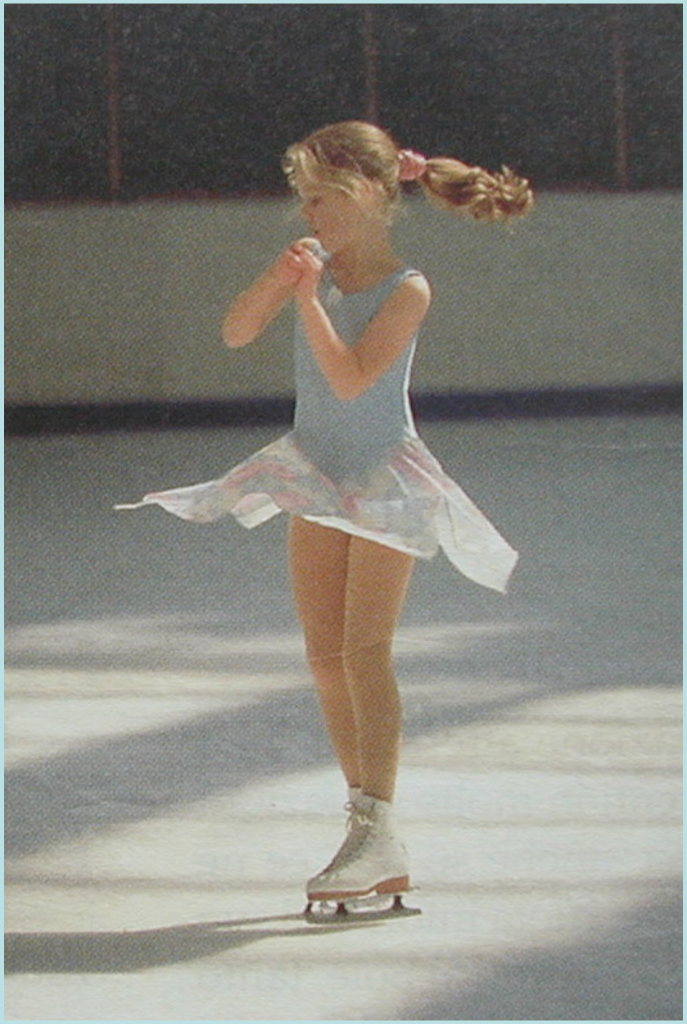
approfondimento

Cinematica ed energia di rotazione

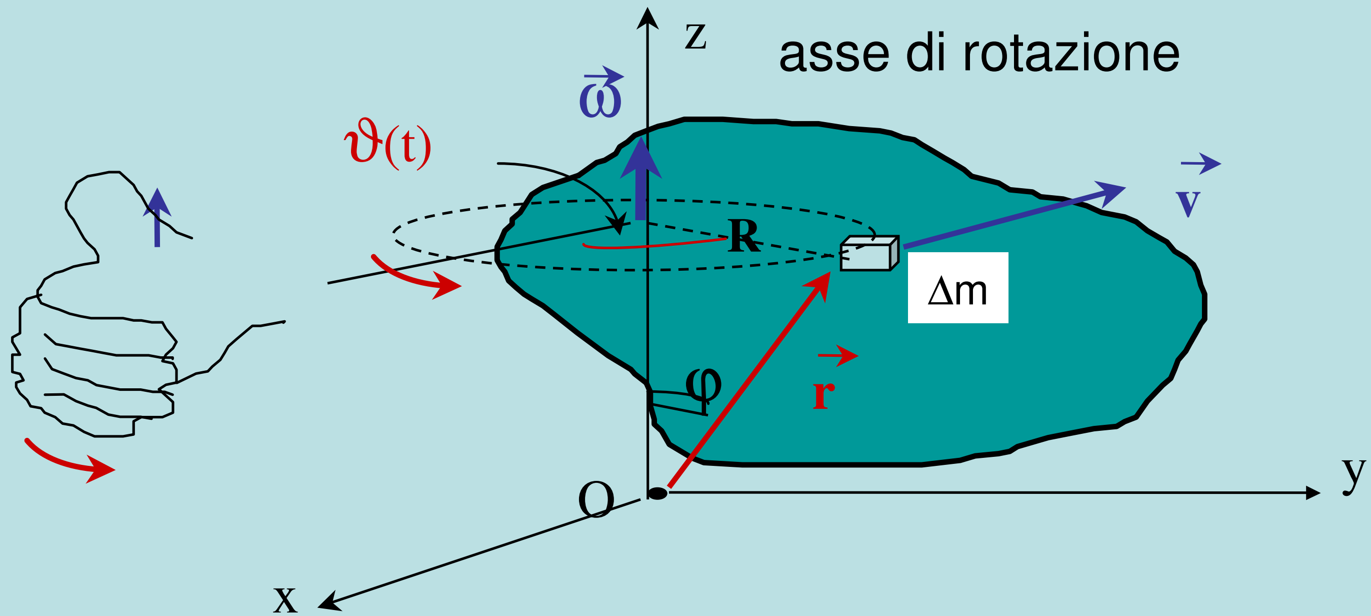
equilibrio statico di un corpo esteso

conservazione del momento angolare

Moto di rotazione



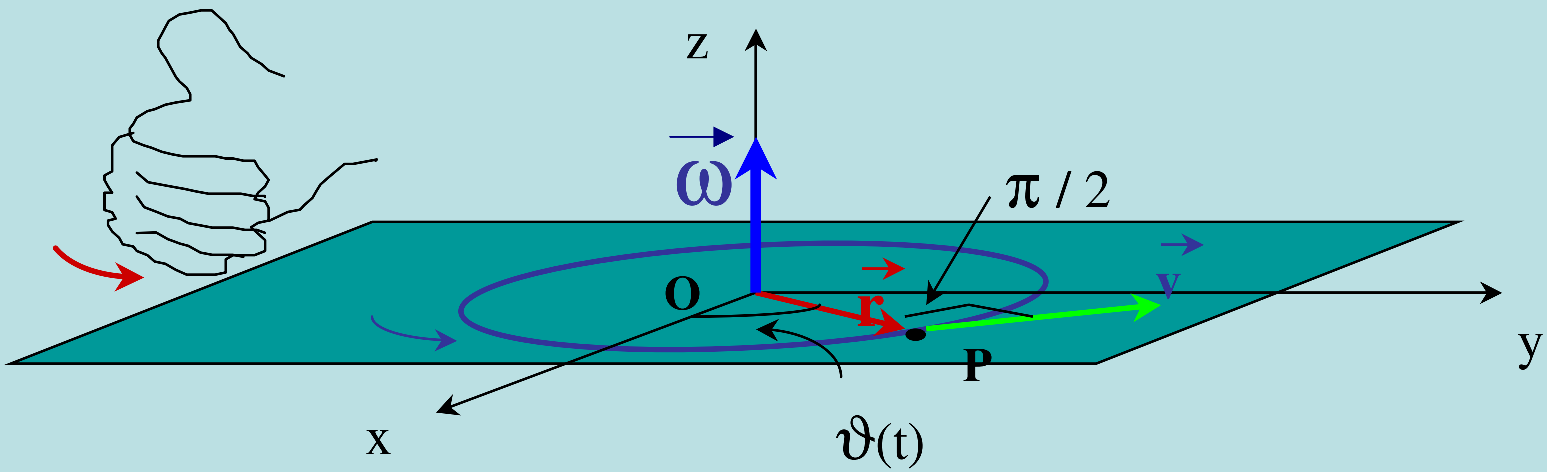
Rotazione dei corpi rigidi



Ogni massa Δm ha moto dipendente da R = distanza dall'asse

$$V = R\omega = r \sin\varphi\,\omega \equiv \left|\vec{\omega} \times \vec{r}\right|$$

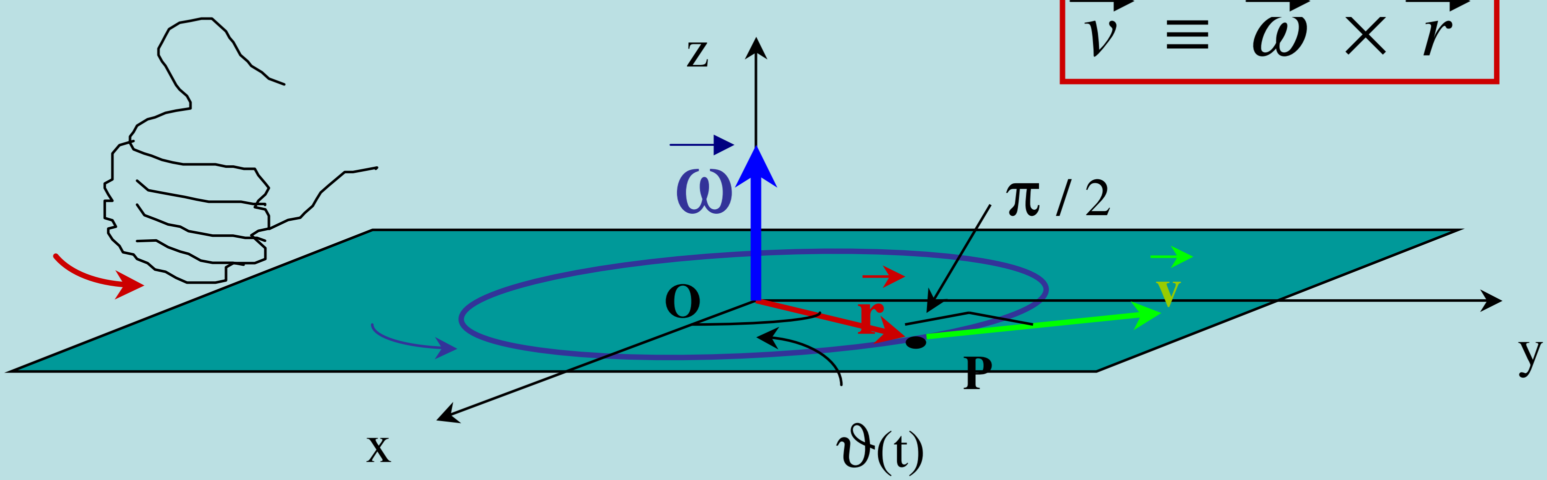
Vettore velocità angolare $\vec{\omega}$



è diretto lungo l'asse di rotazione
il verso è dato dalla "regola della mano destra"
il modulo è $\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \Delta\theta / \Delta t$

Vettore velocità lineare $\vec{v}$

$$\boxed{\vec{v} \equiv \vec{\omega} \times \vec{r}} \quad *$$

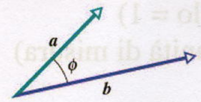


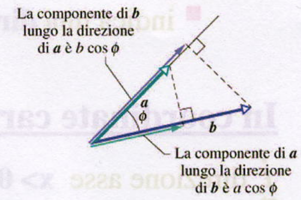
$$\left|\vec{\omega}\times\vec{r}\right| \equiv \omega r \sin\frac{\pi}{2} = \omega r \equiv v = \frac{ds(t)}{dt} = r\frac{d\vartheta(t)}{dt} \quad \Rightarrow$$

* Si veda la definizione di prodotto vettore in fisica propedeutica

Prodotto scalare

⇒ ha come risultato uno **scalare**





$$\boxed{c = \mathbf{a} \bullet \mathbf{b} = ab\cos\phi}$$

geometricamente è il prodotto tra modulo del primo vettore e proiezione del secondo lungo la direzione del primo

N.B. $\mathbf{a}\bullet\mathbf{b} = 0$ tra due vettori **ortogonali** ($\phi=90^0$)

$\mathbf{a}\bullet\mathbf{b} = ab$ tra due vettori **paralleli** concordi ($\theta=0^0$)

