Corso di Fisica Quantistica

Dip.to di Fisica, Università di Pavia

UNIVERSITÀ DI PAVIA

DIPARTIMENTO DI FISICA

Esercizi su lunghezza d'onda di de Broglie e principio d'indeterminazione:

21 febbraio 2018

Lucio Claudio Andreani

Web: http://fisica.unipv.it/dida/corso-fisica-quantistica.htm

Eventuali errori possono essere segnalati a lucio.andreani@unipv.it Grazie!

Bibliografia

[CF] A. Caforio, A. Ferilli, *Fisica!* Le Monnier Scuola

[HRK] D. Halliday, R. Resnick, K.S. Krane, *Fisica 2*, Casa Editrice Ambrosiana

[MNV] P. Mazzoldi, M. Nigro, C. Voci: *Fisica – Vol II* , EdiSES

Simulazioni MIUR di seconda prova di maturità di fisica:
http://fisica.unipv.it/dida/maturita.htm

Formule utili

$$\lambda = \frac{h}{p}, \qquad h = 6.626 \cdot 10^{-34}\ \mathrm{Js}$$

Relazione di de Broglie

$$E = cp = \frac{hc}{\lambda}, \qquad E(\mathrm{eV}) = \frac{1.24}{\lambda\,(\mu\mathrm{m})}$$

Energia/lunghezza d'onda dei fotoni

$$E = \sqrt{m_0^2 c^4 + c^2 p^2} = \gamma m_0 c^2, \quad p = \gamma m_0 v, \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad \beta = \frac{v}{c}$$

Formule relativistiche

$$m_\mathrm{e} = 0.91 \cdot 10^{-30}\ \mathrm{kg}, \quad m_\mathrm{e} c^2 = 0.511\,\mathrm{MeV}$$

Massa/energia di riposo: elettrone

$$m_\mathrm{p} = 1.67 \cdot 10^{-27}\ \mathrm{kg}, \quad m_\mathrm{p} c^2 = 0.938\,\mathrm{GeV}$$

Massa/energia di riposo: protone

$$2d \sin\theta = n\lambda, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Diffrazione: legge di Bragg

$$\Delta x \Delta p \cong \hbar, \qquad \Delta E \Delta t \cong \hbar$$

Principio di inteterminazione

Quesito n. 6 *Prova maturità di fisica del 12/01/2017: Dimostra che a un elettrone non relativistico, accelerato da fermo mediante una differenza di potenziale ΔV misurata in volt, si può associare un'onda di de Broglie la cui lunghezza d'onda λ può essere espressa dalla formula:*

$$\lambda = \sqrt{\frac{1{,}504}{\Delta V\ (\mathrm{V})}}\ \mathrm{nm}$$

Calcola tale lunghezza d'onda per ΔV=50 V.

Per un elettrone non relativistico si ha $E = \dfrac{p^2}{2m_\mathrm{e}}$ da cui $p = (2m_\mathrm{e}E)^{1/2}$

e quindi
$$\lambda = \left(\frac{h^2}{2m_\mathrm{e}E}\right)^{1/2}.$$

L'energia acquistata da un elettrone in un potenziale di accelerazione ΔV è pari a $e\Delta V$. Assumendo ΔV= 1 V, si ottiene

$$\lambda = \left(\frac{\left(6{,}62607 \cdot 10^{-34}\ \mathrm{J/s}\right)^2}{2 \cdot 0{,}9109 \cdot 10^{-30}\ \mathrm{kg} \cdot 1{,}602177 \cdot 10^{-19}\ \mathrm{C} \cdot 1\ \mathrm{V}}\right)^{1/2} = \sqrt{1{,}504} \cdot 10^{-9}\ \mathrm{m}$$

da cui la formula del testo.

Se ΔV=50 V si ottiene λ=0,173 nm=1,73 A. Non è un valore particolarmente piccolo: gli elettroni nel microscopio elettronico a trasmissione (TEM) sono accelerati con una differenza di potenziale che può arrivare fino a 300 keV e la lunghezza d'onda è molto più piccola. Però in quel caso è necessaria una trattazione relativistica.

CF unità 24 pb 55 e 64 p. 220

55. Un protone (massa di riposo $m_0 \equiv m_p = 1.67 \cdot 10^{-27}$ kg) è accelerato a una velocità pari a $v = 1.5 \cdot 10^8$ m/s. Qual è la lunghezza d'onda di de Broglie della particella?

