

NUOVA SERIE

Anno XIX - 1942

IL

NUOVO CIMENTO

PERIODICO FONDATO IN PISA DA C. MATTEUCCI E R. PIRIA

ORGANO DELLA SOCIETÀ ITALIANA DI FISICA

SI PUBBLICA SOTTO IL PATRONATO
DEL CONSIGLIO NAZIONALE DELLE RICERCHE
IN 10 NUMERI ANNUALI

DIRETTORI:

A. CARRELLI - E. FERMI - Q. MAJORANA - A. POCHETTINO - L. PUCCIANTI



NICOLA ZANICHELLI, EDITORE

BOLOGNA 1942-XXI

LE STATISTICHE INTERMEDIE E LE PROPRIETÀ DELL'ELIO LIQUIDO

Nota di GIOVANNI GENTILE (j.) ⁽¹⁾

Sunto. — Dopo alcune premesse sull'importanza della teoria del gas ideale degenerare, si espongono i criteri con cui si possono generalizzare le statistiche quantistiche di A. EINSTEIN e di E. FERMI; cioè, come si possa istituire la teoria delle cosiddette statistiche intermedie, quelle statistiche dunque, in cui il massimo numero d'occupazione d'una cella nello spazio delle fasi non è più 1 (statistica di FERMI-DIRAC), oppure ∞ (statistica di BOSE-EINSTEIN), ma un numero intero positivo qualunque. Passando poi a considerare le straordinarie proprietà presentate dall'elio liquido II, si mostra come si possa dare una teoria termodinamica coerente della degenerazione del gas di EINSTEIN, considerando questo gas come ubbidente a una statistica intermedia, in cui il parametro d è lo stesso numero totale N delle particelle del gas. Il risultato, fisicamente molto sottilissimo, dà degli argomenti per chiarire alcuni fenomeni, veramente straordinari, come l'effetto fontana. Inoltre il carattere semiclassico della nostra teoria meccanico-statistica permette di calcolare alcune proprietà caratteristiche dell'elio liquido II, come la viscosità e la conduttività calorifica.

1. L'importanza che ha sempre avuto lo studio del comportamento della materia alle varie temperature è cosa ben nota; poichè tutti sanno che il « quanto d'azione » introdotto, in via d'ipotesi, nella termodinamica del campo di radiazione luminoso, ha dimostrato la sua più generale validità attraverso lo studio del comportamento dei solidi a basse temperature. Con la conseguenza che se, con PLANCK, si poteva parlare di quanti di luce, poi, con EINSTEIN e DEBYE, si potè parlare anche di « quanti di suono », o « quanti di onde elastiche ».

Attraverso la via maestra della termodinamica, dunque, è penetrato nella fisica il concetto fondamentale d'una elementare discon-

⁽¹⁾ GIOVANNI GENTILE junior, professore ordinario di Fisica teorica presso la R. Università di Milano, mancato ai vivi il 30 marzo 1942-XX. La presente Nota fu inviata dall'Autore, e le bozze corrette dalla Redazione.

tinuità nel comportamento dinamico, o sarebbe meglio dire addirittura, nelle proprietà cinematiche della materia. Se fosse stato altrimenti, non sarebbe concepibile la ferrea necessità con cui i fisici si sono dovuti piegare davanti a questa nuova concezione: troppo grandiosi i fenomeni, che si presentano a noi in queste considerazioni, perchè si possa prescindere dalla loro soluzione.

Si potrebbe dire di più: lo stesso concetto di BOHR di una successione discontinua di stati quantici, caratteristica di ogni sistema fisico, è un concetto che, a guardare bene, si affaccia dapprima nella termodinamica. Senza di esso infatti è incomprendibile quel fenomeno generalissimo che va sotto il nome di « congelamento » dei gradi di libertà di un sistema. Per esempio, studiando la legge di DULONG e PETIT, perchè una molecola monoatomica ha solo tre gradi di libertà, una biatomica ne ha cinque, etc? La meccanica insegna

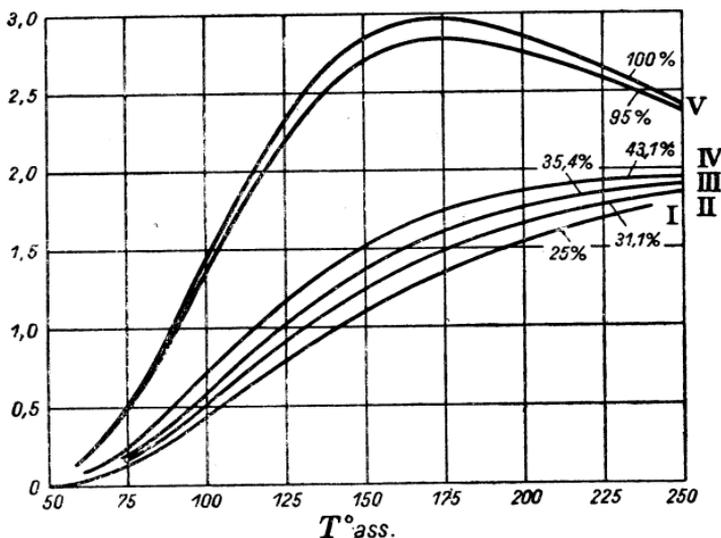


Fig. 1 - Calori specifici c_v dell'idrogeno (paraidrogeno e ortoidrogeno in varie percentuali).

invece che ad ogni punto di massa vanno attribuiti tre gradi di libertà e quindi la molecola di idrogeno, in quanto è costituita da due nuclei e da due elettroni, dovrebbe avere dodici gradi di libertà. L'unica spiegazione convincente è quella che dà la teoria dei quanti: la differenza tra lo stato fondamentale e il primo stato eccitato di questi elettroni è tanto grande che, per effetto dell'agitazione termica soltanto, essa, a temperatura ordinaria, non può essere superata. Lo stesso dicasi del grado di libertà d'oscillazione dei due nuclei tra di loro: il primo quanto di oscillazione comincerebbe a essere eccitato solo a una temperatura di un migliaio di gradi.

