approfondimento

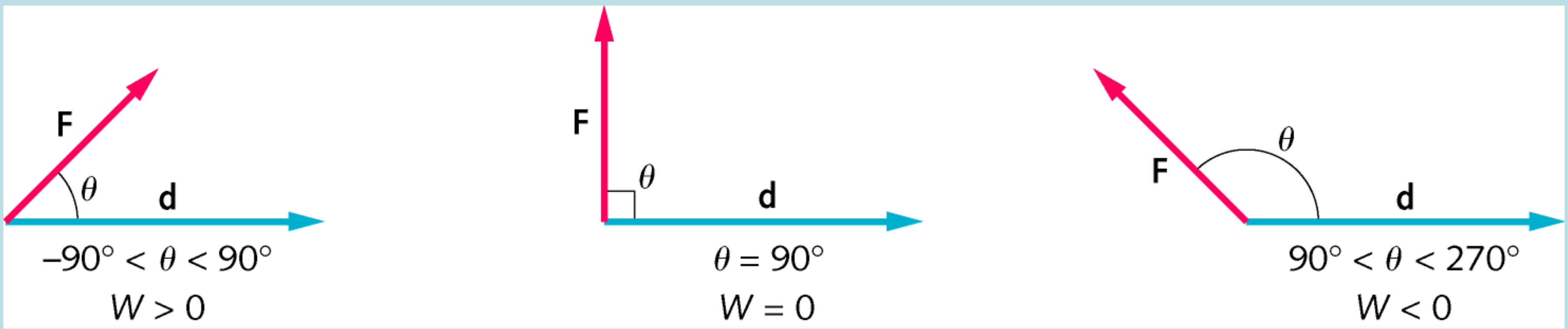
Lavoro ed energia

Lavoro compiuto da una forza costante

$$W = \mathbf{F} \cdot \mathbf{d} = F\, d \cos\theta$$

dimensioni
$[W] = [ML^2T^{-2}]$

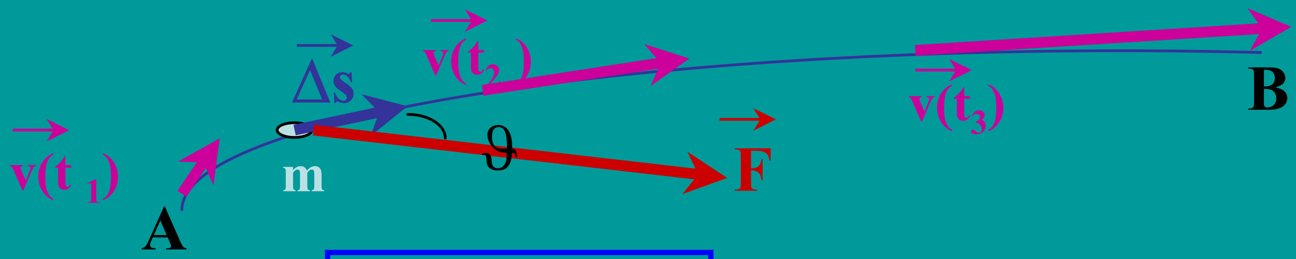
Unità di misura del lavoro N m (Joule) in MKS
dine cm (erg) in cgs



N.B. Quando la forza è perpendicolare allo spostamento il lavoro è nullo

Lavoro compiuto da una forza

quando lo spostamento non è rettilineo o quando la forza non è costante



$$\Delta W = \mathbf{F} \;.\; \Delta \mathbf{s}$$

$$W_{A\text{--->}B} = \Sigma\, \Delta W = \Sigma\, \mathbf{F} \;.\; \Delta \mathbf{s}$$

$$W_{A \to B} \equiv \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_A^B m\vec{a} \cdot d\vec{s} = \int_A^B m a_T ds$$

$$a \cos\theta = a_T$$

Energia cinetica

È una misura del lavoro compiuto per metter in movimento con velocità v un corpo puntiforme di massa m inizialmente in quiete

energia cinetica traslazionale K
di un punto materiale
di massa m e velocità v

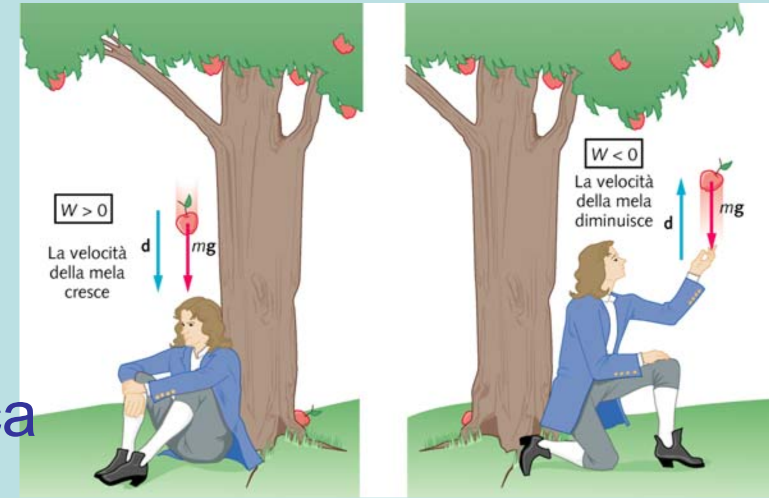
$$K \equiv \frac{1}{2} m v^2$$

Un corpo che possiede energia cinetica **K** può a sua volta compiere un lavoro positivo W, ad esempio comprimendo una molla

N.B. Gli oggetti posseggono energia cinetica anche per
i moti rotazionali
e per i moti interni alle molecole che li costituiscono
(vedi dopo).

Energia cinetica e teorema delle forze vive

Il lavoro di tutte le forze applicate ad un punto materiale è uguale alla variazione della sua energia cinetica



$$W_{totale} = \Delta K$$

Energia cinetica

$$K = \frac{1}{2} mv^2$$

Il teorema delle forze vive indica che se il lavoro è positivo l'energia cinetica aumenta.
Al contrario, se il lavoro è negativo l'energia cinetica diminuisce

Teorema delle forze vive (o della energia cinetica)

dimostrazione

$$\mathbf{F}_{totale} = m\mathbf{g} + \mathbf{F}_{aria}$$

$$a = F_{totale} / m$$

Poiché a è costante
Il moto è (rettilineo) uniformemente accelerato…
dopo una caduta per un tratto d la velocità finale è

