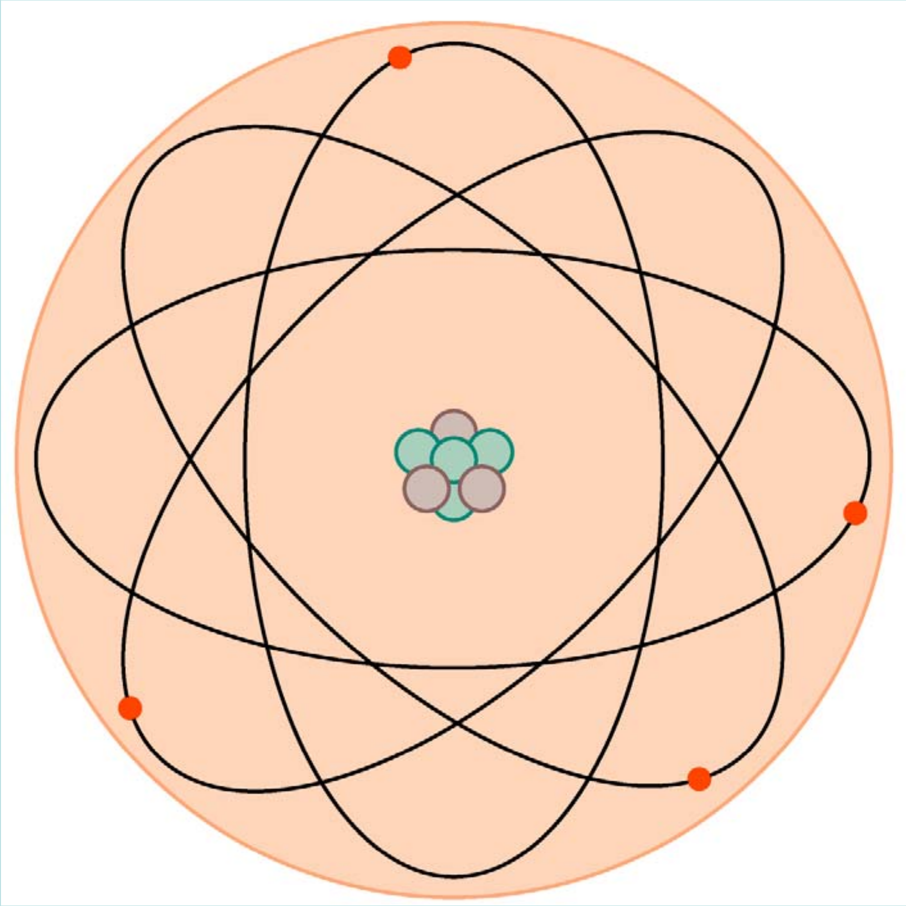
approfondimento

Struttura atomica e conservazione della carica
nei fenomeni elettrici

Flusso del campo elettrico e legge di Gauss:
Il campo elettrico generato da distribuzioni di
carica a simmetria sferica e piana

L'esperimento di Millikan e la quantizzazione
della carica elettrica

Struttura di un atomo

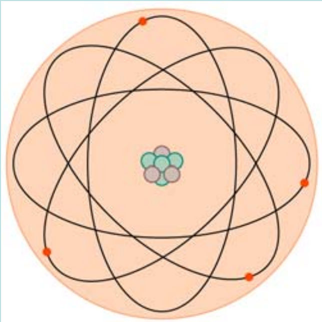


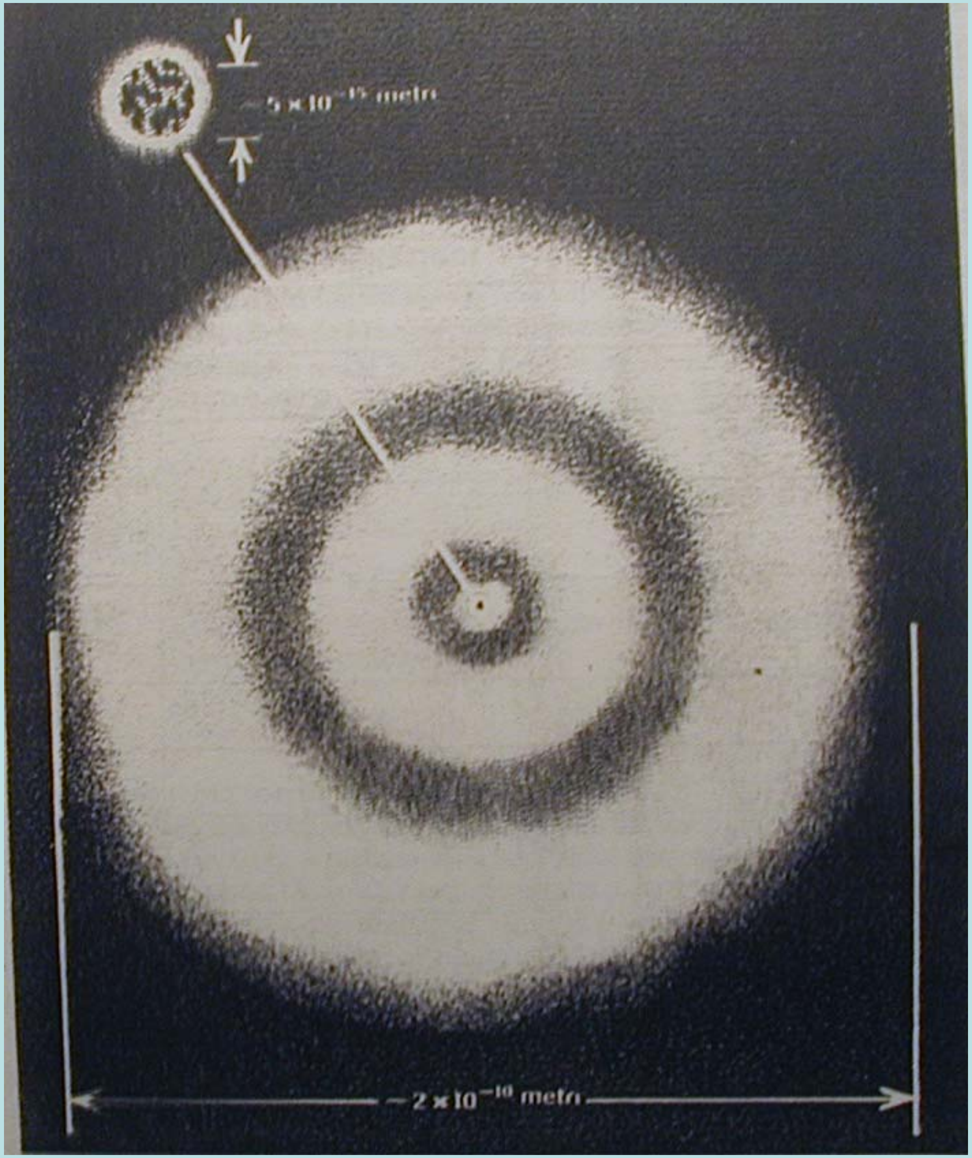
Carica dell'elettrone

$e = 1.6 \; 10^{-19}$ C

L'unità di misura della carica elettrica è il Coulomb

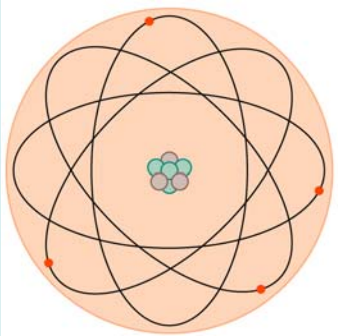
Struttura di un atomo





Dimensioni di un atomo
10^{-10} m

Dimensioni di un nucleo
10^{-14}m



Particelle elementari subatomiche

TABELLA 1 ALCUNE PROPRIETÀ DI TRE PARTICELLE

Particella	*Simbolo*[a]	*Carica*[b]	*Massa*[c]	*Momento angolare*[d]
Elettrone	e^-	-1	1	1/2
Protone	p	$+1$	1836.15	1/2
Neutrone	n	0	1838.68	1/2

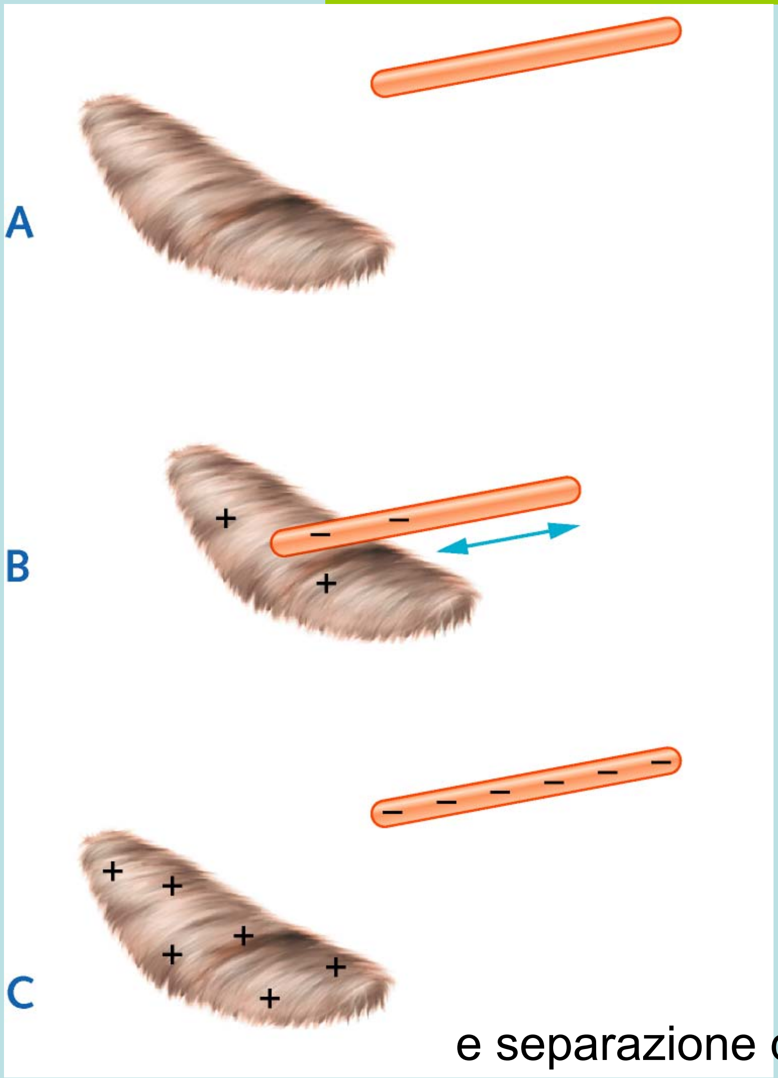
Carica dell'elettrone

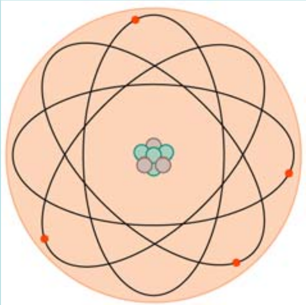
$e = 1.6 \ 10^{-19}$ C

massa dell'elettrone

$e = 9.11 \ 10^{-31}$ kg

Trasferimento di carica …



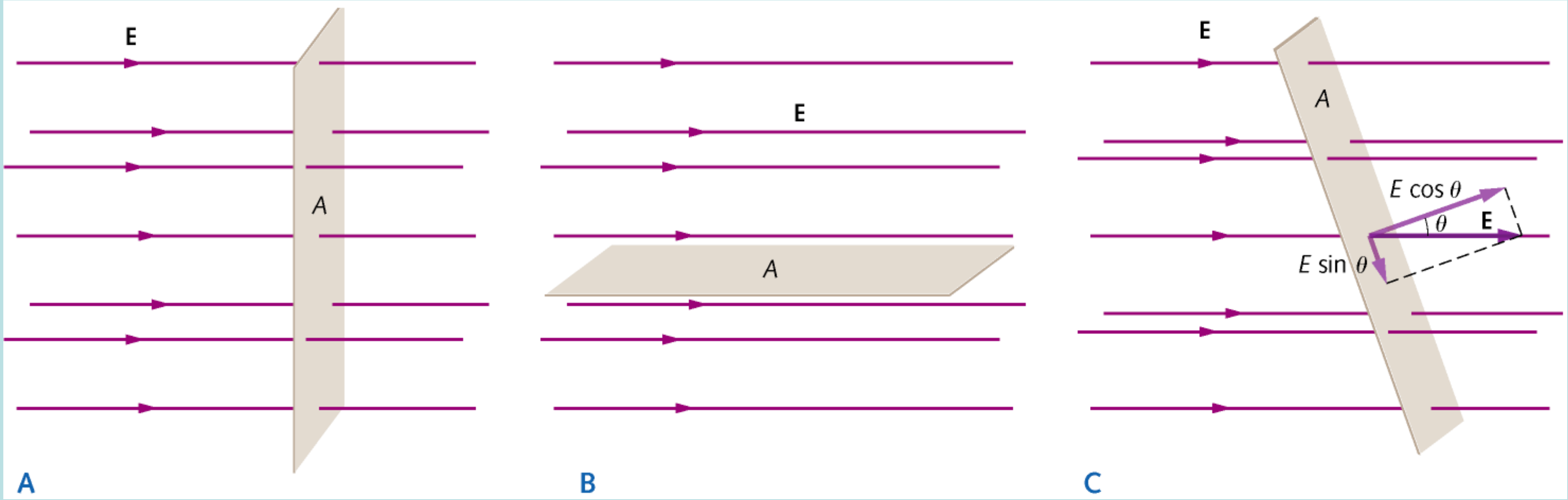


e separazione delle cariche

La carica elettrica totale si conserva

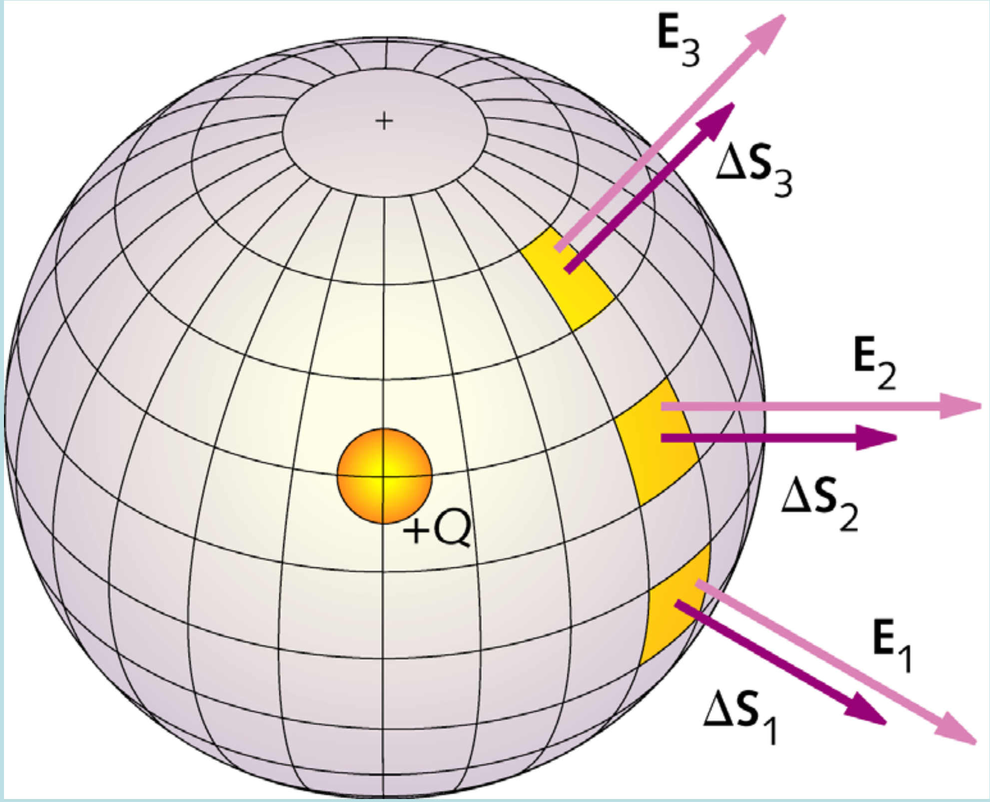
Flusso del campo elettrico e legge di Gauss

Flusso del campo elettrico



$$\Phi = \mathbf{E} \cdot \mathbf{A}$$
$$= E\,A\cos\theta$$

Il vettore area **A** ha per modulo la superficie A e per direzione la normale al piano della superficie con verso arbitrario



$$\Phi_i = \mathbf{E}_i \cdot \Delta\mathbf{S}_i = E_i\,\Delta S_i \cos\theta_i$$

$$\Phi_{totale} = \Sigma_i\,\Phi_i$$

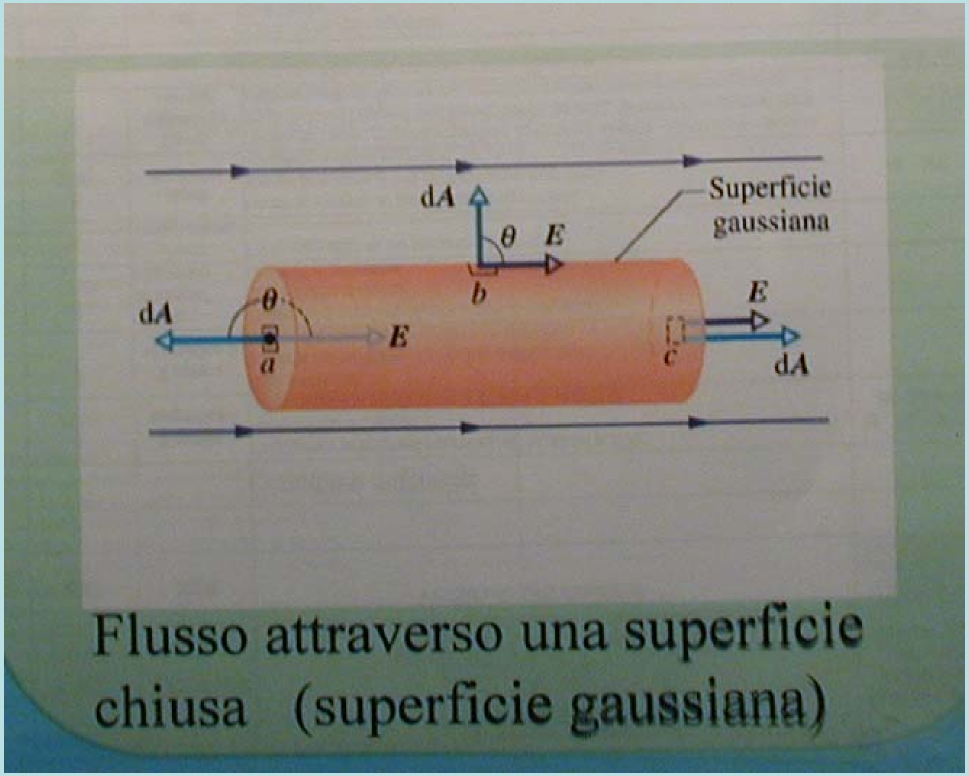
Se la superficie è *chiusa*, I vettori area $\Delta\mathbf{S}_i$ hanno verso uscente

e il flusso è positivo per le linee del campo elettrico che *lasciano* il volume delimitato dalla superficie

il flusso è negativo per le linee del campo elettrico che *entrano* nel volume delimitato dalla superficie