Soluzione – Il protone è relativistico con $\beta \equiv v/c = 0.5$. Quindi $p = \gamma m_0 v$ con

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = 1.155 \;\Rightarrow\; p = 2.89 \cdot 10^{-19}\ \mathrm{kg \cdot ms^{-1}} \;\Rightarrow\; \lambda = \frac{h}{p} = 2.29 \cdot 10^{-15}\ \mathrm{m}$$

64. Utilizzando la relazione relativistica che esprime l'energia di una particella in funzione della sua quantità di moto, calcolare l'energia totale, l'energia cinetica e la velocità di un protone di lunghezza d'onda pari a $0.2 \cdot 10^{-15}$ m.

Soluzione – La quantità di moto è data da $p = h/\lambda = 3.3 \cdot 10^{-18}$ kg m/s. L'energia è data da

$$E = \sqrt{m_0^2 c^4 + c^2 p^2} = 10^{-9}\ \mathrm{J} = 6.26\ \mathrm{GeV}, \quad E_{\mathrm{kin}} = E - m_0 c^2 = 5.32\ \mathrm{GeV}.$$

Osservando che l'energia di riposo è $m_0 c^2 = 1.5 \cdot 10^{-10}$ J $= 0.938$ GeV, la velocità si ottiene da

$$E = \gamma m_0 c^2 \;\Rightarrow\; \gamma = \frac{6.26\ \mathrm{GeV}}{0.938\ \mathrm{GeV}} = 6.67 \;\Rightarrow\; \beta = \sqrt{1 - \frac{1}{\gamma^2}} = 0.989 \;\Rightarrow\; v = 0.989c.$$

CF unità 24 problema 1 p. 211

Un fascio di elettroni accelerati per mezzo di una tensione di 104 V si diffrange su un cristallo. Se il primo massimo di intensità della figura di diffrazione compare lungo la direzione che forma un angolo di 12.37° con i piani reticolari del cristallo, qual è la distanza fra tali piani?

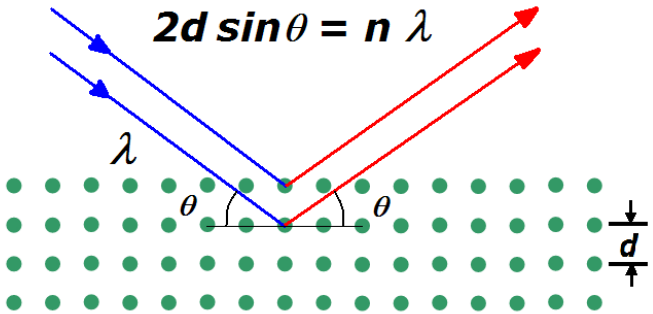
Soluzione – Applichiamo la relazione di de Broglie per trovare la lunghezza d'onda dell'elettrone (che ha un'energia bassa e non relativistica):

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{\sqrt{2m_e E}} = \frac{h}{\sqrt{2m_e e\Delta V}} = \frac{6.626 \cdot 10^{-34}\ \mathrm{Js}}{\left(2 \cdot 0.91 \cdot 10^{-30}\ \mathrm{kg} \cdot 104 \cdot 1.6 \cdot 10^{-19}\ \mathrm{J}\right)^{1/2}} = 1.20\ \mathrm{A}$$

e poi la legge di Bragg per trovare la distanza fra i piani:

$$2d\sin\theta = n\lambda,\ \ n = 1$$

$$\Rightarrow \qquad d = \frac{\lambda}{2\sin\theta} = 2.8\ \mathrm{A}.$$



Diffrazione dai cristalli: $\lambda \sim d$

… di raggi X: Max von Laue (1912)

$$E = \frac{hc}{\lambda}, \quad \lambda \approx 10^{-10}\ \mathrm{m} \quad \Rightarrow \quad E > 10\ \mathrm{keV}$$

… di elettroni: Davisson e Germer (1927)

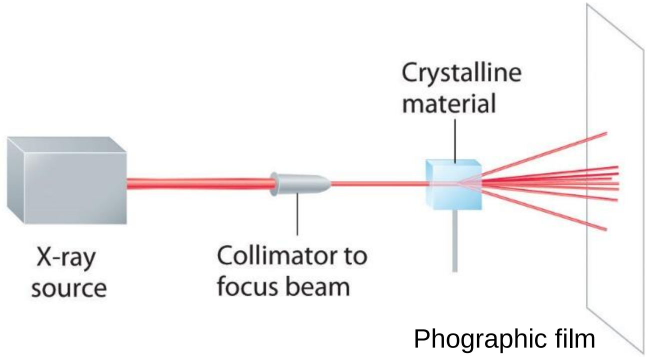
$$E = \frac{p^2}{2m_e} = \frac{h^2}{2m_e\lambda^2}, \quad \lambda \approx 10^{-10}\ \mathrm{m}$$

