
Casa Editrice Ambrosiana
- [MNV] P. Mazzoldi, M. Nigro, C. Voci: *Fisica – Vol II* , EdiSES

# Formule utili

$$\frac{1}{\lambda} = R \left( \frac{1}{2^2} - \frac{1}{n^2} \right), \quad n = 3, 4, 5, \dots$$

Serie di Balmer, costante di Rydberg

$$\frac{1}{\lambda} = R \left( \frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2} \right), \quad n_1 < n_2$$

Legge generale per lo spettro dell'atomo di idrogeno (Lyman  $n_1=1$ , Balmer  $n_1=2$ , Paschen...)

$$E_n = -\frac{m_e e^4}{8\epsilon_0^2 h^2 n^2} = -\frac{\text{Ry}}{n^2}$$

Modello di Bohr: energia dei livelli dell'atomo di idrogeno

$$\text{Ry} = |E_1| = 13.6 \text{ eV}$$

Energia di Rydberg

$$U_{\text{pot}} = -2E_{\text{kin}}$$

Energia cinetica e energia potenziale per l'atomo idrogenoide (teorema del viriale)

$$\Rightarrow E = E_{\text{kin}} + U_{\text{pot}} = -E_{\text{kin}} = \frac{1}{2} U_{\text{pot}}$$

# N.b. derivazione e andamenti...

Forza centripeta = forza Coulombiana:

$$\frac{mv^2}{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r^2}$$

Energia cinetica e energia potenziale (teorema del viriale):

$$\Rightarrow E_{\text{kin}} = \frac{1}{2}mv^2 = -\frac{1}{2}U_{\text{pot}}$$

Quantizzazione:

$$L = n \frac{h}{2\pi} \equiv n\hbar \quad \text{oppure} \quad 2\pi r = n\lambda, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Da qui si ricava l'energia dei livelli dell'atomo di idrogeno...

$$E_n = -\frac{m_e e^4}{8\epsilon_0^2 h^2 n^2} = -\frac{\text{Ry}}{n^2}$$

... e il raggio...

$$r_n = n^2 r_1, \quad r_1 = a_B \equiv \frac{4\pi\epsilon_0 \hbar^2}{m_e e^2} = 0.53 \text{ \AA}$$

... e la velocità...

$$v_n = \frac{1}{n} v_1, \quad v_1 = \frac{\hbar}{a_B m_e} = \frac{e^2}{2\epsilon_0 h}$$

Ioni idrogenoidi con carica  $Ze$ : valgono le formule precedenti, sostituendo  $e^2 \rightarrow Ze^2$ .  
Ad esempio, l'energia dello stato fondamentale è  $E_n(Z) = Z^2 E_n(Z=1)$ .

# CF problema 2

Lo ione  $\text{He}^+$  è un sistema idrogenoide con numero atomico uguale a 2.

(a) Qual è l'energia di ionizzazione dell' $\text{He}^+$ , cioè la quantità minima di energia che si deve trasferire a questo ione, nel caso in cui si trovi nello stato fondamentale, per liberare il suo unico elettrone? (b) Volendo fornire tale energia per irraggiamento elettromagnetico, qual è la lunghezza d'onda massima della radiazione da utilizzare?

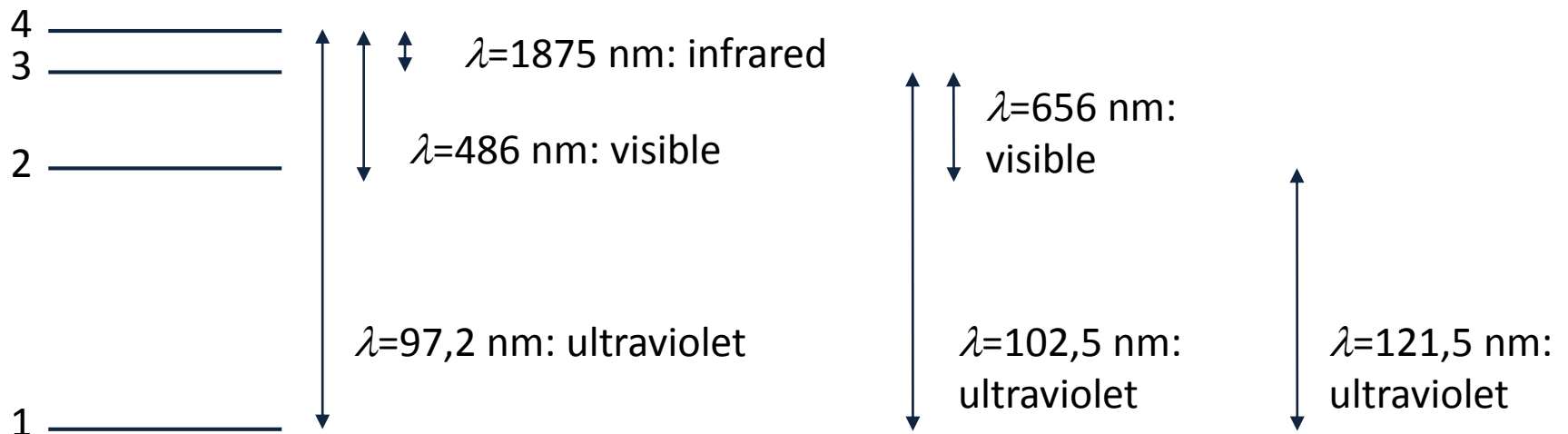
**Soluzione:** (a) Detta  $E_1 = -13.6 \text{ eV}$  l'energia dello stato fondamentale dell'atomo di idrogeno, l'energia di ionizzazione dell' $\text{He}^+$  è data da  $\Delta E = Z^2 E_1$ , dove  $Z=2$  rappresenta la carica dello ione. Otteniamo quindi  $\Delta E = 4 \cdot 13.6 \text{ eV} = 8.71 \cdot 10^{-18} \text{ J}$ .