Flusso del campo elettrico attraverso una superficie gaussiana

Esempio …



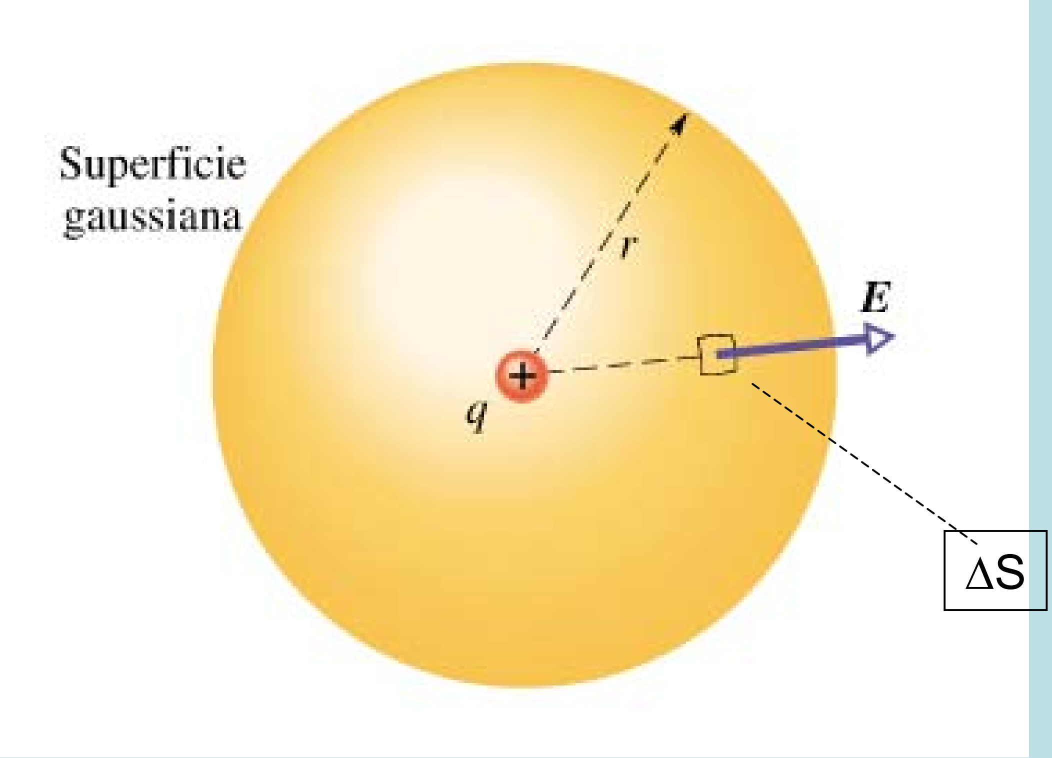
$$\Phi_{laterale} = \Sigma_i \, \Phi_i = \Sigma_i \, E \, dA_i \cos 90° = 0$$

$$\Phi_{BASE1} = \Sigma_i \, EdA_i \cos 180° = E \cos 180° \, \Sigma_i dA_i = - E A$$

$$\Phi_{BASE2} = \Sigma_i \, EdA_i \cos 0° = E \cos 0° \, \Sigma_i dA_i = + E A$$

$$\Phi_{totale} = \Sigma_i \, \Phi_i = 0$$

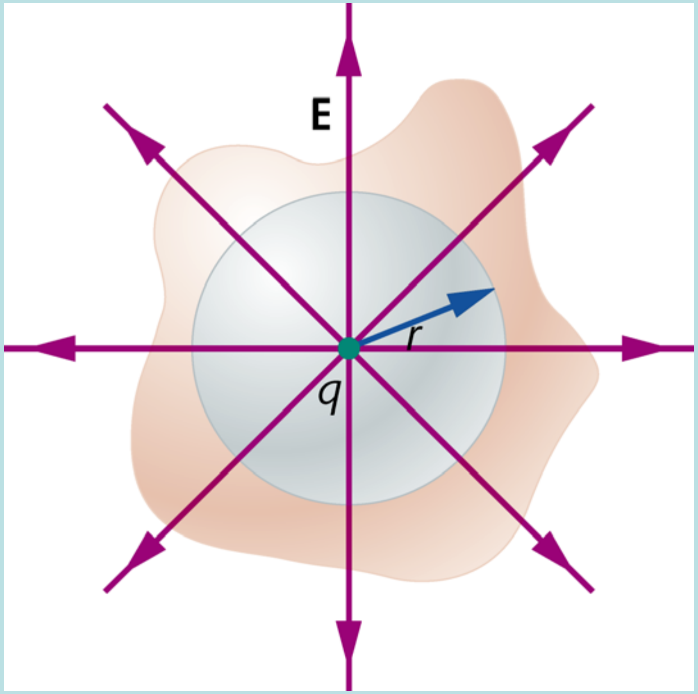
Calcolo del flusso del campo elettrico **E**(r) generato da una carica puntiforme q attraverso una superficie sferica di raggio r



$\Phi_i = \mathbf{E_i} \cdot \Delta\mathbf{S_i} = E\,\Delta S_i \cos 0°$

$\Phi_{totale} = E\,\Sigma_i \Delta S_i = E\,(4\pi r^2)$

Legge di Gauss



$$\Phi = E\,(4\pi r^2)$$
$$= (k\,q/r^2)\,(4\pi r^2)$$
$$= 4\pi k q$$

$k = 1/\,(4\pi\varepsilon_0)$

con $\varepsilon_0 = 8.85\ 10^{-12}$ C/N m^2

Costante dielettrica del vuoto

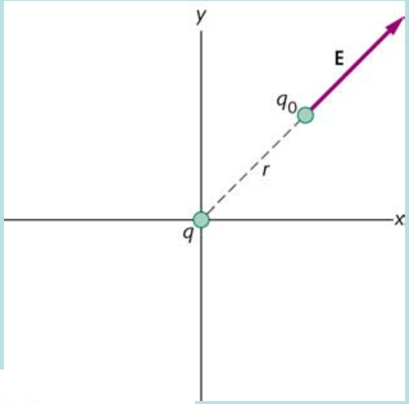
$$\Phi = q\,/\,\varepsilon_0$$

In generale …

Il flusso del campo elettrico attraverso una qualunque superficie chiusa (superficie gaussiana) è uguale alla somma algebrica delle cariche (contenute nel volume delimitato dalla superficie) divisa per la costante dielettrica del vuoto

$$\Phi = \Sigma q\,/\,\varepsilon_0$$

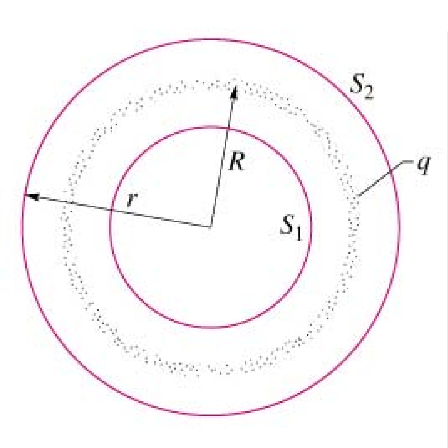
Legge di Gauss e legge di Coulomb



È immediato verificare che il campo generato
da una carica puntiforme
calcolato con la legge di Gauss si scrive:

$$E = 1/(4\pi\varepsilon_0)\ \ q/r^2$$

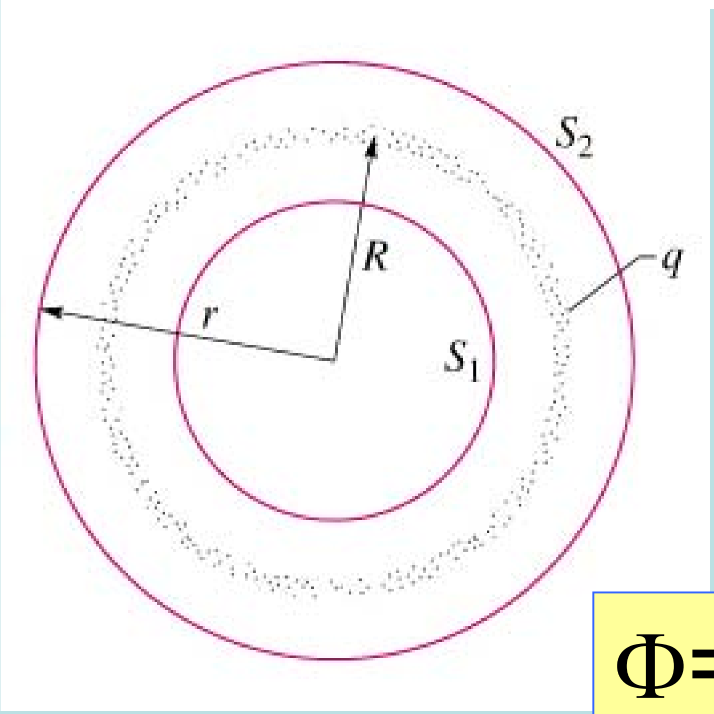
(in accordo con la legge di Coulomb)

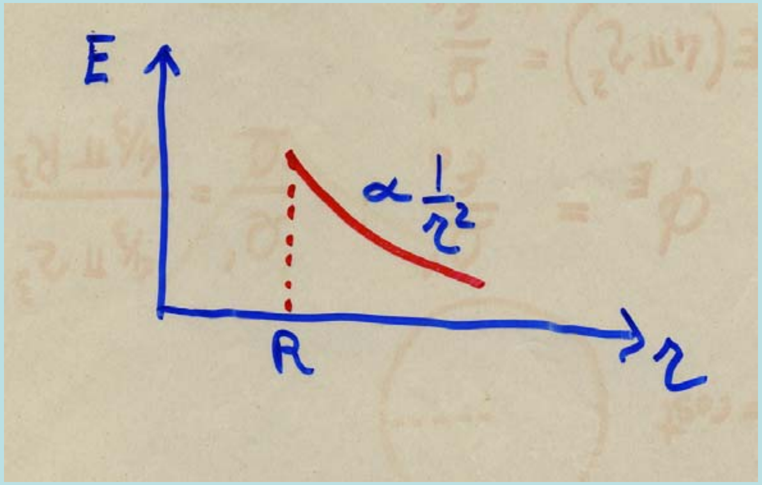


la stessa
espressione vale anche per una
distribuzione a simmetria sferica di carica

o meglio, Il campo generato da una distribuzione sferica di carica all'esterno di essa
è lo stesso che si avrebbe se tutta la carica fosse concentrata nel centro della sfera

Guscio sferico





$$\Phi = \Sigma_i\, q_i / \varepsilon_0$$

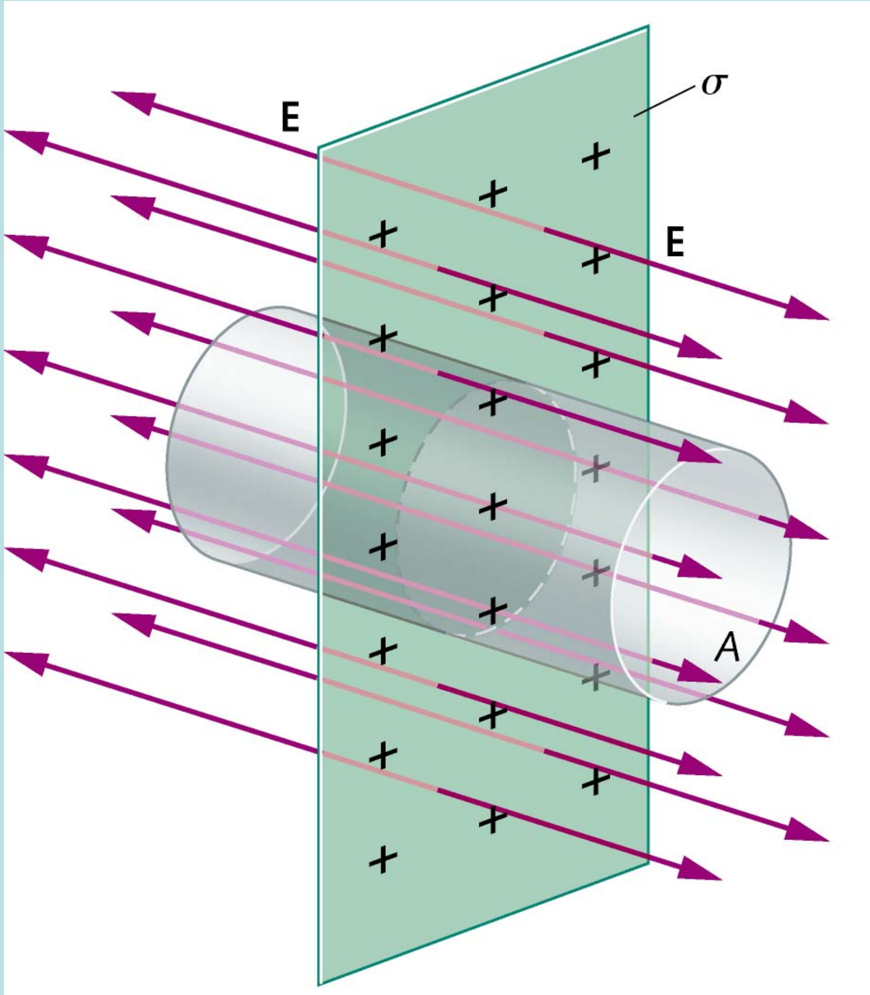
Un guscio sferico carico uniformemente attrae o respinge una particella carica posta al di fuori di esso come se tutta la carica del guscio fosse concentrata nel centro del guscio sferico.

r > R $E = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0} \dfrac{q}{r^2}$

Un guscio sferico carico uniformemente non esercita alcuna forza elettrostatica su una particella carica posta al suo interno.

r < R $E = 0$

r = R $E = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0} \dfrac{q}{R^2}$

