

Nel segno di h : cento anni della costante di Planck

Giuseppe Giuliani

Dipartimento di Fisica “Volta”
Via Bassi 6, 27100 Pavia

giuliani@fisicavolta.unipv.it
<http://matsci.unipv.it/percorsi/>

In fisica dobbiamo ritenere a buon diritto che il quadro attuale, benché ancora variamente colorato, a seconda dell'individualità del ricercatore, contenga già alcuni tratti che non potranno essere cancellati, qualsiasi rivoluzione avvenga in natura o nello spirito umano. Questa entità costante, indipendente da ogni individualità umana e da ogni intelletto, è appunto ciò che noi chiamiamo realtà. [...]

Certamente non c'è nessuna regola generale che ci permetta di stabilire fino a che punto ci sia lecito spingere la nostra fiducia di avere fin d'ora fissato i tratti della futura immagine fisica del mondo.¹

1. Prodromi: soffiatori di vetro, meccanici e fisici.

Verso la metà del XIX secolo, la Fisica era suddivisa in quattro branche indipendenti: meccanica, termodinamica, ottica ed elettromagnetismo. La meccanica era una teoria consolidata, basata su oltre due secoli di studi teorici e di esperimenti; essa poteva anche essere presentata in forma ipotetico-deduttiva molto astratta, basata sul formalismo lagrangiano e hamiltoniano. La termodinamica aveva appena conosciuto una formulazione fenomenologica, basata sui due principi; l'ottica fisica si fondava sulla teoria ondulatoria della luce, concepita come una vibrazione dell'etere; infine, i complessi fenomeni elettromagnetici attendevano ancora una teoria unificante.

Intorno al 1855, in due città europee separate da qualche centinaio di chilometri, un soffiatore di vetro e un “meccanico”, stavano mettendo a punto dei manufatti che avrebbero svolto un ruolo fondamentale nello sviluppo della fisica dei decenni successivi.

Heinrich Geissler a Bonn, era riuscito a costruire delle ampole di vetro in cui si potevano saldare elettrodi metallici; le ampole potevano poi essere parzialmente evacuate utilizzando una “pompa a mercurio” basata sullo sfruttamento del “vuoto torricelliano”.

Heinrich Rühmkorff, a Parigi, aveva costruito un apparecchio basato sul principio dell'induzione elettromagnetica - il “rocchetto di Rühmkorff” - che era in grado di produrre ai capi della bobina secondaria alcune migliaia di volt. L'uso congiunto di questi due manufatti è stato essenziale per lo sviluppo dello studio sperimentale della scarica nei gas rarefatti che ha condotto, nell'arco di un trentennio, alla scoperta dei raggi catodici (Julius Plücker, 1858), dei raggi canale (Eugen Goldstein, 1886) e, infine, dell'elettrone (Joseph John Thomson, 1897).

A partire dal 1860, Clerk Maxwell e, successivamente, Rudolf Clausius e Ludwig Boltzmann pongono le basi della meccanica statistica e Boltzmann propone una versione statistica della termodinamica basata sulla formula:

$$S = A \ln W \quad (1)$$

¹ M. Planck, *La conoscenza del mondo fisico*, Einaudi, 1942, p. 43.

che lega, attraverso la costante A , l'entropia S dello stato di un gas monoatomico perfetto alla probabilità W dello stato.

Nel 1873 compare il Trattato di Maxwell. La sua teoria costituisce, probabilmente, un caso unico nella storia della Fisica. Essa fu concepita e formulata in un contesto in cui l'immagine fisica del mondo era basata sull'idea che l'etere permeasse tutte le sostanze e riempisse tutto lo spazio; inoltre, come evidenziato da Hertz,² il concetto di elettricità usato da Maxwell era ambiguo. Ciononostante, la teoria maxwelliana, integrata dall'espressione della forza di Lorentz e *reinterpretata*, costituisce ancora la base della descrizione dei fenomeni elettromagnetici a livello macroscopico; essa, inoltre, risulta essere una teoria relativistica, perché le sue equazioni sono invarianti per trasformazioni di Lorentz; infine, essa descrive il comportamento statistico dei fotoni.

Verso la fine degli anni cinquanta, Robert Bunsen e Gustav Kirchhoff incominciarono a studiare le radiazioni emesse dalle sostanze portate ad alta temperatura, dando avvio agli studi spettroscopici e all'analisi chimica basata sulla spettroscopia. Nel corso dell'indagine sulle righe nere osservate da John von Fraunhofer nello spettro solare, Kirchhoff avanzò l'ipotesi secondo cui un corpo è in grado di assorbire le radiazioni che emette dando così una spiegazione delle righe nere osservate da Fraunhofer e permettendo di trarre delle conclusioni sulla composizione dell'atmosfera solare. Kirchhoff dimostrò poi che:

Ad una determinata temperatura e per una determinata lunghezza d'onda, il rapporto tra il potere emissivo e quello d'assorbimento è lo stesso per tutti i corpi.

Indicato con e il potere emissivo e con a quello d'assorbimento, possiamo esprimere la legge di Kirchhoff scrivendo che:

$$\frac{e(\lambda, T)}{a(\lambda, T)} = f(\lambda, T) \quad (2)$$

$f(\lambda, T)$ è quindi una *funzione universale*, perché non dipende dalla natura del corpo preso in considerazione. Kirchhoff espresse l'augurio che la formulazione di questa legge non avrebbe incontrato grosse difficoltà perché "...tutte le funzioni indipendenti dalla natura dei corpi sinora incontrate hanno una forma semplice". Come sappiamo, questo auspicio fu eluso dagli sviluppi successivi: la forma della funzione universale non risultò semplice, ci vollero quarant'anni circa per ottenerne l'espressione e più di sessanta per delinearne una deduzione rigorosa.

Kirchhoff definì "corpo nero perfetto", o più brevemente, "corpo nero" quello che assorbe tutta la radiazione incidente, qualunque sia la sua lunghezza d'onda. Essendo quindi uguale ad uno il potere d'assorbimento del corpo nero, il suo potere emissivo coincide con la funzione universale definita dall'equazione (2).