$\mathbf{a}\bullet\mathbf{b} = -ab$ tra due vettori **paralleli** discordi ($\theta=180^0$)

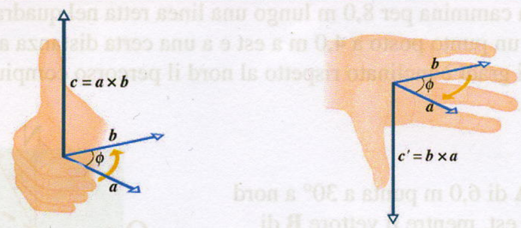
$$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k} \qquad \vec{a}\cdot\vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

$$\vec{b} = b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k} \qquad \vec{a}\cdot\vec{a} = a_x a_x + a_y a_y + a_z a_z = a^2$$

Prodotto vettoriale $\Rightarrow$ ha come risultato un **vettore**

C = **A** x **B** = **A** $\wedge$ **B**

Modulo	$\mapsto$	$\lvert C \rvert = \lvert AB \text{ sen } \phi \rvert$
Direzione	$\mapsto$	ortogonale al piano individuato da **A** e **B**
Verso	$\mapsto$	regola mano destra



con le dita della mano destra si fa girare il vettore **A** verso il vettore **B**

$\Rightarrow$ il pollice indica la direzione del vettore **C**

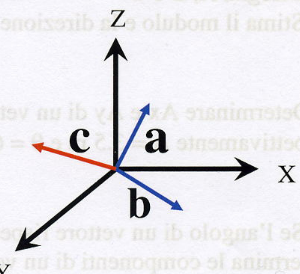
A x **B** = - **B** x **A**

N.B. $\lvert$**A** x **B**$\rvert$ = AB tra due vettori **ortogonali** (ϕ=90^0)

$\lvert$**A** x **B**$\rvert$ = 0 tra due vettori **paralleli** (θ=0^0,180^0)

$\Rightarrow$ $\lvert$**A** x **A**$\rvert$ = 0

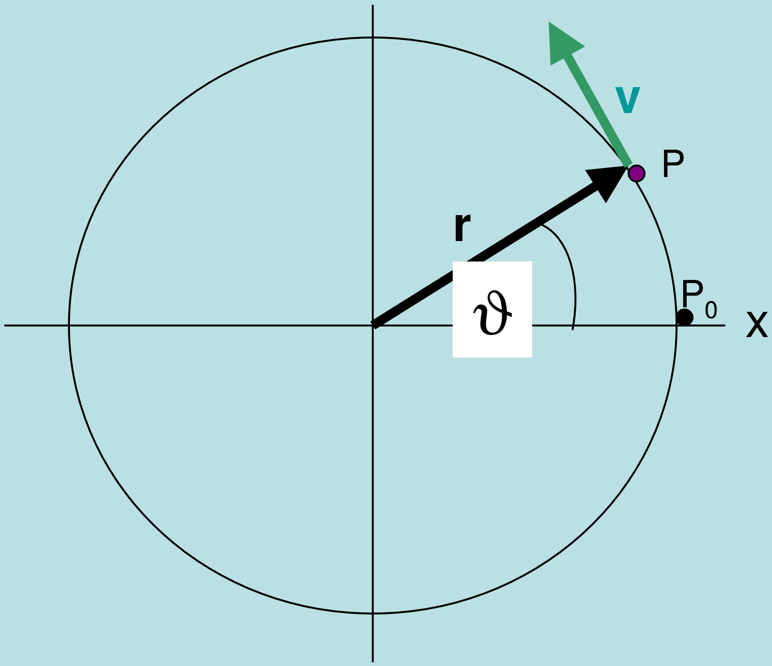
$$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$$
$$\vec{b} = b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}$$



$$\vec{a}\times\vec{b} = (a_y b_z - b_y a_z)\vec{i} + (a_z b_x - b_z a_x)\vec{j} + (a_x b_y - b_x a_y)\vec{k}$$

Richiami sul moto circolare

Moto circolare uniforme



Moto circolare
con velocità scalare costante

legge oraria $s(t) = r\ \vartheta(t)$

e poiché descrive archi uguali in tempi uguali …

$$\vartheta / t = \text{cost.}$$

velocità angolare:

$\omega = \omega_m = \Delta\vartheta / \Delta t \dashrightarrow \vartheta = \omega t$

legge oraria $s(t) = r\ (\omega t)$

$v = 2\pi r / T$
$\omega = 2\pi / T$

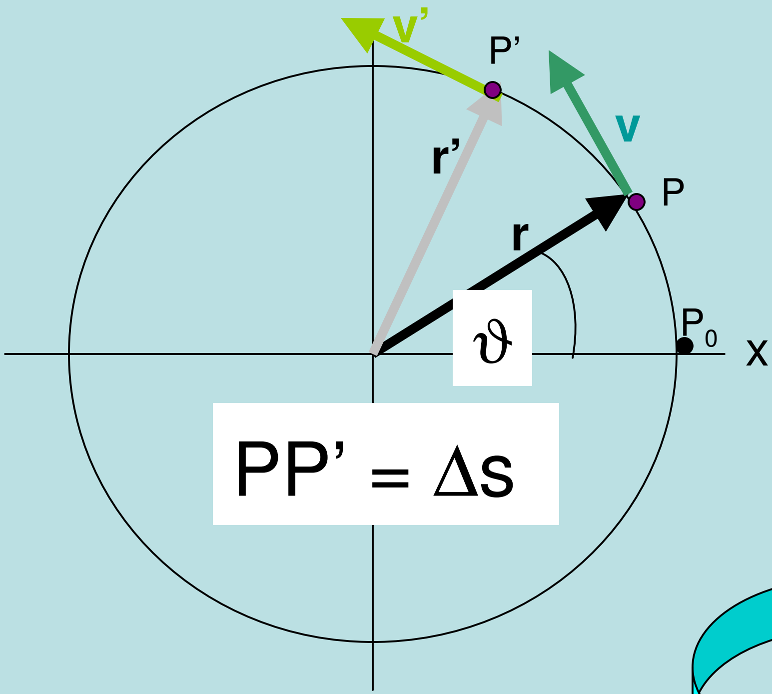
$$v = \omega r$$

accelerazione angolare:

$$\alpha = \lim_{\Delta t \to 0} \Delta\omega / \Delta t \equiv 0$$

Nel moto **circolare uniforme**
la velocità angolare media coincide con la velocità angolare istantanea

Moto circolare



Velocità angolare:

$$\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \Delta\vartheta / \Delta t$$

velocità lineare:

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \Delta s / \Delta t$$

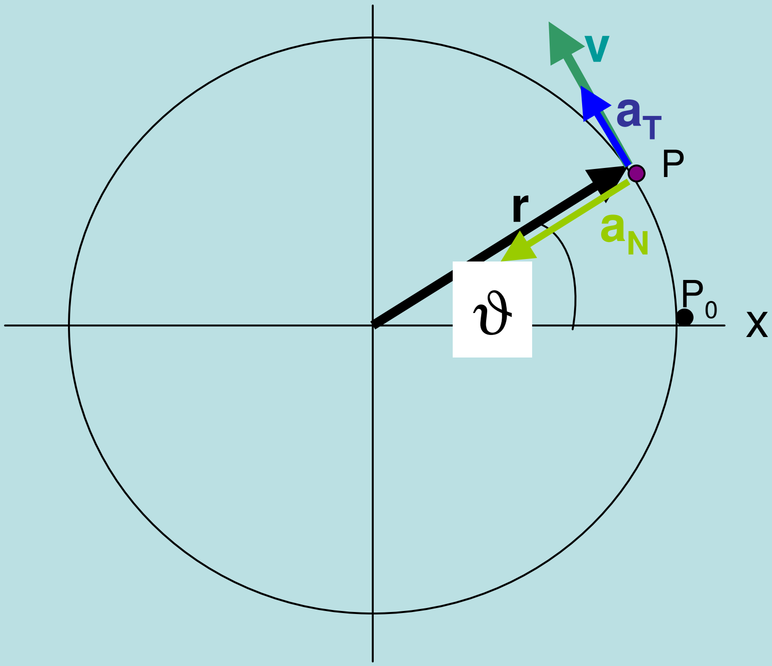
$$\Delta s = s(t + \Delta t) - s(t) = r\,\Delta\vartheta$$

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} (\Delta\vartheta / \Delta t)\; r$$

$$\boxed{v = \omega\, r}$$

Nel moto **circolare**
il modulo della velocità (lineare) è, ad ogni istante, direttamente proporzionale alla velocità angolare

accelerazione nel moto circolare



accelerazione angolare:

$$\alpha = \lim_{\Delta t \to 0} \Delta\omega / \Delta t$$

accelerazione lineare:

componente normale

$$\mathbf{a_N} = - v^2/r \ \textbf{vers}\ r \equiv \omega^2 r \ \mathbf{U_N}$$

componente tangenziale

$$\mathbf{a_T} = [\lim_{\Delta t \to 0} \Delta(\omega r) / \Delta t\ ]\ U_T \equiv \alpha\ r\ \mathbf{U_T}$$

$$\boxed{\vec{a} = a_T \ \vec{u}_T + a_N \ \vec{u}_N}$$

accelerazione tangente

$$a_T(t) = \frac{dv(t)}{dt}$$

accelerazione normale

$$a_N(t) = \frac{v^2(t)}{\rho}$$

Nel moto **circolare** la componente tangenziale della accelerazione (lineare) è, ad ogni istante, direttamente proporzionale alla accelerazione angolare

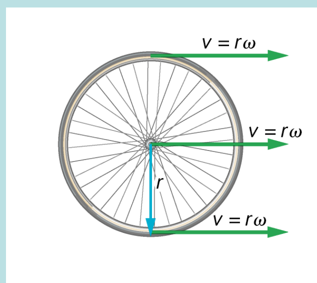
Conservazione dell’energia

Anche per un moto rotazionale vale il teorema dell’energia cinetica

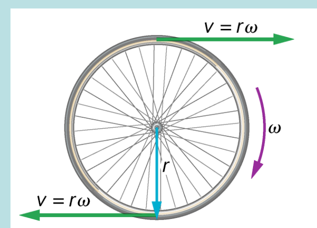
$$\boxed{\Delta E_k \equiv E_k^B - E_k^A = \frac{1}{2} I \omega_B^2 - \frac{1}{2} I \omega_A^2 = W_{A\rightarrow B}}$$

L’energia cinetica di un oggetto che rotola senza scivolare:

$$\boxed{E_k \equiv \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} I \omega^2}$$



+

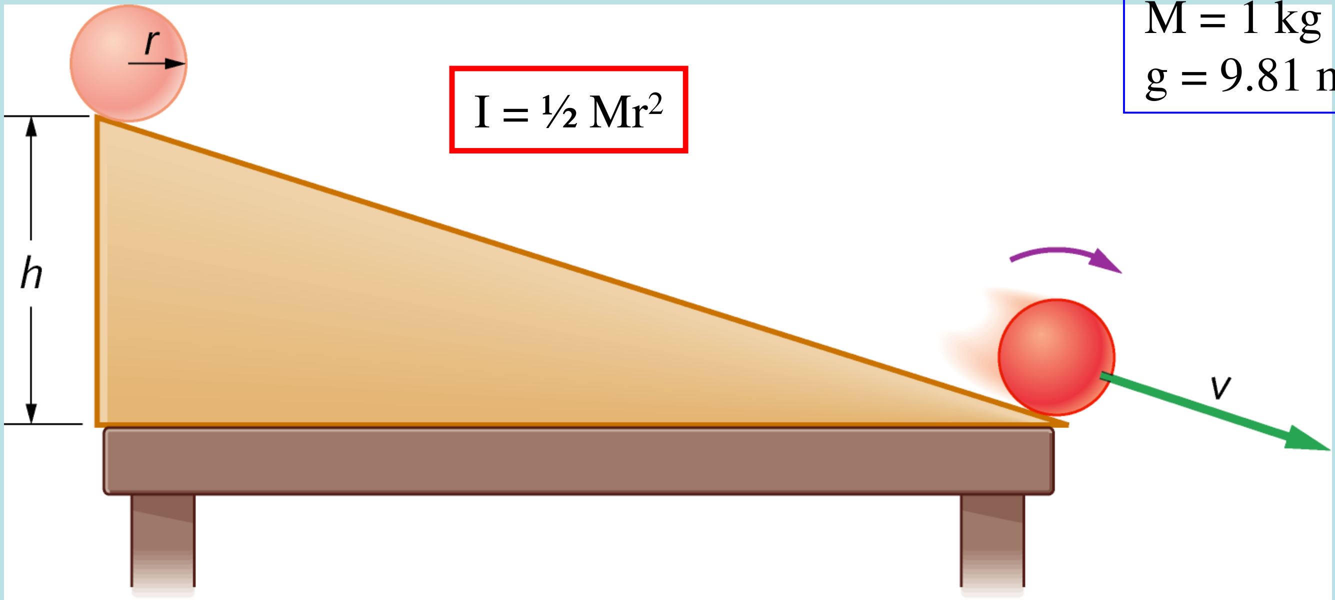


dove *I* è calcolato rispetto al centro dell’oggetto.