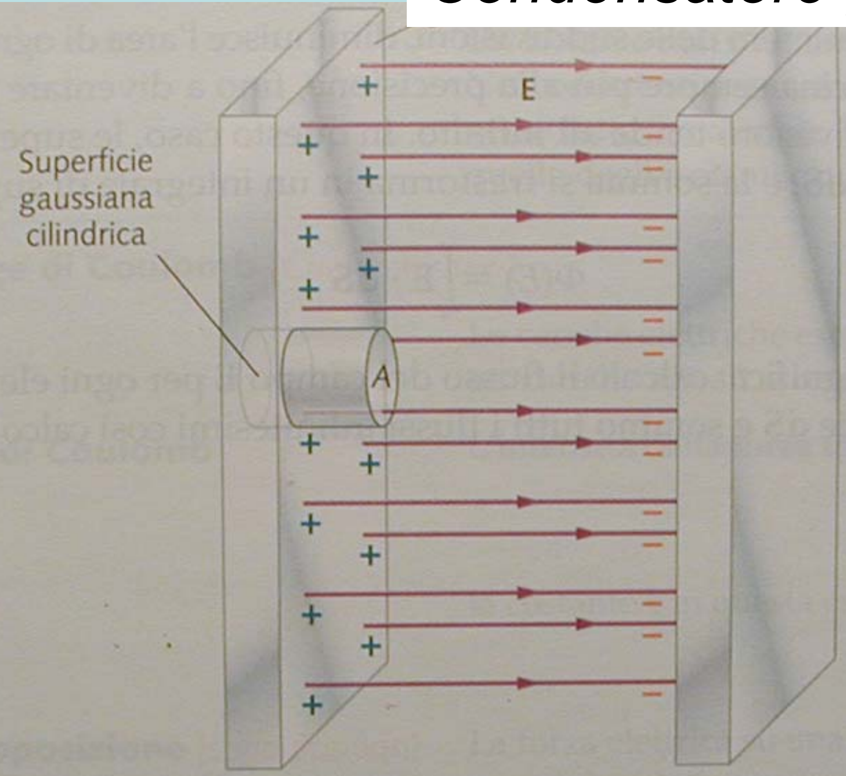


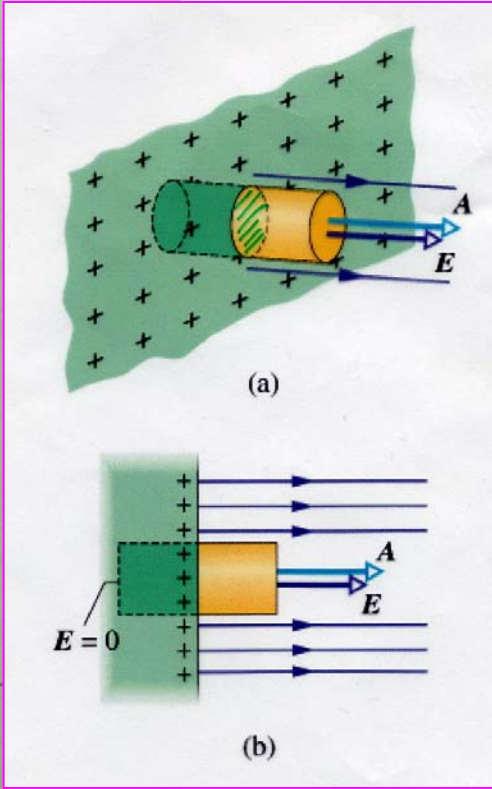
Piano carico

$\Phi = 2E\,A$
$= (\sigma A)/\varepsilon_0$

$E = \sigma/(2\varepsilon_0)$

Condensatore piano

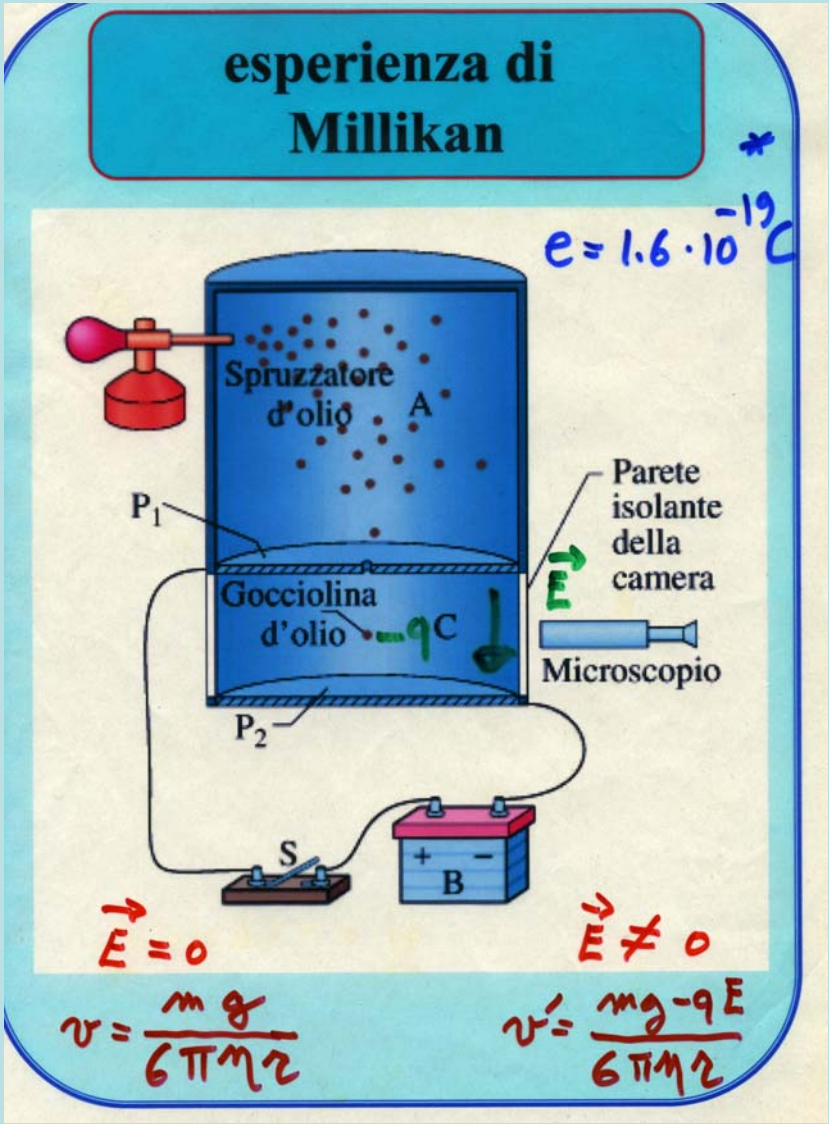




■ **Soluzione**

1. Calcoliamo il flusso del campo elettrico attraverso la superficie laterale del cilindro	0
2. Calcoliamo il flusso del campo elettrico attraverso le superfici di base del cilindro	$0 + EA$
3. Determiniamo la carica racchiusa dal cilindro	σA
4. Applichiamo la legge di Gauss per trovare il campo elettrico E	$E = \sigma / \varepsilon_0$

$$E = \sigma/(\varepsilon_0)$$



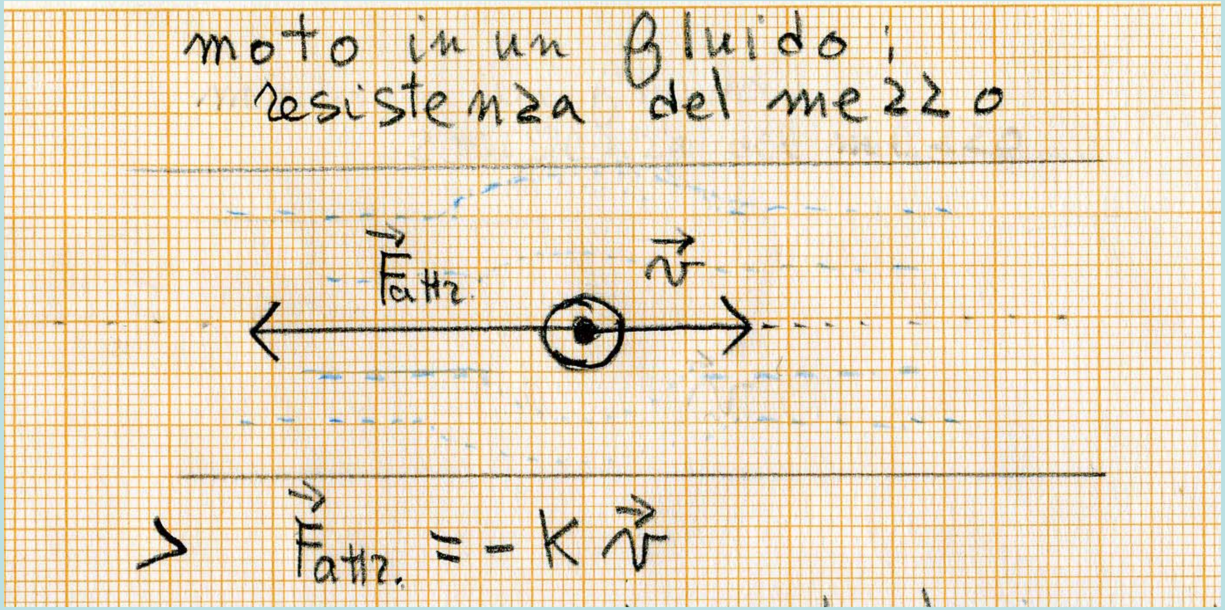
R. A. Millikan
1868-1953

q = ± 1 e; ± 2 e;
± 3 e; ± 4 e; … ± n e

La carica elettrica è quantizzata

richiami

Resistenza del mezzo

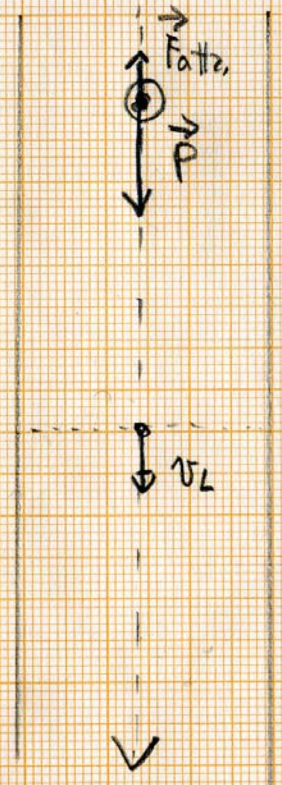


Quando un corpo si muove in un fluido reale è soggetto ad una forza
che si oppone al suo movimento
ed è direttamente proporzionale alla velocità del corpo rispetto al fluido.

La costante di proporzionalità k dipende dalla forma del corpo e dalla viscosità del fluido richiami

Resistenza del mezzo

• Esempio: caduta verticale in aria
(si trascura la spinta di Archimede)



$$\vec{F}_{attr} + \vec{P} = m\vec{a}$$

$$\vec{F}_{attr} + \vec{P} = 0$$

↳ $\vec{a} = 0$

↳ $v = cost$ (velocità limite)

$$-kv + mg = 0$$

⇓

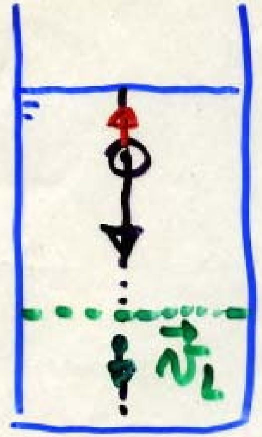
$$v_{limite} = \frac{mg}{k}$$

per una sfera $k = 6\pi\eta r$ (Legge di Stokes) $\Rightarrow v_{limite} = \frac{2}{9}\frac{\rho g}{\eta} r^2$

La velocità aumenta fino a quando
la resistenza del mezzo bilancia
esattamente la forza peso (velocità limite)

Se il corpo ha forma sferica
la velocità limite può essere
espressa in funzione del raggio
della sfera e
della viscosità del fluido

E = 0



$\cancel{\vec{S} = -m_0 \vec{g}}$

$\vec{P} = m \vec{g}$

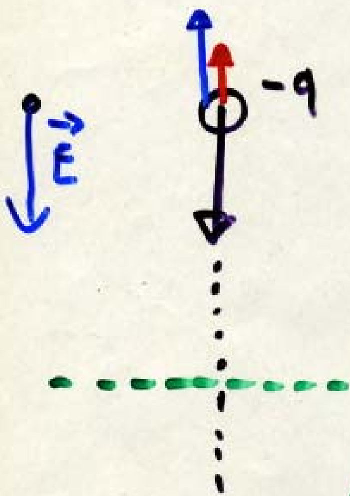
$\vec{A} = -6\pi\eta r \vec{v}$

$\vec{F}_{tot} = 0 \Rightarrow v = \text{cost}$

$\Delta \quad v = mg / 6\pi\eta r$

$\vec{F}_e = -q\vec{E}$

E ≠ 0



$\vec{P} + \vec{A} + \vec{F}_e = 0$

$\Delta \quad v' = \dfrac{mg}{6\pi\eta r} - \dfrac{qE}{6\pi\eta r}$

$\Delta v = q \dfrac{E}{6\pi\eta r}$

Potenziale elettrico ed energia potenziale elettrica

Energia potenziale elettrica e potenziale elettrico

Conservazione dell’energia

Il potenziale elettrico di una carica puntiforme

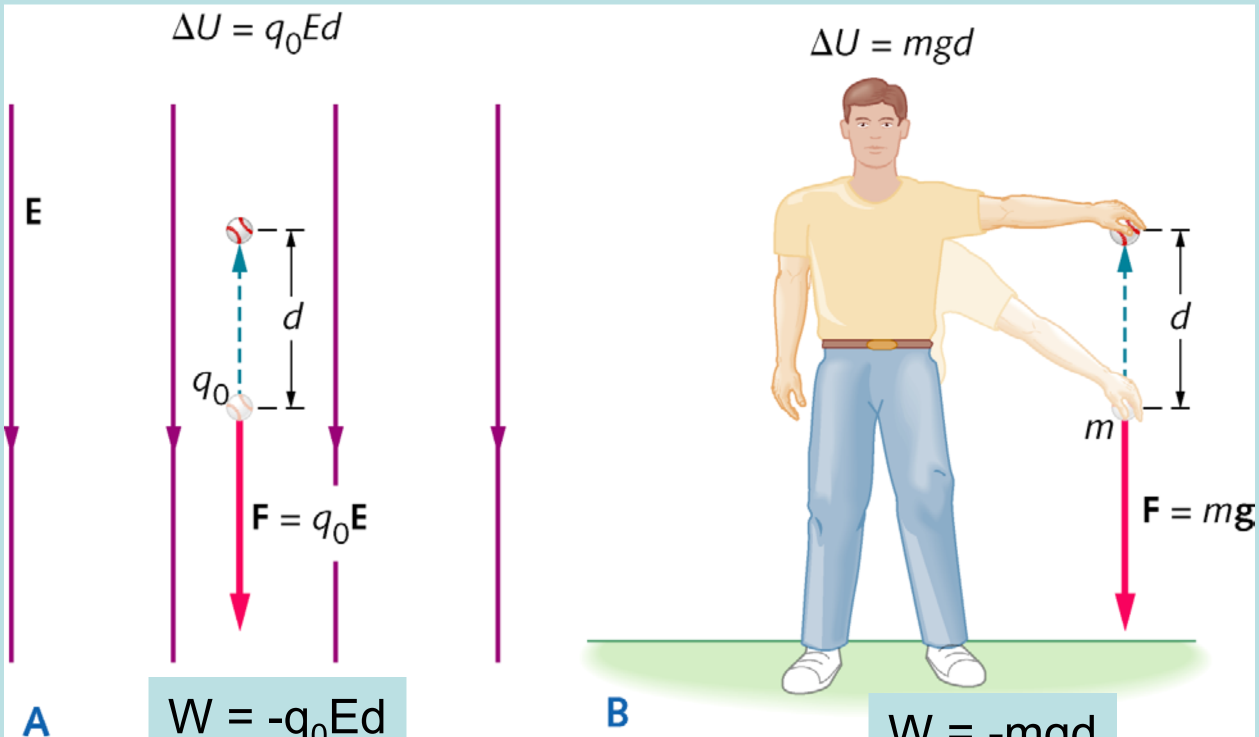
Superfici equipotenziali e campo elettrico

Condensatori e dielettrici

Accumulo di energia elettrica

Energia potenziale elettrica e potenziale elettrico

Le forze elettriche, come quelle gravitazionali, sono conservative…



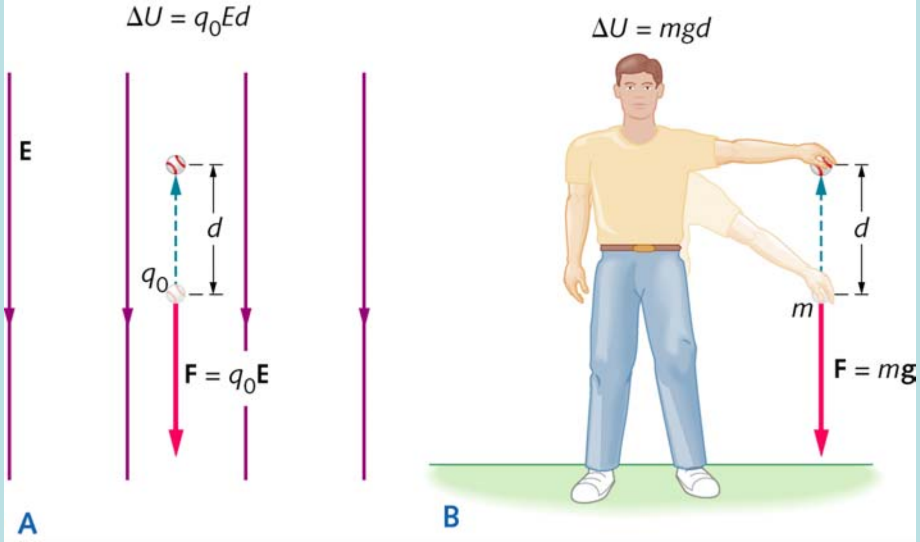
$W = -q_0Ed$

$W = -mgd$

È quindi possibile definire una energia potenziale elettrica

$\boxed{\Delta U = -W}$ ⇒ $\boxed{\Delta U = -W = q_0Ed}$

potenziale elettrico



Definiamo il potenziale elettrico:

$$\Delta V = \Delta U / q_0$$

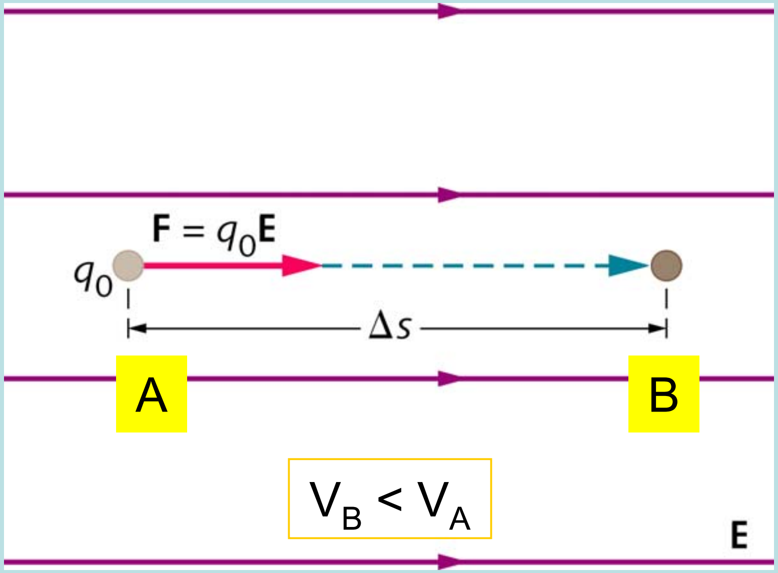
La variazione di potenziale e Il potenziale elettrico si misurano in Joule/Coulomb (VOLT)

Una unità di misura pratica di energia per i sistemi atomici è **l'elettronvolt:**

1 eV = 1.6 10^{-19} Joule

definita come la variazione di energia potenziale elettrica $\Delta U = q_0 \Delta V$ prodotta sulla carica di un elettrone da una variazione di potenziale di un Volt

Esempio



$$\Delta V = V_B - V_A = -24\ V$$

Calcolare la variazione
di energia potenziale elettrica
per la carica q

a) $q = + 2.2\ 10^{-6}\ C$

$$\Delta U = q\Delta V = -\ 5.28\ 10^{-5}\ \text{Joule}$$

U(B) < U(A)

b) $q = -\ 1.1\ 10^{-6} C$

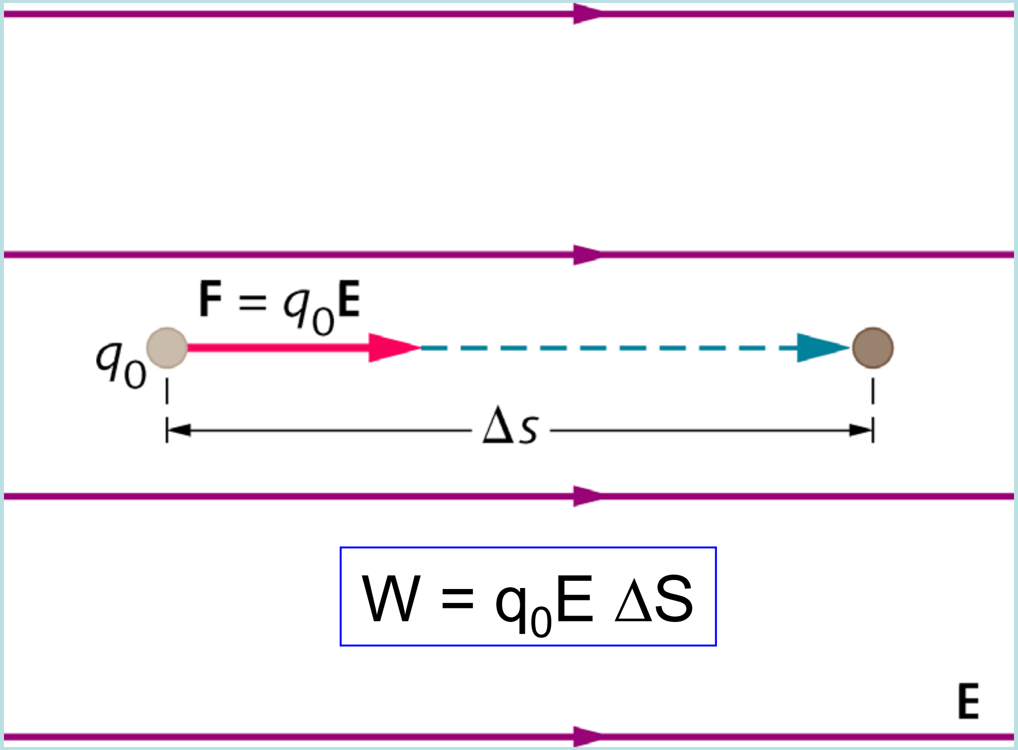
$$\Delta U = q\Delta V = +\ 2.64\ 10^{-5}\ \text{Joule}$$