Kirchhoff mostrò poi, con considerazioni termodinamiche, che, all'equilibrio termico, la radiazione contenuta in una cavità le cui pareti siano impermeabili alla radiazione è della stessa "qualità ed intensità" di quella di un corpo nero alla stessa temperatura. Questa conclusione contiene *implicitamente* l'idea che per realizzare in laboratorio un corpo nero si debba usare una cavità isoterma con un piccolo foro. Infatti, la radiazione entrante viene, con buona approssimazione, tutta assorbita rendendo quindi molto prossimo ad uno il potere di assorbimento della cavità; d'altra parte, la radiazione uscente dal

² "Pertanto, sfortunatamente, la parola "elettricità", nel lavoro di Maxwell, ha ovviamente un doppio significato. In primo luogo, egli lo usa (come facciamo anche noi) per denotare una grandezza che può essere sia positiva che negativa e che costituisce il punto di partenza delle forze a distanza (o di ciò che sembrano tali). In secondo luogo, quel termine denota il fluido ipotetico da cui non possono trarre origine forze a distanza (neppure quelle apparenti), e la cui quantità deve essere sempre positiva in ogni punto dello spazio. Se leggiamo le spiegazioni di Maxwell ed interpretiamo sempre il significato della parola "elettricità" in modo opportuno, quasi tutte le contraddizioni che all'inizio sono così sorprendenti, scompaiono. Tuttavia, debbo ammettere che non sono riuscito a far ciò sistematicamente o in modo per me soddisfacente; altrimenti, invece di esitare, mi sarei espresso in modo più definito". H. Hertz, *Electric Waves*, (Dover) 1962, p. 27. Ristampa della prima versione inglese del 1893.

foro, se sufficientemente piccolo, non altera le condizioni di equilibrio della cavità. Il fascio di radiazione uscente è quindi un campione della radiazione di corpo nero.

Gli sviluppi successivi - sin verso il 1895 - furono caratterizzati da una sostanziale separazione tra teoria ed esperimento. Il versante teorico si arricchiva di acquisizioni fondamentali mediante l'uso congiunto della termodinamica e dell'elettromagnetismo, culminando nella formulazione della "legge di Wien" (1893) secondo cui l'intensità I della radiazione emessa da un corpo nero è data da una funzione del tipo:

$$I = \nu^3 f\left(\frac{\nu}{T}\right) \quad (3)$$

dove ν è la frequenza della radiazione emessa e T la temperatura assoluta del corpo nero. Questa legge appariva (correttamente) come un punto fermo perché era considerata come una diretta conseguenza delle leggi della termodinamica e dell'elettromagnetismo, considerate come acquisite. Il versante sperimentale era invece in gravi difficoltà, soprattutto per la mancata individuazione di una sorgente di radiazione che avesse le caratteristiche del corpo nero. Non è quindi casuale il fatto che le ricerche sulla radiazione di corpo nero ricevettero nuovo impulso solo verso la fine del secolo, grazie all'uso di un corpo cavo isoterma quale sorgente di radiazione di corpo nero (Otto Lummer e Wilhelm Wien 1895) e di un nuovo tipo di rivelatore (bolometro, Samuel Langley, 1880).

Anche gli aspetti istituzionali non vanno trascurati: presso l'Istituto Imperiale di Fisica e Tecnica, fondato a Berlino nel 1887, si sviluppò una serie di ricerche sulle proprietà della radiazione di corpo nero che diede un contributo decisivo sul versante sperimentale. Infatti, fu in questo Istituto che Lummer e Wien misero a punto la prima sorgente di radiazione di corpo nero basata sull'idea della cavità isoterma; e da questo Istituto uscirono, a cavallo tra i due secoli, i dati sperimentali più significativi, resi ancora più importanti dalla vicinanza fisica di Planck, professore a Berlino a partire dal 1889.

Nel 1896, Wien propose, basandosi su ipotesi teoriche assai discutibili, la seguente legge per la radiazione contenuta in una cavità isoterma:

$$U(\nu, T) = b \nu^3 e^{-a\nu/T} \quad (4)$$

La (4) apparve in buon accordo con i dati ottenuti da Friedrich Paschen (1897) e da Paschen e Wanner (1899). L'accordo era ritenuto talmente soddisfacente da invogliare Planck a ricercare una deduzione rigorosa della "legge di Wien" data dalla (4).

2. Il percorso di Planck.

2.1 Alla ricerca dell'irreversibilità.

.....il mio suggerimento che l'oscillatore fosse capace di esercitare un effetto unilaterale, cioè irreversibile, sull'energia del campo circostante, scatenò una vigorosa protesta da parte di Boltzmann.....³

Siccome la radiazione di corpo nero non dipende dalla natura dei materiali di cui esso è costituito, Planck iniziò a lavorare su di un modello di cavità con pareti perfettamente riflettenti e contenente "risonatori", cioè oscillatori armonici elettricamente carichi in grado di scambiare energia con la radiazione elettromagnetica alla loro frequenza di oscillazione.

Planck riteneva che, considerando un insieme di risonatori interagenti con la radiazione e supponendo arbitrarie le condizioni iniziali, si potesse pervenire, attraverso un processo *irreversibile* descritto dalla teoria di Maxwell-Hertz, ad una situazione di equilibrio: la radiazione in equilibrio con i risonatori sarebbe stata allora la radiazione di corpo nero. Secondo Planck l'irreversibilità del processo di

³ M. Planck, Autobiografia scientifica, Torino, 1956, p. 24.

raggiungimento dell'equilibrio termico del sistema (*radiazione+risonatori*) era assicurato da alcune caratteristiche direzionali nel tempo del processo di emissione di radiazione da parte dei risonatori.

Boltzmann osservò che le leggi dell'elettromagnetismo non possono descrivere, in assenza di ulteriori condizioni, processi irreversibili; sottolineò anche che, per quanto concerne la teoria cinetica dei gas, le leggi della meccanica non possono condurre ad alcun processo irreversibile, a meno che non si introduca qualche ipotesi aggiuntiva come quella del *disordine molecolare* iniziale.