Essendo quindi condizionato dalla temperatura il contributo che ogni grado di libertà porta all'energia interna U , e quindi al calore specifico c_v — che è la derivata di U rispetto a T — ne concludiamo che questa grandezza è una funzione decrescente con la temperatura e che tende ad annullarsi allo zero assoluto — in cui, per così dire, tutti i gradi di libertà sono congelati.

2. In quest'ultima asserzione è contenuto uno degli enunciati del terzo principio della termodinamica, o principio di NERNST.

Ora non c'è in fisica una teoria più semplice e cristallina della teoria del gas perfetto, o gas ideale: le molecole, pensate sciolte da ogni vicendevole influenza, vengono schematizzate come dei punti di massa liberi di muoversi in un volume chiuso.

Nè, perchè così semplice, questa teoria è meno importante, poichè è risaputo che le proprietà di un gas reale si approssimano asintoticamente a quella d'un gas ideale quando la densità tende a zero. Ebbene anche questa teoria si è trovata nella necessità di fare i conti con il principio di NERNST. E poichè, per mezzo del teorema generale del viriale di CLAUSIUS, discende dalle leggi di BOYLE e GAY-LUSSAC, compendiate nell'equazione di stato:

$$pV = RT,$$

che il calore specifico c_v del gas perfetto è una costante indipendente dalla temperatura, dobbiamo concludere che anche le leggi dei gas perfetti devono essere modificate se si vuol soddisfare al principio di NERNST. (Ricordiamo a questo proposito che esiste sull'argomento un interessante gruppo di lavori del prof. POLVANI che ha studiato le proprietà termodinamiche d'un gas perfetto).

Necessariamente dunque per il principio di NERNST devono presentarsi delle deviazioni dal comportamneto classico dei gas perfetti: deviazioni che non hanno nulla a che fare con le deviazioni ordinarie dei gas reali dalla legge: $pV = RT$ e dovute alle forze di VAN DER WAALS. I fenomeni che presenta alle basse temperature un gas perfetto, che soddisfi al principio di NERNST, vanno, perciò sotto il nome specifico di « fenomeni di degenerazione ».

D'altra parte anche la realtà sperimentale ci pone dinanzi a questo problema: come spiegare infatti che quel gas perfetto, che costituiscono i cosiddetti elettroni liberi d'un metallo, deve portare un contributo nullo al calore specifico del solido? (secondo la teoria classica ci dovremmo aspettare un aumento del 50 % circa). Si tratta

qui evidentemente d'un gas degenerare, che obbedisce al principio di NERNST.

3. Ci si può rendere subito conto che nel caso di un gas ideale non basta più il quanteggiamento delle orbite alla BOHR per dedurre il principio di NERNST. Difatti quantizzando il moto d'un corpuscolo di massa m , costretto a muoversi per es. in un cubo di lato l , si trova che l'energia d'uno stato quantico generico del sistema è data dalla formula:

$$(1) \quad E_{n_1 n_2 n_3} = \frac{h^2}{8l^2 m} (n_1^2 + n_2^2 + n_3^2),$$

dove h è la costante di PLANCK, n_1, n_2, n_3 sono numeri interi positivi. Qui la minima differenza di energia fra due stati è:

$$\frac{h^2}{8m} \cdot \frac{1}{l^2} \approx \frac{10^{-30}}{l^2},$$

e tende a zero quando l ha delle dimensioni macroscopiche.

Colui che prima risolse il problema della degenerazione del gas perfetto fu ALBERTO EINSTEIN e precisamente nell'anno 1924-25. Egli comprese che era da modificare la legge di MAXWELL e BOLTZMANN, che, come è noto, dà la distribuzione statistica delle velocità delle molecole d'un gas intorno al valor medio. Naturalmente bisognava tenersi fermi all'interpretazione di BOLTZMANN del secondo principio della termodinamica: lo stato di maggiore entropia è lo stato di massima probabilità. O più precisamente: uno stato macroscopico del nostro sistema è definito dal valore globale di alcuni parametri, come l'energia totale E , la pressione p , etc. D'altra parte anche se stabiliamo p. es. che vi sono N_s particelle d'energia E_s , rimane un'indeterminazione nel fatto che vi sono più stati quantici d'energia E_s , — come si vede dalla formula (1) — e che sostanzialmente differiscono per la direzione del vettore velocità. Quindi si offrono molti modi, tutti d'eguale probabilità *a priori*, di realizzare una configurazione macroscopica del nostro gas. Se si chiama probabilità termodinamica questo numero di modi, allora si può con BOLTZMANN definire come entropia del sistema il logaritmo della probabilità.

Dunque questo era il punto: trovare una nuova legge statistica, diversa dalla classica, che desse la probabilità termodinamica d'un generico stato del gas. Per conseguire un tale scopo EINSTEIN seguì un metodo, che era stato escogitato dal fisico indiano BOSE per dedurre la legge di PLANCK sulla base d'una rappresentazione fotonica del campo di radiazione. Ad incoraggiare EINSTEIN a seguire

una tale via forse contribuì il successo che gli aveva arriso una decina d'anni prima quando aveva applicato la formula di PLANCK per spiegare l'andamento dei calori specifici d'un solido. Nell'anno successivo, nel 1926, E. FERMI dava una teoria diversa del gas degenere; in cui egli si ispirava al *principio di esclusione* che proprio allora era stato scoperto da PAULI per gli elettroni, in base alla discussione delle proprietà del sistema periodico degli elementi di MENDELEEV. Che cosa hanno di comune e che cosa di diverso le due teorie di EINSTEIN e di FERMI?