U(B) > U(A)

N.B.
Il lavoro elettrico si può scrivere come il prodotto di una carica per una differenza di potenziale

$$-W_{el} = \Delta U = q\ \Delta V$$

Campo elettrico e potenziale



$$W = q_0 E \, \Delta S$$

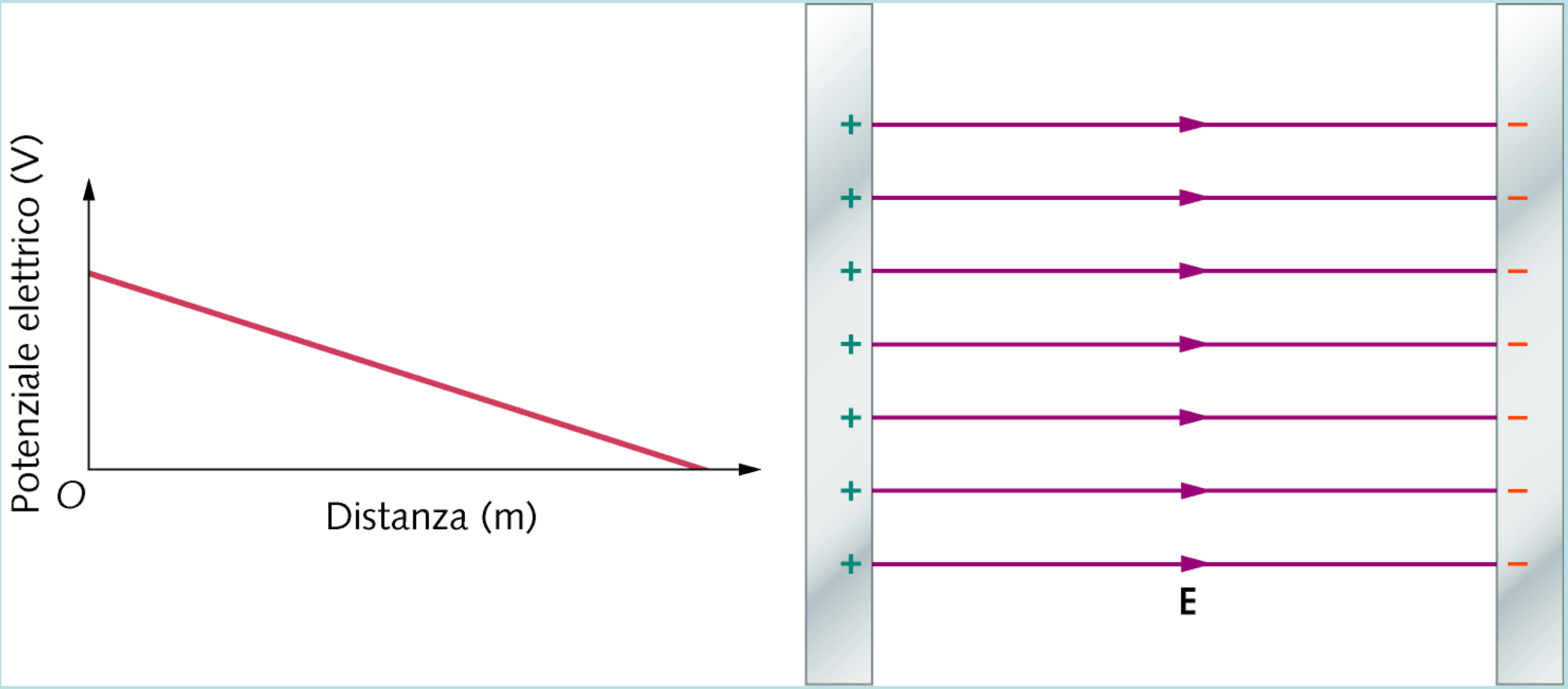
$$\Delta V = - W/q_0 = -(q_0 E \Delta S)/q_0 = - E \Delta S$$

$$E = - \Delta V/\Delta S$$

Il campo elettrico si può misurare anche in **volt/metro**

Campo elettrico e potenziale

Variazione del potenziale in un campo uniforme



Quando ci si sposta nella direzione e nel verso delle linee del campo elettrico

N.B. Lo zero del potenziale è stato (arbitrariamente) posto sulla armatura di destra

Conservazione della energia

$$K_A + U_A = K_B + U_B$$

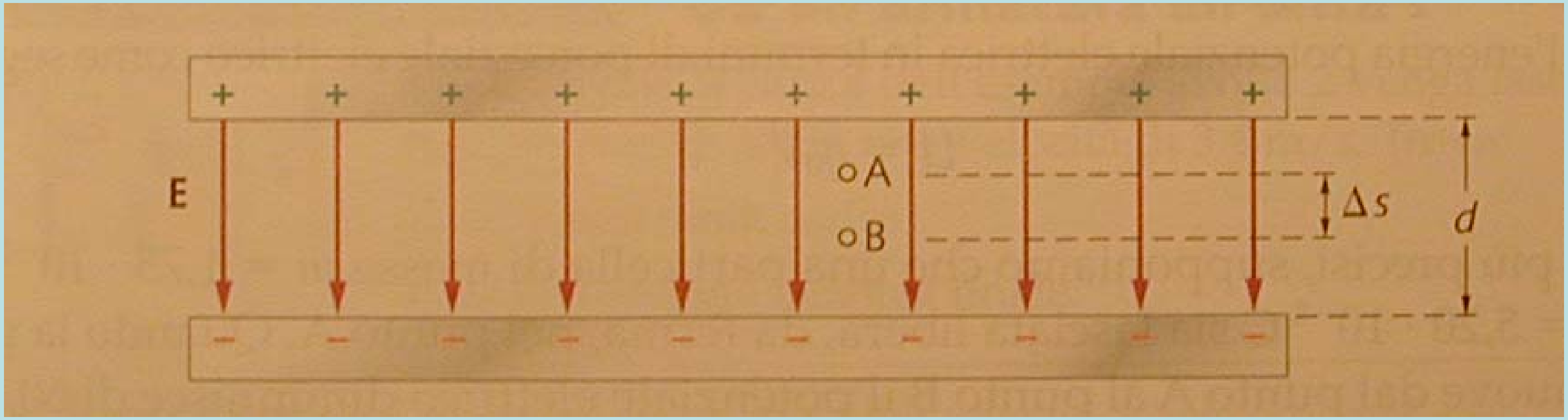
$$\tfrac{1}{2}\, m\, v_A^2 + U_A = \tfrac{1}{2}\, m v_B^2 + U_B$$

Relazioni valide per ogni forza conservativa

forza	energia potenziale
Forza peso	$U = mgy$
Forza elastica	$U = \tfrac{1}{2} kx^2$
Forza elettrica	$U = q_0 V$

esempio

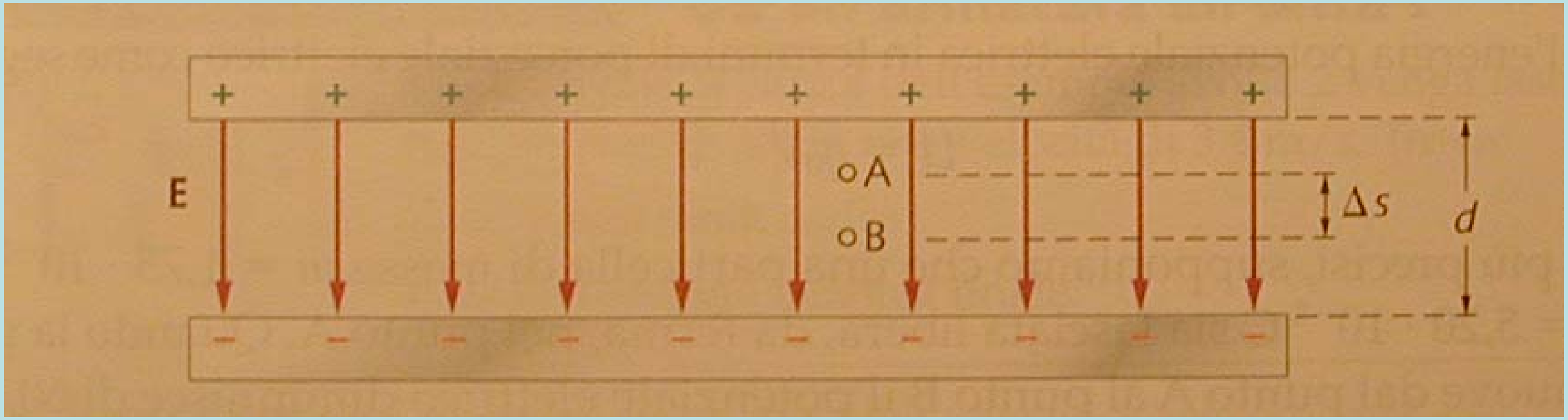
Una particella di massa m e carica q (positiva)
si muove da A a B in un campo elettrico uniforme …



Conservazione della energia

$$K_A + U_A = K_B + U_B$$

Relazioni valide per ogni forza conservativa



$$\frac{1}{2} m v_A^2 + qV_A = \frac{1}{2} m v_B^2 + qV_B$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2} m v_B^2 = \frac{1}{2} m v_A^2 + q(V_A - V_B)$$

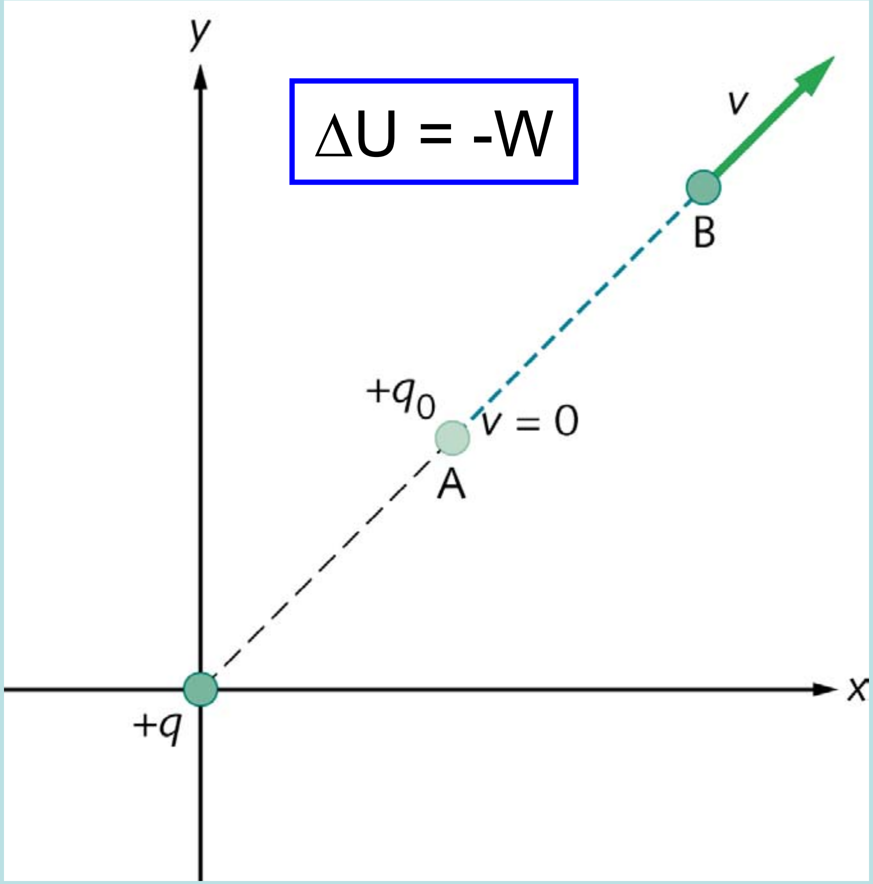
Una diminuzione di energia potenziale si traduce in un aumento di energia cinetica

N.B. Le cariche, se lasciate libere, si muovono sempre verso la regione del campo ove l'energia potenziale elettrica diminuisce.

Energia potenziale elettrica della carica di prova nel campo generato da una carica puntiforme + q

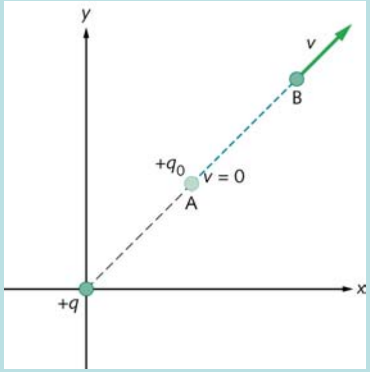
$$U_B - U_A = -\ q_0 \int_A^B \mathbf{E} . \mathbf{dr}$$

$$= (kq_0\, q/r_B) - (kq_0\, q/r_A)$$

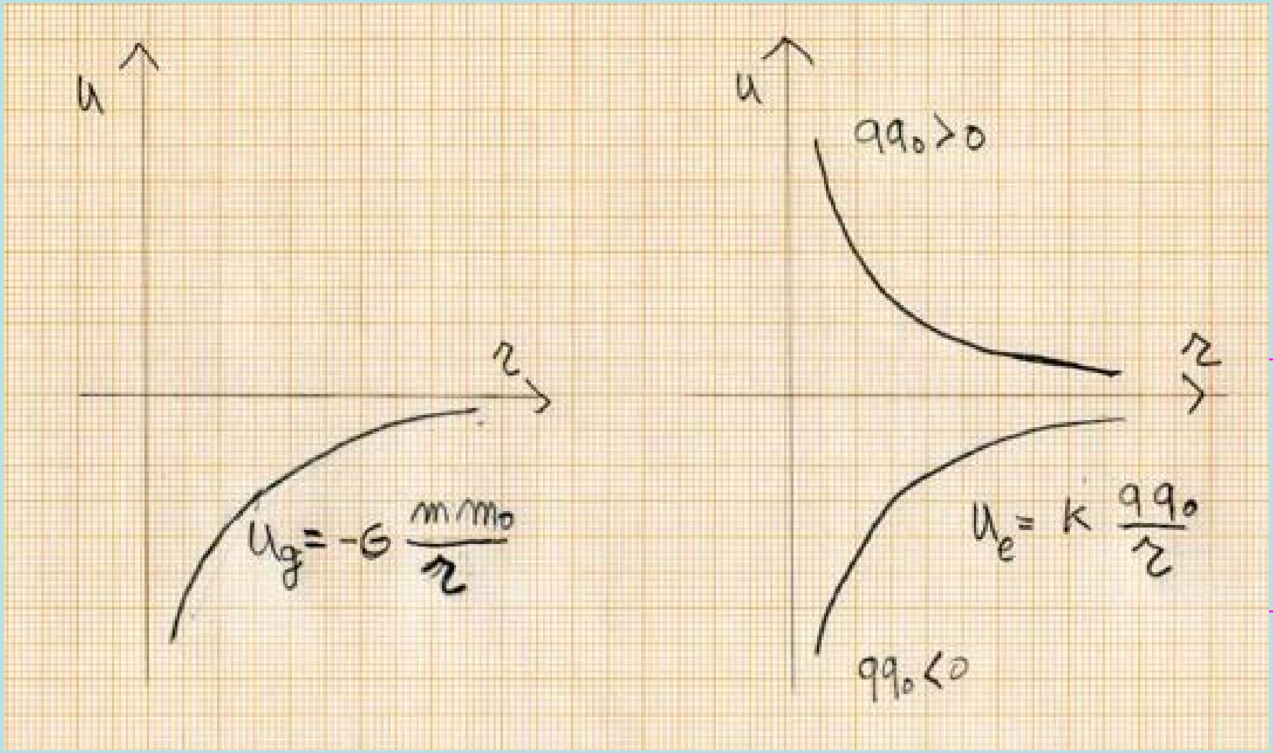


Relazione simile al caso gravitazionale

Energia potenziale elettrica della carica di prova nel campo generato da una carica puntiforme q



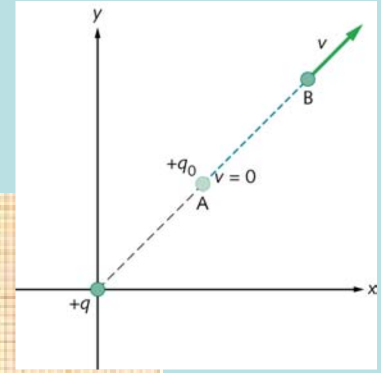
$$U_B - U_A = (kq_0\, q/r_B) - (kq_0\, q/r_A)$$

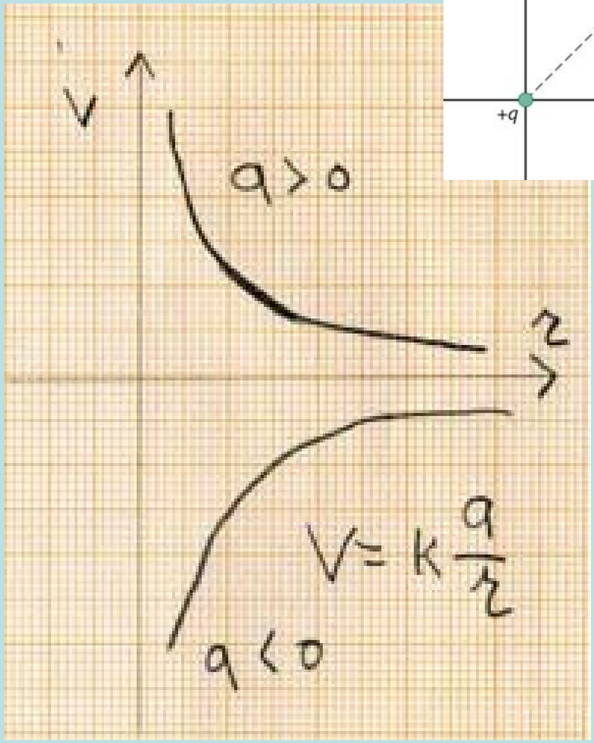


Assumendo, come nel caso gravitazionale, energia potenziale nulla per una distanza r *infinita …*