Del resto in assenza di forze non conservative l’energia meccanica si conserva …

esempi

$h = 1$ m
$r = 0.1$ m
$M = 1$ kg
$g = 9.81$ m/s^2



$I = \frac{1}{2} Mr^2$

Un cilidro di raggio r e momento di inerzia $I = \frac{1}{2} M r^2$ rotola senza scivolare lungo un piano inclinato come in figura. Determinare la velocità v del centro di massa al distacco:
$V_{CM} =$

$$Mgh = \frac{1}{2} M V_{CM}^2 + \frac{1}{2} I \omega^2$$

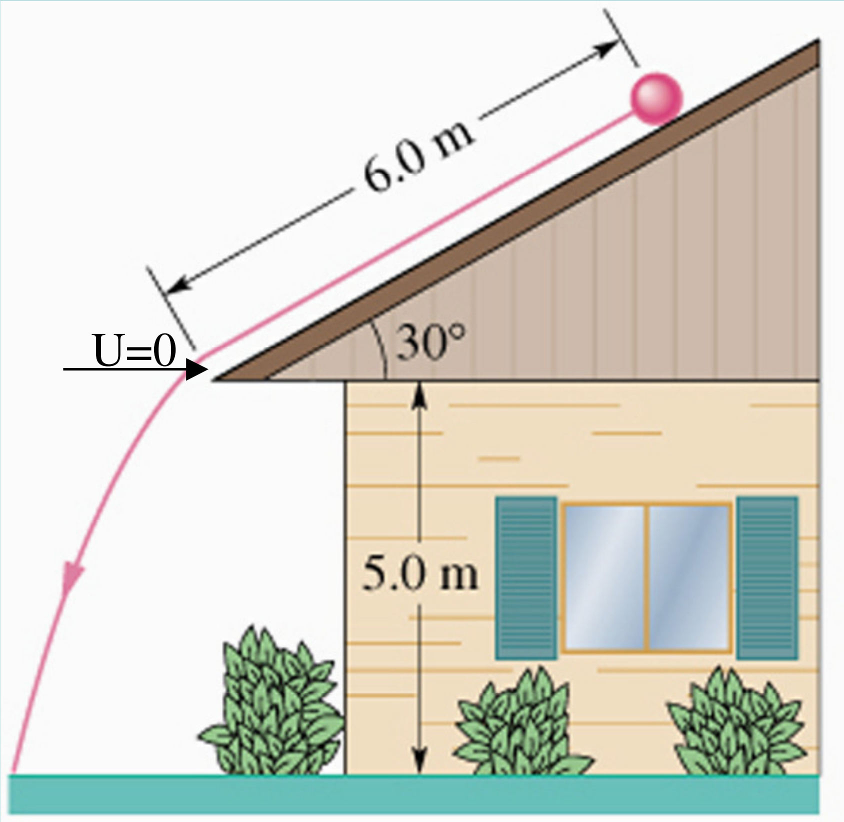
$$V_{CM} = r \omega$$

Moto vario

Un cilindro pieno di raggio 10 cm e massa 12 Kg, partendo da fermo, rotola senza strisciare per una distanza di 6 m giù per il tetto di una casa inclinato di 30 °

Quando lascia il bordo del tetto, qual è la sua velocità angolare rispetto ad un asse passante per il suo centro di massa?

La parete esterna della casa è alta 5 m, a che distanza dal bordo del tetto atterrerà sul terreno piano?



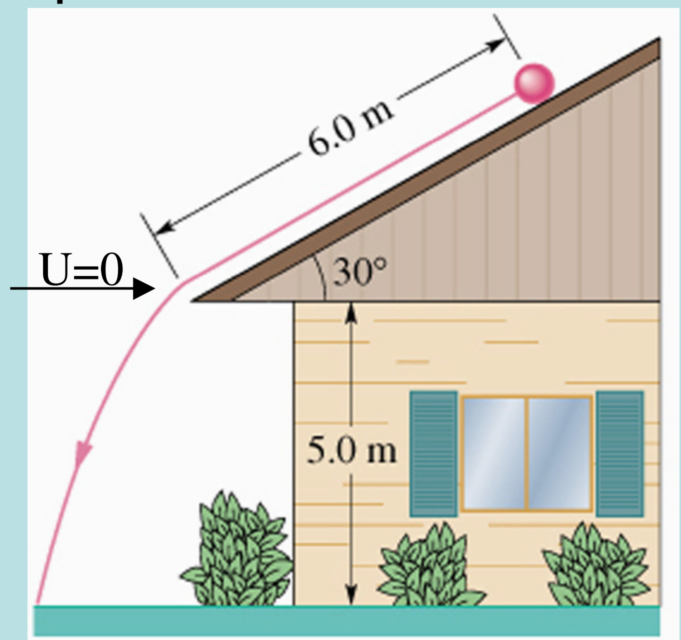
Moto vario

Un cilindro pieno di raggio 10 cm e massa 12 Kg, partendo da fermo, rotola senza strisciare per una distanza di 6 m giù per il tetto di una casa inclinato di 30 °

Quando lascia il bordo del tetto, qual è la sua velocità angolare rispetto ad un asse passante per il suo centro di massa?

La parete esterna della casa è alta 5 m, a che distanza dal bordo del tetto atterrerà sul terreno piano?

- Consideriamo dapprima il moto di puro rotolamento sul tetto



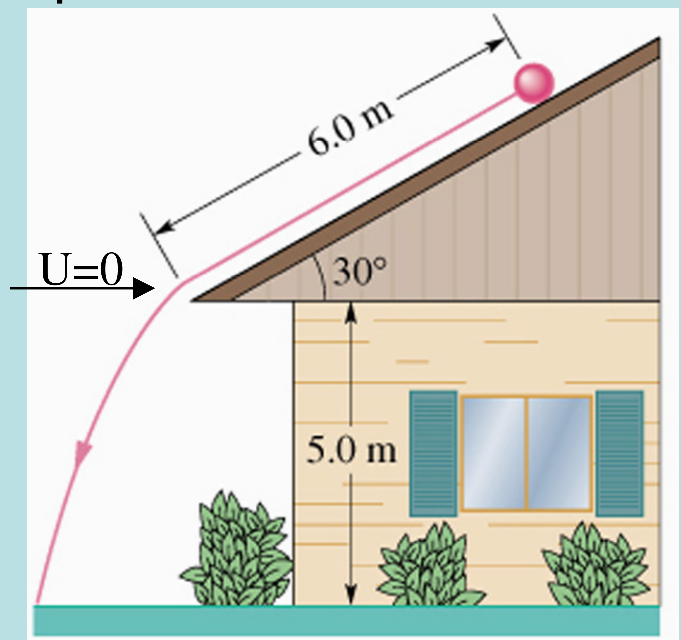
Moto vario

Un cilindro pieno di raggio 10 cm e massa 12 Kg, partendo da fermo, rotola senza strisciare per una distanza di 6 m giù per il tetto di una casa inclinato di 30 °

Quando lascia il bordo del tetto, qual è la sua velocità angolare rispetto ad un asse passante per il suo centro di massa?

La parete esterna della casa è alta 5 m, a che distanza dal bordo del tetto atterrerà sul terreno piano?

- Consideriamo dapprima il moto di puro rotolamento sul tetto
- Le forze agenti sono la forza peso, la Normale, la forza di attrito statico.

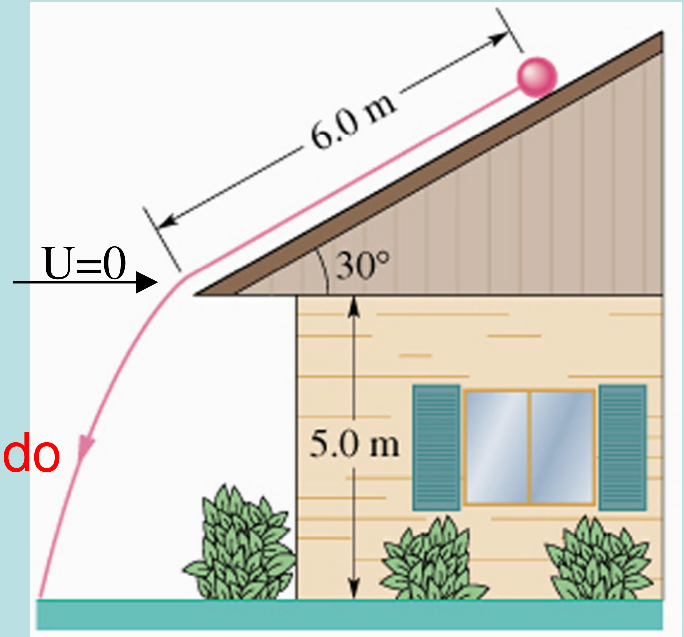


Moto vario

Un cilindro pieno di raggio 10 cm e massa 12 Kg, partendo da fermo, rotola senza strisciare per una distanza di 6 m giù per il tetto di una casa inclinato di 30 °

Quando lascia il bordo del tetto, qual è la sua velocità angolare rispetto ad un asse passante per il suo centro di massa?

La parete esterna della casa è alta 5 m, a che distanza dal bordo del tetto atterrerà sul terreno piano?