EINSTEIN, seguendo BOSE, ammette che uno stato del sistema delle N molecole del suo gas sia perfettamente definito quando siano dati il numero delle molecole che stanno nel primo stato quantico, il numero di quelle che occupano il secondo stato e così via. Lo stesso fa FERMI: per ambedue quindi non ha importanza che la molecola a stia nel primo stato e la molecola b nel secondo, o viceversa; ma semplicemente ha importanza che tanto il primo quanto il secondo stato siano occupati da una sola particella. (Per BOLTZMANN invece bisognerebbe distinguere il primo dal secondo caso).

Tutto ciò si può interpretare dicendo che due molecole del nostro gas non sono tra loro distinguibili in alcun modo. La meccanica quantistica, come ha dimostrato DIRAC (che con FERMI divide il merito di aver fondato la statistica che porta il loro nome), afferma la necessità di una tale conclusione. Questo è dunque comune a una qualunque statistica quantistica.

Dove invece FERMI si discosta da EINSTEIN è che EINSTEIN ammette con BOSE che in uno stato quantico vi possa stare un numero qualsiasi anche infinito di particelle; mentre FERMI, tenendosi al principio di esclusione di PAULI, ammette che, al più, in uno stato quantico si possa trovare una ed una sola particella.

4. Ma, in via puramente teorica, non si potrebbe pensare che si possano dare statistiche in cui il numero massimo di occupazione di uno stato quantico sia un numero qualunque intero e positivo d ? In particolare se $d = 1$ si avrebbe la statistica di FERMI, se $d = \infty$ la statistica di EINSTEIN; per d qualunque si avrebbero le statistiche intermedie fra EINSTEIN e FERMI. Questa fu la domanda che mi fu rivolta un giorno dal prof. POLVANI. Naturalmente si può rispondere di sì: per quanto « apriori » non si sappia quale senso possa avere studiare queste statistiche, dato che le uniche realizzate in natura sembrano essere quelle di FERMI e di EINSTEIN. Ma praticamente la teoria delle statistiche intermedie presenta serie difficoltà,

perchè non riesce agevole dedurre delle formule asintotiche semplici numerando direttamente i diversi modi possibili di realizzare una determinata configurazione.

In una mia nota recente, pubblicata nel « Nuovo Cimento », ho mostrato invece che il problema diventa senz'altro risolvibile quando si segua il metodo dato da BOSE nel suo lavoro del 1924. Ecco come si procede: poichè, quando si considerino gli stati quantici d'una stessa energia E_s , che supponiamo in numero di Q_s , ha importanza solo sapere quanti di essi non siano occupati, quanti invece siano occupati da una particella, quanti da due, etc., introduciamo esplicitamente come variabili questi parametri: p_0^s numero degli stati non occupati; p_1^s numero di quelli occupati da una particella etc., sino a p_d^s numero degli stati occupati da d particelle. Naturalmente deve essere:

$$(2) \quad \sum_{r=0}^{r=d} p_r^s = Q_s,$$

e il numero complessivo di particelle sugli stati s sarà dato da:

$$(3) \quad N_s = \sum_{r=0}^{r=d} r p_r^s.$$

Ora è evidente che il numero dei modi di distribuire, in queste ipotesi, le N_s particelle tra gli stati s è:

$$(3') \quad W_s = \frac{Q_s!}{p_0^s! \dots p_d^s!} \quad \text{con} \quad (3'') \quad \sum N_s = N$$

e che quindi la probabilità termodinamica relativa ad uno stato macroscopico di energia totale:

$$(4) \quad E = \sum_s N_s E_s$$

è data dal prodotto: $W = W_1 \dots W_s \dots$. Fra tutte queste possibili configurazioni risulta effettivamente realizzata quella di massima entropia, per cui dunque è massimo il logaritmo di W . Determinando questo massimo in modo che valgono sempre le (2), (3) e (4) si trova la formula fondamentale d'una statistica intermedia di parametro d :

$$(5) \quad N_s = Q_s \cdot f\left(\frac{E}{kT}\right) = Q_s \left\{ \frac{1}{e^{x+\alpha} - 1} - (d+1) \frac{1}{e^{(d+1)(x+\alpha)} - 1} \right\},$$

che contiene come casi particolari le formule fondamentali:

$$(5') \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{di FERMI } (d=1): N_s = Q_s \left\{ \frac{1}{e^{x+\alpha} - 1} - 2 \cdot \frac{1}{e^{2(x+\alpha)} - 1} \right\} = \frac{Q_s}{e^{x+\alpha} + 1}, \\ \text{e di EINSTEIN } (d=\infty): N_s = \frac{Q_s}{e^{x+\alpha} - 1}. \end{array} \right.$$

Inoltre si vede subito che la (5) si trasforma nella legge classica di MAXWELL-BOLTZMANN per un valore sufficientemente grande della costante α — caso questo che corrisponde perciò ad alte temperature.