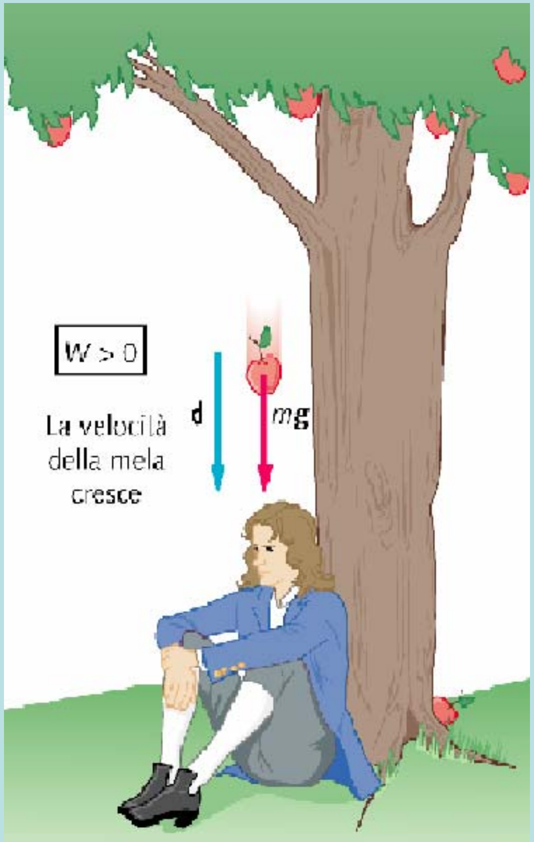
$$v_f^2 = v_i^2 + 2ad$$

$$2ad = v_f^2 - v_i^2$$

$$2\ (F_{totale} / m)\ d = v_f^2 - v_i^2$$

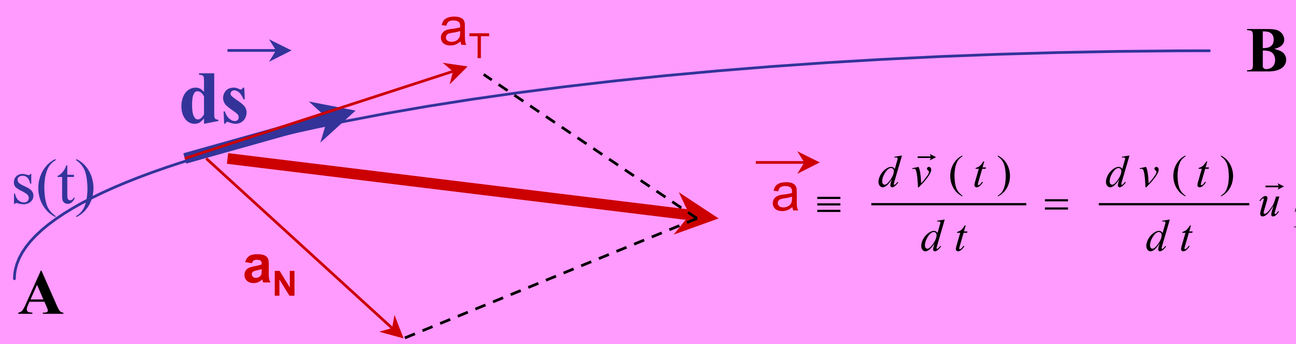
$$F_{totale}\ d = ½\ mv_f^2 – ½\ mv_i^2$$

$$\boxed{W_{totale} = ½\ mv_f^2 – ½\ mv_i^2}$$



Stabilisce una precisa relazione tra il lavoro totale e la variazione del modulo della velocità

teorema delle forze vive
dimostrazione generale



$$\vec{a} \equiv \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \frac{dv(t)}{dt}\vec{u}_T + \frac{v^2}{\rho}\vec{u}_N$$

$$W_{A\to B} \equiv \int_A^B \vec{F}\cdot d\vec{s} = \int_A^B m\vec{a}\cdot d\vec{s} = \int_A^B m\, a_T\, ds =$$

$$= \int m \frac{dv(t)}{dt} ds = \int m \frac{dv(s)}{ds}\frac{ds(t)}{dt} ds$$

$$= \int m v \frac{dv(s)}{ds} ds = \int_A^B m v\, dv = \frac{1}{2} m v_B^2 - \frac{1}{2} m v_A^2 \equiv E_k^B - E_k^A$$

In generale si dice che un corpo o un sistema
possiede energia
quando, grazie ad una sua peculiare proprietà
è in grado di compiere un lavoro

Un punto materiale in movimento con velocità v
possiede energia cinetica $K = 1/2\ m\ v^2$
Interpretabile come il lavoro che è stato necessario per
metterlo in movimento partendo da fermo

$$\boxed{W = \frac{1}{2} m v_f^2 - \frac{1}{2} m v_i^2}$$

$$\boxed{\text{con} \quad v_f = v;\ v_i = 0}$$

Allo stesso modo per fermarlo occorre applicare una forza frenante (costante e nella direzione del moto) per lo spostamento d necessario a fermarsi. $W = F\ d \cos\theta$

$-F\ d = -ma\ d$ ed essendo $\boxed{2ad = v_f^2 - v_i^2}$

$= -\frac{1}{2} m (v_f^2 - v_i^2)$

$= \frac{1}{2} m v^2$

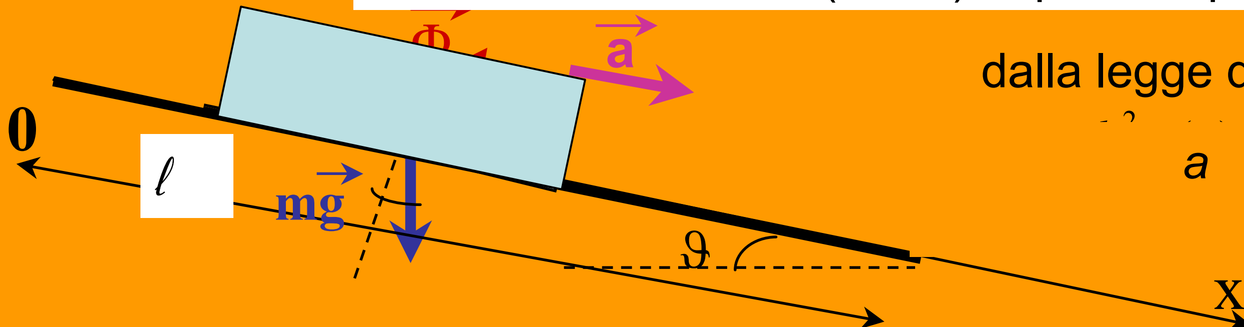
$$\boxed{\text{con} \quad v_f = 0;\ v_i = v}$$

Quindi,
un corpo in movimento è in grado di compiere un lavoro pari a $\frac{1}{2} m v^2$

Approccio dinamico
ed approccio energetico allo studio del moto

Approccio **dinamico**

Esempio: moto lungo un piano inclinato privo d'attrito
calcolare la velocità (finale) dopo aver percorso la distanza l



dalla legge di Newton

$$a = g \sin \vartheta$$

$$x_0 = 0, v_0 = 0$$

Usando l'equazione del moto:

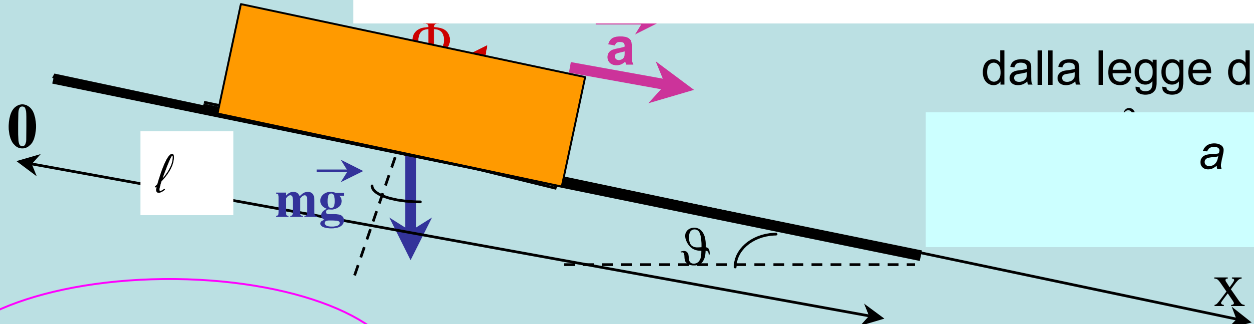
$$v(t) = g \sin \vartheta t$$

$$x(t) = \frac{1}{2} g \sin \vartheta t^2, x(t_f) \equiv \ell \Rightarrow t_f = \sqrt{\frac{2\ell}{g \sin \vartheta}}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{v_f \equiv v(t_f) = g \sin \vartheta t_f = \sqrt{2 \ell g \sin \vartheta}}$$

approccio **energetico**

Esempio: moto lungo un piano inclinato privo d'attrito…



dalla legge di Newton

$$a = g \sin\vartheta$$

$$x_0 = 0, v_0 = 0$$

Usando il **teorema delle Forze vive:**

$$W_{totale} \equiv \Delta K = ½\, mv_f^2 - ½\, mv_i^2$$

$$v_f \equiv v(t_f) = g \sin\vartheta\, t_f = \sqrt{2 \ell g \sin\vartheta}$$

$$mg\sin\theta\, \ell = ½\, m\, v_f^2$$

Campi conservativi e Energia potenziale

Campo vettoriale

Un **campo vettoriale** è definito quando in ogni punto di una data regione dello spazio è definito un vettore (**V**), ossia siano date **tre funzioni dei punti dello spazio**, in generale indipendenti, che rappresentino le sue componenti (ad es. cartesiane): $V_x(x,y,z)$; $V_y(x,y,z)$; $V_x(x,y,z)$

Esempio:

-campo vettoriale delle velocità delle particelle di un fluido in moto.

-campo vettoriale delle accelerazioni (tutte uguali a **g**) cui è soggetto un punto materiale in prossimità della superficie terrestre.

Campo di forza

Campo di forza:
campo vettoriale che rappresenta, in ogni punto dello spazio in cui è definito, la forza con la quale un punto materiale viene sollecitato quando si trova in quella posizione.

Esempio: campo vettoriale della forza peso applicata ad un punto materiale di massa m in prossimità della superficie terrestre.

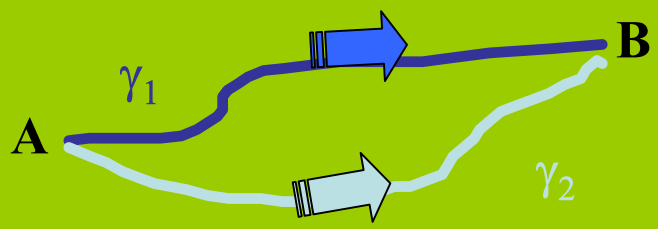
Campo di forze conservativo

il lavoro della forza del campo
dipende solo dalla posizione iniziale e finale

$$\boxed{W_{AB\gamma_1} = W_{AB\gamma_2}}$$

per **qualsiasi** coppia di punti A,B
e per **qualsiasi** percorso
γ che li congiunga

Σ F(r) Δs cosθ = Σ F(r) Δs cosθ
lungo γ1 lungo γ2

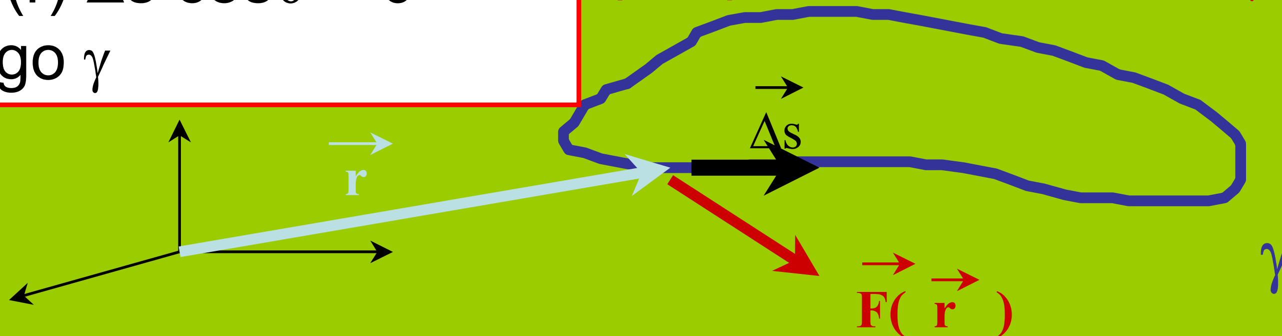


Proprietà caratteristica di un campo conservativo:

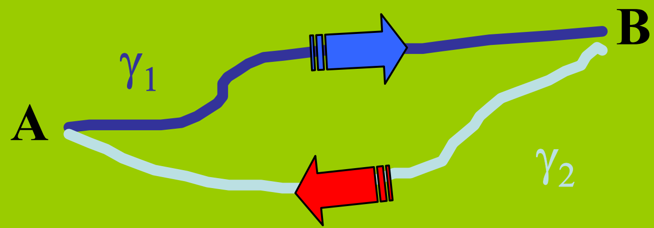
il lavoro lungo **qualsiasi** percorso chiuso è nullo

Σ F(r) Δs cosθ = 0
lungo γ

per qualsiasi curva chiusa γ

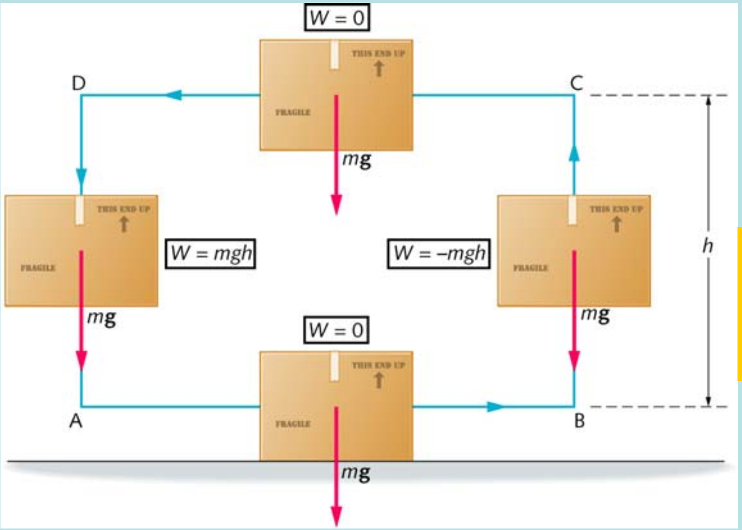


Infatti, poiché il lavoro dipende solo dalla posizione iniziale e finale
E NON dipende dal particolare cammino percorso …