- Consideriamo dapprima il moto di puro rotolamento sul tetto
- Le forze agenti sono la forza peso, la forza Normale, la forza di attrito statico.
- Possiamo trovare la velocità finale utilizzando la conservazione dell’energia meccanica totale

…

$$E_i = E_f \Rightarrow K_i + U_i = K_f + U_f$$

$$K_f = \frac{1}{2} M v_{CM}^2 + K^* = \frac{1}{2} M v_{CM}^2 + \frac{1}{2} I^* \omega^2$$

$$0 + MgL \operatorname{sen} 30° = \frac{1}{2} M v_{CM}^2 + \frac{1}{2} I^* \omega^2 + 0$$

- La condizione di puro rotolamento: $|v_{CM}| = R|\omega|$ $\quad v_{CM}^2 = R^2\omega^2$
- Il momento di inerzia del cilindro: $I^* = \frac{1}{2} MR^2$

$$MgL \operatorname{sen} 30° = \frac{1}{2} MR^2\omega^2 + \frac{1}{2}\frac{1}{2} MR^2\omega^2$$

$$\omega = \sqrt{\frac{4gL \operatorname{sen} 30°}{3R^2}} = \sqrt{\frac{4 \times 9.81 \times 6 \times 0.5}{3 \times .1^2}} = \sqrt{3924} = 62.6 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

…

Al momento del distacco: $v_{CM} = R\omega = 0.1 \times 62.6 = 6.26\,\frac{m}{s}$

$$x_o = 0m \quad v_{xo} = -6.26\cos 30° = -5.42\,\tfrac{m}{s} \qquad x = v_{xo}t$$

$$y_o = 5m \quad v_{yo} = -6.26\,\text{sen}\,30° = -3.13\,\tfrac{m}{s} \qquad y = y_o + v_{yo}t - \tfrac{1}{2}gt^2$$

Determinare l'istante di impatto al suolo imponendo che y=0

$$y_o + v_{yo}t - \tfrac{1}{2}gt^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad 4.9\,t^2 + 3.13t - 5 = 0$$

$$t_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-3.13 \pm \sqrt{3.13^2 + 4 \times 4.91 \times 5}}{9.81} = \frac{-3.13 \pm 10.39}{9.81} = \begin{matrix} -1.37 \\ +0.74 \end{matrix}$$

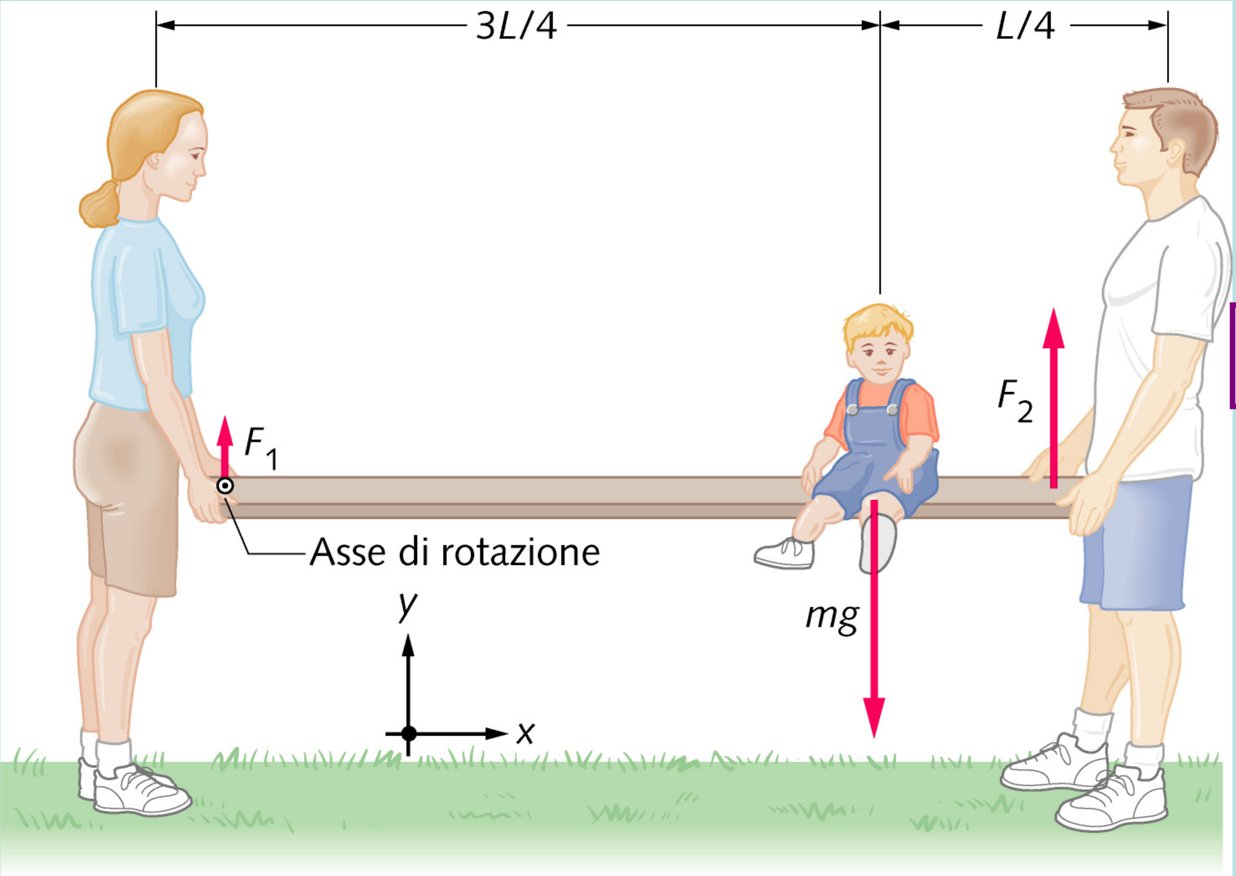
La soluzione negativa è da scartare.

- La distanza a cui atterrerà:

$$x = v_{xo}t = -5.42 \times .74 = -4.01m \qquad d = |x_f - x_o| = 4.01m$$

equilibrio statico di un corpo
rigido esteso

equilibrio statico

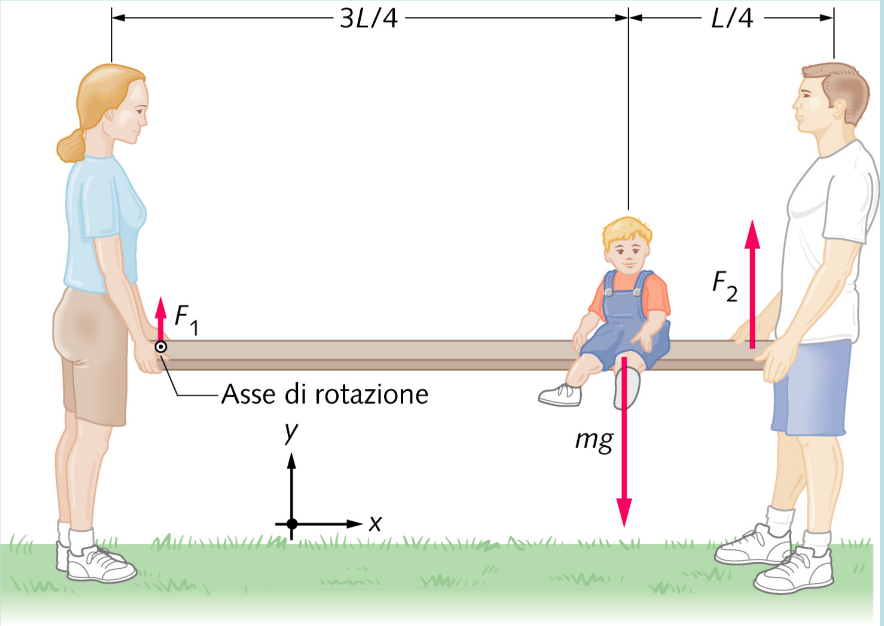


$$F_1 + F_2 = mg$$

$$F_2 L - mg\,(\tfrac{3}{4})L = 0$$

$$F_2 = \tfrac{3}{4}\,mg$$
$$F_1 = \tfrac{1}{4}\,mg$$

Condizioni di equilibrio statico



Perché un oggetto esteso sia in equilibrio statico devono essere soddisfatte le seguenti due condizioni:

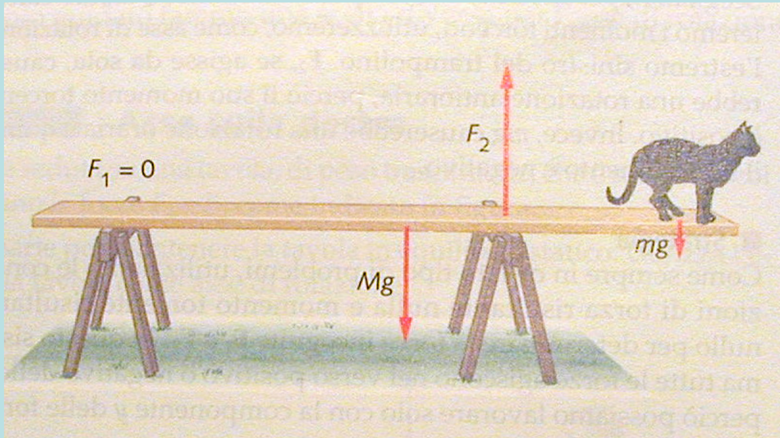
La risultante delle forze esercitate sull'oggetto deve essere nulla:

$$\Sigma F = 0$$

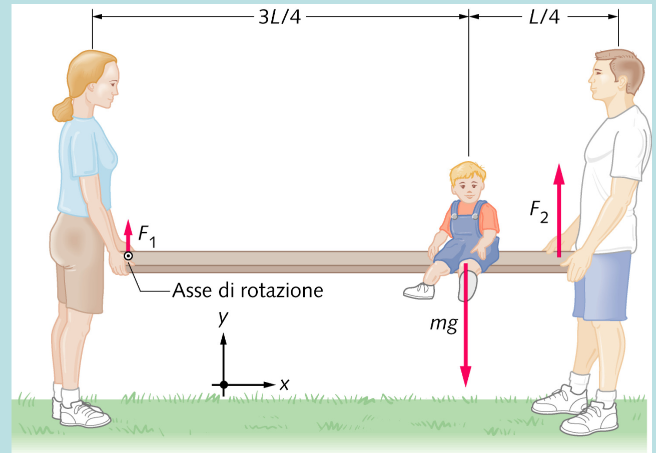
La somma vettoriale dei momenti torcenti esercitati sull'oggetto deve essere nulla:

$$\Sigma \tau = 0$$

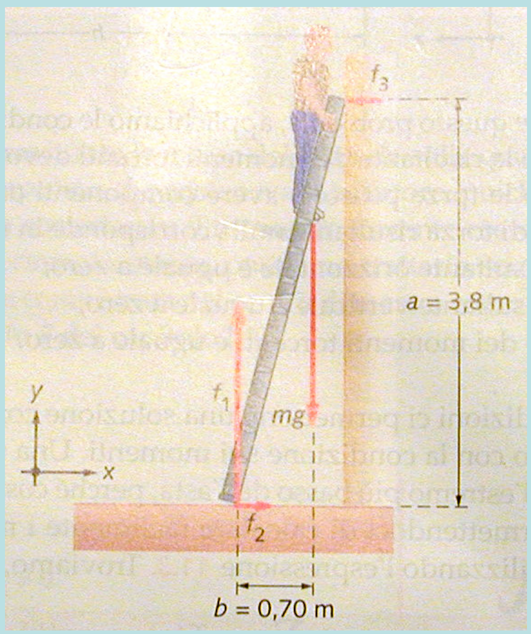
Esempi …



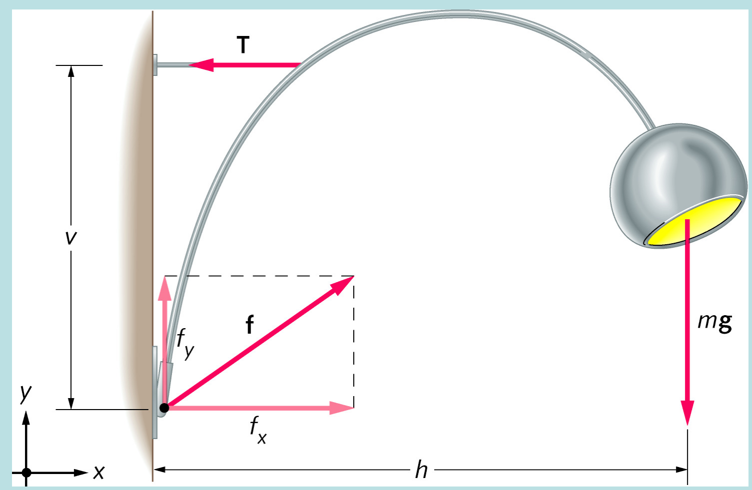
$F_1 = 0$
F_2
mg
Mg



$3L/4$
$L/4$
F_1
F_2
Asse di rotazione
mg
y
x



f_3
$a = 3{,}8$ m
f_1
mg
y
x
f_2
$b = 0{,}70$ m

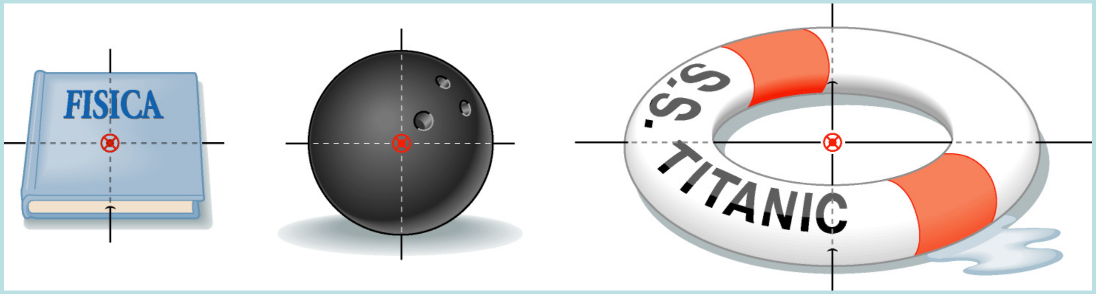


T
v
f
f_y
f_x
$m\mathbf{g}$
y
x
h

Richiami sul centro di massa

Importanza del Centro di massa

Il moto traslatorio di un oggetto esteso o di un sistema di particelle può essere descritto dal moto di un punto materiale, detto centro di massa o baricentro,