Planck tenne conto delle osservazioni di Boltzmann introducendo l'ipotesi della *radiazione naturale* che, nelle sue intenzioni, avrebbe dovuto svolgere lo stesso ruolo svolto dall'ipotesi del *disordine molecolare* nella teoria cinetica dei gas.⁴

Questo approccio di Planck alla teoria della radiazione del corpo nero è interessante non tanto per i risultati acquisiti, quanto per l'impianto concettuale. Infatti, lo scopo di individuare un sistema fisico retto dalle leggi dell'elettromagnetismo e per il quale valesse, senza ipotesi ulteriori, il secondo principio della termodinamica, non fu raggiunto. Tuttavia, l'ipotesi della radiazione naturale permise a Planck di definire l'entropia della radiazione e di ricercare la funzione di distribuzione della radiazione di corpo nero imponendo che l'entropia del sistema (*radiazione+risonatori*) fosse massima.

Non solo: nel contesto di questo programma di ricerca, Planck ricavò, *basandosi solo sulle leggi dell'elettromagnetismo*, la formula:

$$u(\nu, T) = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} \bar{U}(\nu, T) \quad (5)$$

che esprime la densità di energia della radiazione nella cavità $u(\nu, T)$ in funzione dell'energia vibrazionale media del risonatore $\bar{U}(\nu, T)$.

Le linee essenziali del percorso di Planck erano ormai tracciate ed egli le seguì per una deduzione “*rigorosa*” della legge di distribuzione di Wien.

2.2 La deduzione “*rigorosa*” della legge di Wien.

Al contrario, io sospettai che la connessione fondamentale fosse la dipendenza dell'entropia dall'energia. Poiché il significato profondo del concetto di entropia non era ancora completamente compreso, nessuno fece molta attenzione al metodo da me adottato, e io potei sviluppare i miei calcoli con comodo, fino in fondo, senza timore di interferenze o competizioni.⁵

Il procedimento seguito da Planck nella deduzione della legge di distribuzione di Wien e, successivamente, della “*legge di Planck*”, è costituito dall'uso congiunto di quattro relazioni:

- 1) la prima è la relazione (5) tra densità di energia della radiazione nella cavità isoterma ed energia vibrazionale media del risonatore
- 2) la seconda è una relazione, da determinarsi, tra l'entropia e l'energia vibrazionale media del risonatore. Nel caso specifico, Planck *assunse* che detta relazione fosse data da:

$$S(\nu, T) = -\frac{\bar{U}}{a\nu} \log \frac{\bar{U}}{eb\nu} \quad (6)$$

dove e è la base dei logaritmi naturali e a e b due costanti da determinarsi

- 3) la terza è:

⁴ “Quando si dice che un raggio elettromagnetico possiede le proprietà della radiazione naturale, si dovrebbe intendere che l'energia della radiazione è distribuita in modo completamente *irregolare* tra le vibrazioni parziali di cui si può pensare composto il raggio”. M. Planck, *Annalen der Physik*, **1**, (1900), 69-122, p. 73.

⁵ M. Planck, *Autobiografia scientifica*, Torino, 1956, p. 25.

$$\frac{\partial S}{\partial U} = \frac{1}{T} \quad (7)$$

cioè il primo principio della termodinamica scritto per una trasformazione a volume costante.

4) la formula per la distribuzione in energia della radiazione di corpo nero ottenuta attraverso i passi 1-3, deve infine obbedire alla legge dello spostamento di Wien (3).

Ricavando \bar{U} dalla (6) e dalla (7) e sostituendo il valore così ottenuto nella (5), si ottiene la legge di distribuzione di Wien (4).

Planck riteneva che l'espressione dell'entropia del risonatore data dalla (6) fosse l'unica consistente con il secondo principio della termodinamica e con la legge dello spostamento di Wien: si convinse quindi di avere ricavato in modo rigoroso la formula proposta da Wien per la radiazione di corpo nero. Scrisse infatti:

[la definizione dell'entropia di un risonatore e la formula di Wien che ne consegue]sono una necessaria conseguenza dell'applicazione del principio della crescita dell'entropia alla teoria elettromagnetica della radiazione e, [perciò] i limiti di validità della legge [di Wien], se ce ne sono, coincidono con quelli della seconda legge della termodinamica.⁶

Prima di procedere oltre, è opportuno qualche commento sul procedimento usato da Planck e schematizzato nei tre passi 1- 3.

Va innanzi tutto osservato che, di fronte alla (5), la scelta più naturale avrebbe dovuto essere quella di cercare direttamente una espressione per \bar{U} , cioè, per l'energia media del risonatore. Gli storici della fisica hanno dato spiegazioni diverse del comportamento “anomalo” di Planck. Un elemento tuttavia, appare indiscutibile: la continuità concettuale dell'approccio di Planck rappresentata dal ruolo assegnato al concetto di entropia. Il tentativo iniziale tendente a descrivere un sistema fisico retto dalle equazioni di Maxwell e “spontaneamente” subordinato al secondo principio della termodinamica era, come abbiamo visto, fallito; tuttavia, proprio da questo programma di ricerca emerse il ruolo guida dell'entropia nella descrizione delle proprietà della radiazione di corpo nero. Non è quindi sorprendente che Planck continuasse a privilegiare, pur nelle mutate condizioni, una descrizione centrata sul concetto di entropia. Fu proprio questo comportamento “anomalo” a condurre Planck alla stretta decisiva da cui emerse la costante h . La seconda osservazione riguarda l'espressione dell'entropia del risonatore data dalla (6). Planck non spiegò l'origine di questa espressione. Quello che Planck fece, fu di ricavare l'espressione (6) dalla legge di distribuzione di Wien con l'ausilio della (7) e ripercorrere poi, assumendo la (6), il cammino inverso.

2.3 L'interpolazione.

Finalmente le misure di Heinrich Rubens e Ferdinand Kurlbaum.....rilevarono un comportamento che, sebbene completamente differente, era ancora semplice, in quanto la funzione R [l'inverso della derivata seconda dell'entropia del risonatore rispetto alla sua energia media] era proporzionale non all'energia, ma al suo quadrato, per grandi valori dell'energia e della lunghezza d'onda.⁷

La convinzione di avere finalmente risolto teoricamente il problema del corpo nero, durò poco. Già verso la fine del 1899 (precisamente il 3 novembre) Lummer e Pringsheim in una comunicazione presentata a una riunione della Società Tedesca di Fisica indicavano l'esistenza di “*discrepanze sistematiche tra teoria* [il riferimento è alla formula di Wien] *ed esperimento*”. In una sessione del 2 febbraio 1900,

⁶ M. Planck, *Annalen der Physik*, **1**, (1900), 69-122, p. 69.