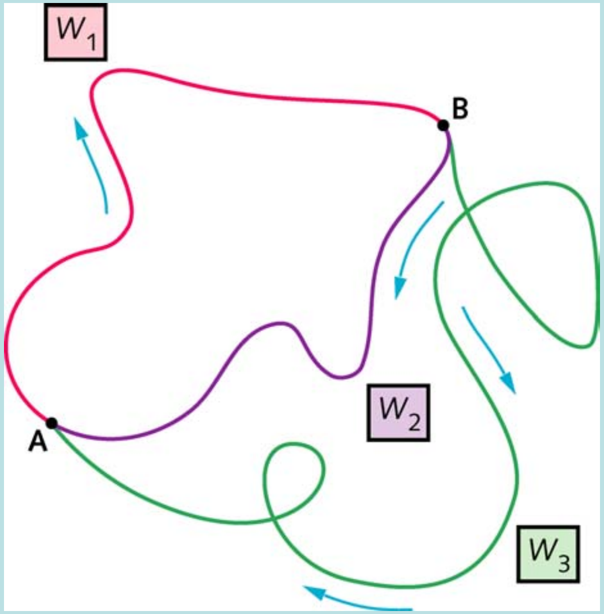


$$W_{AB}\gamma_1 = - W_{BA}\gamma_2$$

La forza peso è un tipico esempio di forza conservativa …
infatti:



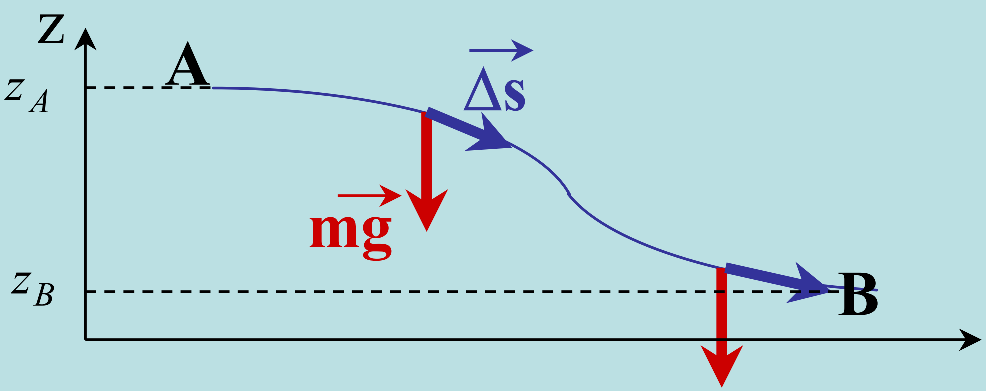
La **forza peso** su un percorso chiuso compie un lavoro totale nullo

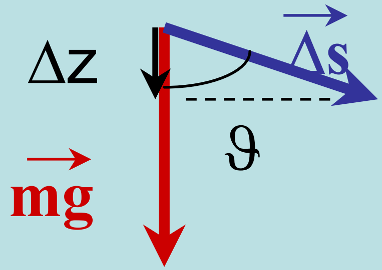


Il lavoro fatto dalla forza peso è indipendente dal cammino …

… dipende solo dalla posizione iniziale e dalla posizione finale

Lavoro della forza peso





$$\boxed{\Delta z = -\,\Delta s \cos\theta}$$

$$\Delta W = mg\,.\,\Delta \mathbf{s} = mg\,\Delta s \cos\vartheta = -mg\Delta z$$

$$W_{AB} = -\Sigma\, mg\Delta z = -mg\Sigma\Delta z = -mg(\,z_B - z_A)$$

Il lavoro fatto dalla forza peso dipende
solo dalla quota iniziale Z_A
e da quella finale Z_B

Energia potenziale

Per un **campo di forza conservativo**, si definisce energia potenziale U(P) quella funzione scalare dei punti dello spazio tale che la sua variazione tra due qualsiasi punti A, B sia uguale a meno del segno al lavoro compiuto dalla forza del campo per andare da A a B (lungo un qualsiasi percorso).

$$W_{if} = -\Delta U = -(U_f - U_i)$$

L'energia potenziale ha le stesse dimensioni (e le stesse unità di misura) del Lavoro

Al contrario della energia cinetica, la sua espressione esplicita dipende dal tipo di forza conservativa

N.B. l'energia potenziale è **definita a meno di una costante arbitraria** ($\equiv$ al valore ad essa convenzionalmente assegnato in un punto arbitrario)

energia potenziale
associata al campo di forze (conservative) della forza peso

mentre il tuffatore “cade”…

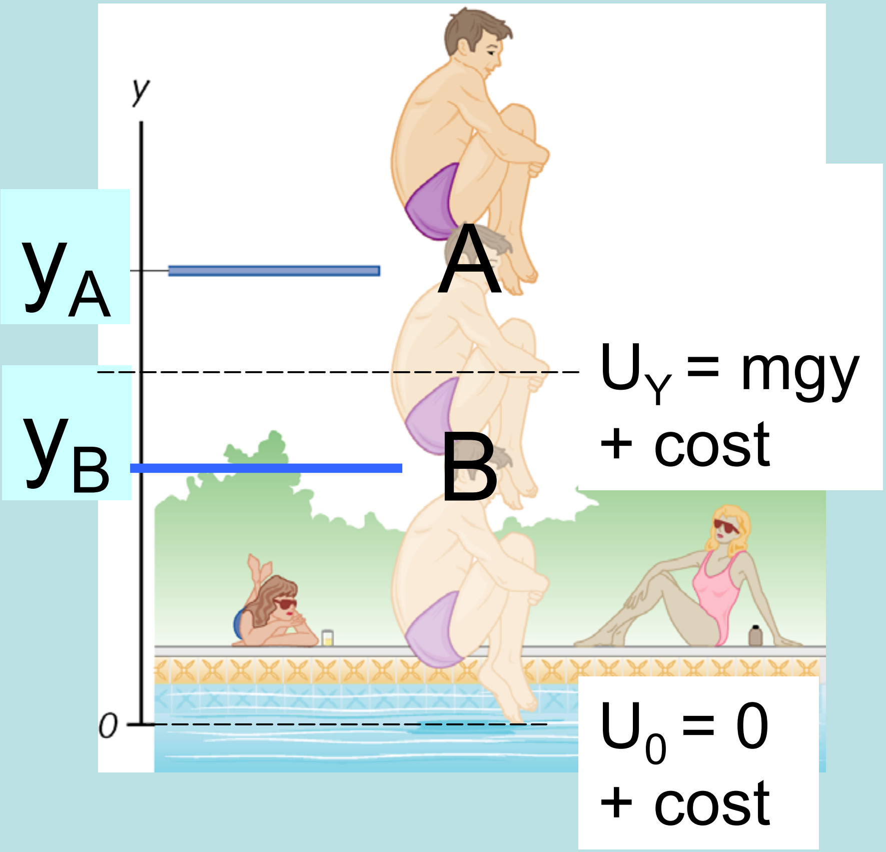
$$W_{\text{forza peso}} \equiv W_{AB}$$

$$W_{AB} = -mg(y_B - y_A)$$

$$-\Delta U = W_{AB}$$

$$U_A - U_B = mg(+y_A - y_B)$$

$$U = mgy + \text{cost}$$



N.B. $U_{\text{forza peso}}$ dipende solo dalla altezza y e non dalla posizione sul piano orizzontale energia potenziale della forza peso