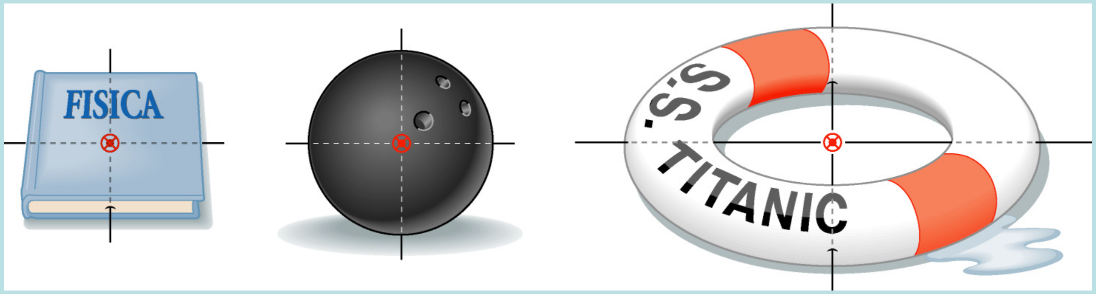


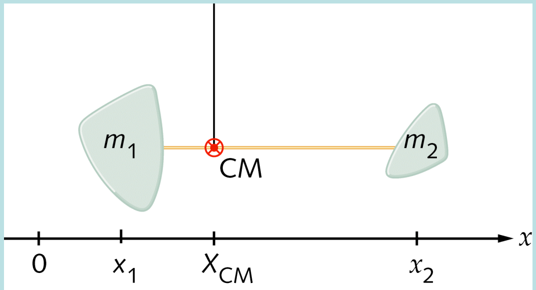
nel quale si immagini concentrata tutta la massa dell'oggetto o del sistema,

soggetto alla risultante di tutte le forze esterne.

Proprietà del Centro di massa

Il centro di massa di oggetti simmetrici e di densità uniforme coincide con il centro geometrico.

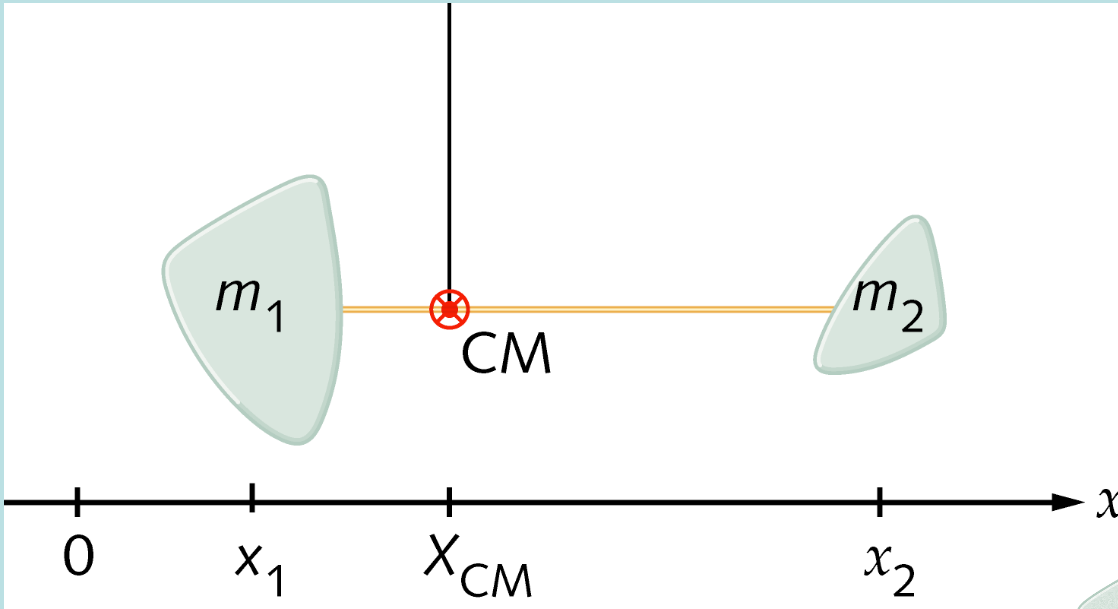


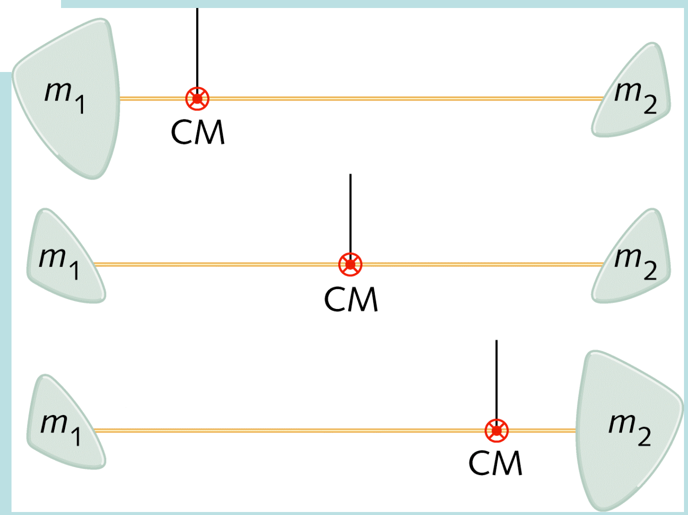


Sperimentalmente:

un corpo sospeso si pone sempre in modo che il baricentro si trovi verticalmente sotto il punto di sospensione, perché in questa posizione il momento risultante della forza peso è nullo.

Calcolo della posizione del centro di massa





$$X_{CM} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}$$

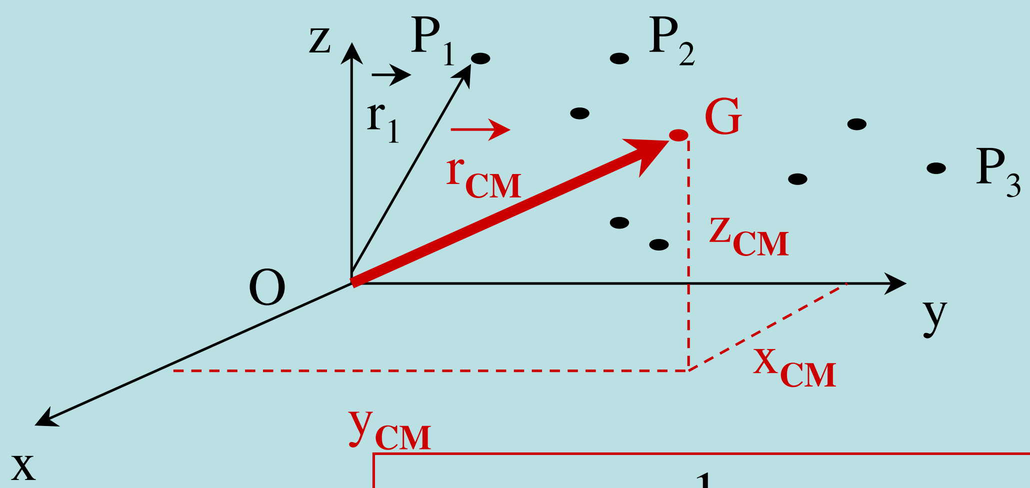
$$M = m_1 + m_2$$

La ascissa del centro di massa

è la media *pesata* delle ascisse delle masse del sistema

Centro di massa

di un **sistema di punti materiali P_i**



$$\boxed{\overrightarrow{OG} \equiv \vec{r}_{CM} = \frac{\sum_i m_i \overrightarrow{OP_i}}{\sum_i m_i} = \frac{\sum_i m_i \vec{r}_i}{M}}$$

massa totale del sistema

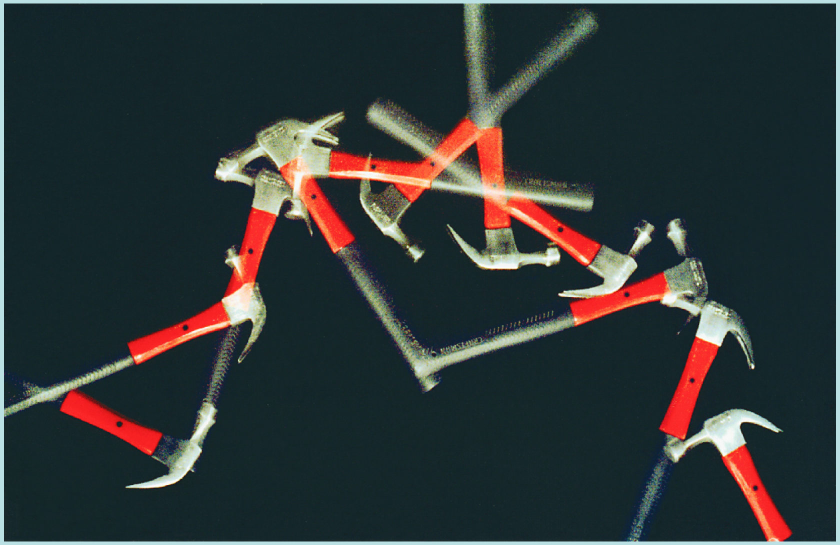
$$x_{CM} = \frac{1}{M}\sum_i m_i x_i$$

$$y_{CM} = \frac{1}{M}\sum_i m_i y_i$$

$$z_{CM} = \frac{1}{M}\sum_i m_i z_i$$

Il vettore posizione $\mathbf{R}_{CM}$ del centro di massa
è la media *pesata* dei vettori posizione delle masse del sistema

moto del centro di massa



$$\mathbf{R}_{\mathbf{CM}} = \frac{m_1\mathbf{r_1} + m_2\mathbf{r_2} + \ldots}{m_1 + m_2 + \ldots}$$

$$M = m_1 + m_2 + \ldots$$

La velocità e la accelerazione del centro di massa
sono le medie *pesate* delle velocità e delle accelerazioni
delle masse del sistema …

$$\mathbf{V}_{\mathbf{CM}} = \frac{m_1\mathbf{v_1} + m_2\mathbf{v_2} + \ldots}{m_1 + m_2 + \ldots}$$

