approfondimento

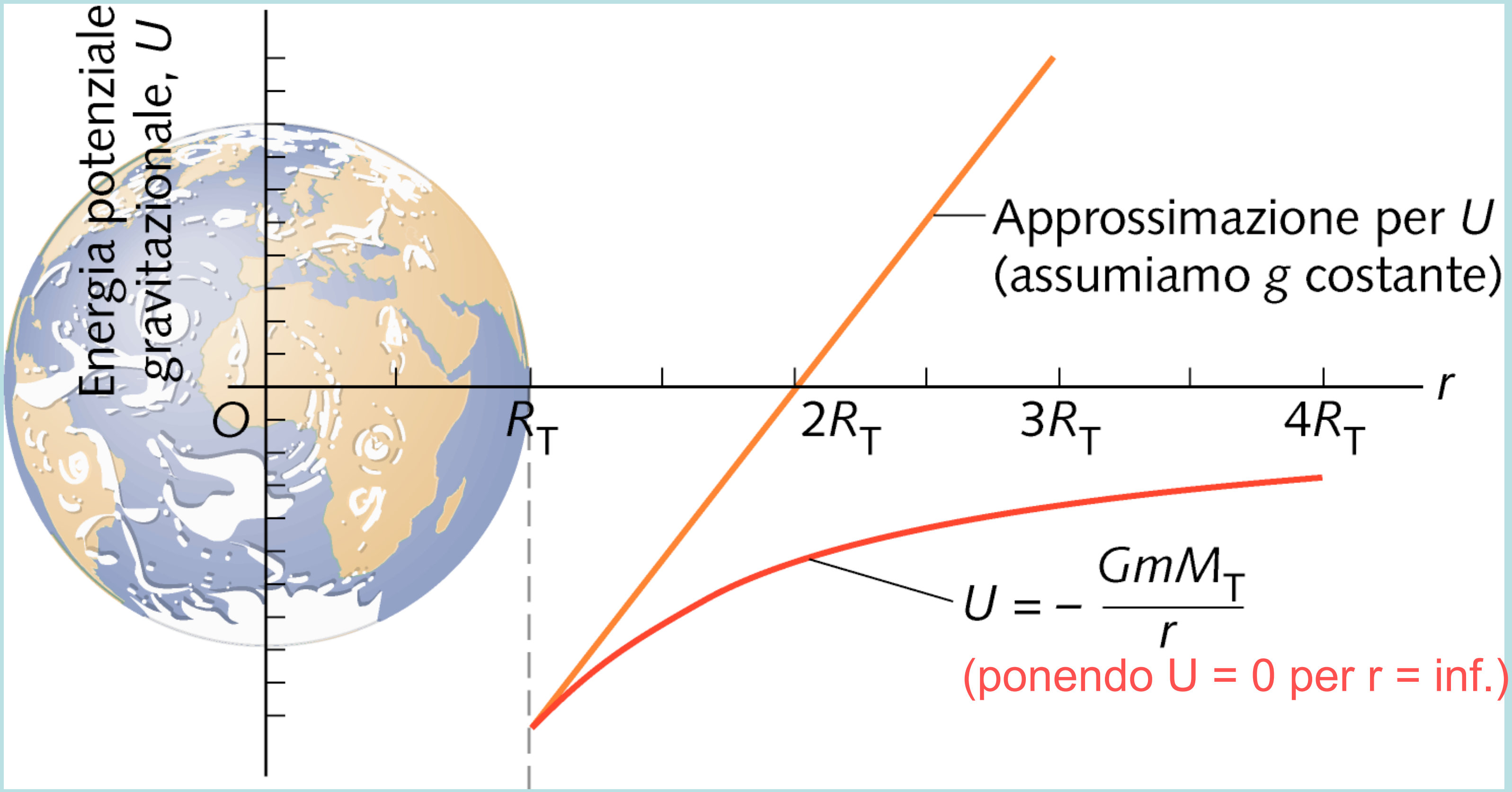
gravitazione

Energia potenziale gravitazionale

Conservazione della energia

Energia potenziale gravitazionale

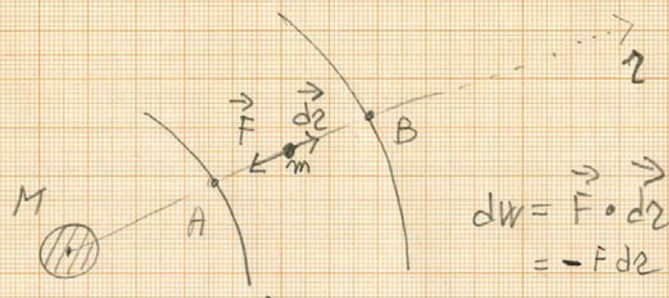
per una particella di massa m
che dista r dal centro della terra



U = mgh   vale solo vicino alla superficie terrestre
ove è possibile considerare g costante

Energia potenziale gravitazionale

Calcolo esplicito:



$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{r} = -F\,dr$$

$$W_{AB} = \int_{r_A}^{r_B} \vec{F} \cdot d\vec{s}$$