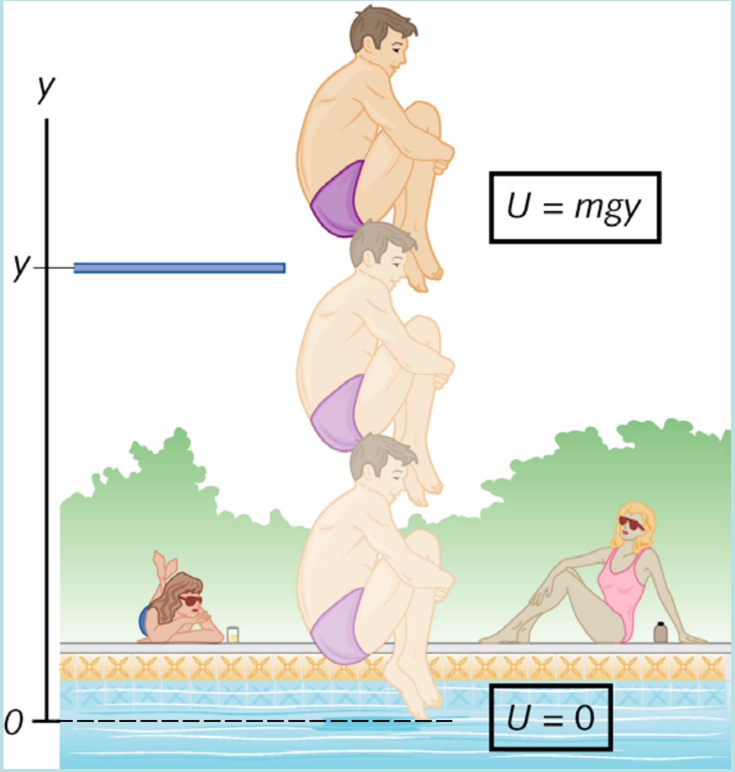
-scelta del riferimento-

$$U_A - U_B = -mg(y_B - y_A)$$

$$U_A - U_B = mg(+y_A - y_B)$$

$$U_B = U_A + mg(y_B - y_A)$$

Ponendo $U_A = 0$ e
scegliendo A ≡ 0rigine
($y_A = 0$)
si ha:



$$U = mgy$$

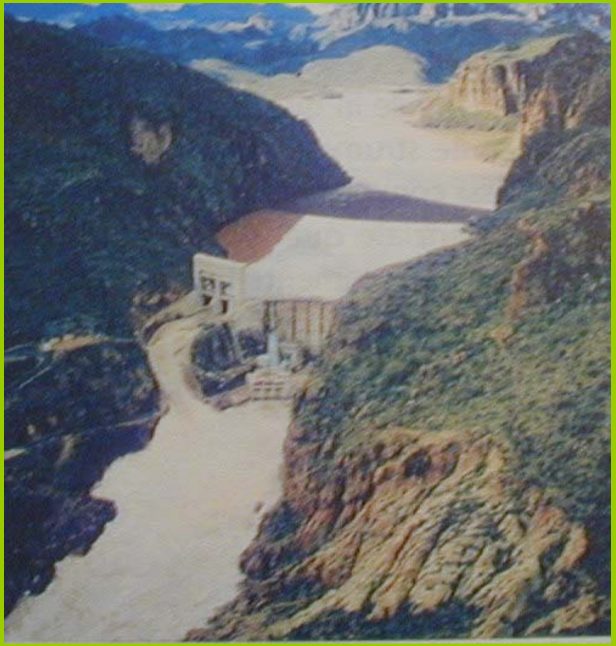
Teorema
della conservazione della energia meccanica

Se la forza è coservativa:

$W_{totale} = W_{cons} = -\Delta U = -(U_f - U_i)$

e per il teorema delle forze vive:

$W_{totale} = \Delta K = K_f - K_i$

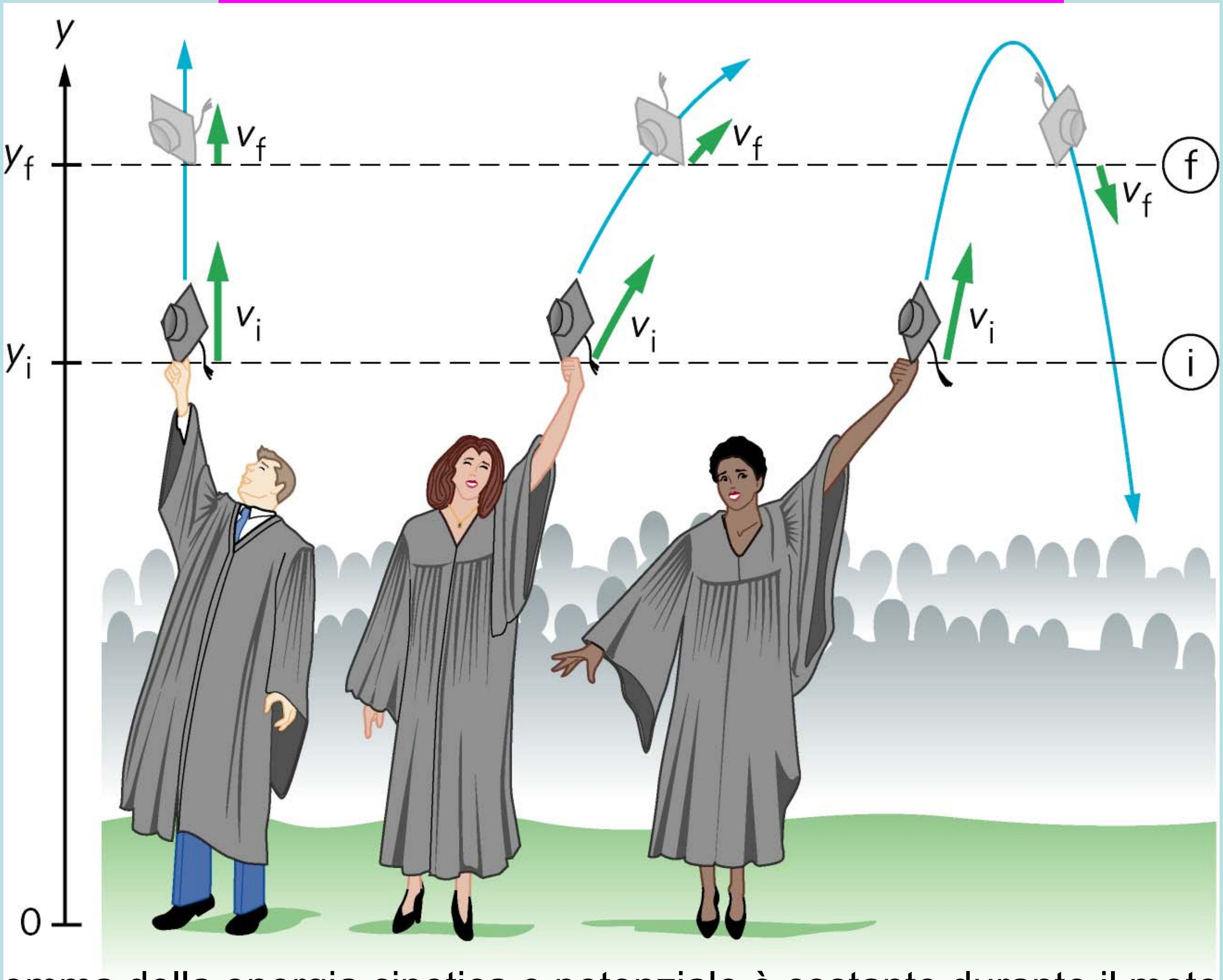


$\Delta U + \Delta K = 0$

In un sistema in cui operano **solo** forze conservative **l'energia meccanica** si conserva