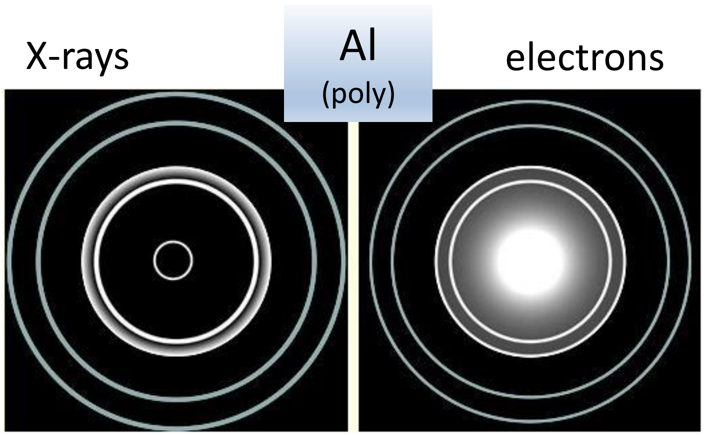
$$m_\mathrm{e} = 0.91 \cdot 10^{-30}\ \mathrm{kg} \Rightarrow \quad E \approx 150\ \mathrm{eV}$$

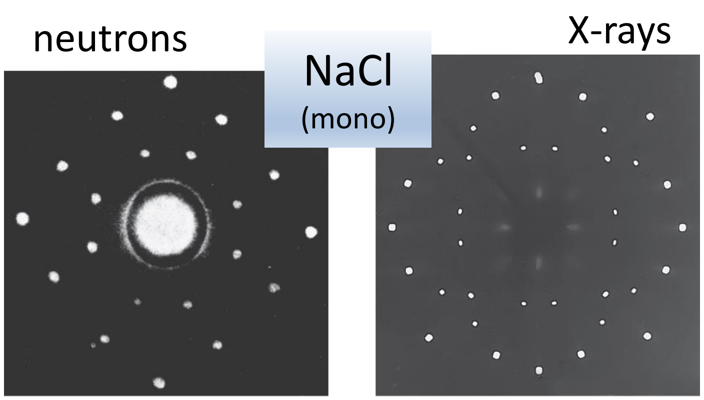
… di neutroni: 1932 (Chadwick), 1936

$$E = \frac{p^2}{2m_\mathrm{n}} = \frac{h^2}{2m_\mathrm{n}\lambda^2}, \quad \lambda \approx 10^{-10}\ \mathrm{m}$$

$$m_\mathrm{n} = 1.67 \cdot 10^{-27}\ \mathrm{kg} \Rightarrow \quad E \approx 0.081\ \mathrm{eV}$$







Quesito 3, *prova maturità di fisica dell'11/11/2016: Il potere risolutivo di un microscopio ottico è inversamente proporzionale alla lunghezza d'onda della luce utilizzata per illuminare il campione da osservare. Un maggiore potere risolutivo permette di distinguere dettagli più piccoli del campione in esame e di ottenere ingrandimenti maggiori.*

In un microscopio elettronico, la luce visibile è sostituita da un fascio di elettroni. Questi vengono accelerati da una differenza di potenziale dell'ordine delle decine di kV e si comportano come onde. Le lunghezze d'onda associate a queste particelle sono più piccole rispetto a quelle della luce di un fattore che può essere anche di 10^5*. Quindi anche l'ingrandimento di un microscopio elettronico può essere* 10^5 *volte più grande rispetto a quello di un microscopio ottico.*

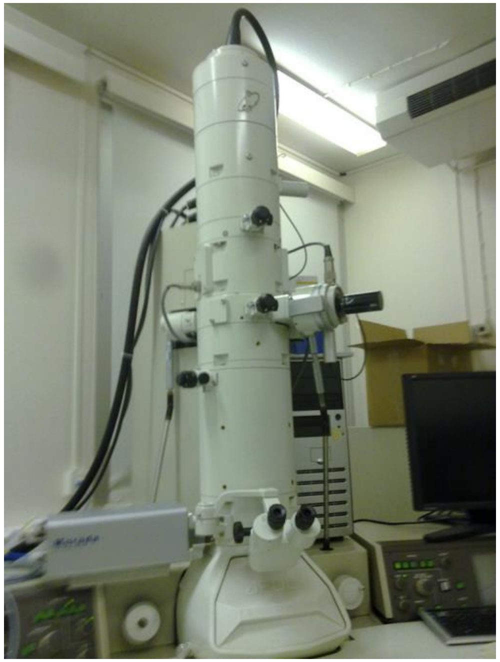
Un microscopio elettronico opera con un fascio di elettroni di lunghezza d'onda $\lambda = 5 \cdot 10^{-12}$ *m.*