(b) La lunghezza d'onda massima della radiazione da fornire per estrarre l'elettrone dallo ione è quindi  $\lambda_{\text{max}} = hc/\Delta E = 2.28 \cdot 10^{-8} \text{ m} = 22.8 \text{ nm}$  (radiazione nell'ultravioletto).

**Quesito 3** - Prova maturità di fisica del 25/10/2016 (<http://fisica.unipv.it/dida/maturita.htm>): Un atomo di idrogeno si trova in uno stato eccitato dopo aver assorbito un fotone ultravioletto di lunghezza d'onda  $\lambda=97,2$  nm. Questo atomo può riportarsi allo stato fondamentale seguendo diverse transizioni a ognuna delle quali corrisponde la emissione di luce di una particolare lunghezza d'onda. Quante sono le transizioni possibili che provocano emissione di fotoni con lunghezza d'onda diversa da quella del fotone assorbito? Quali tra queste transizioni provocano emissione nel visibile? (costante di Rydberg:  $R=1,0974 \cdot 10^7 \text{ m}^{-1}$ )

**Soluzione:** (a) Dalla legge di Rydberg  $\frac{1}{\lambda} = R \left( \frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2} \right)$  ponendo  $n_1=1$  e  $\lambda=97,2$  nm si trova  $n_2=4$ , che è il numero quantico dello stato eccitato.

A questo punto ci sono varie transizioni possibili, con  $n_2=4, 3, 2$  e  $n_1 < n_2$ :



**Quesito 6** Prova maturità di fisica dell'11/11/2016 (<http://fisica.unipv.it/dida/maturita.htm>):  
L'energia di un elettrone che occupa un'orbita permessa nell'atomo di idrogeno, secondo il modello di Bohr, è data dalla relazione:

$$E_n = -\frac{13.6 \text{ eV}}{n^2}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Determina la velocità e il raggio dell'orbita dell'elettrone quando questo si trova sul primo livello eccitato dell'atomo.

Nel modello atomico di Bohr, l'energia potenziale (negativa) è pari a meno due volte l'energia cinetica (positiva), per cui l'energia totale è pari a meno una volta l'energia cinetica:

$$U_{\text{pot}} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r}, \quad E_{\text{kin}} = \frac{1}{2} m_e v^2, \quad U_{\text{pot}} = -2E_{\text{kin}}$$

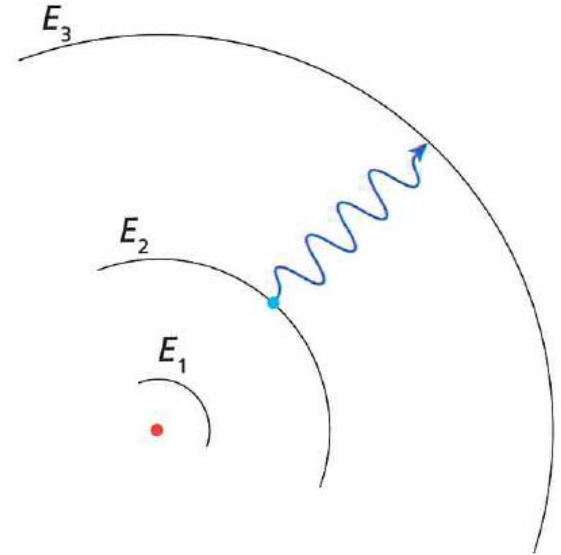
$$E_n = U_{\text{pot}} + E_{\text{kin}} = -E_{\text{kin}} = -\frac{\text{Ry}}{n^2}, \quad \text{Ry} = 13,6 \text{ eV}$$

Da qui si ricava la velocità per ogni livello  $n$ :  $v_n = \sqrt{\frac{2|E_n|}{m_e}} = \frac{1}{n} \sqrt{\frac{2\text{Ry}}{m_e}} = \frac{1}{n} \frac{\hbar}{a_B m_e}$ ,  
che fornisce  $v_n = 1,09 \cdot 10^6 \text{ m/s}$  per  $n=2$ .