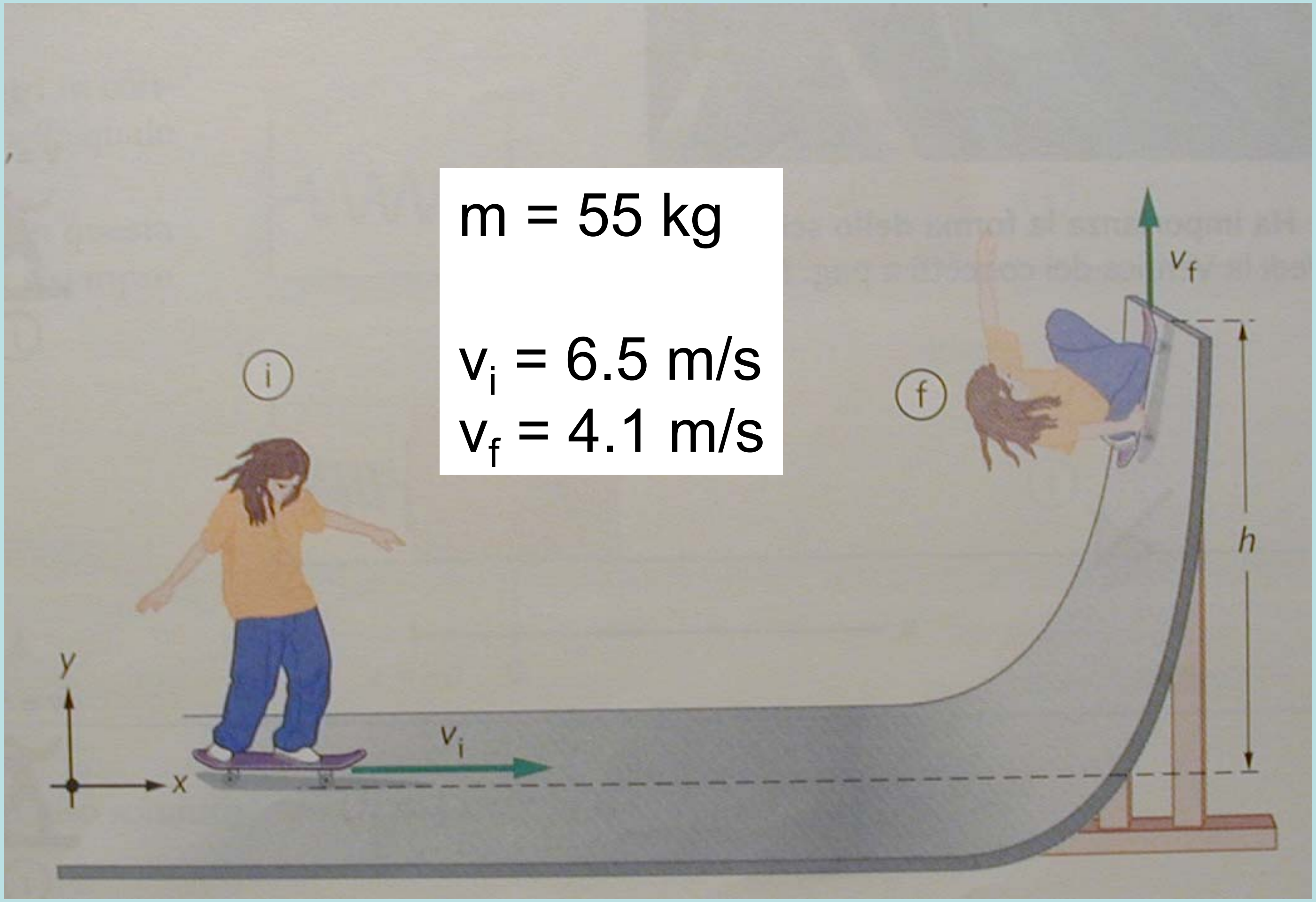
$$E = U + K = \text{costante}$$

$$E = U + K = \text{costante}$$



La somma della energia cinetica e potenziale è costante durante il moto

7. esempio svolto



m = 55 kg

v_i = 6.5 m/s
v_f = 4.1 m/s

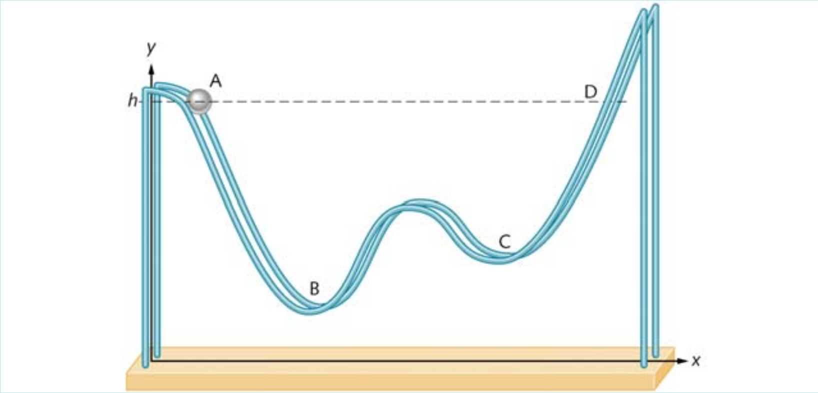
Trovare l'altezza h della rampa in assenza di attriti

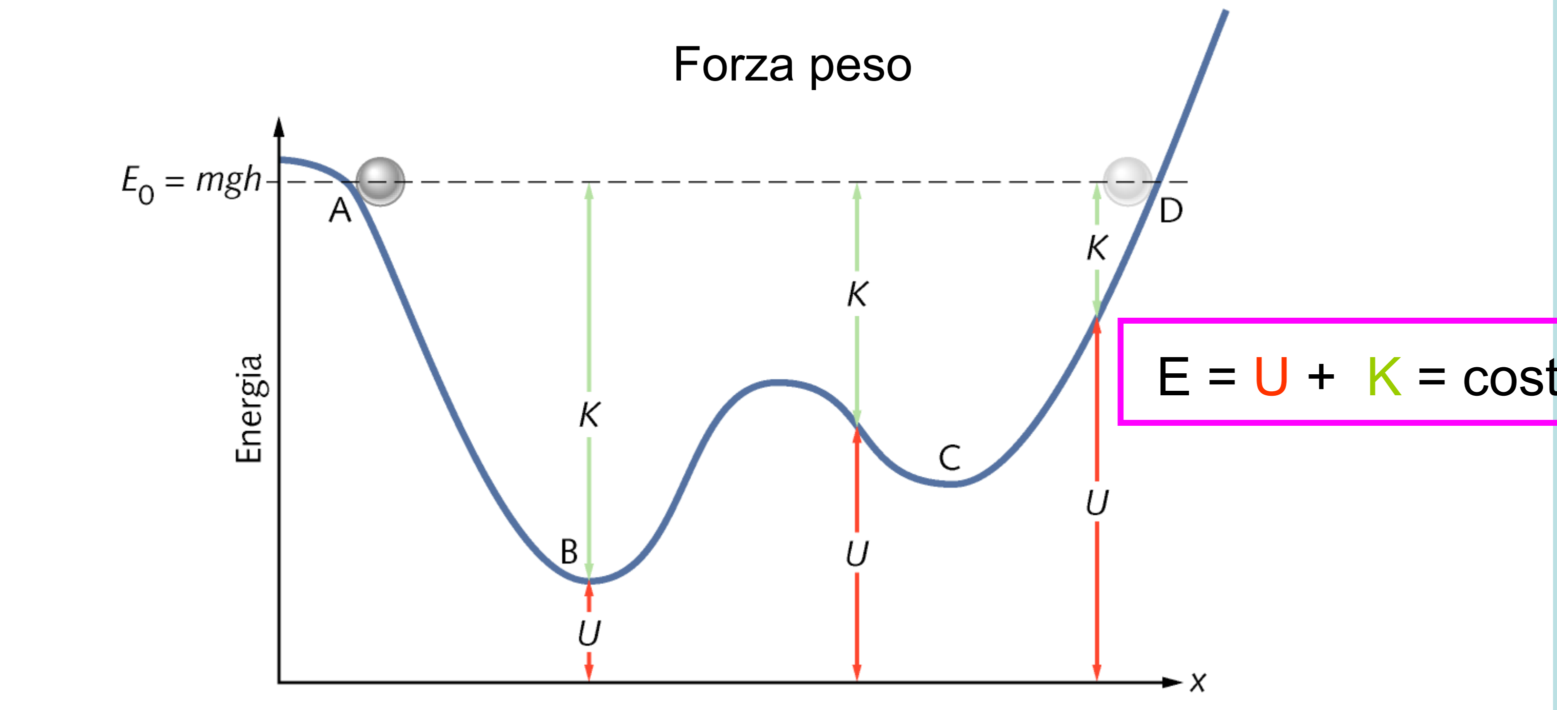
Quale è la massima altezza raggiunta?