1. *Dopo aver stabilito se gli elettroni, dopo essere stati accelerati, si muovono a velocità relativistica o meno, calcola la loro velocità.*

2. Calcola la differenza di potenziale ΔV *che accelera gli elettroni sapendo che questi sono emessi a velocità trascurabile da un filamento di tungsteno riscaldato.*

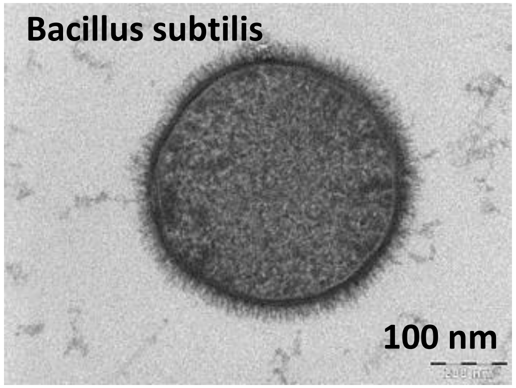
Con una lunghezza d'onda λ=5·10^{-12} m, l'impulso è $p=h/\lambda$=1,325·10^{-22} kg m/s. L'elettrone è moderatamente relativistico, si può confrontare con m_0c=2,73·10^{-22} kg m/s. Quindi occorre scrivere $p=\gamma m_0 v$, con $\gamma=(1-v^2/c^2)^{-1/2}=(1-\beta^2)^{-1/2}$. Dividendo per c e definendo $\beta_0=p/(m_0c)=0{,}485$ si ottiene una equazione per la velocità, dalla quale si trova

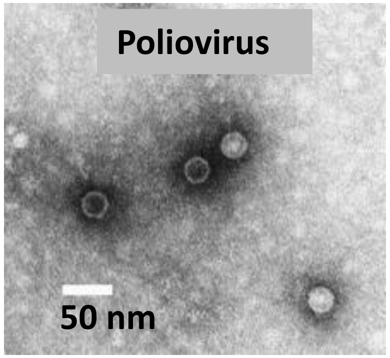
$$\beta^2=\frac{\beta_0^2}{1+\beta_0^2}\quad\Rightarrow\quad v=0{,}436c=1{,}31\cdot10^8\ \mathrm{ms}^{-1}.$$



L'energia cinetica è $$E_{\mathrm{kin}}=\sqrt{m_0^2c^4+c^2p^2}-m_0c^2.$$

Conviene calcolarla in elettronvolts raccogliendo m_0c^2=512 keV, da cui si trova E_{kin}=57 keV e il potenziale di accelerazione V=57 kV. Questo torna con il testo che parla di "diverse decine di kV".

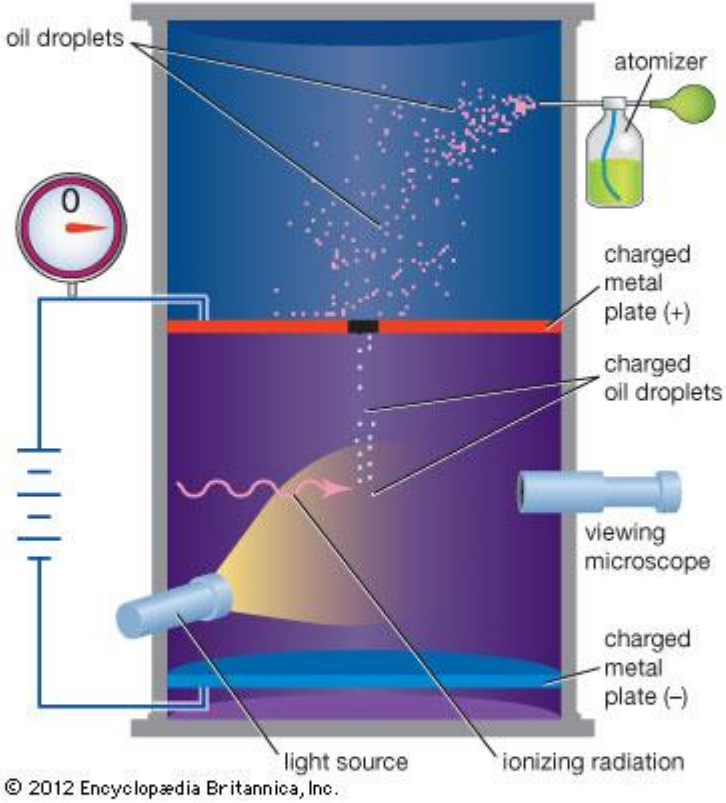




Il principio d’indeterminazione

MNV Esempio 18.11 (*occhio ai numeri…*)