L'energia potenziale assume la forma $U = k\, q\, q_0/r$
Interpretabile anche come la variazione di energia potenziale della carica q_0 quando viene trasferita da una distanza infinita a una distanza r dalla carica q che crea il campo

Il potenziale elettrico generato da una carica puntiforme q





La **ddp** ta A e B si scrive:
$V_A - V_B = 1/q_0 \ (U_A - U_B) = k\, q/r_A - k\, q/r_B$

Ponendo r_B = infinito
si ha $V_B = 0$
e
la differenza di potenziale

$$V_A - V_B = k\, q/r_A$$

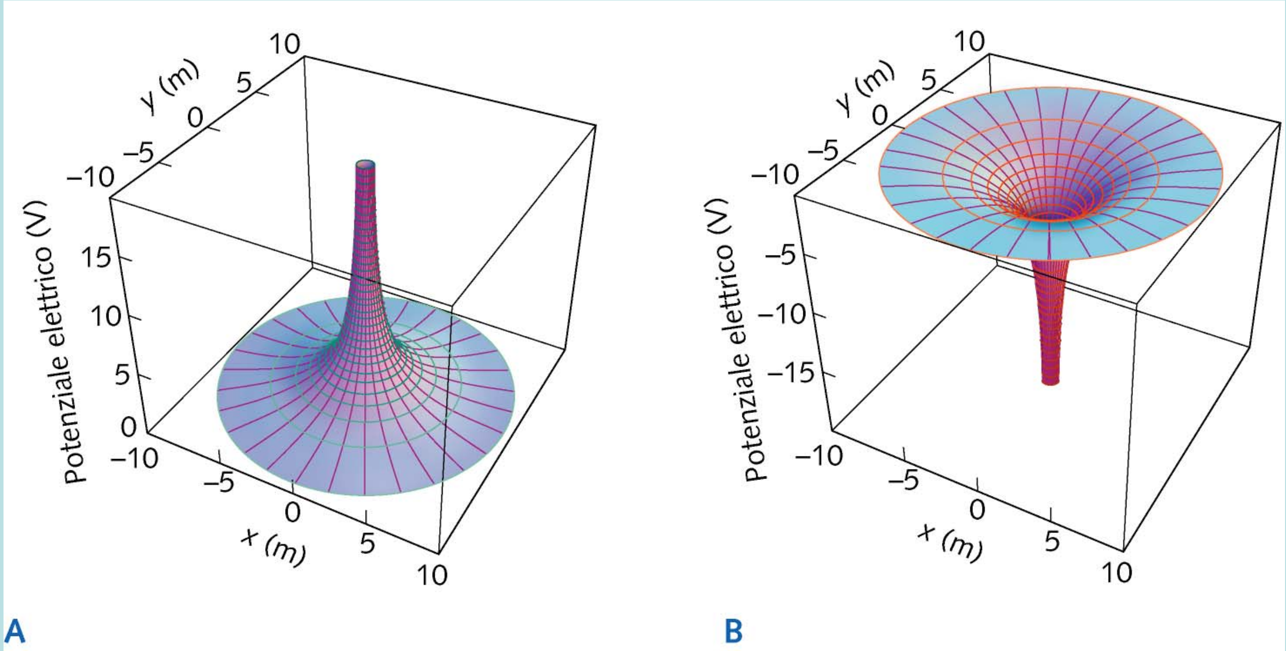
si scrive $V_A = k\, q/r_A$

Lo zero del potenziale è stato (arbitrariamente) posto ad una distanza r *infinita*

$V = k\, q/r$ potenziale generato da una carica puntiforme q

$U = q_0 V$ energia potenziale della carica q_0 nel campo generato dalla carica puntiforme q

Il potenziale elettrico generato da una carica puntiforme



… anche per i potenziali (e le energie potenziali) vale il principio di sovrapposizione

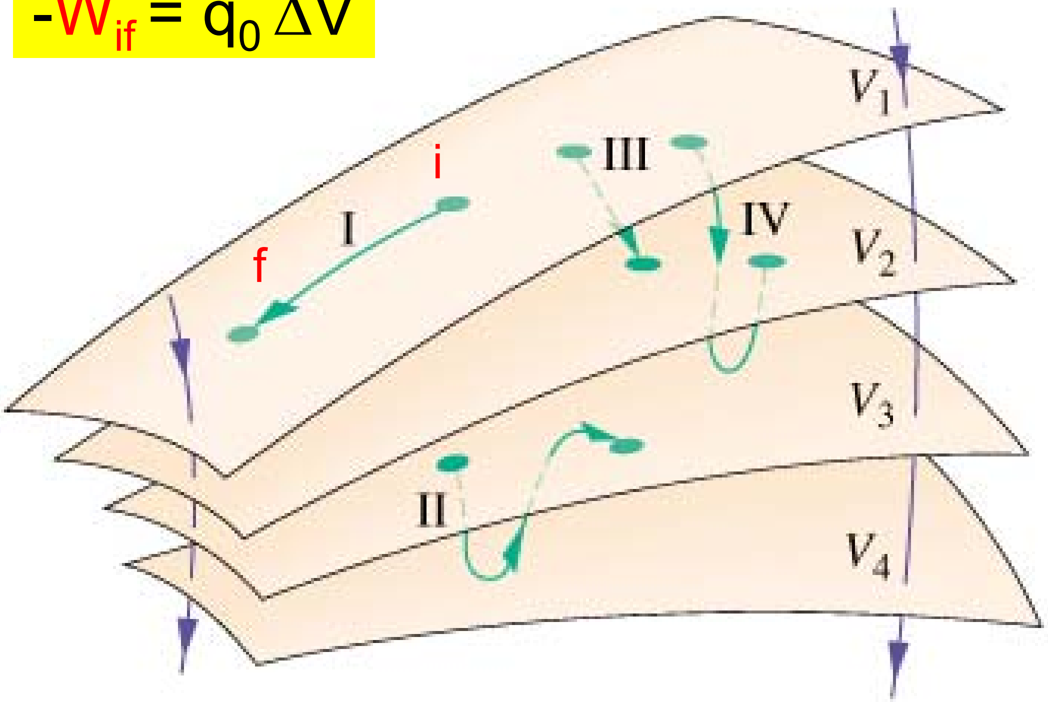
$V_{totale} = \Sigma_i V_i$

$U_{totale} = ½ \Sigma_{ij} U_{ij}$

$U_{ij} = k (q_i q_j)/r_{ij}$

Superfici equipotenziali

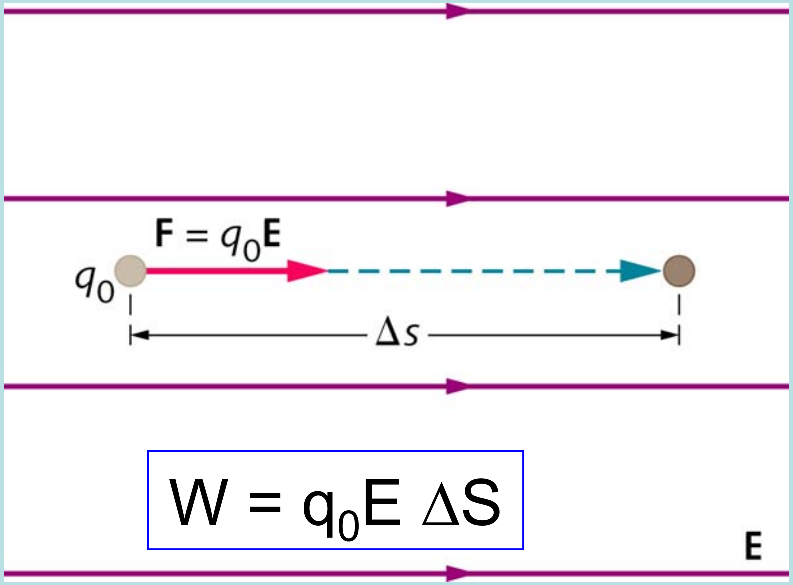
$-W_{if} = q_0 \Delta V$



$$\Delta V = 0 \Rightarrow W = 0$$

proprietà caratteristica

Campo elettrico e potenziale



$$W = q_0 E \, \Delta S$$

Abbiamo già visto che
in un campo elettrico uniforme e per uno spostamento ΔS nella direzione del campo

$$\Delta V = - E \Delta S$$

$$E = - \Delta V / \Delta S$$

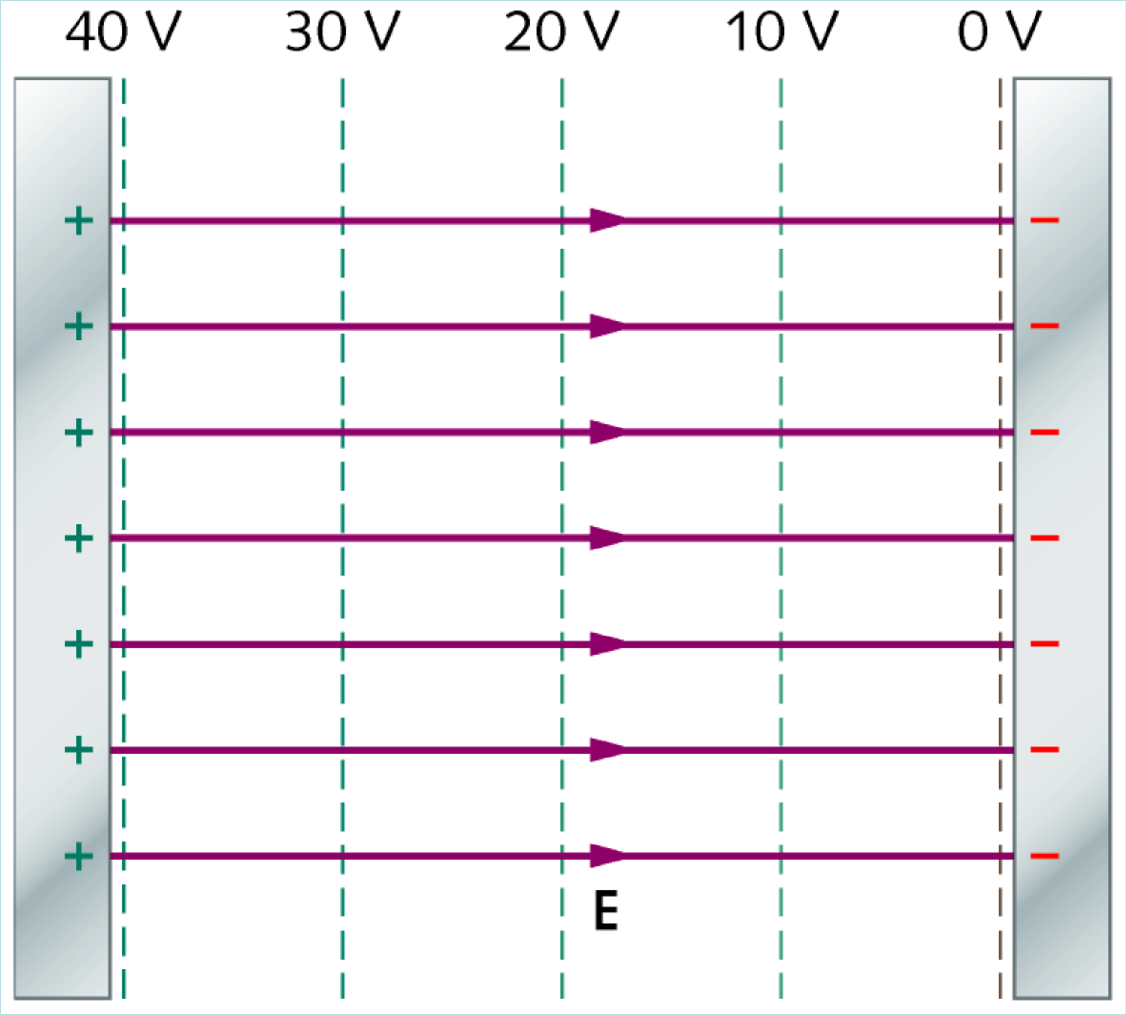
Se ci spostiamo perpendicolarmente alle linee di forza del campo
la forza elettrica non compie lavoro …

$$W \equiv 0 \quad \rightarrow \quad \Delta V = 0$$

Per una direzione qualunque:

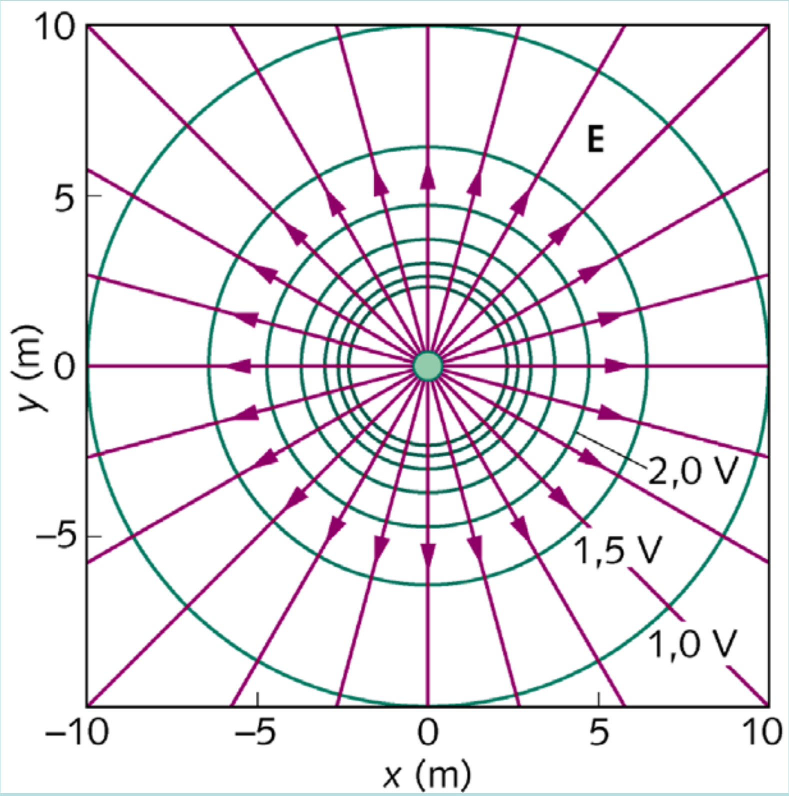
$$\Delta V = - \mathbf{E} . \Delta \mathbf{S}$$

Superfici equipotenziali e campo elettrico



Le superfici equipotenziali in un campo uniforme
sono piani perpendicolari alla direzione del campo

Superfici equipotenziali e campo elettrico



$$\mathbf{F} = q_0\mathbf{E}$$

In generale per un piccolo spostamento $\Delta\mathbf{s}$ in una direzione qualunque

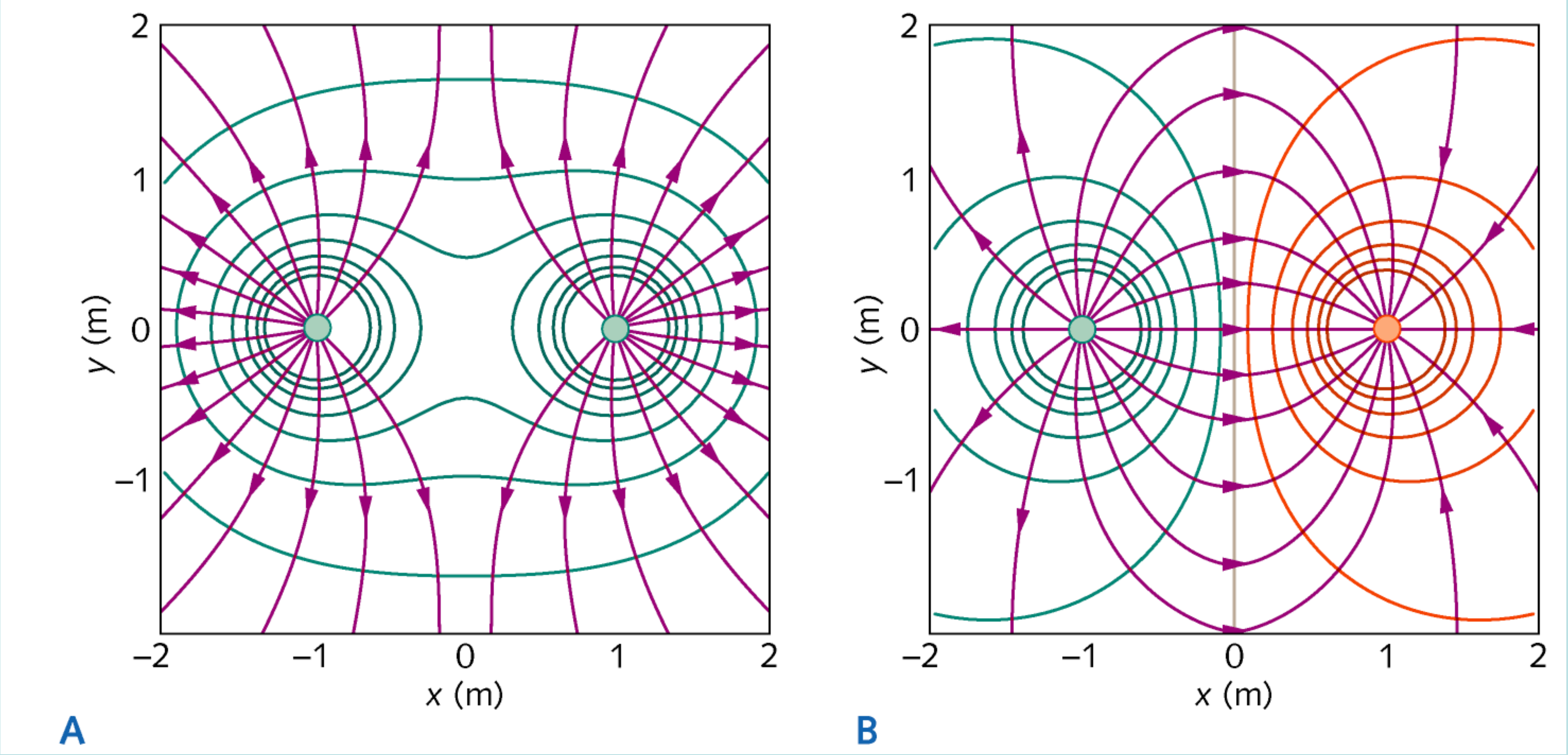
$$\mathbf{E} \cdot \Delta\mathbf{S} = -\Delta V$$