$$E_i = E_f$$

Curve dell'energia potenziale

Un minimo relativo di
energia potenziale
corrisponde sempre ad una configurazione
di equilibrio stabile

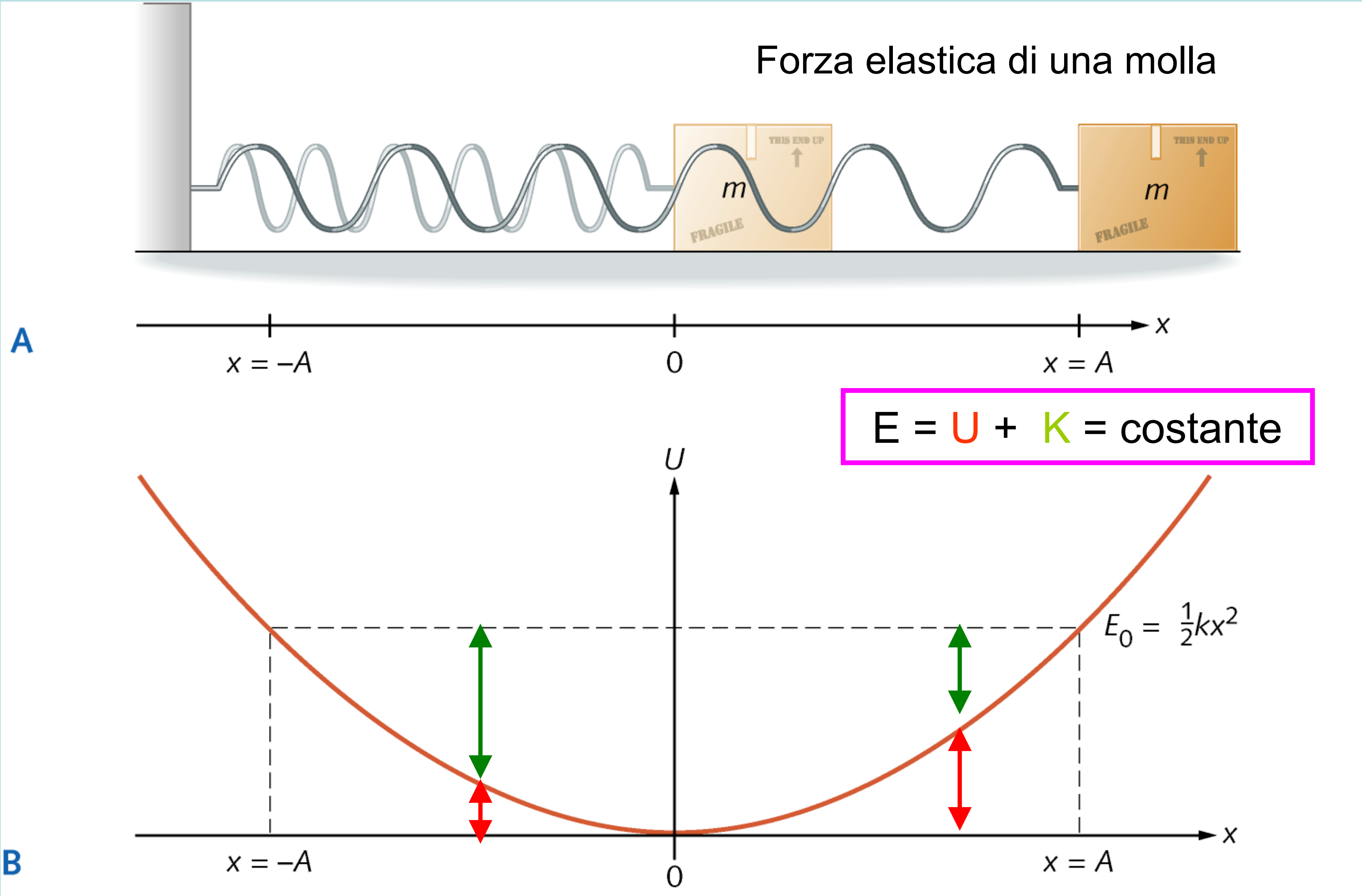




E = U + K = costante

Ogni sistema fisico, se lasciato libero di evolvere,
tende ad assumere una configurazione di equilibrio stabile

Curve dell’energia potenziale



Forme di energia

In molte situazioni esistono forze che convertono l'energia meccanica in energie termica, sonora o altre (esempio: calore e rumore generato da un trapano).

N.B. il calore rappresenta l'energia termica trasferita ad una sostanza sotto forma di energia cinetica (disordinata) delle molecole che la compongono.

Principio

di CONSERVAZIONE DELL'ENERGIA :
L'energia si trasforma nelle varie forme ma non può essere creata nè distrutta.

$$\boxed{E_{totale} = \text{costante}}$$

Forze non conservative

In presenza di **forze sia conservative** sia **non conservative** vale l'equazione del **bilancio energetico**:
La variazione di energia meccanica ΔE_M è uguale al lavoro delle forze non conservative

$$\Delta E_M \equiv \Delta(K + U_P) = W_{NC}$$

energia potenziale associata alle forze conservative presenti

lavoro compiuto dalle forze **non** conservative

Infatti:

$$\Delta K = W_{tot} \equiv W_{cons} + W_{NC}$$

essendo: $- \Delta U_P = W_{cons}$

Forze dissipative

Il loro lavoro dipende dal percorso compiuto.
Il lavoro è negativo,
l'energia meccanica è trasformata in termica, sonora o altro.