⁷ M. Planck, *Autobiografia scientifica*, Torino, 1956, p. 25.

Lummer e Pringsheim sottolineavano che queste discrepanze erano maggiori nella regione dello spettro a grandi lunghezze d'onda (le loro misure si erano nel frattempo estese sino a 18μ). Successivamente, Rubens e Kurlbaum, estendendo le misure sino a 51.2μ , verificarono che, per grandi lunghezze d'onda e temperature elevate la densità della radiazione era proporzionale alla temperatura assoluta T . Planck venne a conoscenza di questi nuovi risultati durante una visita domenicale di Rubens, il 7 ottobre 1900. Il 19 ottobre, di nuovo durante una riunione della Società Tedesca di Fisica, Rubens e Kurlbaum presentarono una comunicazione sulla “*Emissione da parte di un corpo nero [di radiazione] di grandi lunghezze d'onda*” e Planck presentò una comunicazione intitolata “*Un miglioramento delle legge spettrale di Wien*”. Siamo all'inizio della svolta. Planck si era convinto che la legge di Wien costituiva ormai una buona interpolazione dei dati sperimentali solo per grandi valori del rapporto ν/T . D'altra parte non c'era alcuna ragione per abbandonare o modificare il procedimento da lui usato per “dimostrare” la legge di distribuzione di Wien: il punto debole del procedimento era evidentemente rappresentato dall'espressione dell'entropia (6). Sarebbe stato sufficiente sostituire ad essa un'espressione tale da fornire una formula di distribuzione in grado di interpolare tutti i dati sperimentali disponibili. Scrisse Planck:

.....alla fine iniziai a costruire espressioni per l'entropia [del risonatore] completamente arbitrarie che, sebbene siano più complicate di quella di Wien, sembrano ancora soddisfare quasi completamente tutti i requisiti della termodinamica e della teoria elettromagnetica. Sono stato particolarmente attratto da una delle espressioni così costruite che è quasi semplice come l'espressione di Wien e che merita di essere presa in considerazione perché l'espressione di Wien non è sufficiente per interpolare tutte le osservazioni [sperimentali]. Otteniamo questa espressione ponendo

$$\frac{d^2S}{d\bar{U}^2} = \frac{\alpha}{\bar{U}(\beta + \bar{U})} \quad (8)$$

Essa è di gran lunga la più semplice espressione che conduce ad una dipendenza logaritmica di S da \bar{U} - [dipendenza] che è suggerita da considerazioni probabilistiche - e che si riduce inoltre alla espressione di Wien per piccoli valori \bar{U} .⁸

Planck si riferisce al fatto che derivando due volte la (6) rispetto a \bar{U} si ottiene la relazione:

$$\frac{d^2S}{d\bar{U}^2} \propto \frac{1}{\bar{U}} \quad (9)$$

cui la (8) si riduce per piccoli valori di \bar{U} .

Quindi, alla fine di un processo di “prova ed errore” Planck scelse la (8) che appare come il risultato di una piccola modifica della (9), consistente nell'introdurre al denominatore un termine quadratico in \bar{U} . Planck ottenne così la relazione:

$$u_\nu = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} \frac{\beta}{e^{\beta/\alpha T} - 1} \quad (10)$$

.....che, per quanto si può giudicare al momento, interpola i dati sperimentali sinora pubblicati con la stessa precisione delle migliori equazioni proposte per lo spettro [della radiazione], cioè quelle di Thiesen, Lummer - Jahnke e Lummer - Pringsheim. Mi permetto pertanto di attirare la vostra

⁸ Una versione inglese di questa memoria si trova in D. ter Haar, *The old quantum theory*, Oxford, 1967, 79-81. Questa citazione si trova a p. 80.

attenzione su questa nuova formula che io considero la più semplice possibile dal punto di vista della teoria elettromagnetica della radiazione, se si eccettua l'espressione di Wien.⁹

Le conclusioni di Planck erano caute per almeno due ragioni: i dati sperimentali erano ancora incompleti e la “sua” formula, sebbene teoricamente più consistente delle altre formule citate, era comunque il risultato di una interpolazione matematica “arbitraria” e priva di interpretazione fisica. Planck si dedicò quindi alla ricerca di un'interpretazione fisica dell'espressione dell'entropia del risonatore che l'aveva condotto alla (10).

2.4 L'invenzione.

Ma anche ammessa l'assoluta validità della formula per la radiazione, finché rimaneva una legge scoperta per una fortunata intuizione, non ci si poteva aspettare più di un significato formale. Per questo motivo, lo stesso giorno in cui formulai questa legge mi dedicai al compito di conferirle un vero significato fisico.¹⁰

E' questo l'argomento della memoria presentata da Planck alla riunione della Società Tedesca di Fisica del 14 dicembre 1900.¹¹ La memoria è di difficile lettura perché il procedimento seguito da Planck è tortuoso. Esso si basa sul seguente schema:

1. L'energia totale del sistema *radiazione + risonatori* è data da: $E_t = E_0 + E_r$, dove E_0 rappresenta l'energia totale dei risonatori ed E_r quella della radiazione.
2. La condizione di equilibrio corrisponde a quella della massima entropia del sistema *radiazione + risonatori* e, quindi – poiché l'entropia è una grandezza additiva – a quella del massimo valore dell'entropia dei risonatori.
3. Si tratta quindi di ricavare il valore massimo dell'entropia dei risonatori: il procedimento di calcolo dovrebbe automaticamente fornire la frazione di energia E_ν , che, all'equilibrio termico spetta agli N_ν risonatori di frequenza ν . Nota E_ν , si ricava il valore dell'energia media di ogni risonatore di frequenza ν da inserire nella (5) ($E_\nu / N_\nu = \bar{U}$).

Questo schema è una ricostruzione di ciò che Planck indica che bisognerebbe fare: tuttavia, come vedremo fra poco, Planck non segue sino in fondo lo schema proposto.

Due sono i punti cruciali della memoria: l'uso della formula di Boltzmann che esprime l'entropia del gas perfetto in funzione della probabilità dei suoi possibili stati, ed il calcolo di questa probabilità.

Planck riscrisse la formula (1) di Boltzmann nel modo seguente:

$$S = k \ln R \quad (11)$$

ove R è il numero di “complezioni” corrispondenti allo stato del sistema preso in considerazione. Per “complezioni” Planck intende il numero dei modi in cui lo stato considerato può essere realizzato. Attraverso questa formula la fisica statistica fa il suo ingresso nella teoria della radiazione di corpo nero e nella fisica dei quanti.