Consideriamo le goccioline d'olio nell'esperimento di Millikan per la misura della carica dell'elettrone. Assumiamo che una gocciolina abbia un raggio r=1 μm e che la densità dell'olio sia r=0.9 g/cm^3. Supponendo che essa scenda con velocità v=10^{-2} cm/s, calcolare (a) la sua lunghezza d'onda di de Broglie e (b) l'indeterminazione della velocità.



(a) La massa è data da $m=\rho\cdot(4\pi r^3/3)=3.8\cdot10^{-12}$ g, l'impulso è $p=mv=3.8\cdot10^{-19}$ kg m/s e la lunghezza d'onda di de Broglie è $\lambda=\hbar/p=1.7\cdot10^{-15}$ m. Si tratta di un valore molto piccolo, per cui non è possibile mettere in evidenza gli aspetti ondulatori della particella.

(a) L'indeterminazione della posizione della gocciolina si può assumere uguale al raggio, $\Delta x=r=10^{-6}$ m, da cui l'indeterminazione della velocità $\Delta v=\hbar/(m\Delta x)=2.8\cdot10^{-14}$ m/s. Anche qui si tratta di un valore piccolissimo. Concludiamo che il principio di indeterminazione ha un effetto trascurabile nel caso di corpi macroscopici.

MNV esempio 18.12

Un elettrone ha energia cinetica E_k= 1 keV e la sua velocità è nota all'1%.
(a) Determinare se l'elettrone è relativistico o meno.
(b) Calcolare il valore limite per l'incertezza sulla posizione Δx.
(c) Se invece la sua posizione è conosciuta entro $\Delta x=10^{-6}$ m, calcolare l'incertezza relativa della velocità.

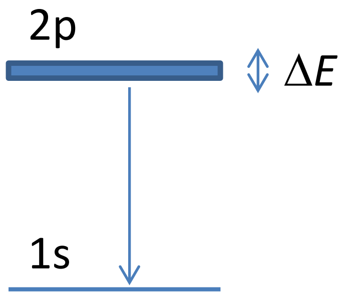
(a) La velocità classica è data da $v=(2E/m_e)^{1/2}=1.9\cdot10^7$ m/s<<c. Quindi l'elettrone è non relativistico. D'altra parte $m_e c^2=5.1\cdot10^5$ eV=0.51 MeV>>E_k, ossia l'energia cinetica dell'elettrone è << dell'energia associata alla massa di riposo.

(b) Dal principio d'indeterminazione abbiamo $\Delta x=\hbar/\Delta p=\hbar/(m_e \Delta v)=6\cdot10^{-10}$ m, che è un'incertezza molto piccola, dell'ordine delle distanze interatomiche.

(c) Stavolta otteniamo l'intertezza sulla velocità come $\Delta v=\hbar/(m_e\Delta x)=1.1\cdot10^2$ m/s, da cui $\Delta v/v=6\cdot10^{-6}$. Anche qui si tratta di un'incertezza molto piccola.

Indeterminazione sull'energia

Il livello 2p dell'atomo di idrogeno ha una vita media pari a τ=1.6 ns, che produce una indeterminazione ΔE sull'energia dello stato e una indeterminazione $\Delta\lambda$ sulla lunghezza d'onda emessa nella transizione 2p→1s.
(a) Calcolare l'incertezza sull'energia dello stato 2p. (b) Calcolare l'incertezza $\Delta\lambda/\lambda$ sulla lunghezza d'onda del fotone emesso nella transizione.



Soluzione: (a) L'incertezza sull'energia è pari a $\Delta E=\hbar/\tau=6.6\cdot10^{-26}$ J $=4\cdot10^{-7}$ eV.

(b) Poiché l'energia della transizione è E=(3/4)Ry=0.75*13.6 eV=10.2 eV, l'incertezza è molto minore dell'energia stessa: $\Delta E \ll E$. Quindi l'incertezza sulla lunghezza d'onda può essere calcolata semplicemente come $\Delta\lambda/\lambda = \Delta E/E \cong 4\cdot10^{-8}$. Questa è detta la *larghezza naturale* dello stato eccitato.