Nuova Serie — Anno VII - 1930

IL NUOVO CIMENTO

Periodico fondato in Pisa da C. Matteucci e R. Piria

ORGANO DELLA SOCIETÀ ITALIANA DI FISICA

DIRETTORI:

O. M. CORBINO - Q. MAJORANA - L. PUCCIANTI

LABORAVI FIDENTER

BOLOGNA
NICOLA ZANICHELLI
EDITORE

L'INTERPRETAZIONE DEL PRINCIPIO DI CAUSALITÀ NELLA MECCANICA QUANTISTICA

Nota di E. Fermi

Sunto. - *Lo scopo di questa Nota è di precisare fino a che punto si può, secondo la meccanica quantistica, parlare di causalità, e in che senso deve intendersi la affermazione che la meccanica quantistica non conduce a una determinazione degli avvenimenti futuri.*

Dal programma sovra esposto risulta che in questo lavoro non saranno contenuti che in minima misura risultati nuovi, ma verranno solo espresse, in una forma nuova, relazioni già conosciute. Per maggiore chiarezza di esposizione mi limiterò a considerare il caso della meccanica di un punto mobile lungo una retta; le considerazioni qui svolte potrebbero però facilmente estendersi al caso di sistemi più complicati.

Lo stato del sistema meccanico costituito da un punto mobile lungo una retta si determina, nella meccanica classica, indicando a un certo istante, p. es. $t = 0$, la posizione e la velocità o, che è lo stesso, la quantità di moto. Basta cioè, per individuare lo stato, dare, per $t = 0$, l'ascissa x del punto e la quantità di moto $p = m\dot{x}$. Se, come vogliamo supporre, è conosciuta l'energia potenziale $U(x)$ della forza che agisce sopra il punto, la conoscenza di x e p all'istante $t = 0$ determina univocamente i valori di queste due grandezze per tutti gli istanti passati e futuri; in questo senso si intende la affermazione che nella meccanica classica vale il principio di causalità; vale cioè la proprietà che la determinazione dello stato del sistema a un certo istante è sufficiente per determinare lo stato del sistema stesso in qualsiasi istante del passato o dell'avvenire; ben inteso, supponendo che il sistema considerato non venga perturbato dall'azione di altri sistemi non completamente conosciuti. In tutto quello che segue parleremo sempre di principio di causalità classico in questo senso preciso.

Naturalmente, sempre restando nel caso classico, non è necessario, per la determinazione dello stato del sistema, misurare proprio i valori di x e di p all'istante zero; si può anche p. es. misurare i valori di due funzioni indipendenti $f(x, p)$ e $g(x, p)$ della x e della p; dal valore di queste si possono poi, volendo, ricavare i valori di x e di p.

Dobbiamo ora vedere come queste considerazioni vanno modificate, quando le si trasportano nella meccanica quantistica. Dobbiamo perciò esaminare che cosa occorre conoscere di un sistema, secondo la meccanica quantistica, per poter dire di averne determinato lo stato. HEISENBERG ha fatto vedere che non è possibile una misura contemporanea esatta di x e di p; che anzi, se si effettua una misura esatta della x, la quantità di moto p resta necessariamente del tutto indeterminata, e che viceversa resta completamente indeterminata la x, se si misura con esattezza completa la p. In altre parole per un sistema avente, come il nostro, un solo grado di libertà, si può pensare di effettuare con precisione assoluta la misura di una sola grandezza fisica, p. es. x, oppure p, oppure una qualsiasi funzione $g(x, p)$. Dobbiamo dunque intendere che effettuare una simile misura determini lo stato del sistema a un certo istante, poichè ci rappresenta il massimo che noi possiamo sapere sopra la situazione del sistema a quell'istante. Ciò porta però con sè la conseguenza che la determinazione dello stato di un sistema può venir fatta in modi *essenzialmente differenti*, dipendentemente dalla particolare scelta della funzione $g(x, p)$ che viene misurata; mentre nel caso classico, in cui si ammette possibile la misura di due funzioni indipendenti f e g di x e p, vengono sempre ad essere determinate, in ultima analisi, queste due variabili.

Tornando al caso della meccanica quantistica, se, misurando una grandezza fisica $g(x, p)$ troviamo che essa ha il valore di g', possiamo facilmente dedurre quale è lo scalare di campo corrispondente. Esso si ottiene infatti, come è noto [1], come soluzione dell'equazione

$$g(x, p)\psi(x) = g'\psi(x) \tag{1}$$

dove nel primo membro $g(x, p)$ deve intendersi come l'operatore che si ottiene sostituendo in $g(x, p)$ alla variabile p l'operazione $\frac{h}{2\pi i}\frac{d}{dx}$. Questa equazione p. es., nel caso che la grandezza $g(x, p)$

[1] P. A. M. DIRAC, « Proc. Roy. Soc. », 113, 621, 1927.

sia l'energia del sistema, si riduce alla ordinaria equazione di SCHROEDINGER.