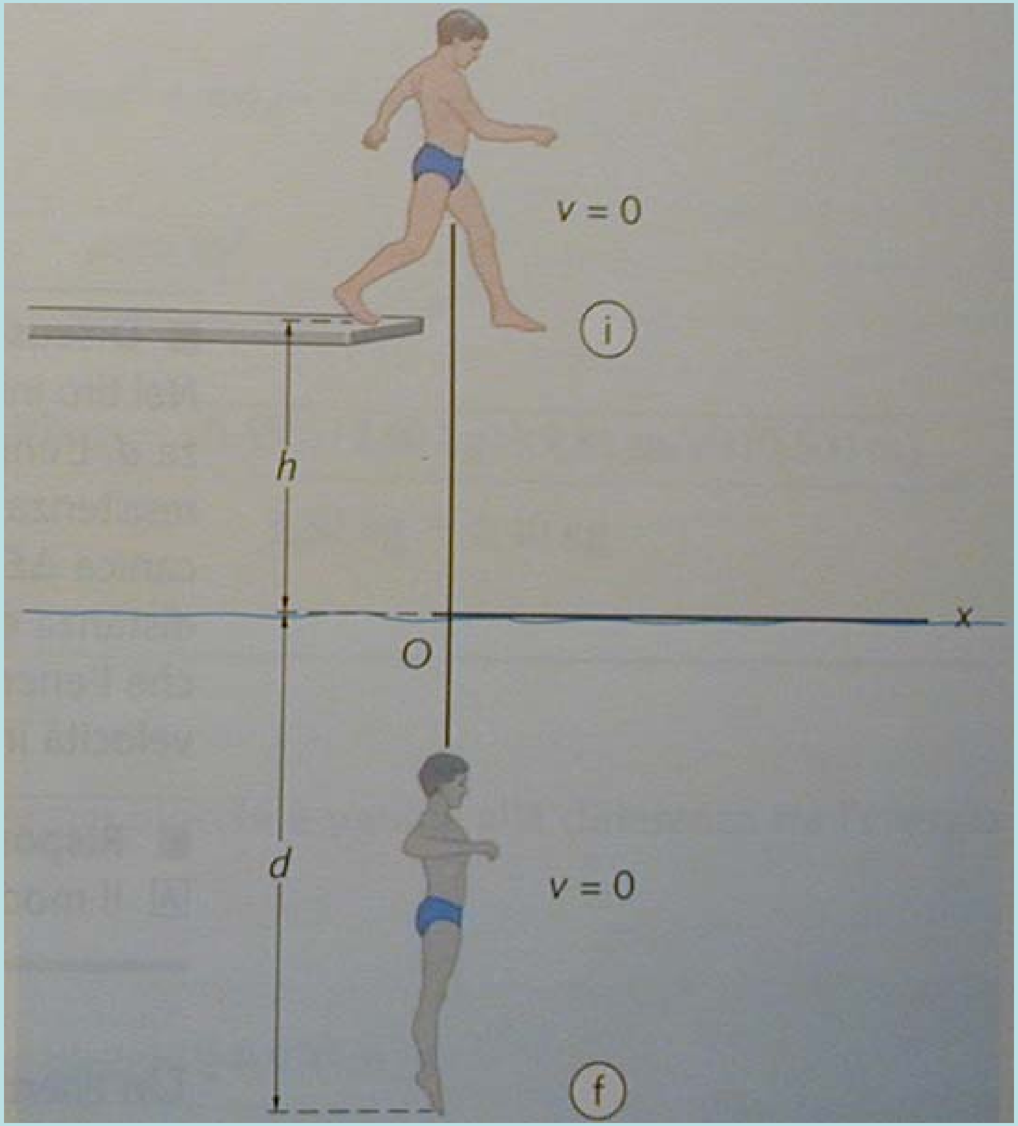
In presenza di **forze sia conservative** sia **non conservative dissipative** , vale l'equazione del **bilancio energetico**

$$\Delta E_M \equiv \Delta(K + U_P) = W_{NC}$$

lavoro compiuto
dalle forze **non** conservative
dissipative

$W_{NC} < 0$ quindi:
L'energia meccanica diminuisce

Lavoro fatto da forze non conservative



10. esempio guidato

Un tuffatore salta da un trampolino e si ferma a una certa profondità d sotto la superficie dell'acqua

m = 95 kg

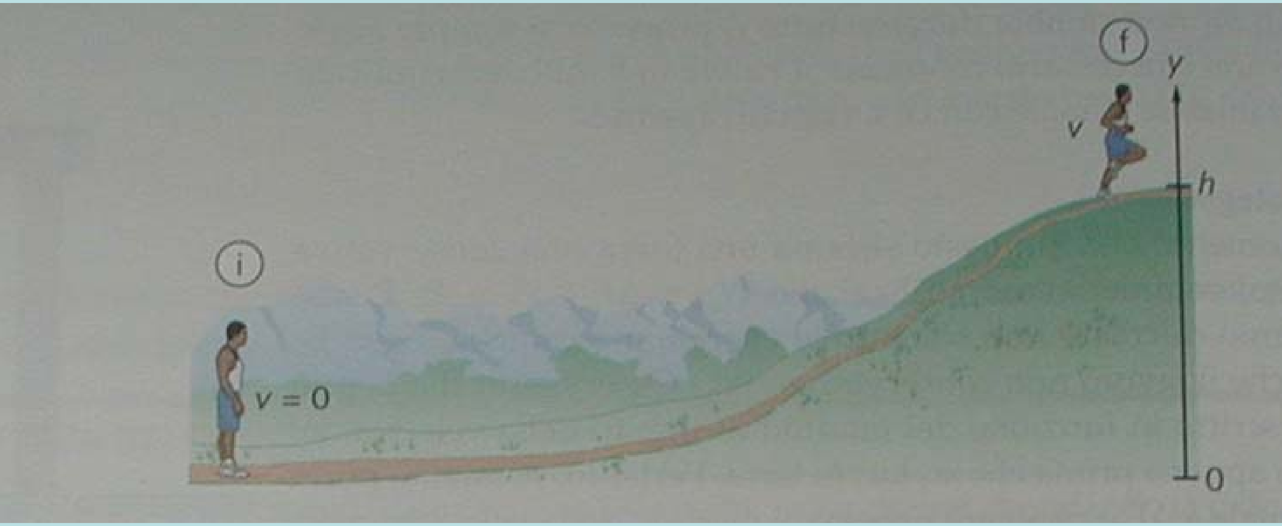
h = 3 m

W_{NC} = -5120 Joule

Trovare la profondità d a cui si è fermato

$$\Delta E_M = W_{NC}$$

Lavoro fatto da forze non conservative



12. esempio guidato

Un maratoneta di 80 kg parte da fermo
E corre in salita con una forte brezza,
che gli soffia contro.
Alla fine della salita l'atleta ha compiuto un lavoro $\mathbf{W_{nc1} = 1.80\ 10^4\ J.}$
La resistenza dell'aria ha fatto un lavoro $\mathbf{W_{nc2} = -\ 4420\ J,}$ e il corridore ha una velocità di modulo **3.50 m/s.**

Trovare la altezza della collina

$$\Delta E_M = W_{NC1} + W_{NC2}$$

$$\Delta E_M \equiv \Delta K + \Delta U_P$$

$$h = (W_{nc} - \tfrac{1}{2}mv^2)/mg$$