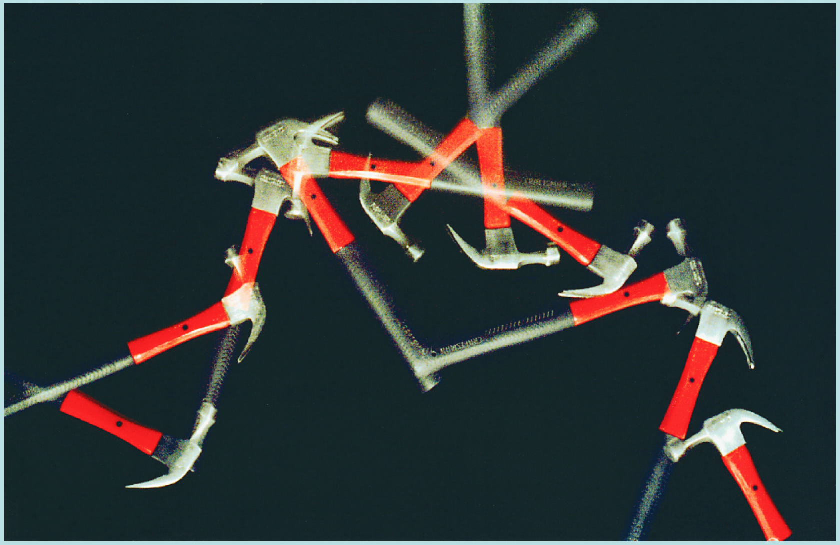
$$\mathbf{A}_{\mathbf{CM}} = \frac{m_1\mathbf{a_1} + m_2\mathbf{a_2} + \ldots}{m_1 + m_2 + \ldots}$$

$$M\,\mathbf{V}_{\mathbf{CM}} = \mathbf{p}_{\mathbf{totale}}$$

$$M\,\mathbf{A}_{\mathbf{CM}} = \mathbf{F}_{\mathbf{totale}}$$

La quantità di moto di un sistema comunque
complesso è uguale alla sua massa totale per la velocità del baricentro

moto del centro di massa



$$\mathbf{R}_{CM} = \frac{m_1\mathbf{r_1} + m_2\mathbf{r_2} + \ldots}{m_1 + m_2 + \ldots}$$

$$M = m_1 + m_2 + \ldots$$

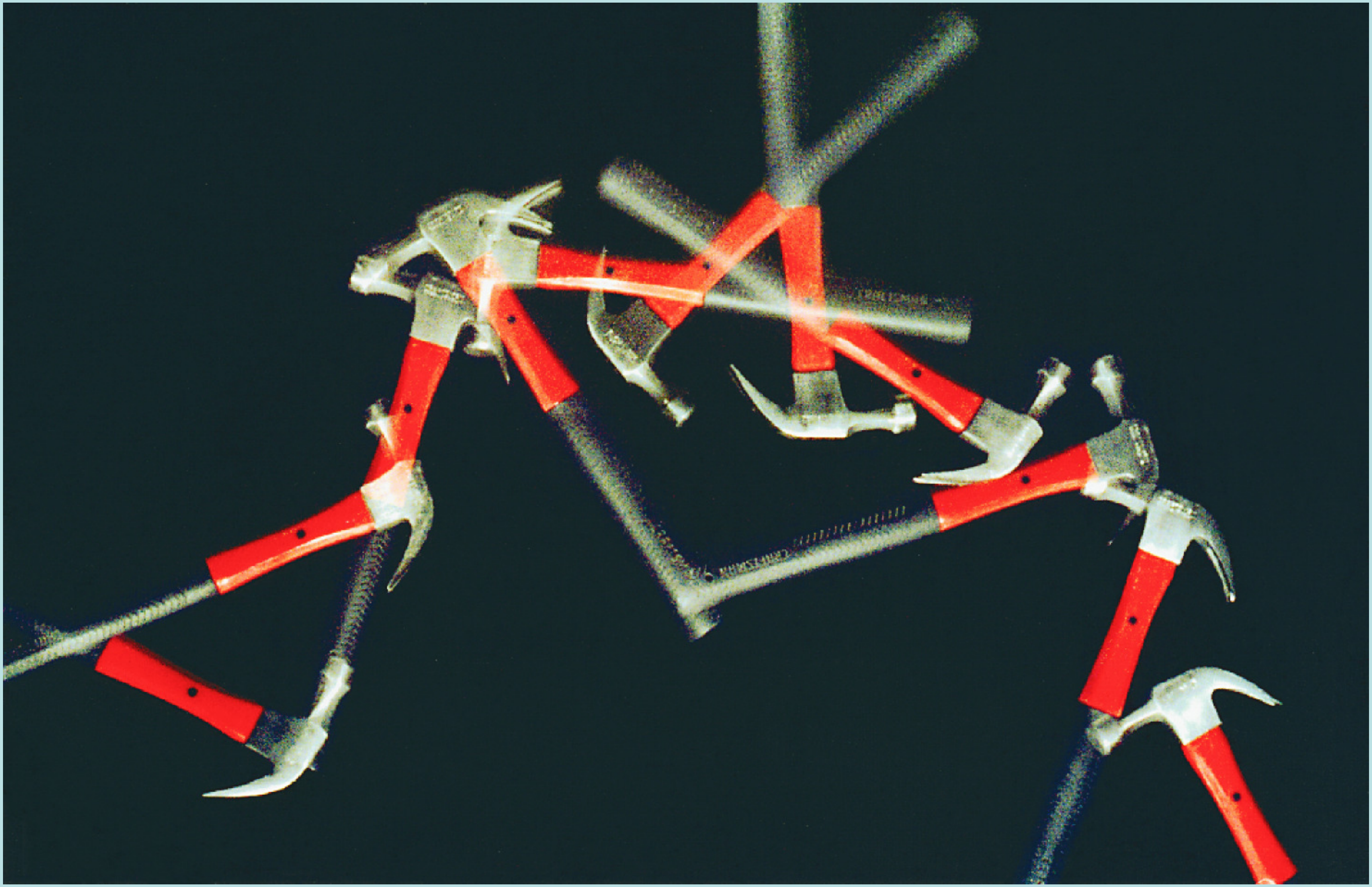
La velocità e la accelerazione del centro di massa
sono le medie *pesate* delle velocità e delle accelerazioni
delle masse del sistema …

La seconda legge di Newton
per un sistema di particelle:

$$\mathbf{A}_{CM} = \frac{m_1\mathbf{a_1} + m_2\mathbf{a_2} + \ldots}{m_1 + m_2 + \ldots}$$

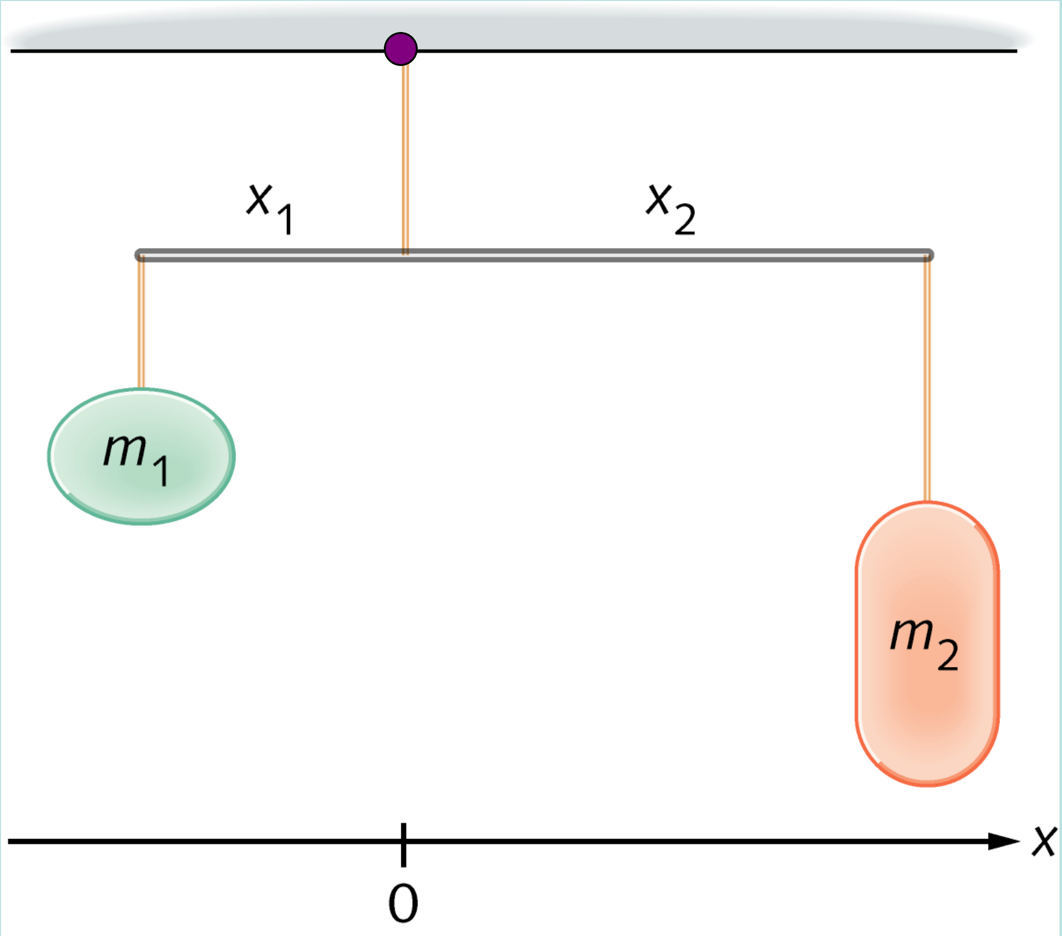
Il CM di un sistema accelera come se
fosse una particella puntiforme
di massa M
spinta dalla forza $\mathbf{F}_{\mathbf{totaleesterna}}$

$$M\,\mathbf{A}_{CM} = \mathbf{F}_{\mathbf{totale\ esterna}}$$



Il moto del baricentro è equivalente a quello di un punto materiale di massa $M = M_{totale}$

Centro di massa ed equilibrio



L'asta è in equilibrio se
il momento torcente risultante
che agisce su di essa è nullo.