Se invece di $g(x, p)$ si fosse misurata un'altra grandezza $G(x, p)$ si sarebbe trovato uno scalare di campo differente; in modo che lo scalare di campo, che rappresenta lo stato del sistema viene a dipendere, oltre che dal sistema, anche dal modo particolare che noi seguiamo per determinarlo. Secondo la meccanica quantistica lo stato del sistema a un dato istante può dunque venire definito in due modi differenti; e cioè: *a*) misurando il valore di una grandezza fisica $g(x, p)$; *b*) dando, per l'istante considerato una funzione (generalmente complessa) della x,

$$\psi(x) = \rho(x)e^{i\theta(x)}$$

che rappresenta lo scalare di campo a quell'istante.

È facile convincersi che questi due metodi sono completamente equivalenti tra di loro. Abbiamo già visto infatti (1) che, conoscendo il valore g' che assume la grandezza $g(x, p)$ si può, a meno di una costante moltiplicativa inessenziale, determinare a quell'istante lo scalare di campo $\psi(x)$. Ci proponiamo ora di mostrare inversamente che, data una qualsiasi funzione complessa $\psi(x) = \rho e^{i\theta}$ che rappresenti a un certo istante lo scalare di campo, esiste sempre un operatore reale $g(x, p)$ tale che

$$g(x, p)\psi(x) = 0 \tag{2}$$

per modo che si può dire che, se lo scalare di campo è $\psi(x)$ la grandezza $g(x, p)$ ha il valore 0. Così che lo stato del sistema che corrisponde allo scalare di campo $\psi(x)$ può anche definirsi come quello per cui $g(x, p) = 0$. Naturalmente, perchè questa considerazione abbia un significato fisico, è necessario che la grandezza $g(x, p)$ sia reale. Per dimostrare l'esistenza della grandezza $g(x, p)$ facciamo vedere che si può porre

$$g(x, p) = \left(p - \frac{h}{2\pi}\frac{d\theta}{dx}\right)^2 + \frac{h^2}{4\pi^2}\frac{1}{\rho}\frac{d^2\rho}{dx^2}. \tag{3}$$

Questa grandezza è infatti evidentemente reale, poichè ρ e θ sono due funzioni reali della x. Si verifica poi immediatamente che

$$g\left(x, \frac{h}{2\pi i}\frac{d}{dx}\right)\rho e^{i\theta} = 0 \tag{4}$$

cioè che la grandezza g soddisfa alla (2). Naturalmente la grandezza (3) non è l'unica che soddisfa alla (2). P. es. soddisfano alla (2) anche le grandezze reali g^2, g^3, ... Per noi basta però aver dimostrato che esiste almeno una grandezza $g(x, p)$ soddisfacente alla (2).

Dobbiamo ora passare alla trattazione del problema specifico al quale è dedicata questa Nota; e cioè al problema di stabilire quali elementi dello stato del sistema ad un istante futuro è possibile determinare per mezzo di esperienze fatte all'istante attuale.

Ci proponiamo di far vedere che, data una qualsiasi grandezza fisica $G(x, p)$, è sempre possibile conoscere il valore che essa avrà al tempo qualsiasi t_0 per mezzo di una esperienza, opportunamente scelta, da eseguirsi al tempo $t = 0$.

Per vedere questo supponiamo che, se si misura la grandezza G all'istante t_0, si trovi per essa il valore G'. Da questo fatto si può dedurre, per mezzo della (1), quale è lo scalare di campo del sistema al tempo t_0. Esso viene infatti determinato dall'equazione

$$G\left(x, \frac{h}{2\pi i}\frac{d}{dx}\right)\psi(x, t_0) = G'\psi(x, t_0). \tag{5}$$

Determinata così la ψ al tempo t_0 possiamo conoscerne il valore per un istante qualsiasi. Se infatti con $H(x,p)$ si indica l'energia del sistema, la funzione $\psi(x,t)$ soddisfa all'equazione di SCHROEDINGER

$$H\left(x, \frac{h}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial x}\right)\psi(x, t) = -\frac{h}{2\pi i}\frac{\partial\psi}{\partial t}. \tag{6}$$

E siccome questa è di primo ordine rispetto al tempo, essa permette di determinare completamente la funzione ψ, conoscendo i valori che essa assume all'istante $t = t_0$. Si può dunque per mezzo della (6) conoscere quale deve essere lo scalare di campo $\psi(x, 0)$ all'istante $t = 0$. Nella funzione $\psi(x,0)$ così determinata, figurerà naturalmente come parametro il valore G' che la grandezza $G(x, p)$ ha per ipotesi al tempo t_0; metteremo ciò in evidenza scrivendo $\psi(x,0,G')$ in luogo di ψ $(x,0)$.

Abbiamo già fatto vedere (3) che è sempre possibile determinare una grandezza fisica reale $g(x,p)$ tale che

$$g\left(x, \frac{h}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial x}\right)\psi(x, 0, G') = 0. \tag{7}$$

Ciò significa che se, misurando la grandezza $g(x,p)$ si trova che essa ha il valore zero, l'autofunzione è $\psi(x,0,G')$. Se dunque, mediante una costante misura effettuata all'istante $t = 0$ si trova $g(x,p) = 0$, possiamo concludere che, misurando al tempo t_0 la grandezza $G(x,p)$ si troverà per essa il valore G'.