Per un piccolo spostamento $\Delta\mathbf{s}$ lungo una superficie equipotenziale:

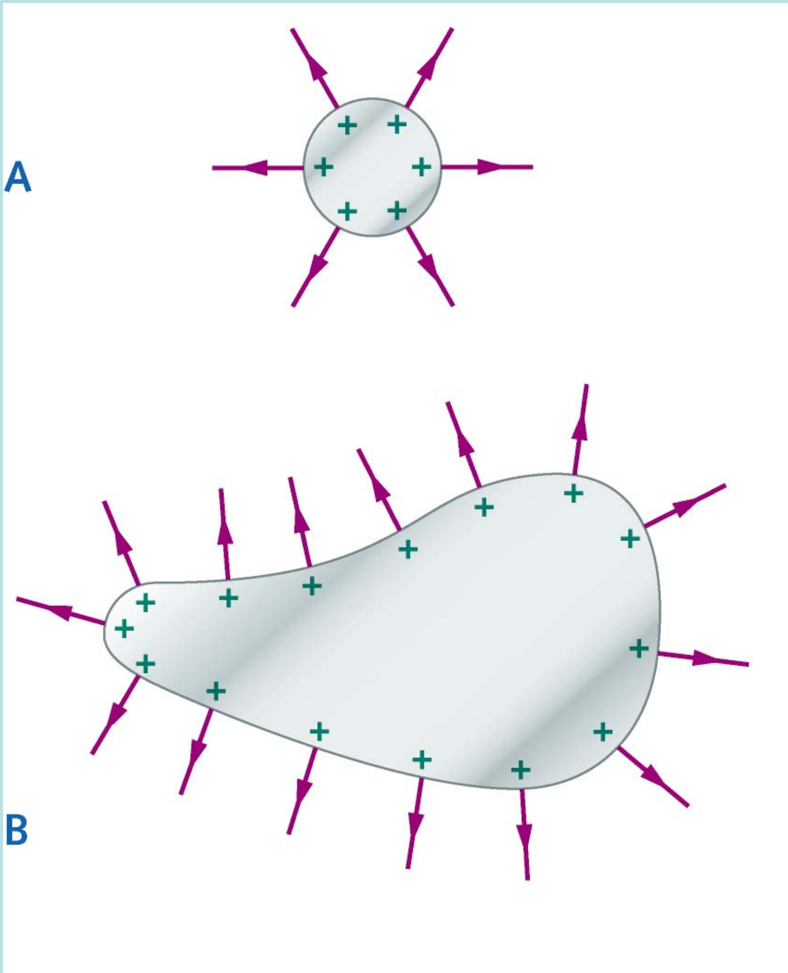
$$-W_{if} = q_0 \, \Delta V = (q_0 \, \mathbf{E}) . \Delta\mathbf{s} \equiv \mathbf{0}$$

Le linee del campo elettrico
sono sempre perpendicolari alle superficie equipotenziali
e puntano sempre nella direzione in cui diminuisce il campo elettrico

Superfici equipotenziali e campo elettrico



Conduttori ideali



All'interno di un conduttore carico
In equilibrio elettrostatico **E** = 0

Ne consegue che la differenza di potenziale tra due punti qualunque distanti Δs:

$$\Delta V = - \mathbf{E} \cdot \Delta \mathbf{S} \equiv 0$$

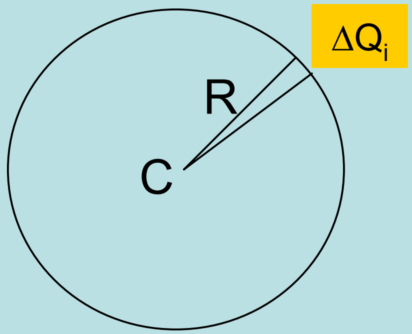
deve essere identicamente nulla

La superficie del conduttore (e l'intero conduttore) hanno lo stesso potenziale

La superficie di un conduttore in equilibrio elettrostatico è sempre una superficie equipotenziale

Potenziale di una sfera conduttrice carica

Q

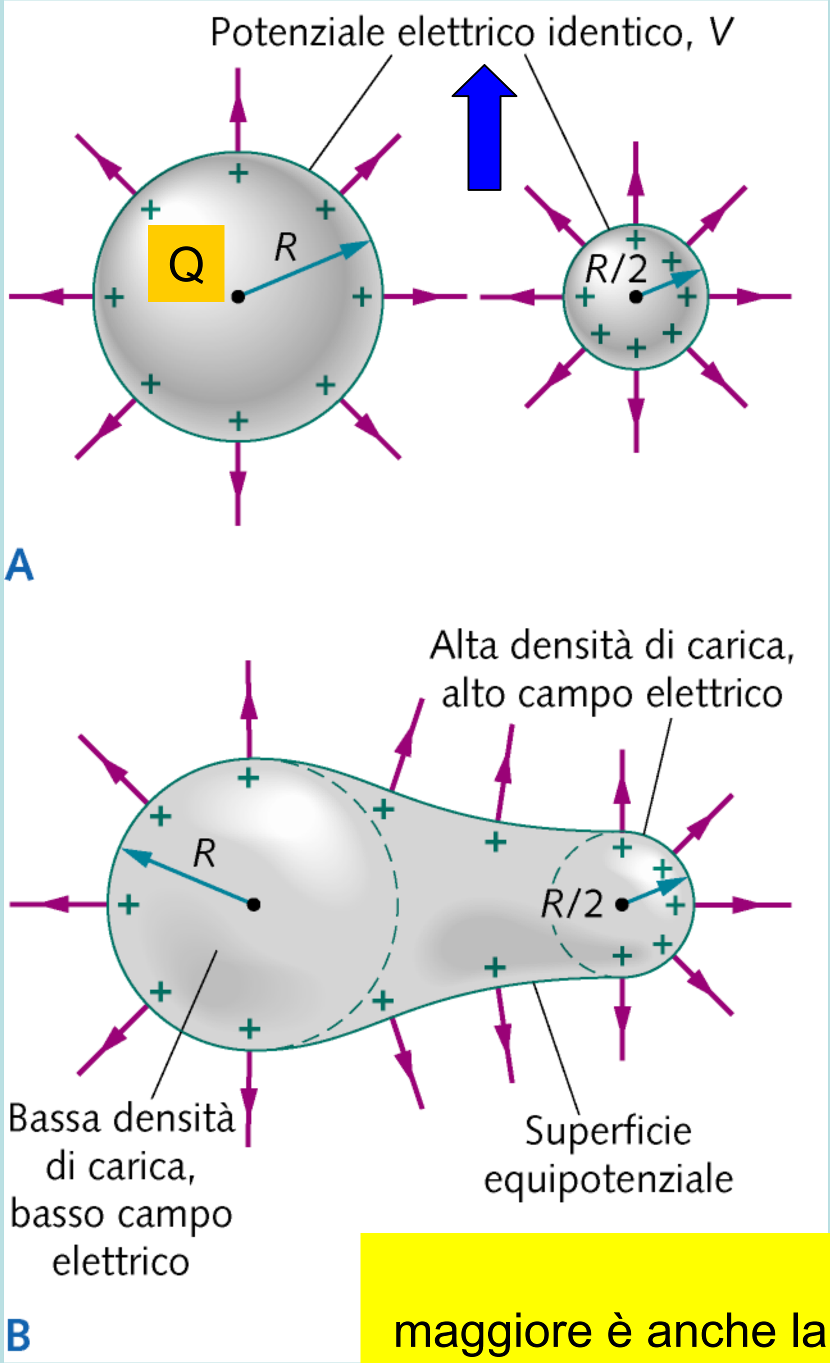


$V_i = \Delta Q_i$

$$\begin{aligned} V_{totale} &= \Sigma\, k\, \Delta Qi/R \\ &= k/R\,(\Sigma \Delta Q_i) \\ &= k\, Q/R \end{aligned}$$

$$V = k\, Q/R$$

Tutti i punti della sfera conduttrice carica in equilibrio elettrostatico hanno lo stesso potenziale, che ovviamente coincide coincide con quello calcolato nel centro della sfera con il principio di sovrapposizione.



$\sigma = Q/(4\pi R^2)$

$V = k\,Q/R$
$= 4\pi k\sigma R$

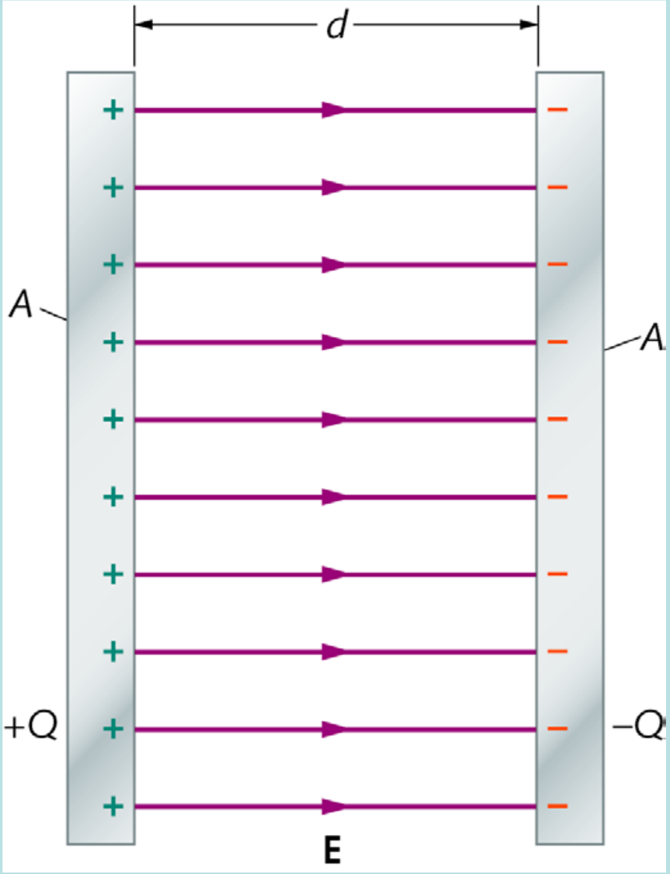
Per una sfera di raggio R/2 si avrà lo stesso potenziale con una densità di carica superficiale doppia 2σ

Sfera grande (R)
Il campo sulla superficie vale:
$E = kQ/R^2$
$= 4\pi k\sigma$

per la sfera piccola (R/2)
$E = kQ/(R/2)^2$
$= 4\pi k2\sigma$

dove la curvatura è maggiore,
maggiore è anche la densità di carica e il campo elettrico

Condensatori



Un condensatore è un sistema costituito da due conduttori (le armature) separati da un dielettrico (materiale isolante)

Capacità di un condensatore:

$$C = Q/V$$

è definita come il rapporto costante fra la carica Q delle armature e
Il modulo della differenza di potenziale V fra le armature

La capacità si misura in Coulomb/volt (**Farad**)

Condensatori a facce piane e parallele

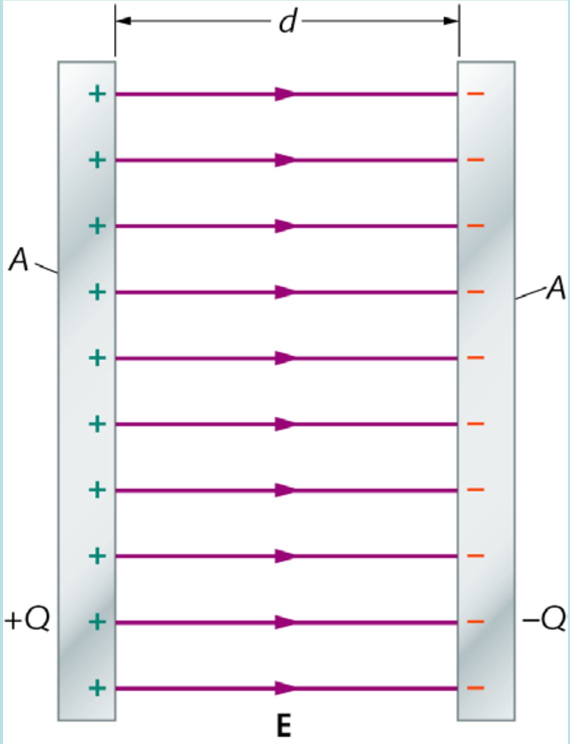
Calcolo della capacità:

$C = Q/V$

$E = \sigma/\varepsilon_0$

$\sigma = Q/A$

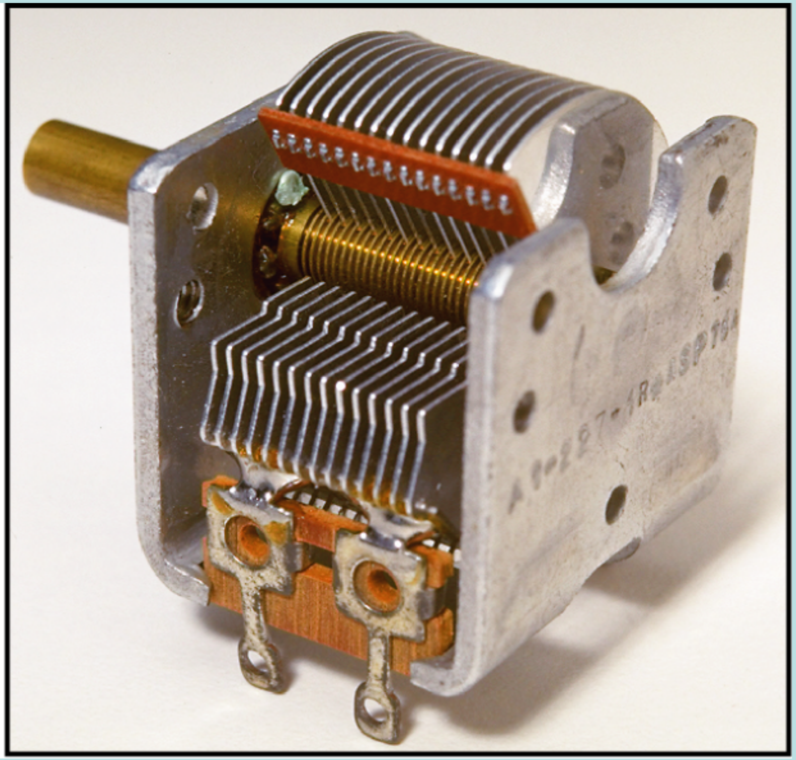
$E = Q/(\varepsilon_0 A)$



$\Delta V = - E\Delta S = Q/(\varepsilon_0 A)\ d$ $\Rightarrow$ $C = Q/V = (\varepsilon_0 A)/d$

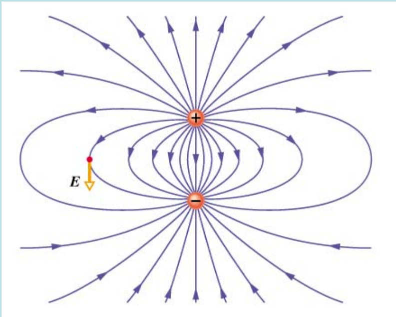
La capacità dipende solo da parametri geometrici