$$m_1 g x_1 - m_2 g x_2 = 0$$

$$\Downarrow$$

$$m_1 x_1 = m_2 x_2$$

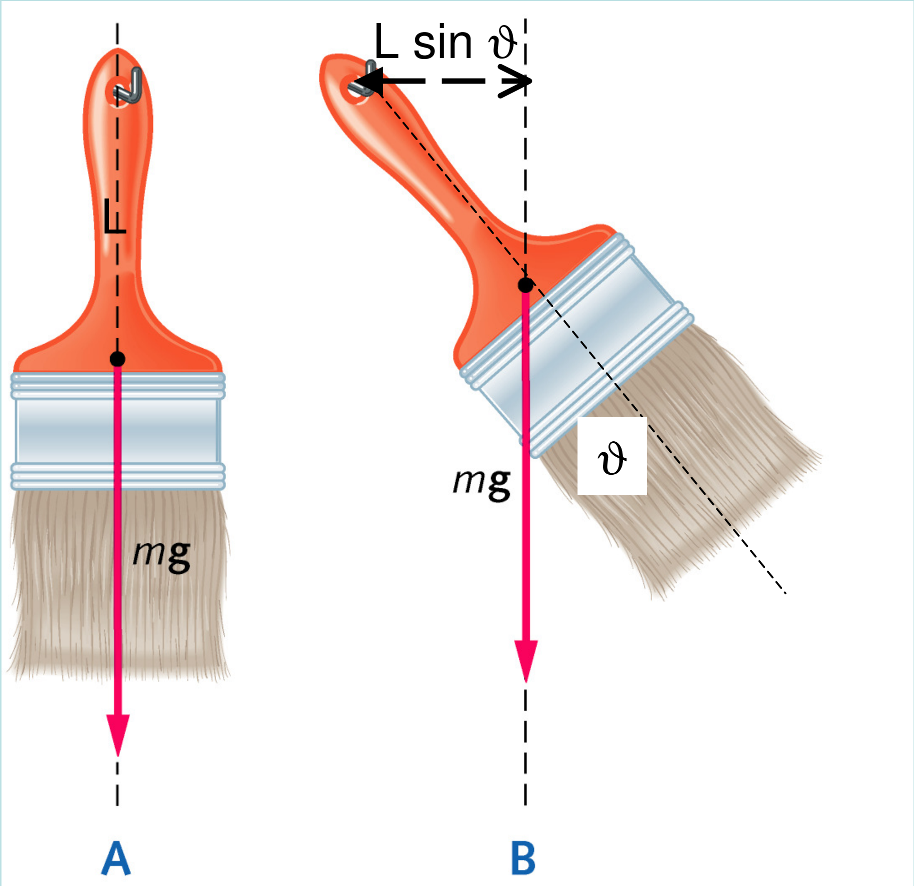
$$\Downarrow$$

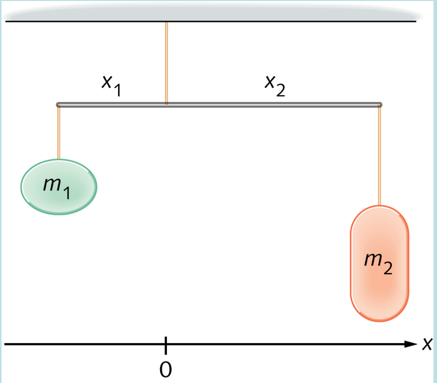
$$x_{CM} = 0$$

risultato generale

Ciò equivale ad avere il baricentro
sulla verticale passante per il punto di sospensione

equilibrio di oggetti sospesi





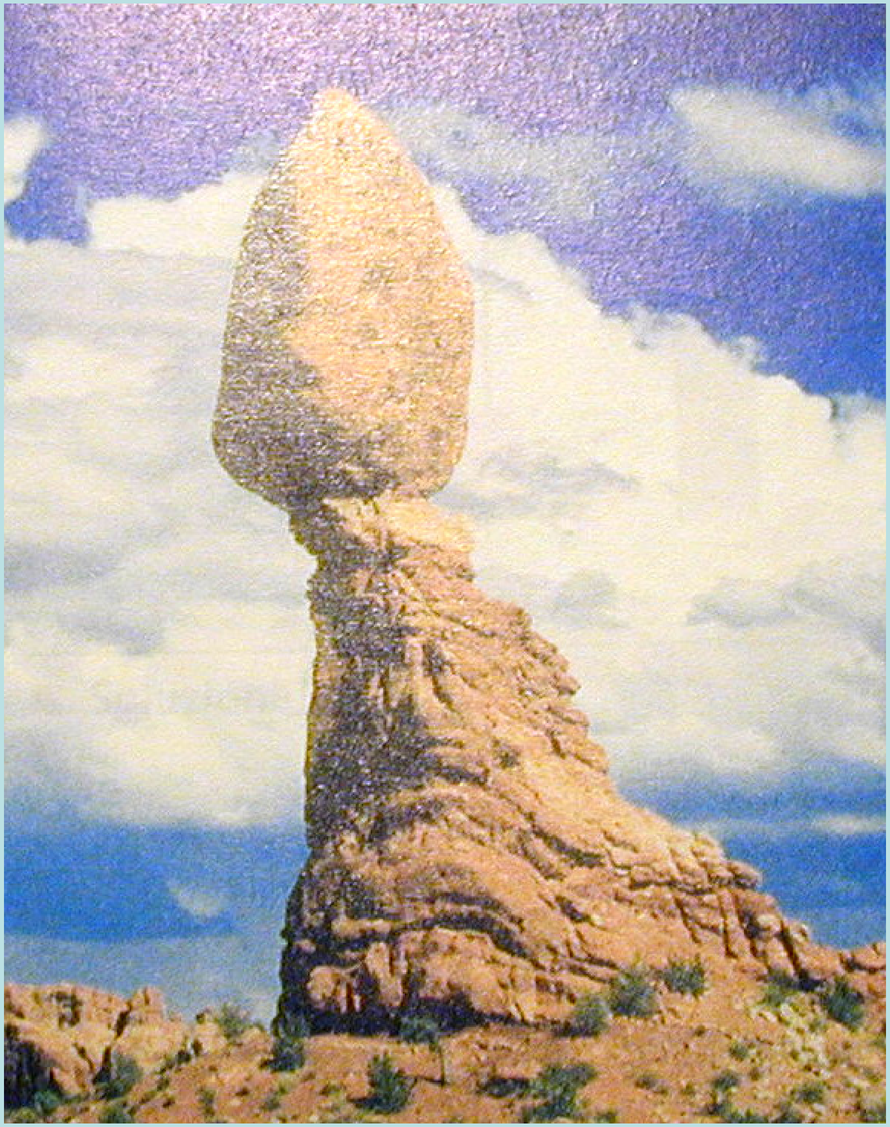
Momento torcente nullo:

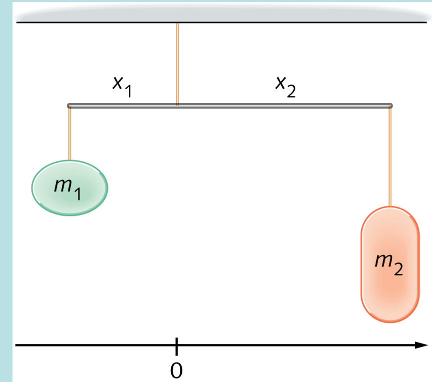
$$\tau = mgL \sin 0° = 0$$

Momento torcente negativo:

$$\tau = mg\,(L \sin \vartheta) \neq 0$$

equilibrio …





La roccia plurimillenaria
rimarrà salda sul suo
piedistallo
finchè la verticale
per il suo centro di massa
intercetterà la sua base di
appoggio

Conservazione del momento angolare

Conservazione del momento angolare

$\tau = \Delta L / \Delta t$

se $\tau = 0$

$\Delta L = 0$ e $L =$ costante

Il momento angolare si conserva anche in sistemi sottoposti a più momenti torcenti, purchè
il **momento torcente risultante esterno sia nullo**

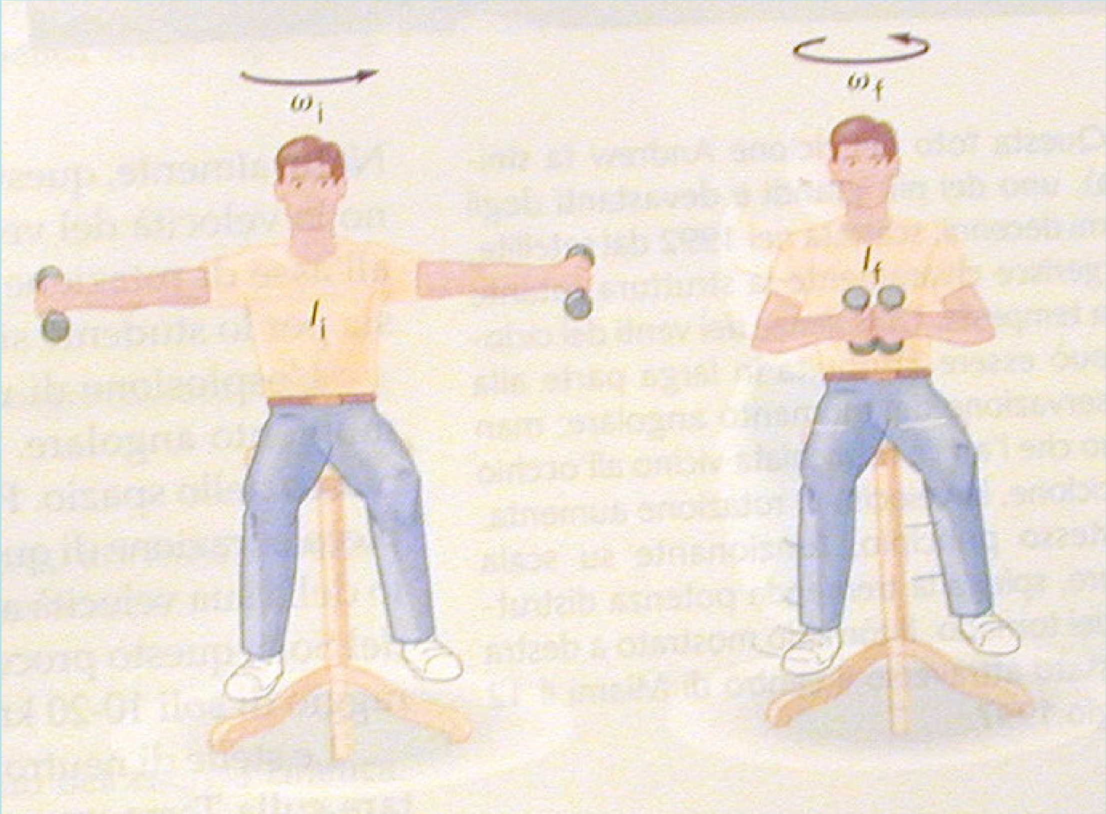
16. esempio svolto

Inizialmente lo studente mantiene le braccia distese e gira intorno all'asse dello sgabello con una velocità angolare di 3.74 rad/s.

Il momento di inerzia, in questo caso, è di 5.33 kg m^2

Mentre gira
lo studente avvicina
le braccia al torace,
riducendo il momento di inerzia
a 1.60 kg m^2.

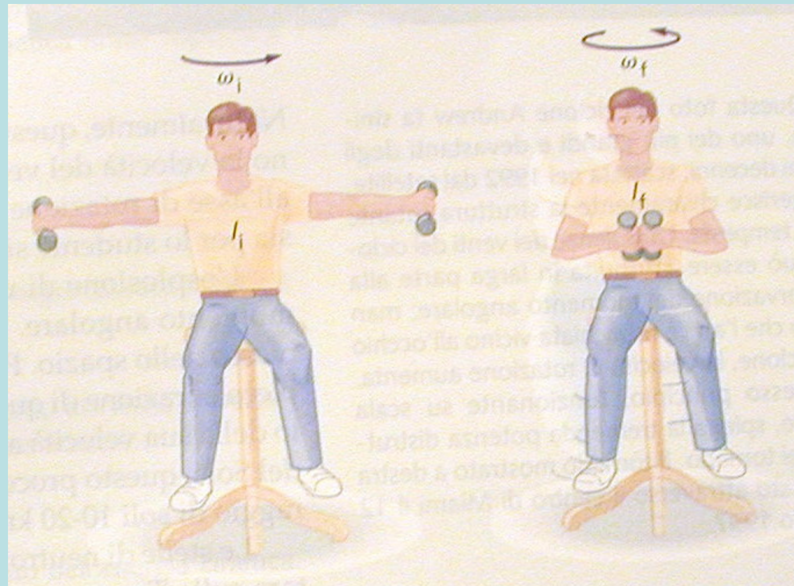
Quale è adesso il modulo
della velocità angolare?



Sul sistema non agiscono momenti torcenti esterni …

16. esempio svolto

… quindi **$L_i = L_f$**



Inizialmente lo studente mantiene le braccia distese e gira intorno all’asse dello sgabello con Una velocità angolare di 3.74 rad/s.
Il momento di inerzia, in questo caso,
è di 5.33 kg m^2

Mentre gira lo studente avvicina le braccia al torace, riducendo il momento di inerzia a 1.60 kg m^2.