$$= -\int G\frac{mM}{r^2}\,dr$$

$$= -GmM \int \frac{dr}{r^2}$$

$$= -GmM\left[-\frac{1}{r_B} + \frac{1}{r_A}\right]$$

$$W_{AB} = -\Delta U$$

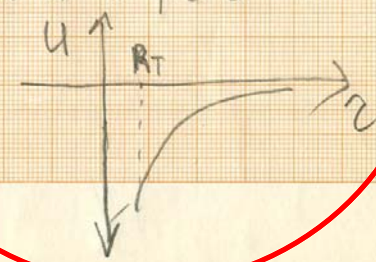
$$= -(U_B - U_A)$$

$$= -\left(\frac{-GmM}{r_B} - \frac{-GmM}{r_A}\right)$$

$$\Downarrow$$

$$U(r) = -\frac{GmM}{r}$$

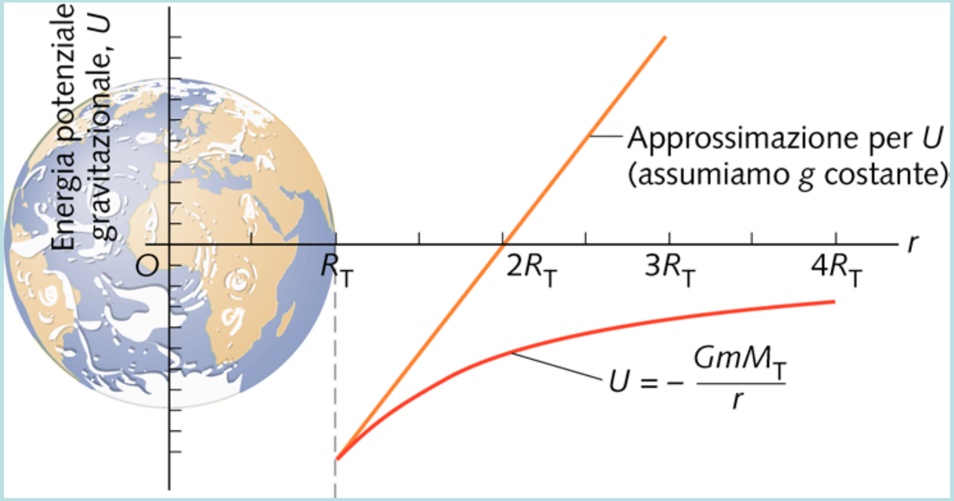
con $U = 0$ per $r = \infty$



La forza gravitazionale è conservativa: il lavoro dipende solo dalla posizione iniziale (distanza iniziale dal centro della terra)
e dalla posizione finale (distanza finale dal centro della terra).