Giunti a questo risultato, si può procedere senz'altro a calcolare le formule fondamentali del nostro gas perfetto. Intanto la costante α , che per d finito può prendere tutti i valori tra $-\infty$ e $+\infty$ può essere determinata in fase alla condizione (trascrizione della (3')):

$$(6) \quad \frac{N}{V} = \frac{(2\pi mkT)^{3/2}}{h^3} F(\alpha),$$

dove $F(\alpha)$ è la funzione trascendente:

$$(7) \quad F(\alpha) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} x^{1/2} \left\{ \frac{1}{e^{\alpha+x} - 1} - (d+1) \frac{1}{e^{(d+1)(\alpha+x)} - 1} \right\} dx,$$

e dove $x = E/kT$. Allo stesso modo si può calcolare l'energia interna

$$(8) \quad U = N \cdot \bar{E} = \frac{3}{2} k \cdot T \cdot N \cdot \frac{G(\alpha)}{F(\alpha)},$$

dove

$$G(\alpha) = \frac{3}{4\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} x^{3/2} f(x) dx$$

è legata alla $F(\alpha)$ dalla relazione:

$$\frac{d}{d\alpha} G(\alpha) = -F(\alpha);$$

e quindi la pressione p , che per il teorema del viriale di CLAUDIUS risulta:

$$p = \frac{2}{3} \frac{U}{V}.$$

Queste sono le formule fondamentali del nostro gas. L'importante è che per qualunque d l'integrale $F(\alpha)$ assume altre espressioni in serie completamente diverse per $\alpha > 0$, o per $\alpha < 0$. Nel primo caso che, come abbiamo osservato, corrisponde ad alte temperature, $F(\alpha)$ è (ponendo $A = e^\alpha$):

$$(9) \quad F(\alpha) = \sum_{\rho=1}^{\rho=\infty} \frac{1}{\rho^{3/2}} \frac{1}{A^\rho} - \sum_{\rho=1}^{\rho=\infty} \frac{1}{(d+1)^{1/2}} \frac{1}{\rho^{3/2}} \frac{1}{A^{\rho(d+1)}},$$

e analoga espressione vale per $G(\alpha)$. Così l'equazione di stato diventa:

$$(9') \quad pV = NkT \left[1 - \frac{1}{2^{5/2}} \frac{N}{V} \frac{h^3}{(2\pi mkT)^{3/2}} + \dots + \frac{d}{(d+1)^{3/2}} \frac{Nh^3/V}{(2\pi mkT)^{3/2d}} - \dots \right]$$

Nel secondo caso, corrispondente a bassissime temperature:

$$(10) \quad F(\alpha) = \frac{4}{3\sqrt{\pi}} a^{3/2} \cdot d \cdot \left\{ 1 + \frac{\pi^2}{4a^2} \frac{1}{d+1} + \dots \right\} \quad \text{con } a = -\alpha;$$

per cui l'equazione di stato assume la forma:

$$(10') \quad p = \frac{1}{20} \left(\frac{6}{\pi} \right)^{2/3} \frac{h^2}{m} \left(\frac{N}{V} \right)^{5/3} \frac{1}{d^{2/3}} + \dots$$

Questa funzione $F(\alpha)$, che stabilisce una corrispondenza biunivoca tra la temperatura T ed α , determina essa sola il comportamento del gas perfetto, costringendolo entro leggi diversissime a seconda del campo di temperatura considerato.

Quanto all'entropia essa risulta zero per $T = 0$ e per alte temperature assume la forma classica di SACKUR-TETRODE. Naturalmente i calori specifici vanno a zero con T . Possiamo concludere intanto che « non è vero che le statistiche di FERMI e di EINSTEIN siano le sole che soddisfino le proprietà termodinamiche realmente accertate del gas perfetto ». Il nostro gas intermedio d'altra parte se per alte temperature presenta un comportamento che si avvicina a quello del gas di EINSTEIN, per basse temperature presenta un comportamento del tutto analogo al gas di FERMI (1).

5. — Per quanto possano essere importanti queste conclusioni, non si può negare che tutto questo può sembrare anche elegante, d'un interesse però solo teorico. Ma passiamo a considerare la degenerazione del gas di EINSTEIN. Qui, poichè α è al minimo zero, manca per così dire il regime $\alpha < 0$, caratteristico del gas fermiano. Però ora cominciano le difficoltà: poichè $F(\alpha)$ cresce al decrescere di α e raggiunge il massimo per $\alpha = 0$ (nel qual caso diventa la funzione ben nota in analisi ζ di RIEMANN nel punto d'ascissa $3/2$ dove assume il valore 2,612), evidentemente si ha una temperatura critica T_0 oltre la quale non si può scendere se si vuole soddisfare la (2). Allora EINSTEIN ammise, con il suo sicuro intuito fisico, che al disotto di questa temperatura T_0 doveva avvenire un fatto singolare: tutte le molecole che non potevano, per così dire, rimanere nel gas, si staccavano da esso cadendo al suolo del recipiente con velocità zero. Si sarebbe dovuto avere una specie di condensazione.

La teoria tuttavia si presta evidentemente a delle critiche: dalla (1) discende che N_s tende a ∞ quando $\alpha = 0$ e $E_s \rightarrow 0$; allora come si fa ad ammettere, in un secondo tempo, che su questo livello energetico di velocità zero ve ne sia solo quel numero finito che corrisponde al numero delle molecole della fase liquida? Inoltre va rilevata un'altra difficoltà: la costante α secondo EINSTEIN rimane zero, dalla temperatura critica T_0 in giù sino allo zero assoluto. Ora α ha la seguente espressiva interpretazione: essa, a meno della costante $-1/NkT$, è uguale al potenziale termodinamico a pressione costante, cioè:

$$(11) \quad \alpha = -\frac{1}{NkT} \cdot \psi = \frac{1}{NkT} (TS - U - pV).$$

E si può dimostrare, in base al principio di incertezza di HEISENBERG che l'energia U allo zero assoluto è diversa da zero e quindi α tende all'infinito negativo per $T = 0$, anche per il gas di EINSTEIN.