Vediamo come Planck calcola R . Attribuita ai risonatori l'energia totale (arbitraria) E_0 , Planck suddivide i risonatori presenti nella cavità in gruppi in modo tale che i risonatori di ogni gruppo abbiano la stessa frequenza. Considerato uno di questi gruppi - N risonatori di frequenza ν a cui è attribuita l'energia E - il problema è quello di vedere come l'energia E può essere distribuita tra gli N risonatori. Planck osserva che:

⁹ Planck scrive questa formula in funzione della lunghezza d'onda.

¹⁰ M. Planck, *Autobiografia scientifica*, Torino, 1956, p. 26.

¹¹ Una versione inglese di questa memoria si trova in D. ter Haar, *The old quantum theory*, Oxford, 1967, 82-90.

Se E è considerata come una quantità divisibile in modo continuo, questa distribuzione è possibile in un numero infinito di modi. Tuttavia, noi supponiamo - questo è il punto essenziale di tutto il procedimento - che E sia composta di un numero ben definito di parti uguali ed useremo d'ora innanzi la costante della natura $h = 6.55 \times 10^{-27}$ erg sec. Questa costante, moltiplicata per la frequenza ν dei risonatori ci dà l'elemento di energia ε e, dividendo E per ε otteniamo il numero P degli elementi di energia che debbono essere suddivisi tra gli N risonatori. Se il rapporto non è un intero, prendiamo per P un intero vicino.¹²

E' questo il passo della memoria sulla cui base si attribuisce a Planck la quantizzazione dei livelli di energia del risonatore.

Tuttavia:

a) Planck non scrive da alcuna parte che l'energia di un risonatore può assumere solo valori discreti. Considerare E come composta da "un numero ben definito di parti uguali" costituisce innanzitutto un'affermazione intorno all'energia E complessivamente attribuita agli N risonatori. In secondo luogo, se Planck avesse concepito l'energia del singolo risonatore come quantizzata, non sarebbe stata necessaria la precisazione intorno ai valori di P non interi: in questo caso infatti, E avrebbe dovuto necessariamente essere un multiplo intero di ε . La suddivisione di E in "un numero ben definito di parti uguali" appare pertanto come un necessario procedimento di calcolo al fine di ottenere per il numero R delle "complezioni" un valore finito.

Questo procedimento non è tuttavia privo, per Planck, di significato fisico. Esso infatti porta alla luce la "costante della natura" h il cui significato, tuttavia, non appare chiaro nel contesto della memoria che stiamo discutendo.

b) come osserverà Einstein nel 1906,¹³ l'ipotesi della quantizzazione dei livelli energetici del risonatore è in contraddizione con la (5) che si ricava supponendo che lo scambio di energia tra risonatore e radiazione avvenga in modo continuo.

Ma torniamo alla memoria e vediamo come Planck effettua il calcolo del numero dei modi in cui P elementi di energia possono essere distribuiti tra N risonatori.

Planck (senza alcun commento) effettua il conteggio considerando *indistinguibili* gli elementi di energia e *distinguibili* i risonatori.

Ottiene così la formula:

$$R = \frac{(N + P - 1)!}{(N - 1)! P!} \quad (12)$$

A questo punto, Planck avrebbe dovuto seguire i passi 2. e 3. sopra indicati. Planck percorre invece una scorciatoia, peraltro non illustrata, che lo porta rapidamente alla formula cercata: dall'espressione di R si ottiene, supponendo che tutte le complezioni siano equiprobabili, quella dell'entropia degli N risonatori e, dividendo per N , quella dell'entropia di un singolo risonatore che risulta data da:

$$S = k \left[\left(1 + \frac{\bar{U}}{\varepsilon} \right) \log \left(1 + \frac{\bar{U}}{\varepsilon} \right) - \frac{\bar{U}}{\varepsilon} \log \frac{\bar{U}}{\varepsilon} \right] \quad (13)$$

Questa formula è identica - purché si ponga in essa $k = \alpha$ e $\varepsilon = \beta$ - a quella che Planck aveva già ricavato per ottenere, nella memoria del 19 ottobre, la formula della radiazione di corpo nero. Quindi Planck "sa" che la forma della (13) corrisponde a quella dell'equilibrio termico. Basta quindi applicare la solita procedura (si vedano i punti 1 - 4) per ricavare la formula:

¹² Ibidem, p. 84.

¹³ A. Einstein, *Annalen der Physik*, 20, (1906), 199 – 206; trad. it. in: E. Bellone (a cura di), *Albert Einstein: opere scelte*, Torino 1988, pp. 181 – 188.

$$u(\nu, T) = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} \frac{h\nu}{e^{h\nu/kT} - 1} \quad (14)$$

che è la *formula di Planck*.

Il lavoro si conclude con alcune riflessioni sulla deduzione presentata e con il calcolo delle due costanti universali h e k . Secondo la legge di Stefan-Boltzmann, la potenza totale irraggiata da un corpo nero è data da:

$$P = \sigma T^4 \quad (15)$$

La (15) può, ovviamente, essere ricavata partendo dalla legge di Planck (14) integrando sulle frequenze. Si ottiene così che

$$\sigma = \frac{2\pi^5 k^4}{15c^2 h^3} \quad (16)$$

Dall'altro lato, la legge dello spostamento di Wien (3) comporta, come è noto, che il prodotto $\lambda_M T$ della lunghezza d'onda cui corrisponde la massima intensità di emissione e della temperatura assoluta è una costante. Questa costante, espressa in termini della legge di Planck, vale

$$D = 0.2014 \frac{hc}{k} \quad (17)$$

La (16) e la (17) costituiscono dunque un sistema di due equazioni nelle due incognite h e k , se, naturalmente, sono noti sperimentalmente i valori di σ , D e c . Planck, come indicato in una breve nota della sua memoria,¹⁴ utilizza i valori sperimentali ottenuti da Kurlbaum nel 1898 per σ e da Lummer e Pringsheim nel 1900 per D . Ottiene così:

$$h = 6.55 \times 10^{-27} \text{ erg} \times \text{s}$$

$$k = 1.346 \times 10^{-16} \text{ erg /}^\circ \text{K}$$

2.5 Le costanti universali.

Per ragioni di organicità di esposizione, abbiamo sinora completamente ignorato un tema che - come ha mostrato Nadia Robotti - ha fatto da sfondo all'intero percorso di Planck: quello delle costanti universali. Nel seguito di questo paragrafo utilizzeremo ampiamente la ricostruzione di Robotti.¹⁵ Nella sua autobiografia scientifica, Planck scrive:

Cosicché questa distribuzione “normale” dell'energia spettrale rappresenta qualcosa di assoluto; e poiché io avevo sempre considerato la ricerca di qualcosa di assoluto come lo scopo più elevato di tutte le attività scientifiche, mi misi attivamente al lavoro.¹⁶

In effetti, la memoria del 1899 è incardinata sulle due costanti a e b che compaiono nella (4) e che sono *costanti universali* perché la legge dell'energia irraggiata da un corpo nero non dipende dalla sua costituzione. Esprimendo la legge di Stefan - Boltzmann in funzione della “legge di Wien” (4) e

¹⁴ Ibidem, p. 87.

¹⁵ N. Robotti, “The birth of h”, Atti del Convegno Internazionale *one hundred years of h*, Pavia, 14 – 16 settembre 2000. In corso di stampa.

¹⁶ M. Planck, *Autobiografia scientifica*, Torino 1956, p. 23.

confrontando il risultato teorico con i dati sperimentali ottenuti da Kurlbaum nel 1898, Planck ottenne che:

$$\frac{b}{a^4} = 1.278 \times 10^{15} \text{ erg} \times s^{-3} \times K^{-4}$$

Usando il valore di una costante $d = ac$ (c è la velocità della luce nel vuoto), precedentemente ottenuto da Paschen, Planck derivò il valore della costante a e, quindi, quello della costante b :

$$b = 6.885 \times 10^{-27} \text{ erg} \times s$$

E' questa la prima comparsa del *valore numerico* della costante h .
Essendo costanti universali,

a e b offrono la possibilità di individuare nuove unità di misura per la lunghezza, la massa ed il tempo, che, indipendentemente da corpi particolari o particolari circostanze, mantengono necessariamente il loro significato per tutti i tempi e tutte le culture, anche per forme di vita extra-terrestri o non - umane, e possono pertanto essere considerate come "unità di misura naturali".

Il sistema di unità di misura proposto da Planck è:

$$\text{unità di lunghezza: } \sqrt{\frac{bG}{c^3}} = 4.33 \times 10^{-33} \text{ cm}$$

$$\text{unità di massa: } \sqrt{\frac{bc}{G}} = 5.56 \times 10^{-5} \text{ gr}$$

$$\text{unità di tempo: } \sqrt{\frac{bG}{c^5}} = 1.38 \times 10^{-43} \text{ s}$$

$$\text{unità di temperatura: } a \sqrt{\frac{c^5}{bG}} = 3.5 \times 10^{32} \text{ }^\circ K$$

dove c è la velocità della luce nel vuoto e G la costante di gravitazione universale.

Le costanti a e b del 1899, diventeranno, il 14 dicembre del 1900, rispettivamente h/k e h .

3. Gli sviluppi successivi.

Gli sviluppi innescati dalla comparsa di h sono stati, come è noto, tali da modificare in profondità la natura della descrizione fisica del mondo. Non rientra tra gli scopi di questo scritto una ricostruzione storica di questi sviluppi: si tratterebbe infatti di fare, più o meno, una storia della Fisica del XX secolo. Ci limiteremo ad una cronologia ragionata e doppiamente parziale: parziale perché *incompleta* e parziale perché *selettiva* e, quindi, in qualche modo "di parte".

1905. Einstein propone l'idea dei quanti di luce:

.....nonostante gli esperimenti abbiano pienamente confermato la teoria della diffrazione, della riflessione, della rifrazione, della dispersione e così via, è concepibile che una teoria della luce basata su funzioni spaziali continue porti a contraddizioni con l'esperienza se la si applica ai fenomeni della generazione e della trasformazione della luce. A me sembra infatti che le osservazioni sulla "radiazione di corpo nero", la fotoluminescenza, la generazione dei raggi catodici tramite la luce ultravioletta e altri classi di fenomeni concernenti la generazione e la trasformazione della luce appaiano più comprensibili nell'ipotesi di una distribuzione spaziale discontinua dell'energia

luminosa. Secondo l'ipotesi che sarà qui considerata, quando un raggio luminoso uscente da un punto si propaga, l'energia non si distribuisce in modo continuo in uno spazio via via più grande; essa consiste invece in un numero finito di quanti di energia, localizzati in punti dello spazio, i quali si muovono senza dividersi e possono essere assorbiti e generati solo nella loro interezza.¹⁷

1906. Einstein ritorna sulla derivazione della legge di Planck e osserva che:

Dobbiamo quindi ritenere che alla base della teoria della radiazione di Planck vi sia il seguente principio: l'energia di un risonatore elementare può assumere solo valori che siano multipli interi di $h\nu$; in assorbimento o in emissione l'energia di un risonatore varia per salti, e precisamente per un multiplo intero di $h\nu$.¹⁸ Questa ipotesi ne comporta tuttavia un'altra, poiché è in contraddizione con il fondamento teorico dal quale è stata ricavata l'equazione (5)¹⁹.

Einstein sostiene quindi che alla base della derivazione planckiana sta, implicitamente ma *necessariamente*, l'ipotesi dei quanti di luce: ciò comporta che l'energia del risonatore può assumere solo valori che siano multipli del quanto $h\nu$ e che lo scambio di energia tra risonatori e radiazione avviene in modo discontinuo. Questa assunzione è incompatibile con l'equazione (5), usata da Planck nella sua derivazione, che lega la densità di energia nella cavità isoterma all'energia media dei risonatori: quest'ultima equazione, infatti, è interamente basata sulle leggi dell'elettromagnetismo e sull'ipotesi secondo cui lo scambio di energia tra radiazione e risonatori avviene in modo continuo. La formula di Planck è, tuttavia, in accordo con l'esperimento: manca solo una sua derivazione rigorosa.