Energia potenziale gravitazionale

Del resto si verifica facilmente che per $R_T >> h$ le due espressioni coincidono



$$U(R_T + h) = -G\, mM_T / (R_T + h)$$

$$U(R_T) = -G\, mM_T / (R_T)$$

$$\Delta U = -G\, mM_T / (R_T + h) - [-G\, mM_T / (R_T)] \approx m\, [GM_T/R_T^2]\, h$$

$$\boxed{\Delta U = mgh}$$

Conservazione della energia

per una particella di massa m
che dista r dal centro della terra
L'energia meccanica si scrive: $E = K + U = \frac{1}{2} mv^2 - G\, mM_T/r$

per un asteroide lontanissimo dalla Terra

$$E_i = K_i + U_i = 0$$

Quando si avvicina alla Terra …

$$E_i = E_f$$

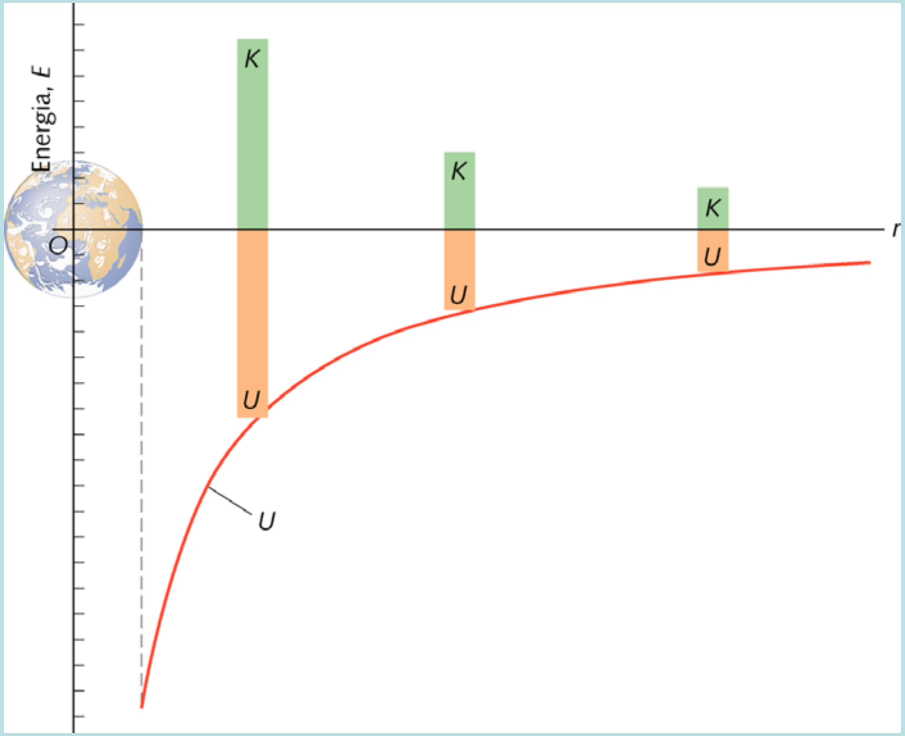
$$0 = \frac{1}{2} mv_f^2 - G\, mM_T/R_T$$

La velocità di impatto v_f vale

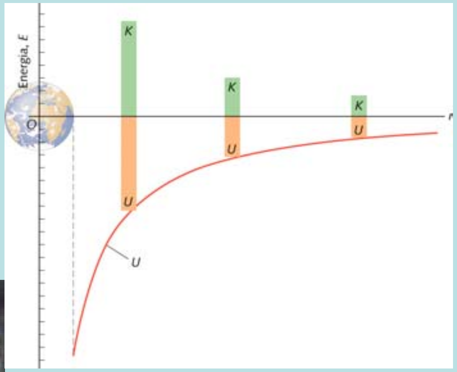
$$v_f = \sqrt{\frac{2GM_T}{R_T}}$$

$\approx$ 40000 km/h

indipendentemente dalla massa!