Per ragioni di questo tipo il fenomeno della condensazione di EINSTEIN cadde in discredito, tanto è vero che essa di solito non viene riportata nei trattati che invece si attardano lungamente a descrivere i fenomeni di degenerazione del gas di FERMI. Inoltre si riteneva che anche per il gas più leggero, l'elio, ubbidiente alla statistica di EINSTEIN, i fenomeni di degenerazione fossero completamente mascherati dalle ordinarie deviazioni dalle leggi dei gas perfetti dovute alle forze VAN DER WAALS.

6. — Era a questo punto la questione quando nel 1937 F. LONDON la risollevò per ricollegarla ad alcune singolari anomalie che aveva rivelato lo studio delle proprietà dell'elio liquido.

L'elio a pressione atmosferica si liquefà a $4,22^\circ K$; la temperatura critica è di $5,2^\circ K$. A $2,19^\circ K$ sotto la sua propria pressione di vapore l'elio liquido sottostà a una notevole trasformazione. Quando il liquido è raffreddato al di sotto di $2,19^\circ K$ il calore specifico salta dal valore di $0,4$ calorie/gr. grado a più di 5 calorie per grammo per grado, dopo di che decresce rapidamente proporzionalmente circa a T^5 . La trasformazione a $2,19^\circ K$ ha pure un notevole effetto sul coefficiente di espansione dell'elio che sopra questa temperatura è positivo, mentre al di sotto è negativo, sebbene la densità non subisca alcuna brusca variazione. Inoltre, anche solo guardando, ci si accorge di questa trasformazione, perchè l'elio, che prima si mostrava come un liquido in violenta ebollizione in tutta la sua massa, poi appare come un'acqua chiara e senza moto.

Trasformazioni di fase di questo tipo nella fisica sono conosciute: per es. quella che subisce un materiale ferro-magnetico quando passa attraverso il punto di CURIE; le trasformazioni dalla disposizione ordinata nello spazio a quella disordinata di certe leghe, etc.

La temperatura di trasformazione dell'elio liquido è chiamata con una denominazione dovuta a EHRENFEST, « punto λ ». La modificazione dell'elio al di sotto del punto λ è generalmente indicata come elio liquido II, quella sopra come elio liquido I.

L'elio liquido può essere solidificato sotto una pressione esterna di 25 atm. A temperature maggiori occorrono pressioni maggiori. Le proprietà dell'elio liquido sono tali quali ci si potrebbe aspettare da un liquido di punto di ebollizione molto basso. Tutt'altro invece accade per l'elio liquido II. Intanto con considerazioni termodinamiche si può dedurre che l'elio liquido II rimane liquido anche allo zero assoluto.

7. — È stata allora avanzata l'ipotesi che l'elio liquido II a differenza dei liquidi ordinari corrisponda ad una disposizione di atomi perfettamente ordinata nello spazio, e il punto λ quindi corrispondere ad un passaggio dal disordine all'ordine, come si osserva in certe leghe. Ma una ricerca sperimentale di KEESON e TACONIS ha invece dimostrato che non si rilevava alcun cambiamento nella riflessione di raggi X da parte di una colonna di elio liquido al di sopra e al di sotto del punto λ . Tuttavia prima ancora di questo risultato sperimentale, F. LONDON in base a considerazioni teoriche era arrivato alla conclusione che dovendosi scartare l'ipotesi di una trasformazione dall'ordine al disordine bisognava pensare ad un'altra spiegazione; e questa trovò nel fatto che la temperatura critica in cui avviene la condensazione del gas di EINSTEIN è molto vicina alla temperatura del punto λ : la prima risulta di $3,09^\circ K$, la seconda come abbiamo detto è di $2,19^\circ K$. La concordanza è impressionante dato che la teoria di EINSTEIN riguarda un gas perfetto, in cui quindi non si mette in conto alcuna interazione tra gli atomi, cosa che a rigore non è più consentito nel caso d'un liquido. Tuttavia possiamo sempre ragionare così: se vogliamo conoscere le proprietà caratteristiche d'un liquido che si formi in seguito al fenomeno di condensazione previsto da EINSTEIN, allora sarà lecito, anzi sarà opportuno, astrarre dall'interazione reciproca degli atomi — dato che questa, presente in ogni specie di liquido, non ci darebbe che le proprietà ordinarie dello stato liquido, mentre noi vogliamo appunto spiegare le singolari proprietà di questo liquido *sui generis* che è l'elio liquido II.

E che siano realmente proprietà singolarissime lo mostrano i fatti seguenti: questo fluido a differenza dell'elio liquido I, deve essere considerato, secondo KEESON, un « sovraconduttore del calore ». La sua conducibilità calorifica, che è ≈ 1000 volte più grande di quella del rame a temperatura ordinaria, dipende (e questo è anche un fatto eccezionale) dal gradiente della temperatura, raggiungendo il suo massimo valore a $2^\circ K$ per un gradiente di temperatura di 10^{-5} gradi/cm. Quando invece il calore specifico torna normale, questa sovraconduttività scompare — come hanno dimostrato SIMON e PICKARD.