1907. Einstein applica l'ipotesi della quantizzazione dell'energia degli oscillatori al problema della capacità termica a volume costante dei solidi cristallini.²⁰ Il modello è molto schematico: il moto degli atomi è equiparato a quello di $3N$ oscillatori armonici aventi una determinata frequenza ν (N è il numero degli atomi del cristallo). Il risultato del modello è che la capacità termica, a temperature sufficientemente basse ($kT \ll h\nu$), diminuisce esponenzialmente con la temperatura, mentre a temperature elevate ($h\nu \gg kT$) la capacità termica è data dalla nota formula di Dulong e Petit ($C_V = 3Nk$). Nel 1911, Peter Debye svilupperà il modello ancora oggi utilizzato per descrivere la capacità termica dei solidi cristallini.

1907. Kurd von Mosengeil,²¹ su suggerimento di Planck, studia il seguente problema. Un osservatore è in moto rettilineo uniforme in una cavità isoterma: come appare all'osservatore la radiazione di corpo nero contenuta nella cavità?

La risposta di Mosengeil:

$$T = T_0 \frac{\sqrt{1 - v^2 / c^2}}{1 - (v / c) \cos \vartheta}$$

¹⁷ A. Einstein, "Un punto di vista euristico relativo alla generazione e trasformazione della luce" (1905), in: *Opere scelte*, a cura di E. Bellone, Torino, 1988, p. 119.

¹⁸ Einstein non usa la costante di Planck né quella di Boltzmann: egli esprime la grandezza $h\nu$ come data da $(R/N)\beta\nu$, dove R è la costante assoluta dei gas, N il numero di Avogadro e β "il coefficiente nell'esponenziale della formula di Wien (o di Planck)". Ovviamente, $\beta = h/k$.

¹⁹ A. Einstein, "La teoria della generazione e dell'assorbimento della luce" (1906), in: *Opere scelte*, a cura di E. Bellone, Torino, 1988, p. 184-185.

²⁰ A. Einstein, "La teoria planckiana della radiazione e la teoria dei calori specifici" (1907), in: *Opere scelte*, a cura di E. Bellone, Torino, 1988, p. 189-200.

²¹ K. von Mosengeil, *Annalen der Physik*, 22, (1907), 867.

dove : T_0 è la temperatura della cavità, T è la temperatura misurata dall'osservatore in moto, \vec{v} la sua velocità e \mathcal{G} l'angolo formato dalla direzione di propagazione della radiazione con il vettore velocità.

1913. Niels Bohr presenta il suo modello dell'atomo di idrogeno.²² Il modello si basa su di una audace miscela di leggi "classiche" (opportunamente selezionate) e di postulati quantici. La sua sorprendente capacità predittiva non deve offuscare il fatto che esso è un modello "ibrido" e, come tale, può costituire solo un passaggio verso teorie radicalmente nuove. Alla fine dell'articolo, applicando il modello al caso particolare di orbite circolari dell'elettrone, Bohr scrive la regola di quantizzazione del momento angolare dell'elettrone: esso deve essere un multiplo intero di $h/2\pi$.

1914. James Franck e Gustav Hertz (nipote di Heinrich Hertz) ricevettero, nel 1925, il premio Nobel per il loro lavoro del 1914 che dimostrava come gli elettroni accelerati da un campo elettrico in un vapore rarefatto di mercurio perdessero la loro energia cinetica secondo valori discreti²³. Franck ed Hertz diedero un'interpretazione errata di parte del loro lavoro: essi erano ancora legati all'idea che il meccanismo di assorbimento e di emissione della radiazione da parte della materia fosse dovuto alla capacità degli elettroni in essa contenuti di emettere o assorbire radiazioni la cui frequenza coincidesse con la loro propria frequenza di vibrazione. La conseguenza fu che Franck e Hertz interpretarono

l'emissione della riga a 2536Å del mercurio in corrispondenza al valore di $4,9\text{V}$ del potenziale acceleratore nel seguente modo: lo scambio di energia tra elettroni ed atomi avviene solo quando l'energia cinetica degli elettroni (pari a $4,9\text{eV}$) diventa uguale a $h\nu$ dove ν è la frequenza di vibrazione propria dell'elettrone appartenente all'atomo; l'energia ceduta all'elettrone dell'atomo viene utilizzata per ionizzare l'atomo o per emettere radiazione di frequenza ν . Bohr intervenne osservando che i risultati di Franck e Hertz dovevano invece essere considerati come un'ulteriore conferma del suo modello di atomo. Secondo Bohr, il potenziale di $4,9\text{V}$ non corrispondeva quindi al potenziale di ionizzazione del mercurio (come invece sostenevano Franck e Hertz), ma ad una transizione tra lo stato fondamentale dell'atomo ed un suo stato eccitato. Franck e Hertz mantennero la loro interpretazione sino al 1919. Franck e Hertz ricavarono dai loro dati sperimentali un valore di h pari a $6.59 \times 10^{-27} \text{ erg} \times \text{s}$ "con un possibile errore del 2 per cento".²⁴

1916. Millikan pubblica il suo lavoro sull'effetto fotoelettrico. In esso si mostra che la formula

$$\Delta V = \frac{h}{e}\nu - \frac{\Phi}{e} \quad (18)$$

proposta da Einstein nel 1905, è verificata sperimentalmente (ΔV è il potenziale d'arresto, Φ il lavoro necessario per estrarre un elettrone, ν la frequenza della radiazione elettromagnetica ed e la carica elettronica). La pendenza della retta descritta dalla (18) permette di ricavare il valore di h/e .

Il lungo articolo è chiuso da un riassunto lapidario:²⁵

1. L'equazione fotoelettrica di Einstein è stata sottoposta a varie meticolose verifiche e, in ogni circostanza, essa appare predire esattamente i risultati osservati.
2. La [costante] h di Planck è stata determinata fotoelettricamente con una precisione di circa lo 0.5 per cento e si è trovato che il suo valore è

$$h = 6.57 \times 10^{-27}$$

²² Una versione inglese di questa memoria si trova in D. ter Haar, *The old quantum theory*, Oxford, 1967, 132-159.

²³ Una traduzione inglese del lavoro di Franck e Hertz si trova in: D. ter Haar *The old quantum theory*, Oxford, 1967, 160-166.

²⁴ Ibidem, p. 165.

²⁵ R.A.. Millikan, *Physical Review*, **7**, 355-388 (1916), p. 388.