Il raggio è dato da  $r_n = n^2 a_B$ , dove  $a_B = \frac{4\pi\epsilon_0 \hbar^2}{m_e e^2} = 0,53 \text{ \AA}$  è il raggio di Bohr, da cui si ricava  $r_n = 2,12 \text{ \AA}$  per  $n=2$ .

# CF problema 69

- (a) Quanta energia è necessario fornire a un elettrone per indurlo a compiere, nell'atomo di idrogeno, il salto quantico mostrato in figura?
- (b) Di quanto variano la sua energia cinetica e la sua energia potenziale, prese singolarmente?



**Soluzione:** (a) Dalla formula per i livelli dell'atomo di idrogeno, l'energia necessaria è  $\Delta E = (1/4 - 1/9) \cdot 13.6 \text{ eV} = 1.889 \text{ eV} = 3.022 \cdot 10^{-19} \text{ J}$ .

(b) Occorre ricordare che in ogni stato con numero quantico  $n$  l'energia potenziale è pari a  $-2$  volte l'energia cinetica, ossia  $E_n = E_{n,\text{kin}} + E_{n,\text{pot}} = -E_{n,\text{kin}} = E_{n,\text{pot}}/2$ . Quindi la variazione di energia cinetica è  $\Delta E_{\text{kin}} = -\Delta E = -1.889 \text{ eV}$ , la variazione di energia potenziale è  $\Delta E_{\text{pot}} = 2\Delta E = 3.778 \text{ eV}$ . Ovviamente la variazione totale di energia è la somma delle due:  $\Delta E = \Delta E_{\text{kin}} + \Delta E_{\text{pot}}$ .



# La stella Zeta Puppis (Naos)

*Dal pb 2, prova maturità di fisica del 12/01/2017 (<http://fisica.unipv.it/dida/maturita.htm>):*

Nel 1896 l'astronomo Edward Charles Pickering, analizzando lo spettro di emissione della stella Zeta Puppis, scoprì la presenza di alcune righe con lunghezza d'onda uguale a quella prevista dalla serie di Balmer (656.5, 486.3, 434.2 nm) e per questo da lui attribuite alla presenza di idrogeno nella stella. Scoprì inoltre la presenza di altre tre righe spettrali, chiamate righe di Pickering, di lunghezza d'onda  $\lambda$  rispettivamente pari a

455.1 nm      541.1 nm      e      1012.3 nm .

Le righe di Pickering possono essere interpretate con una formula tipo quella di Rydberg:

$$\frac{1}{\lambda} = R' \left( \frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2} \right), \quad n_2 > n_1$$

Tuttavia la costante  $R'$  è diversa da quella di Rydberg  $R=1.097 \cdot 10^7 \text{ m}^{-1}$ .

(a) Dimostra che con  $n_1 = 4$  e  $R'=4R$  si possono determinare valori interi di  $n_2$  che corrispondono sia alle righe di Balmer, sia alle righe di Pickering. (b) A quale ione idrogenoide corrispondono le righe aggiuntive osservate da Pickering? Quale elemento è presente nella stella Zeta Puppis?

**Soluzione:** (a) Utilizziamo la formula di tipo Rydberg proposta nel testo con  $R'=4R=4.388\cdot 10^7 \text{ m}^{-1}$ . La tabella riporta le righe calcolate partendo da  $n_1=4$ . La formula permette di riprodurre tutte le righe osservate, sia quelle di Pickering sia quelle di Balmer.

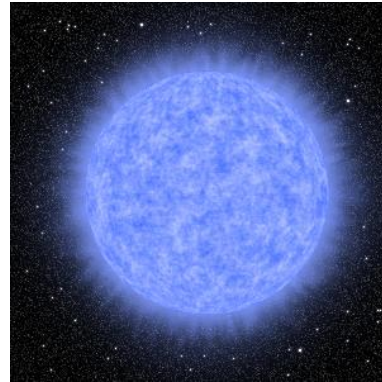
$n_2$	$\lambda$ (nm)	riga
5	1012.9	Pickering
6	656.3	Balmer con $n=3$
7	541.4	Pickering
8	486.2	Balmer con $n=4$
9	454.4	Pickering
10	434.1	Balmer con $n=5$

(b) Nel modello atomico di Bohr con uno ione idrogenoide di carica  $Ze$ , l'espressione della costante di Rydberg diventa:

$$R' = \frac{1}{hc} \frac{m_e (Ze^2)^2}{8h^2 \epsilon_0^2} = Z^2 R$$

e per  $Z=2$  abbiamo  $R'=4R$ . Questo spiega le righe spettrali osservate da Pickering e suggerisce di attribuirle ad uno ione idrogenoide con  $Z=2$ , ossia ad atomi di elio ionizzati.

# Zeta Puppis / Naos



Supergigante blu  
Distanza 1086 anni luce  
Raggio  $14 R_{\odot}$   
Temperatura 42'700 K  
Classe spettrale O4  
Luminosità  $550\,000 L_{\odot}$

1896: Scoperta delle righe dell'He ionizzato



Edward Charles Pickering  
(1846-1919)



Williamina Paton Stevens Fleming  
(1857-1911)