Siccome nella $\psi(x,0,G')$ interviene il parametro G', lo stesso parametro sarà contenuto anche in $g(x,p)$, ciò che possiamo esprimere scrivendo $g(x,p,G')$. La condizione necessaria e sufficiente perchè al tempo t_0 si trovi $G(x,p) = G'$ è dunque che al tempo $t = 0$ si trovi

$$g(x,\ p,\ G') = 0.$$

Risolvendo questa equazione rispetto a G', troviamo

$$A(x,\ p) = G'.$$

Possiamo dunque concludere che il valore G' che avrà la grandezza $G(x,p)$ al tempo t_0 si ottiene misurando all'istante $t = 0$ la grandezza $A(x,p)$. Resta con questo risolto il problema che ci eravamo proposti.

Possiamo illustrare l'applicazione di questo metodo, sopra un esempio concreto estremamente semplice. Consideriamo un punto mobile sopra una retta, sul quale non agisca alcuna forza, e cerchiamo quale è la grandezza che si deve misurare al tempo $t = 0$ per determinare che valore avrà l'ascissa del punto al tempo t_0. Supponiamo per questo che al tempo t_0 il punto abbia ascissa x_0. La funzione di SCHROEDINGER al tempo t_0 sarà allora evidentemente

$$\psi(x,\ t_0) = \delta(x - x_0) \tag{8}$$

essendo δ il simbolo della funzione impropria di DIRAC. Nel caso che sul nostro punto non agiscano forze, la sua Hamiltoniana si riduce a $H = p^2/2m$; l'equazione di SCHROEDINGER (6) diventa dunque

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} = - \frac{4\pi mi}{h} \frac{\partial\psi}{\partial t}. \tag{9}$$

Dobbiamo cercarne una soluzione che, per $t = t_0$ si riduca alla (8). È facile verificare che tale soluzione può porsi, a meno di una costante moltiplicativa, nella forma [1]

$$\psi(x,\ t) = \lim_{\alpha=0} \frac{1}{\sqrt{t_0 - t}}\, e^{-\frac{(x-x_0)^2}{t_0-t}\left[\alpha + \frac{\pi im}{h}\right]}$$

e si ha quindi, a meno di una costante moltiplicativa,

$$\psi(x,\ 0) = e^{-\frac{\pi im}{ht_0}(x-x_0)^2}.$$

Per determinare $g(x,p,x_0)$ dobbiamo dunque porre nella (3)

$$\theta = \frac{\pi m}{ht_0}(x - x_0)^2; \quad \rho = 1.$$

[1] E. H. KENNARD, « Zs. f. Phys. », 44, 326, 1927.

Si ha dunque

$$g(x, p, x_0) = \left\{ p + \frac{h}{2\pi} \frac{2\pi m}{h t_0} (x - x_0) \right\}^2 = \left\{ p + \frac{m}{t_0} (x - x_0) \right\}^2.$$

Se, misurando g al tempo zero, si trova che esso ha il valore zero, se cioè, per $t = 0$, si trova

$$\left\{ p + \frac{m}{t_0} (x - x_0) \right\}^2 = 0 \tag{10}$$

il valore della ascissa al tempo t_0 sarà certamente x_0. Risolvendo la (10) rispetto ad x_0 si trova

$$x_0 = x + \frac{t_0}{m} p \tag{11}$$

e cioè si arriva al risultato che, per conoscere l'ascissa al tempo t_0, basta misurare al tempo 0 la grandezza $x + \frac{t_0}{m} p$. Questo risultato era classicamente evidente, poichè p/m non è altro che la velocità del punto e questa è costante durante il tempo t_0 poichè, in assenza di forze, il moto è uniforme. In questo caso dunque siamo arrivati a un risultato banale. In casi più complessi invece il risultato della meccanica quantistica sarebbe essenzialmente diverso da quello della meccanica classica.

Da quanto precede possiamo dedurre le conclusioni seguenti: Tutto quello che è possibile conoscere dello stato di un sistema a un dato istante, è possibile conoscerlo anche mediante opportune esperienze fatte ad un qualsiasi istante antecedente o seguente a quello che si considera. In questo senso dunque l'indeterminazione del sistema non viene per così dire a crescere col passare del tempo. Sarebbe però errato concludere da questo che i rapporti di causalità validi secondo la meccanica quantistica siano identici a quelli che valgono nelle teorie classiche. In queste ultime si può infatti, con opportune misure fatte sul sistema al tempo zero, prevedere il valore di qualsiasi grandezza fisica (funzione di x e p) a qualsiasi tempo. Invece, secondo la meccanica quantistica si può, al tempo zero fare una misura che permetta di conoscere il valore che avrà una determinata grandezza a un determinato tempo. Però se si volesse conoscere il valore di un'altra grandezza fisica o eventualmente anche della stessa grandezza a un istante diverso, occorrerebbe effettuare all'istante zero una misura differente, incompatibile, almeno in generale, con la precedente.