Inoltre l'elio liquido II è « superfluido ». BURTON e MISNER a Toronto avevano osservato che passando attraverso il punto λ , il coefficiente di viscosità μ cade da 10^{-4} C. G. S. a 10^{-5} . Essi avevano fatto questa misura osservando come si smorzava la rotazione d'un cilindro immerso in un bagno d'elio liquido II. Con un disco oscillante MAC WOOD a Leyda aveva osservato che μ immediatamente sotto il punto λ è $3 \cdot 10^{-5}$ e scende sino $2 \cdot 10^{-6}$ per una temperatura di $1,1^\circ K$. (Per confronto ricordiamo che per l'acqua a 20° $\mu = 10^{-2}$ C. G. S.). KAPITZA a Mosca misurò con quale velocità passava l'elio liquido secondo attraverso i capillari e trovò che μ era ancora più piccolo: 10^{-9} C. G. S. Infine ALLEN e MISNER dimostrarono che la velocità d'efflusso dell'elio liquido II è (in capillari di raggio $5 \cdot 10^{-5}$ cm) indipendente dalla pressione ai capi del tubo, contrariamente alla legge di POISEUILLE. Mentre BURTON, a Toronto, trovò che questa legge vale quando si adoperino larghi tubi per l'efflusso.

Dunque attraverso capillari, o scorrendo sotto forma di film sopra una superficie — come mostrarono le esperienze di MENDELSON-DAUNT — l'elio liquido II si comporta come un liquido perfetto con $\mu \approx 0$.

Ancora più straordinari sono i seguenti fenomeni scoperti da KEESON e sistematicamente studiati da DAUNT e MENDELSON. Se si immerge un tubo di vetro chiuso in un bagno d'elio liquido II, l'elio spontaneamente dal bagno si trasferisce nel tubo, arrampicandosi sopra le pareti del vetro con una velocità di 20 cm/sec a $1,1^\circ K$. Questo trasferimento spontaneo cessava quando il livello interno al tubo raggiungeva quello esterno del bagno. Se si sollevava il tubo, il liquido se ne andava, in modo da eguagliare di nuovo i livelli, interno ed esterno. Se poi infine si traeva il tubo fuori dal bagno l'elio liquido si raccoglieva in gocce sul fondo esterno del tubo e ricadeva nel bagno: come se avesse una « volontà aristotelica » di scendere al basso!

Ora non c'è dubbio che proprietà tanto singolari possono essere dovute soltanto al fatto che l'elio è l'unico gas che obbedisca alla statistica di EINSTEIN e in cui la temperatura critica T_0 , cioè il punto λ , è relativamente così alta. (Infatti il neon, anch'esso un gas nobile che obbedisce per il 99 % alla statistica di EINSTEIN, ha una temperatura critica T_0 calcolabile dalla (1) inferiore, $1^\circ K$, mentre è noto che a $23^\circ K$ esso è già solido).

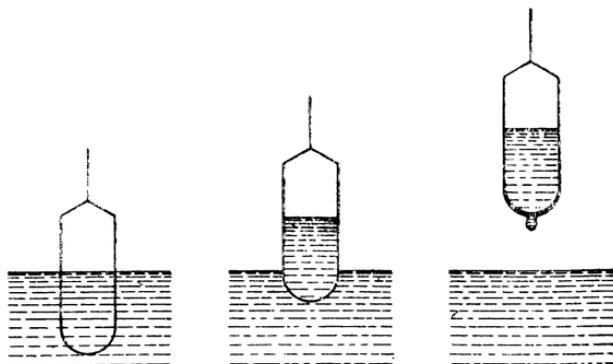


Fig. 2 - Esperienze di DAUNT e MENDELSON.

Dunque è certamente nel vero LONDON quando dice che l'elio liquido II non è che una manifestazione della degenerazione del gas di EINSTEIN.

Per tutte queste ragioni lo studio di tale gas ha acquistato un interesse nuovissimo. Lo stesso LONDON ha tentato nel '38 di dare una teoria del fenomeno, tanto discusso, della condensazione di BOSE-EINSTEIN, teoria la sua che, se non altro, presenta l'inconveniente di sostituire la trattazione generale semiclassica di carattere meccanico-statistico con considerazioni di meccanica ondulatoria; considerazioni da istituire *ex novo* per ogni particolare problema.

8. — Eppure è evidente la ragione per cui la formula fondamentale di EINSTEIN porta a delle incongruenze. Con EINSTEIN noi ammettiamo che in uno stato quantico vi possa stare un numero anche infinito di particelle, e quindi non c'è da meravigliarsi che poi $N_s = \infty$ per $\alpha + x = 0$. Lasciamo cadere questa ipotesi e diciamo esplicitamente che dovendo essere soddisfatta l'equazione:

$$N = n_1 + n_2 + \dots + n_s + \dots$$

con numeri non negativi, allora dev'essere: $n_s \leq N$. Secondo questo nuovo punto di vista veniamo ad ammettere che formalmente il gas di EINSTEIN obbedisce a una statistica intermedia, in cui il numero

massimo d'occupazione è lo stesso numero N delle particelle. Io ho cercato di svolgere questa idea ed ecco i risultati: adesso α può prendere, come dev'essere, tutti i valori tra $-\infty$ e $+\infty$ e si presentano

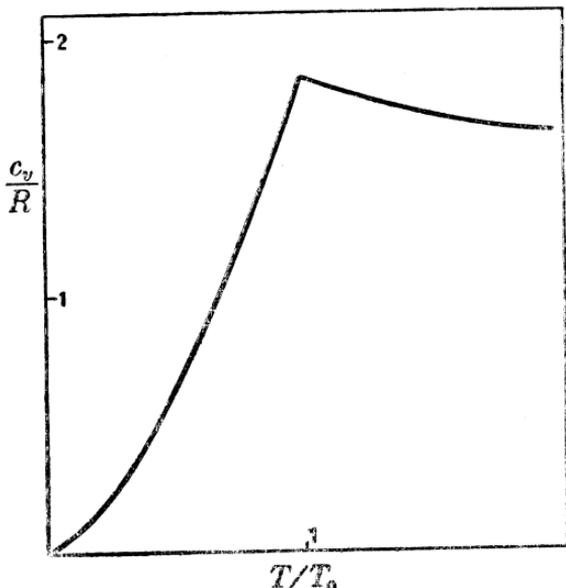


Fig. 3 - c_v/R per un gas di BOSE-EINSTEIN (diagramma-teorico).