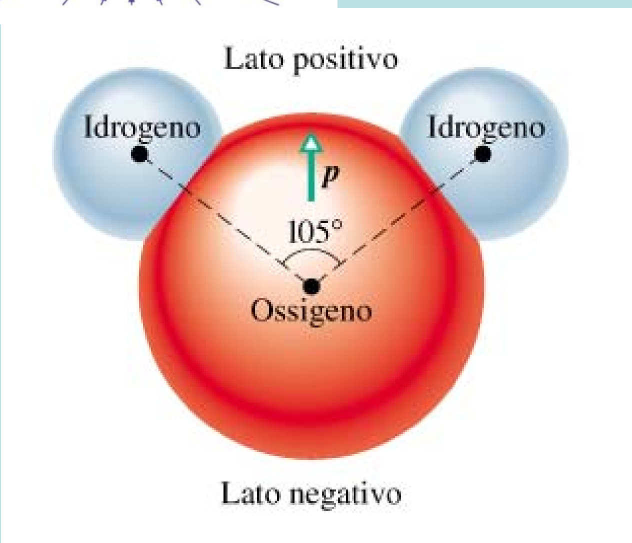
Condensatori e dielettrici



L'impiego di un dielettrico aumenta la capacità del condensatore

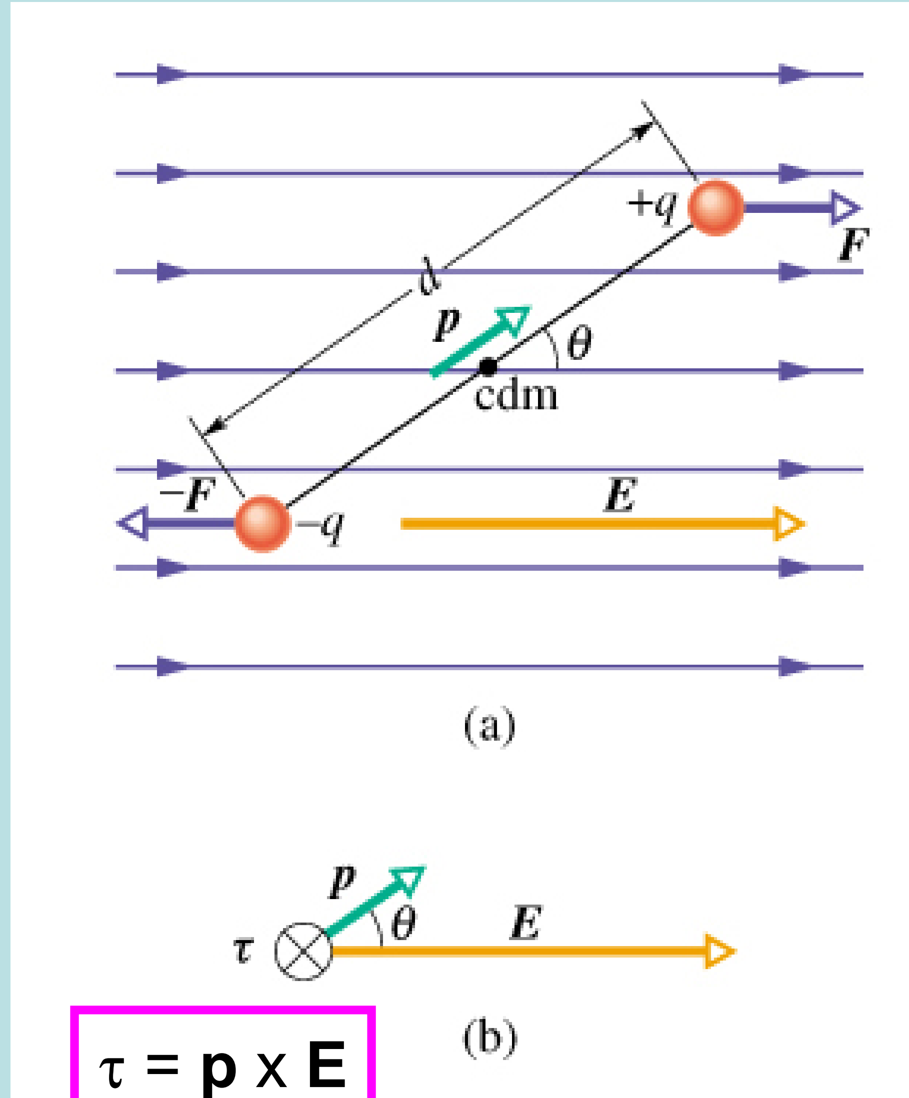
dipolo elettrico





p = q **d**

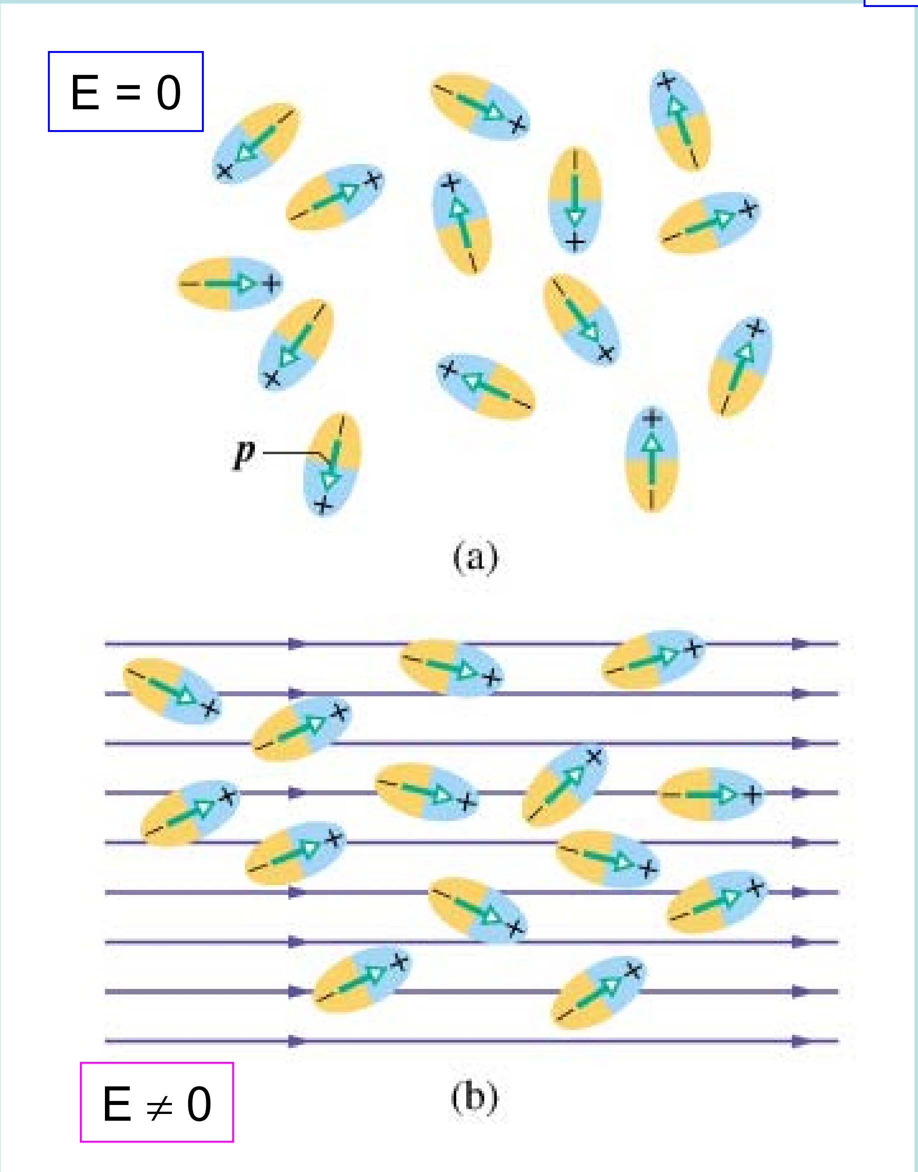
momento di dipolo elettrico

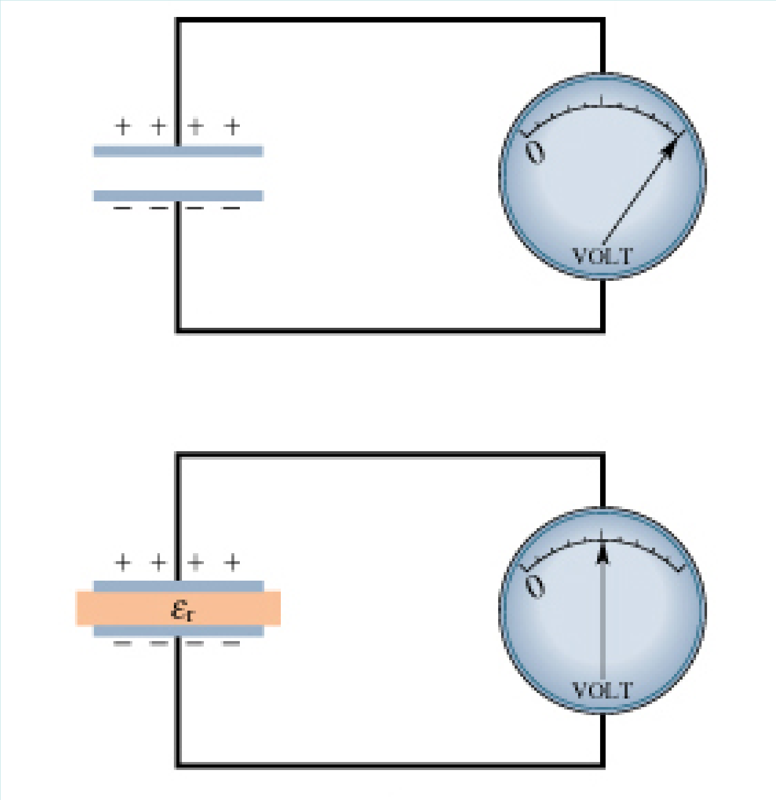


$\boxed{\tau = \mathbf{p} \times \mathbf{E}}$

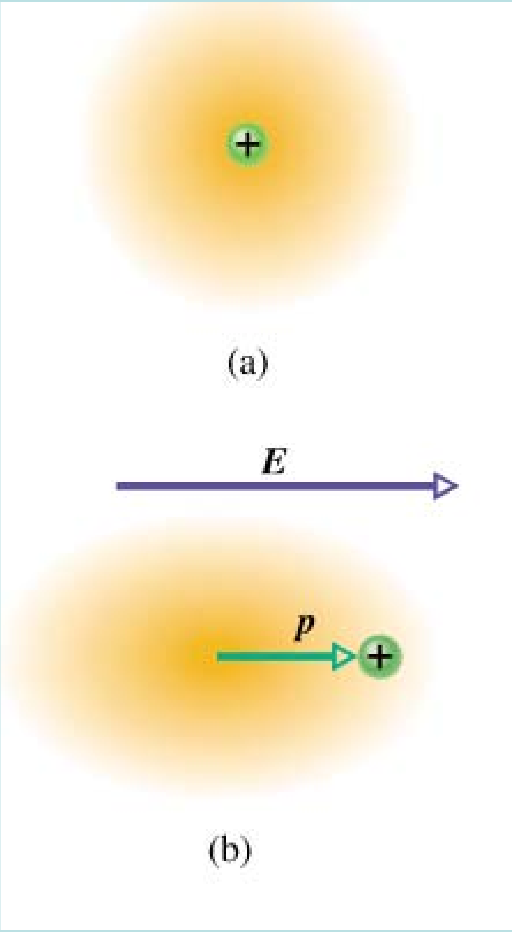
Momento torcente di origine elettrica

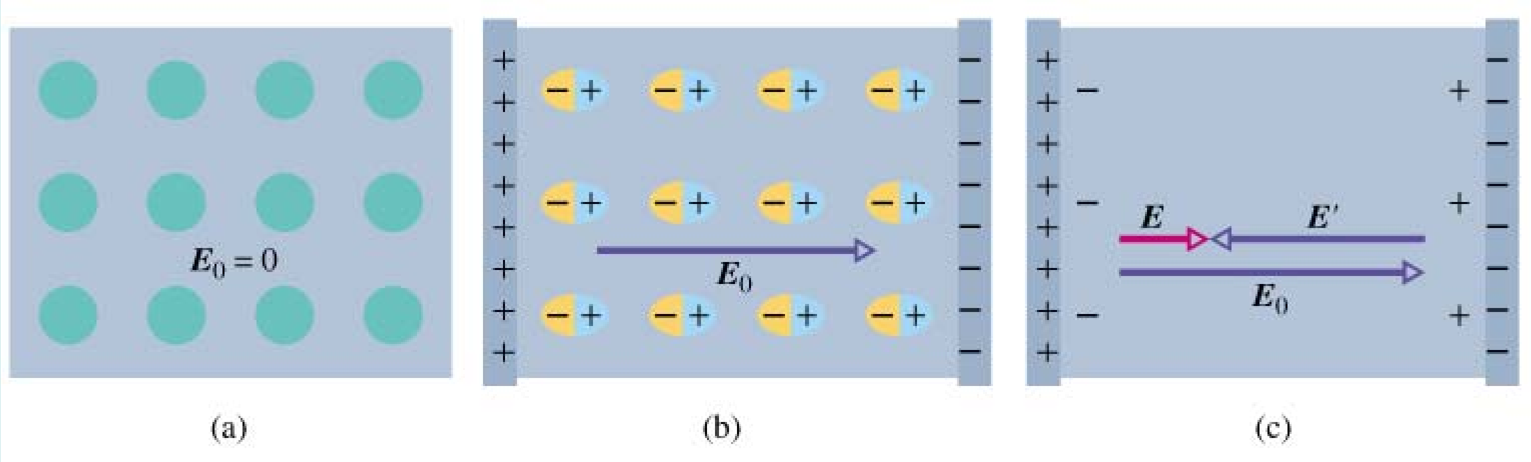
dielettrici polari



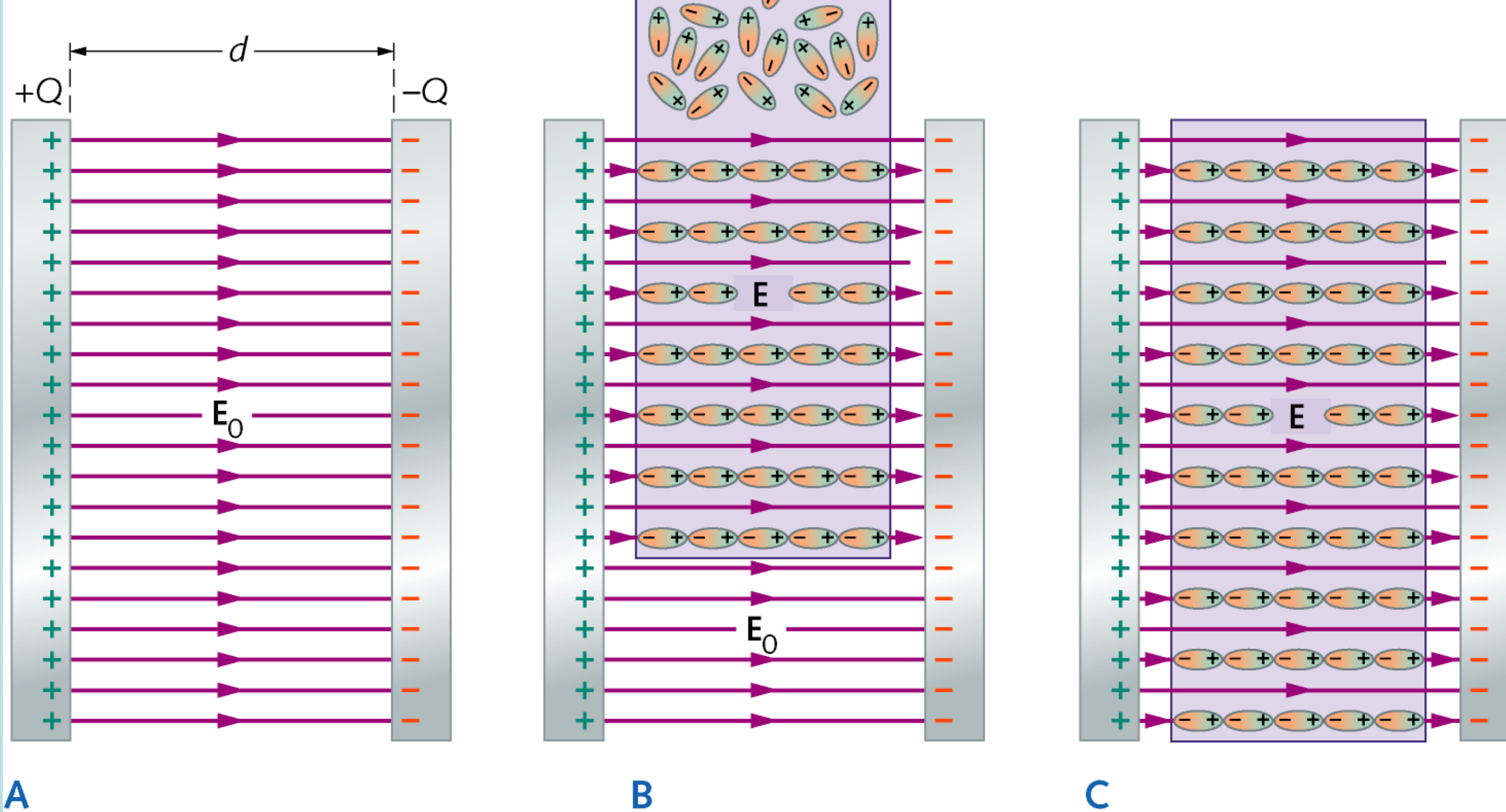


dielettrici non polari





dielettrici



$V_0 = E_0 d$

$$E = E_0/\varepsilon_r$$

$V = Ed$

ε_r è la costante dielettrica relativa

$E_0 > E$

$V_0 > V$

$C_0 = Q/V_0 < C = Q/V$

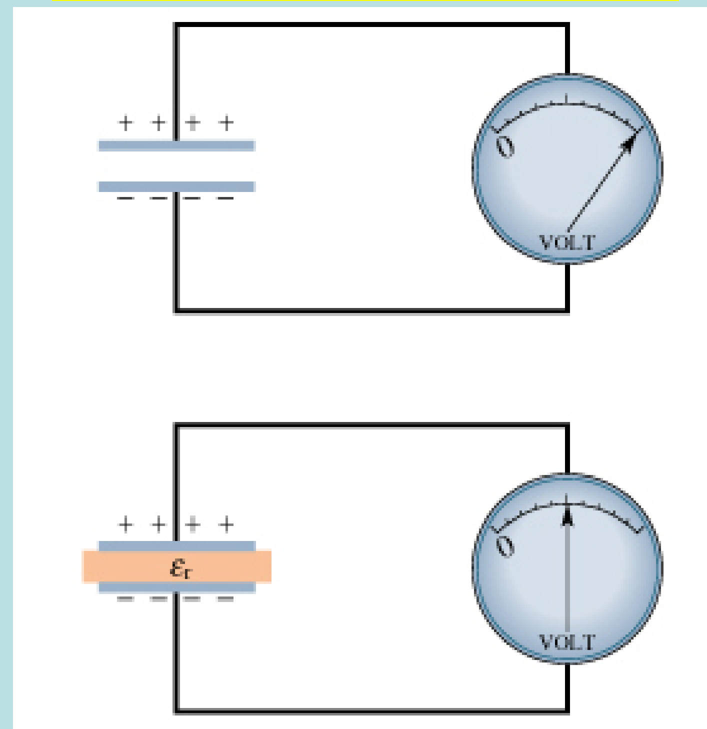
$$C = \varepsilon_r (\varepsilon_0 A)/d = \varepsilon_r C_0$$

Dielettrici:
misura della costante dielettrica relativa

Sostanza	Costante dielettrica
Vuoto	1
Aria	1,00059
Teflon	2,1
Mylar	3,1
Carta	3,7
Mica	5,4
Vetro pyrex	5,6
Neoprene	6,7
Acqua	80,4

Esempio: soluzioni elettrolitiche

$$E_0/E = V_0/V = \varepsilon_r$$

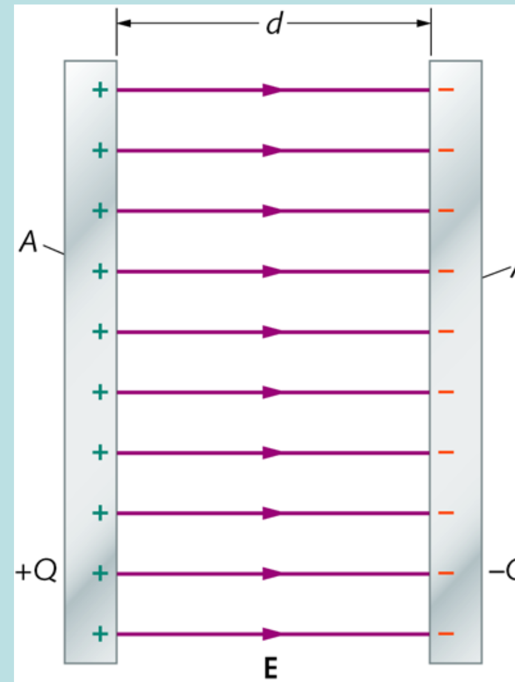


N.B. ε_r è sempre >1 $\Rightarrow$ $\boxed{F = F_0/\varepsilon_r}$

rottura del dielettrico

Tabella 2. Rigidità di dielettrici

Sostanza	Rigidità dielettrica (V/m)
Aria	$3{,}0 \cdot 10^6$
Neoprene	$12 \cdot 10^6$
Vetro pyrex	$14 \cdot 10^6$
Carta	$16 \cdot 10^6$
Teflon	$60 \cdot 10^6$
Mica	$100 \cdot 10^6$