Quale è adesso il modulo della velocità angolare?

$\boxed{L_i = L_f}$ → $\boxed{\omega_i I_i = \omega_f I_f}$ → $\boxed{\omega_f = \omega_i \ (I_i / I_f) = 12.5 \text{ rad/s}}$

Conservazione del
momento della quantità di moto

N.B.

Il carattere antiorario (orario) del moto ciclonico dipende dalla acc. del Coriolis e dall'emisfero (Nostro oppure australe).

Sistemi di riferimento rotanti

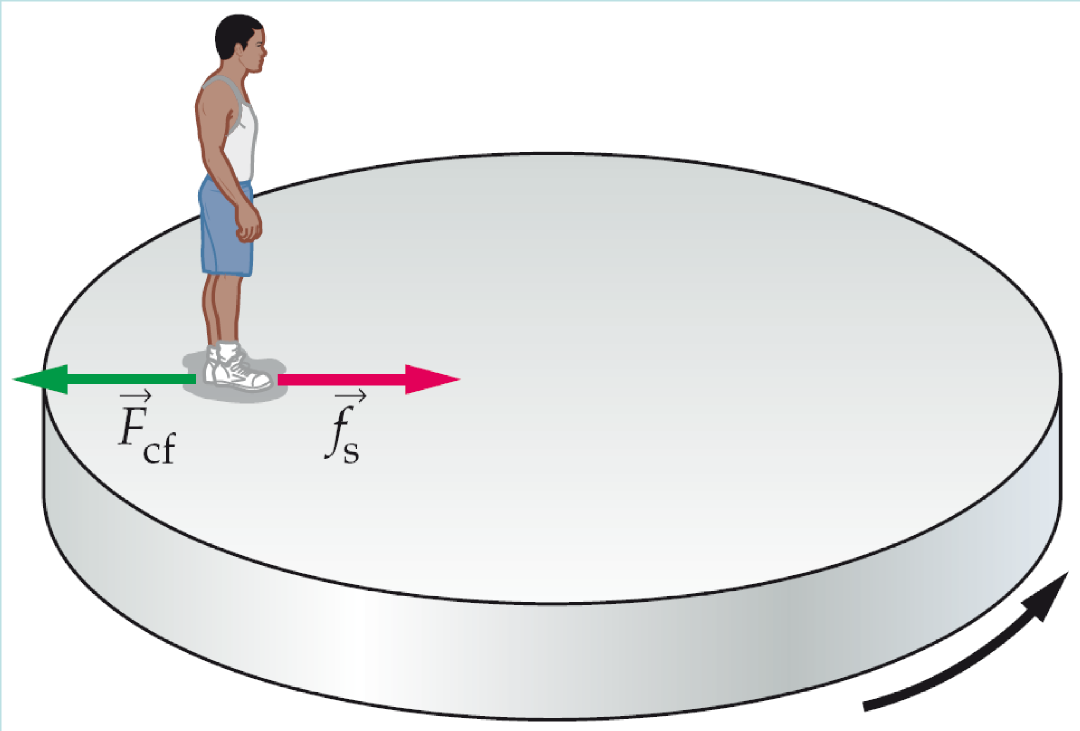
In un sistema di riferimento in moto rotatorio (*sistema **non** inerziale*) compaiono due forze *apparenti*:

- la *forza centrifuga*

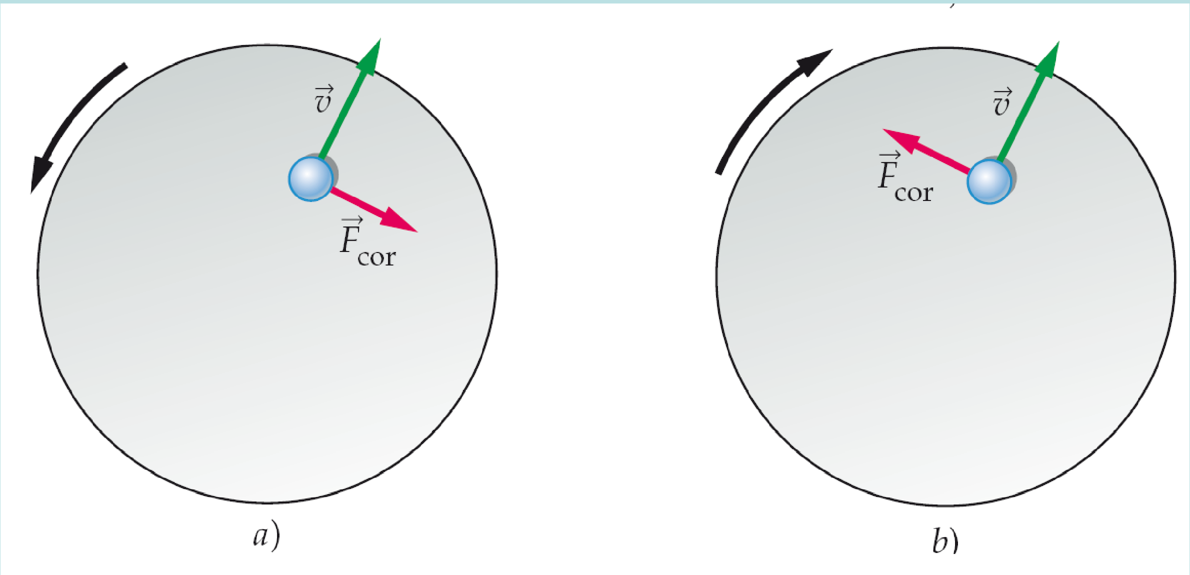
- *la forza di Coriolis*

Forza centrifuga: forza apparente che in un sistema di riferimento rotante bilancia la forza centripeta

$$F_{cf} = m\omega^2 r$$



Forza di Coriolis: forza apparente perpendicolare alla velocità del corpo e all’asse di rotazione



Rotazione antioraria:

Deviazione verso destra

Rotazione oraria:

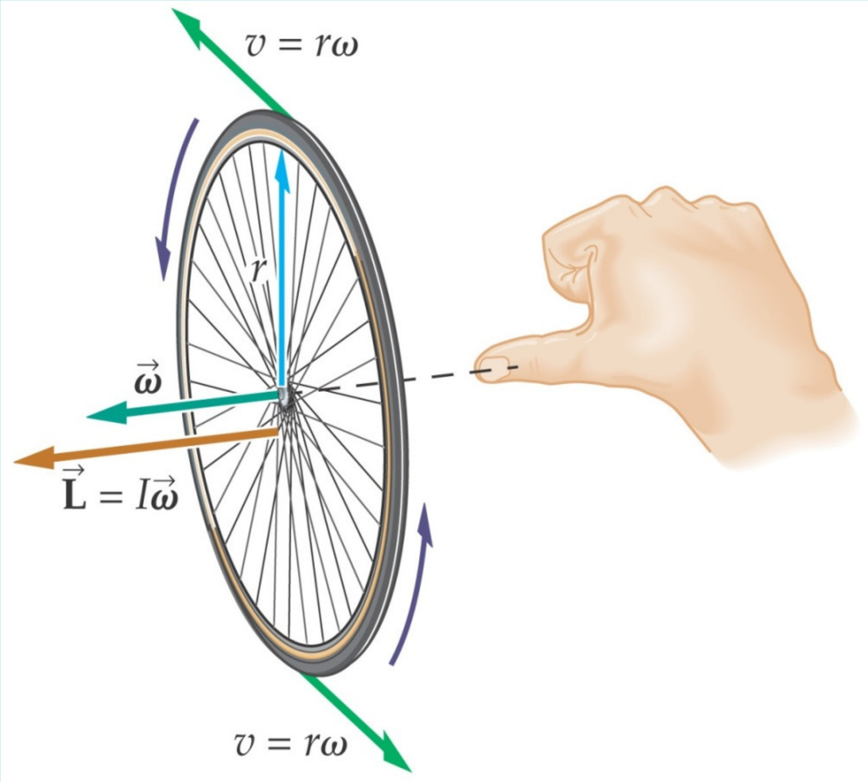
Deviazione verso sinistra

La natura vettoriale del moto rotazionale

Il vettore velocità angolare è diretto lungo l'asse di rotazione. Il verso è dato dalla regola della mano destra.

$$\boxed{\mathbf{v} = \omega \times \mathbf{r}}$$

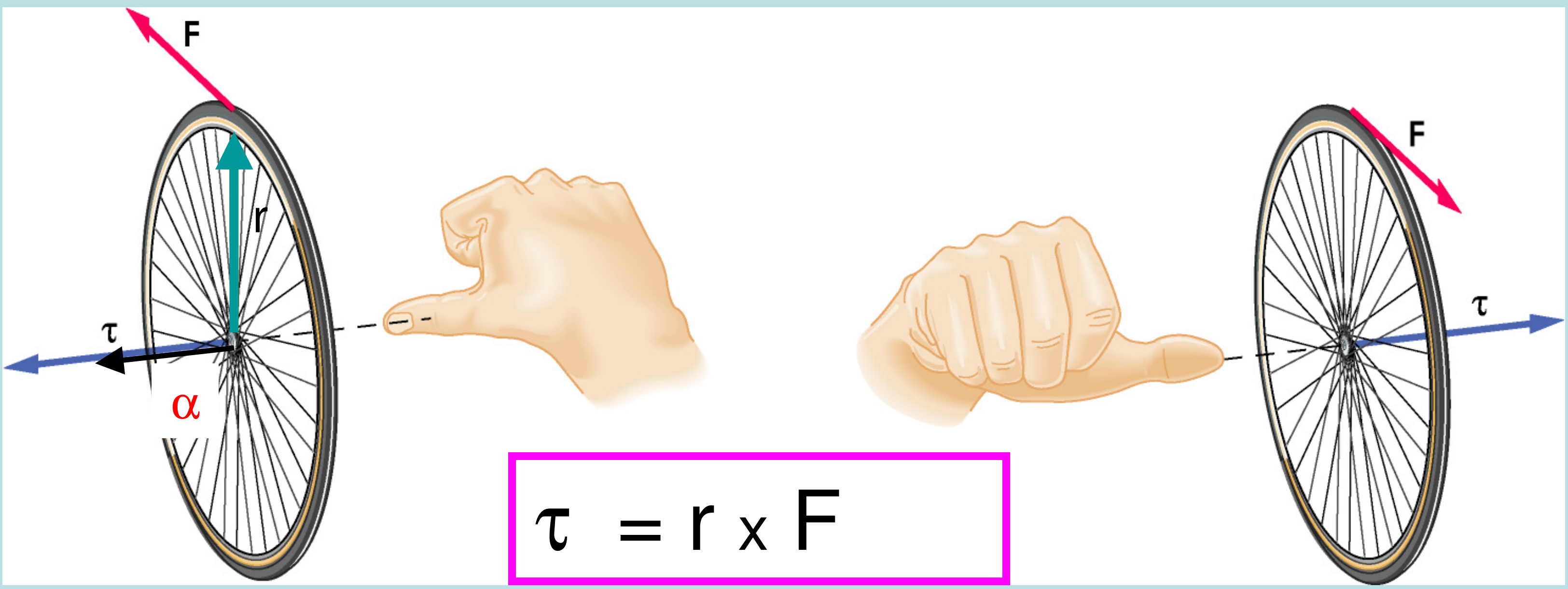
$$\boxed{\mathbf{L} = \mathbf{I}\,\omega}$$



sempre la regola della mano destra ci dà la direzione del momento torcente.

$\tau = I\,\alpha$

$\boxed{\tau = \Delta L / \Delta t} \Rightarrow \boxed{\Delta L = I\,\Delta\omega}$



$\boxed{\tau = r \times F}$