perciò i due regimi: $\alpha \gg 0$ e $\alpha \ll 0$ che abbiamo già illustrati. Il primo vale da alte temperature sino al punto λ ; il secondo vale solo per temperature vicinissime allo zero assoluto: per $T < 10^{-16} \text{ }^\circ\text{K}$. Nel campo di temperature intermedio, che è quello caratteristico dell'elio liquido secondo, vale un terzo regime, in cui α ha valori negativi piccolissimi $\propto N^{-2/3}$ e corrispondentemente vale per $F(\alpha)$ l'espressione:

$$(12) \quad F(\alpha) = \frac{4}{3\sqrt{\pi}} N(-\alpha)^{3/2} + 2,612;$$

quindi si ha:

$$(13) \quad \frac{N}{V} = \frac{(2\pi mkT)^{3/2}}{h^3} \left\{ \frac{4}{3} \frac{1}{\sqrt{\pi}} N(-\alpha)^{3/2} + 2,612 \right\}$$

in cui il primo termine corrisponde alla « fase di tutti gli atomi con velocità zero » (fase liquida di EINSTEIN), il secondo termine corrisponde alla fase gassosa.

Poichè dal calcolo risulta una pressione solo funzione della temperatura ($\equiv T^{5/2}$) e indipendentemente dal volume, possiamo concludere che qui si ha a che fare con un gas che si comporta come un vapore saturo.

Inoltre il calore specifico presenta un massimo pronunciato nel punto λ dopo il quale decresce con la legge $T^{3/2}$. (Tutti questi risul-

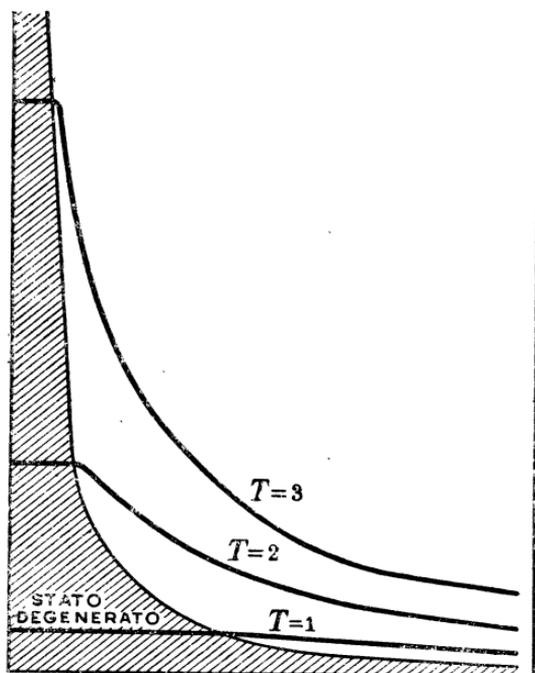


Fig. 4 - Diagramma teorico nel piano (p, V) delle isoterme.

tati erano stati prima trovati da LONDON). C'è da osservare però che qui non possiamo parlare a rigore d'una separazione in una fase gassosa e in una fase liquida come aveva immaginato EINSTEIN.

9. — Tuttavia il calcolo mostra che se si pensano gli atomi sottoposti all'azione del campo di gravità, o all'azione attrattiva d'una parete, allora dall'essere α così prossimo allo zero ne deriva una stratificazione del nostro gas, in cui la fase ora studiata di vapore saturo si riduce a una pellicola sottilissima.

Questo, a mio parere, dà un argomento per l'interpretazione del cosiddetto « fenomeno fontana » che consiste nel fatto seguente: se noi riscaldiamo (per es. illuminandola con una lampadina tascabile) una vaschetta contenente elio liquido II e che pesca per un capillare abbastanza lungo in un bagno dello stesso liquido, il livello nella vaschetta cresce. Possiamo interpretarlo così: gli atomi nella vaschetta tendono ad andare in alto e quelli nel capillare entrano nella vaschetta; naturalmente si potrebbe immaginare che viceversa gli atomi della vaschetta potessero per avventura penetrare nel capillare e

così compensare la pressione verso l'alto dei primi atomi. In altre parole si potrebbe pensare che il trasporto di calore avvenisse sia

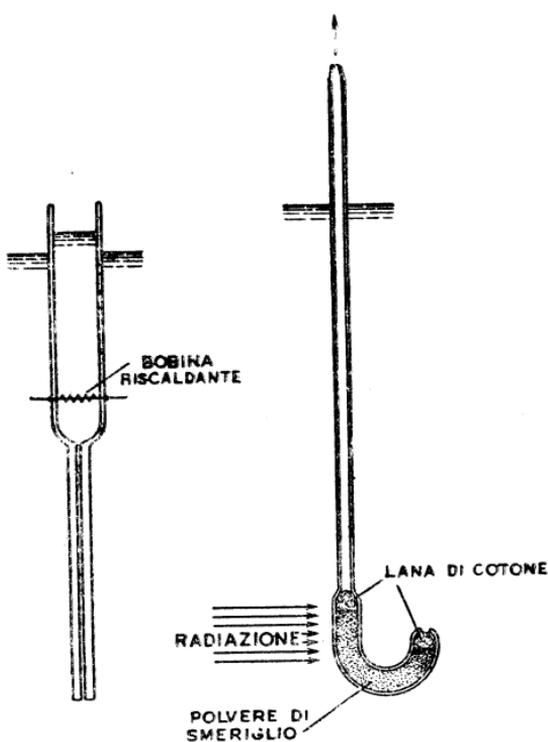


Fig. 5 - Schema per l'esperienza del « fenomeno fontana ».