E_{MAX}

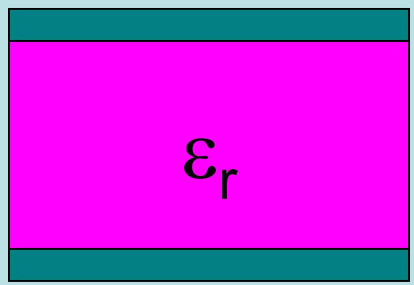
Esempio: ionizzazione dell’aria, aurora boreale

12. Esempio svolto

Un condensatore piano ha le armature con superficie A distanti d
e lo spazio fra le armature è riempito con un dielettrico di costante
dielettrica relativa ε_r
Quando il condensatore viene collegato ad una batteria da 12 Volt,
ciascuna armatura ha una carica di $3.62\ 10^{-8}$ C

Calcolare ε_r

$A = 0.0280\ m^2$
$d = 0.550$ mm
V 12 V
$Q = 3.62\ 10^{-8}$ C



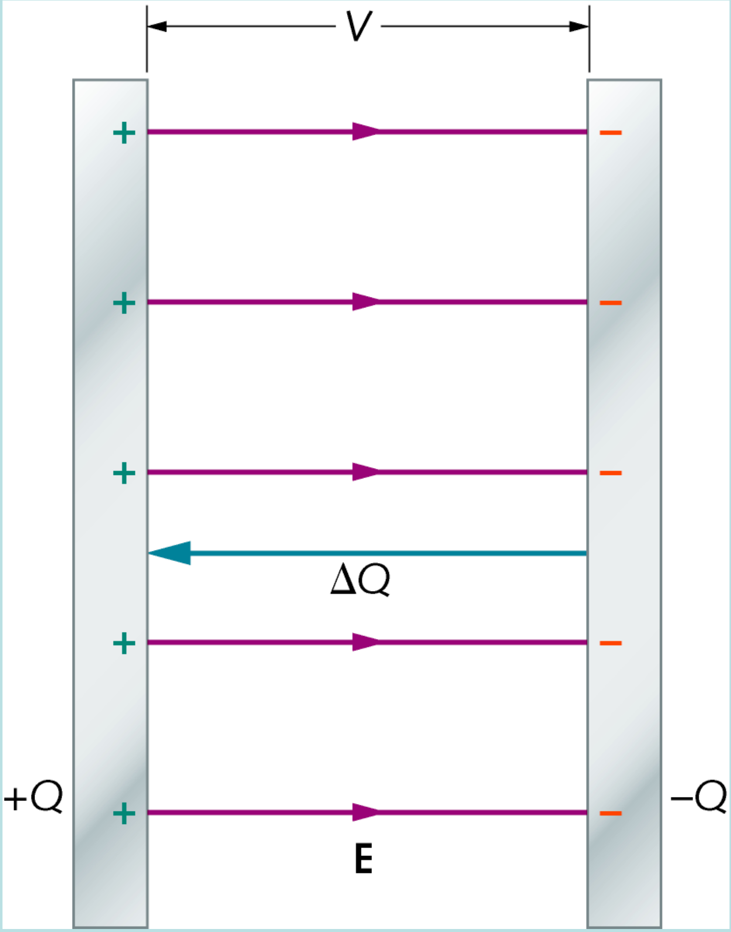
$$C = \varepsilon_r\,(\varepsilon_0\,A)/d = \varepsilon_r C_0$$

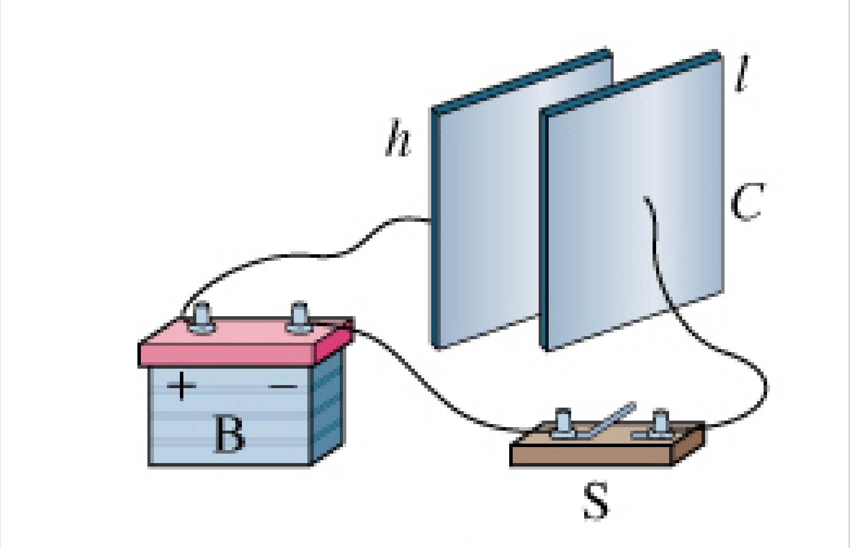
$C = Q/V = 3.02\ 10^{-9}$ Farad

$$C = \varepsilon_r\,(\varepsilon_0\,A)/d$$

$$\varepsilon_r = Cd/(\varepsilon_0\,A) = 6.70$$

Trasferendo una carica ΔQ da una armatura all'altra

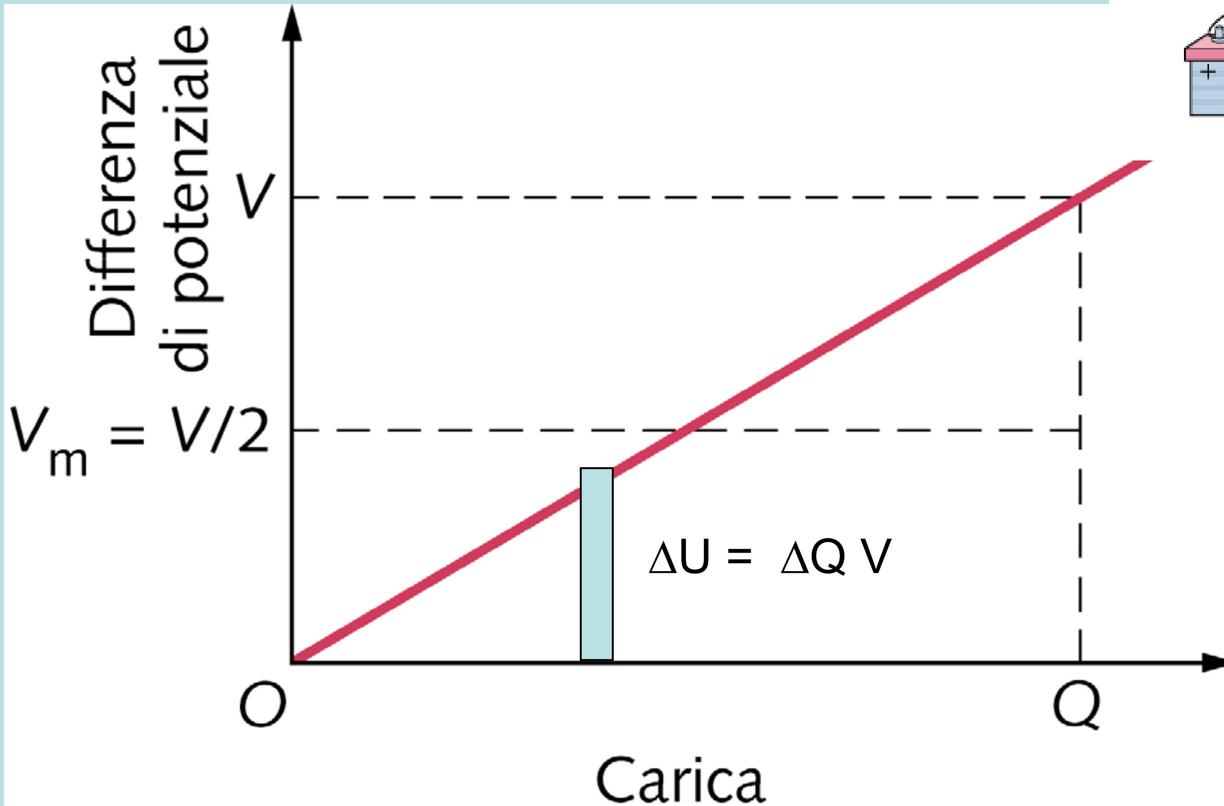


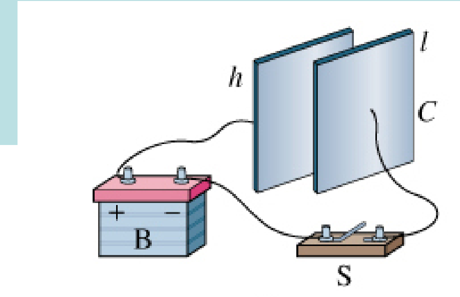


l'energia potenziale elettrica aumenta di

$$\Delta U = \Delta Q\, V$$

Carica di un condensatore

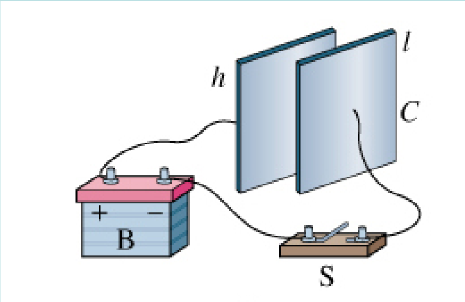


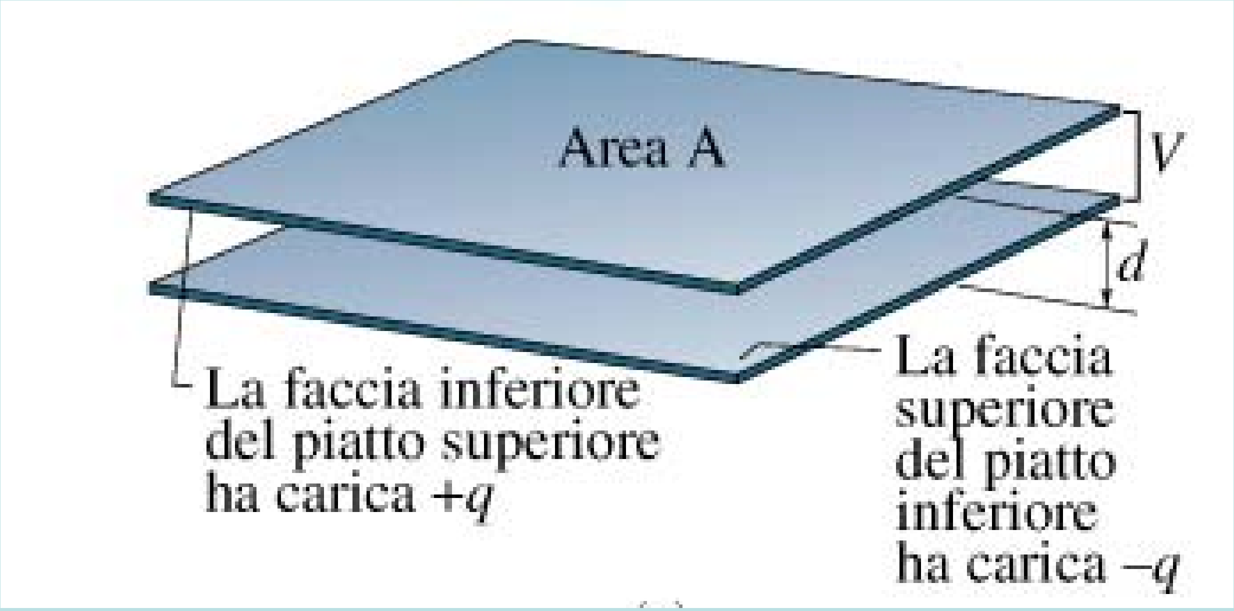


$$\boxed{\begin{aligned} U_E &= \Sigma \Delta U_i \\ &= \Sigma \Delta Q_i\ V_i \\ &= \tfrac{1}{2}\ QV \end{aligned}}$$

$$\begin{aligned} U_E &= \tfrac{1}{2}\ QV \\ &= \tfrac{1}{2}\ CV^2 \\ &= \tfrac{1}{2}\ Q^2/C \end{aligned}$$

Energia e densità di energia elettrica





$Q = E\,(\varepsilon_0\, A)$

$V = Ed$

energia

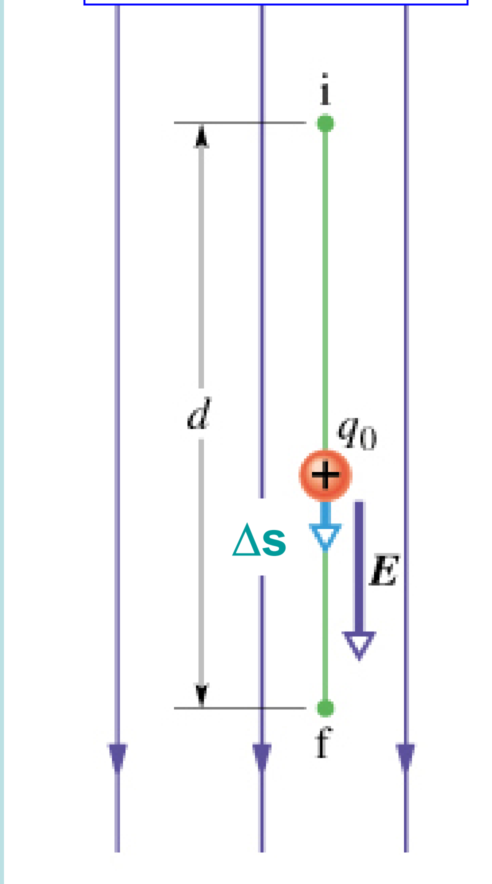
$$U_E = \tfrac{1}{2}\, QV$$
$$= \tfrac{1}{2}\, [E(\varepsilon_0\, A)]\, [Ed]$$
$$= \tfrac{1}{2}\, \varepsilon_0 E^2 / (Ad)$$

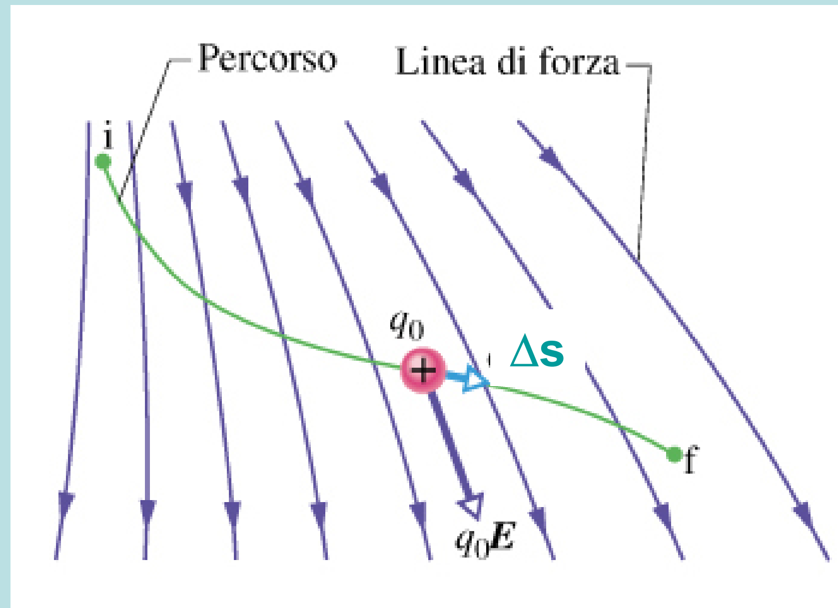
densità di energia

$$u = U_E/\text{Volume}$$
$$= \tfrac{1}{2}\, \varepsilon_0 E^2$$

Campo elettrico e potenziale: caso generale

$\Delta V = - E\, \Delta s$



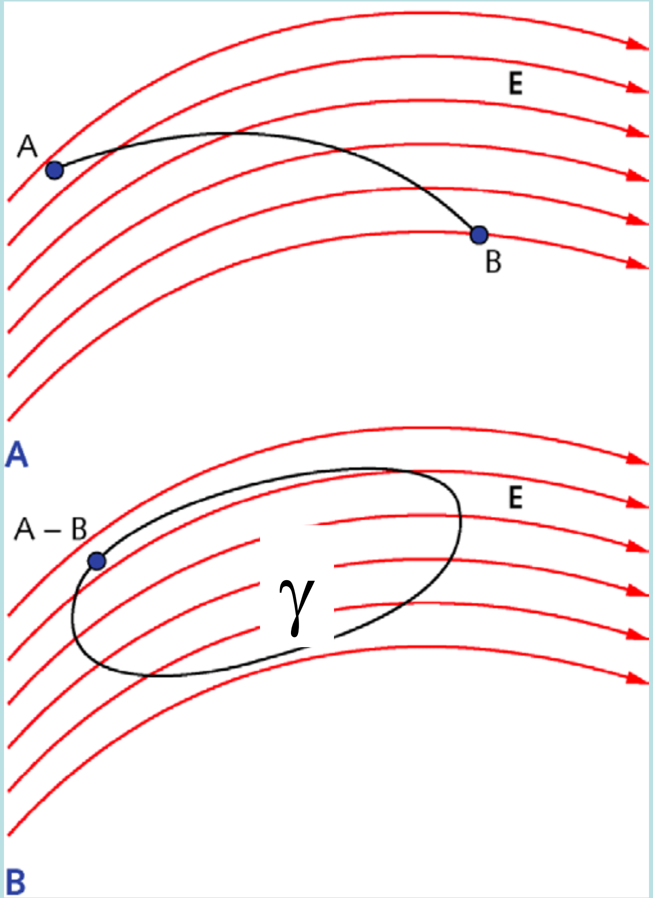


$$\Delta V_{totale} = -\Sigma_j\, \mathbf{E_j} \cdot \Delta \mathbf{s_j}$$

$$\Delta V_{totale} = -\int_i^f \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}$$

$$\Delta V_{totale} = V_f - V_i = -E\, \Delta s_{totale} = -Ed$$

Circuitazione del campo elettrico



$$\Delta V = -\int_{A}^{B} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}$$

$$\Delta V = V_B - V_A = 0$$

$$\oint_{\gamma} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = 0$$

La ***circuitazione*** del campo elettrico è nulla.
Questa proprietà è diretta conseguenza del fatto che il campo elettrico è conservativo.