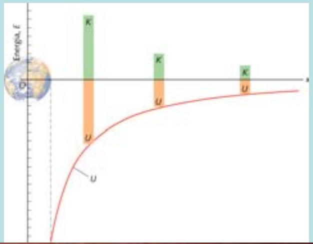
Conservazione della energia



esempi

Cratere di
Rotorua
-Nuova Zelanda
25000 anni

Conservazione della energia



esempi

Cometa Hale-Boop 1997

Velocità di fuga

per una particella di massa m
che dista r dal centro della terra
l'energia meccanica si scrive:

$$E = K + U = \frac{1}{2} mv^2 - G\, mM_T/r$$

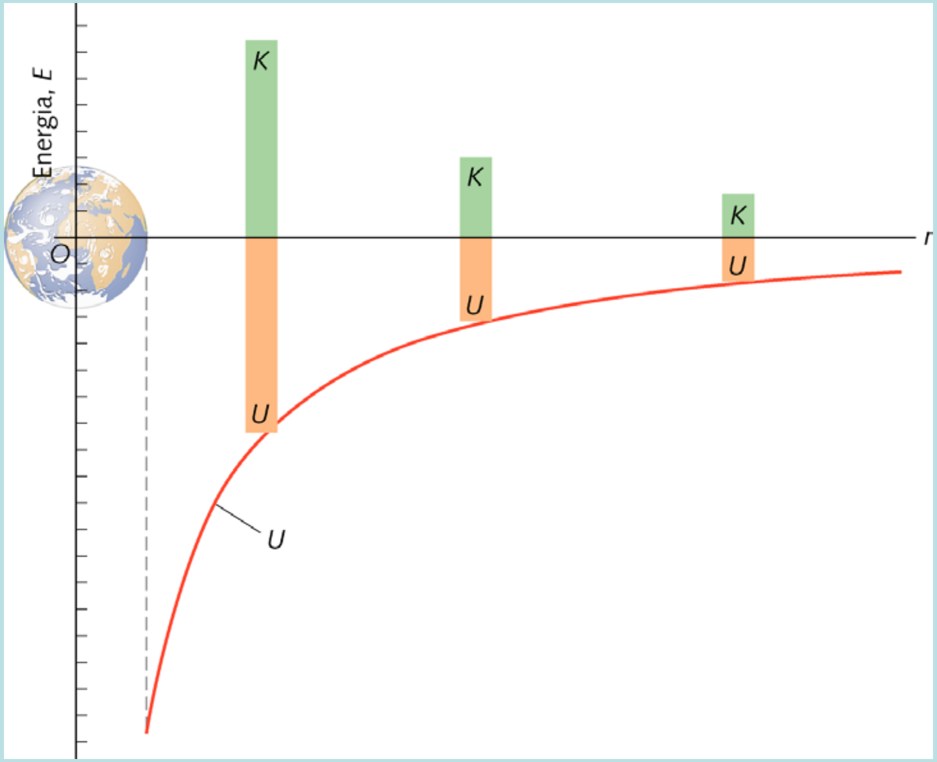
la velocità necessaria per allontanarsi definitivamente dalla terra ovvero la

Velocità di fuga

si ottiene imponendo:

$$E_i = E_f$$

$$\frac{1}{2} mv_f^2 - G\, mM_T/R_T = 0$$



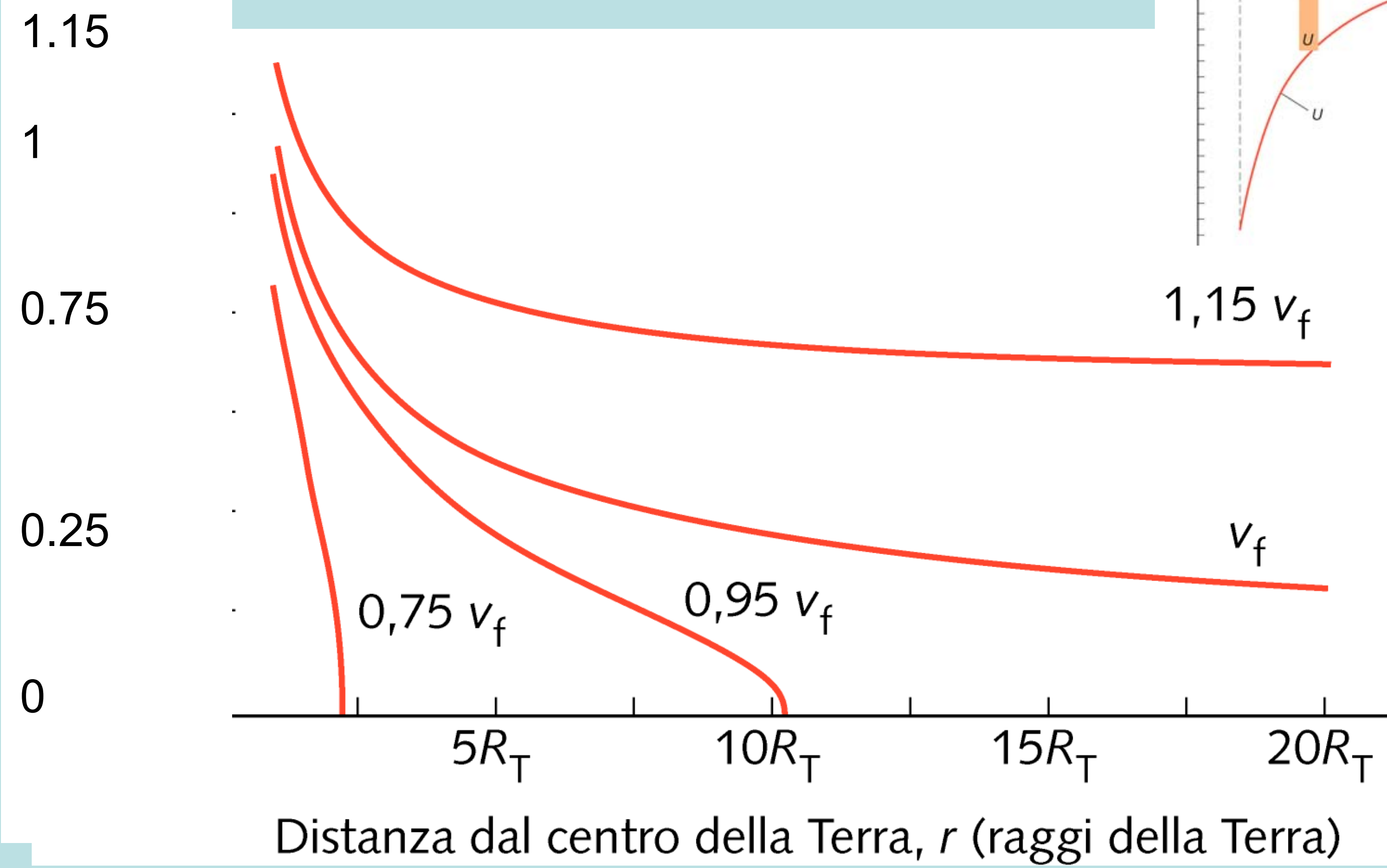
La velocità di fuga v_f vale

$$v_f = \sqrt{\frac{2GM_T}{R_T}}$$

$\approx$ 40000 km/h

indipendentemente dalla massa!