per mezzo di atomi caldi migranti dall'alto verso il basso, sia per mezzo della migrazione inversa di atomi freddi dal basso verso l'alto. Invece accade come se in qualche modo esistesse uno scompensamento tra il basso e l'alto, qualche cosa che funziona come una parete semi-permeabile posta nel capillare. Ma noi sappiamo che sulle pareti si addensano gli atomi più freddi formando una pellicola di spessore valutabile sperimentalmente a 10^{-5} cm. Questa pellicola è quella in cui la viscosità è praticamente zero. Quando non funziona la sorgente di calore c'è equilibrio tra la vaschetta e il bagno, seppure l'agitazione termica nella massa del liquido tenda a far scorrere in generale gli atomi freddi lungo le pareti. Quando funziona la sorgente di calore, lo strato superficiale sulle pareti interne della vaschetta è disperso dal calore nell'interno del liquido; o si può dire: gli atomi di velocità zero vengono eccitati e sollevati in uno stato di energia cinetica maggiore. È allora evidente che la migrazione degli atomi freddi dal basso verso l'alto non è più compensata da un'identica migrazione dall'alto verso il basso: tanto più che questi

atomi freddi appena arrivano nella vaschetta vengono riscaldati, cioè distrutti per quel che riguarda il loro possibile ritorno verso il basso.

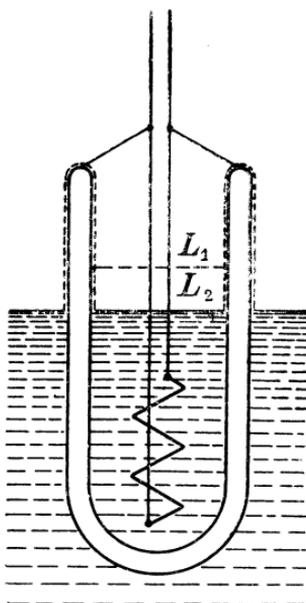


Fig. 6 - Schema dell'esperienza di DAUNT e MENDELSON.

Che torni questa spiegazione, in cui dunque è essenziale il concetto di una fase più fredda aderente alle pareti, si vede anche da quest'altro meraviglioso esperimento di MENDELSON e DAUNT: se noi immergiamo (v. fig. 7) un tubo, chiuso all'estremità inferiore, in un bagno di elio II il tubo subito si riempie, finchè, come abbiamo detto, il livello del tubo raggiunge quello esterno. Se riscaldiamo il liquido nel tubo, si vede subito che il livello cresce in questo. È chiaro: ora cresce perchè nell'interno del tubo è dispersa dal calore la pellicola superfluida aderente alle pareti che tende sempre a formarsi di nuovo a spese degli atomi che partendo dal liquido esterno si arrampicano lungo le pareti del vetro esterno.

Naturalmente rimane da dimostrare la superfluidità di questa fase sotto il punto λ . Ora è importante che la nostra teoria della degenerazione del gas di EINSTEIN permetta (appunto perchè è stato rispettato il suo carattere semiclassico di teoria meccanico-statica) di calcolare, con i soliti metodi della teoria cinetica dei gas, la viscosità e la conducibilità termica dell'elio liquido II. Comunque non c'è dubbio che la fase, per così dire, più fredda sia superfluida.

Intanto, anche così, mi pare si possa concludere che già così siamo arrivati a nuovi sicuri punti di vista teorici, da cui si vedono sotto

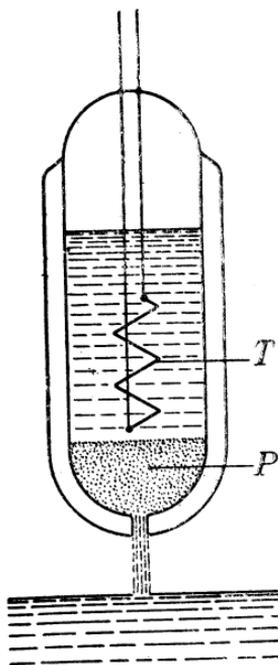


Fig. 7 - Altro esperimento di DAUNT e MENDELSON: l'elio liquido II esce dal tubo passando attraverso gl'interstizi della polvere di smeriglio *P*. Con il termometro *T* si constata un aumento di temperatura.

una luce più chiara questi fenomeni così complicati e ancora da investigare sperimentalmente.

BIBLIOGRAFIA

- G. GENTILE, *Osservazioni sopra le statistiche intermedie*. « Il Nuovo Cimento », dicembre 1940.
- G. GENTILE, *Sopra il fenomeno della condensazione del gas di Bose-Einstein*. « La Ricerca Scientifica », anno XII, 1941, n. 3.
- J. F. ALLEN - H. JONES, *Liquid Helium*. « Nature », n. 143, 1939, pag. 227.
- DAUNT and MENDELSON, *The Transfer effect in liquid He*. « Proceed. of the Roy. Soc. », vol. 170, 1939.
- DAUNT and MENDELSON, *Transfer effect*. « Nature », n. 143, 1939, pag. 719.