Velocità di fuga



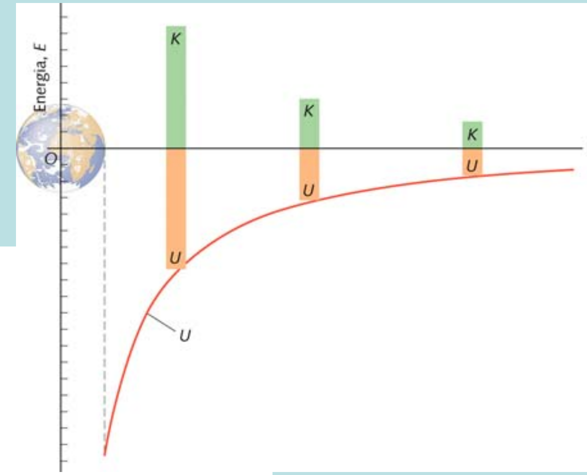
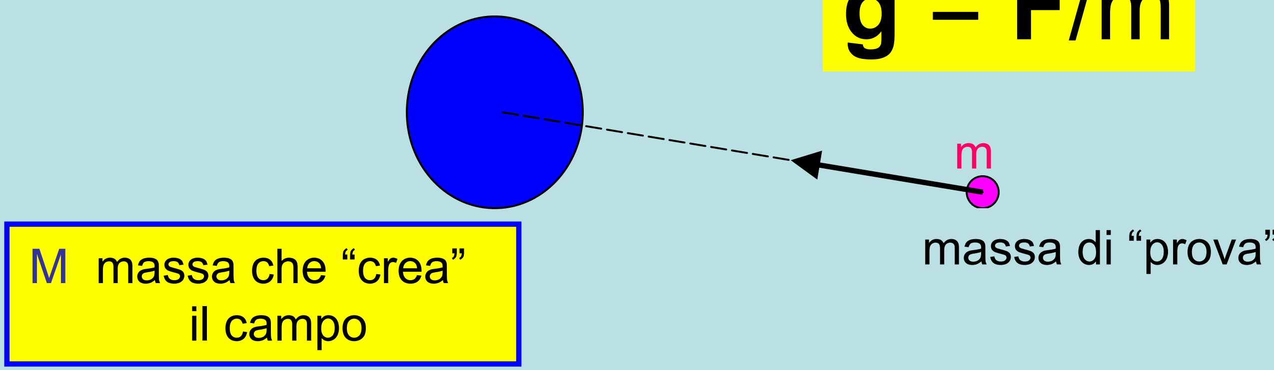


Grafico della velocità di un razzo in funzione della distanza dalla terra per diverse velocità iniziali

Campo gravitazionale

Se una massa di prova m risente di una forza gravitazionale **F** in una data posizione dello spazio,
Il **campo gravitazionale g**, in quella posizione, è definito come:

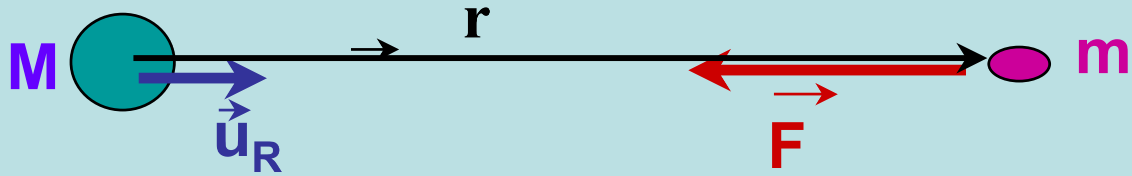
$$\mathbf{g} = \mathbf{F}/m$$



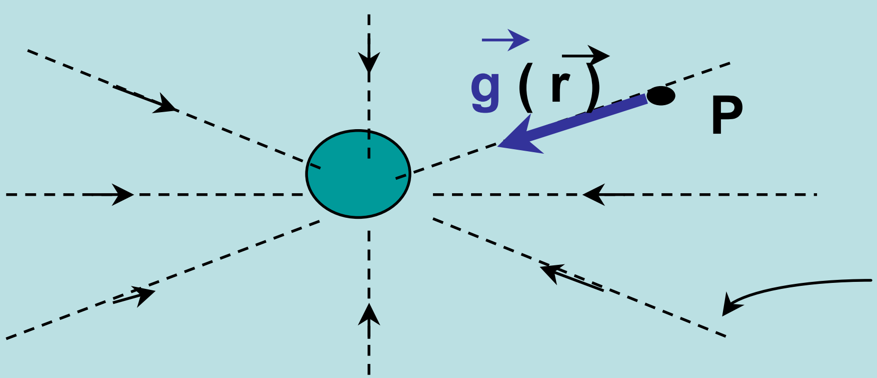
Campo della forza gravitazionale

Forza gravitazionale esercitata da una massa **M** su una massa **m**

$$\vec{F}(\vec{r}) = -\frac{G\,M\,m}{r^2}\,\vec{u}_R$$



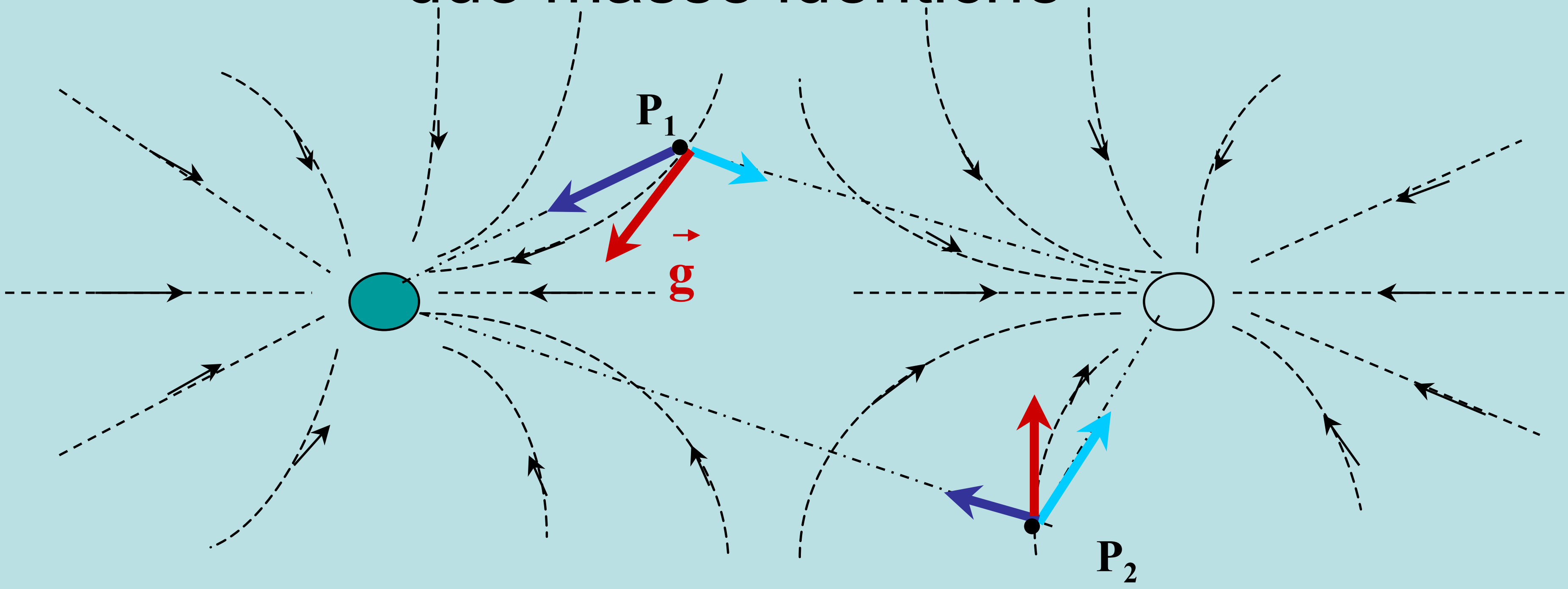
Campo gravitazionale generato dalla massa **M**



$$\vec{g}(\vec{r}) \equiv \frac{\vec{F}(\vec{r})}{m} = -\frac{G\,M}{r^2}\,\vec{u}_R$$

"linee di forza" del campo: tangenti in ogni punto alla direzione del campo

Campo gravitazionale generato da due masse identiche



Le linee di forza “visualizzano” l’andamento del campo; la loro densità è proporzionale all’intensità del campo.

$$\boxed{\mathbf{F}(P) = m\,\mathbf{g}(P)}$$

Lente gravitazionale