Il commento di Millikan è indicativo dello scarso seguito di cui godeva, ancora in quegli anni, l'ipotesi dei quanti di luce:

Nel 1905, Einstein per la prima volta associò i fenomeni fotoelettrici alla teoria quantica avanzando l'audace, per non dire sconsiderata [reckless] ipotesi di un corpuscolo elettromagnetico di energia $h\nu$, energia che dovrebbe essere trasferita per assorbimento ad un elettrone. Questa ipotesi può ben essere definita sconsiderata innanzitutto perché una perturbazione elettromagnetica che rimane localizzata nello spazio appare come una violazione del concetto stesso di perturbazione elettromagnetica, e secondariamente perché contrasta apertamente [flies in the face of] con i ben stabiliti fatti dell'interferenza.²⁶

1917. Einstein pubblica una nuova derivazione della legge di Planck.²⁷ E' basata su di un modello di cavità in cui delle molecole sono in equilibrio termico con la radiazione elettromagnetica. Le ipotesi usate sono:

- a) i livelli energetici delle molecole sono discreti E_1, E_2, \dots, E_n ;
- b) la frequenza dello stato E_n è data da $W_n = p_n e^{-E_n/kT}$, dove p_n è

un numero indipendente da T , caratteristico della molecola e del suo n-esimo stato quantico, che può essere chiamato il peso statistico di questo stato.²⁸

- c) Siano E_m ed E_n due stati della molecola con $E_m > E_n$. Allora:

Secondo Hertz, un risonatore di Planck irradia energia secondo modalità note, indipendentemente dal fatto di essere o non eccitato da un campo esterno. Conformemente a ciò, una molecola dovrebbe poter passare dallo stato E_m allo stato E_n emettendo energia radiante $E_m - E_n$ di frequenza ν senza essere eccitata da cause esterne. La probabilità dW che ciò avvenga effettivamente nell'elemento di tempo dt è data da $dW = A_m^n dt$ dove A_m^n indica una costante caratteristica della combinazione di indici considerata.²⁹

Per effetto di una densità di radiazione u di frequenza ν , una molecola può passare dalla stato E_n allo stato E_m assorbendo l'energia di radiazione $E_m - E_n$ secondo la legge di probabilità $dW = B_m^n u dt$. Analogamente, sia possibile, per effetto della radiazione, una transizione $E_m \rightarrow E_n$ che libera l'energia radiante $E_m - E_n$, secondo la legge di probabilità $dW = B_n^m u dt$.³⁰

Einstein ricava la legge di Planck nella forma:

$$u = \frac{A_m^n / B_m^n}{e^{(E_m - E_n)/kT} - 1} \quad (19)$$

“Di qui, per la legge dello spostamento di Wien, segue subito che

$$A_m^n / B_m^n = \alpha \nu^3 \quad (20)$$

e

²⁶ Ibidem, p. 355.

²⁷ A. Einstein, “Teoria quantica della radiazione” (1917), in: *Opere Scelte*, a cura di E. Bellone, Torino, 1988, 344-360.

²⁸ Ibidem, p. 347.

²⁹ Ibidem, p. 347.

³⁰ Ibidem, p. 348.

$$E_m - E_n = h\nu \quad (21)$$

dove α e h sono costanti universali.” Naturalmente, la derivazione einsteiniana non permette di calcolare la costante α (che “deve” essere uguale a $8\pi h/c^3$; si confronti la (19) con la (14)) se non attraverso un passaggio al limite che utilizza la formula “classica” di Rayleigh. Si noti, invece, come la derivazione di Einstein ricavi la formula (21) che, nel modello di Bohr costituiva uno dei postulati. Non è tutto. Nella parte finale del lavoro, Einstein dimostra che condizione sufficiente affinché le molecole mantengano una distribuzione di velocità maxwelliana è che durante l’assorbimento o l’emissione di un quanto di radiazione $h\nu$ le molecole acquistino o perdano quantità di moto per un ammontare pari a $h\nu/c$: la stessa quantità di moto deve quindi essere attribuita al quanto di radiazione. L’idea che al quanto di luce debba essere associata una quantità di moto pari ad $h\nu/c$ era già stata avanzata nel 1909 da Johannes Stark. Tuttavia, la base teorica della proposta di Stark era inconsistente; mancava inoltre un riscontro sperimentale convincente. Come abbiamo visto, la proposta di Einstein del 1917 è invece basata su ipotesi ragionevoli e teorie (meccanica statistica) consolidate. Ciononostante, l’idea che al quanto di luce debba essere associata una quantità di moto $h\nu/c$ rimase ancora inutilizzata per diversi anni.

1922. Erwin Schrödinger pubblica un lavoro in cui l’effetto Doppler relativo all’emissione di luce da parte di atomi in moto viene trattato da un punto di vista corpuscolare.

Nella figura 1, \vec{v}_1 è la velocità dell’atomo prima dell’emissione di un quanto di luce e \vec{v}_2 la velocità dell’atomo dopo l’emissione. Rispetto al sistema di riferimento dello spettrografo, si scrivono le equazioni di conservazione dell’energia e della quantità di moto, attribuendo al quanto di luce la quantità di moto $h\nu/c$. Le equazioni sono:

$$h\nu = \gamma_1 E_1 - \gamma_2 E_2 \quad (22)$$

$$\gamma_1 \frac{E_1}{c^2} v_1 \cos \theta_1 = \gamma_2 \frac{E_2}{c^2} v_2 \cos \theta_2 + \frac{h\nu}{c} \quad (23)$$

$$\gamma_1 \frac{E_1}{c^2} v_1 \sin \theta_1 = \gamma_2 \frac{E_2}{c^2} v_2 \sin \theta_2 \quad (24)$$

dove γ_1 e γ_2 sono i fattori relativistici prima e dopo l’emissione ($\gamma = \sqrt{1 - v^2/c^2}$), θ_1 e θ_2 gli angoli che la velocità dell’atomo forma con la direzione di propagazione del quanto di luce prima e dopo l’emissione ed E_1 , E_2 le energie a riposo dell’atomo prima e dopo l’emissione. Si noti come queste equazioni siano strutturalmente corpuscolari: per coerenza formale, dovremmo eliminare da esse il simbolo della frequenza e scrivere, per esempio, E_{qt} al posto di $h\nu$. Sviluppando i calcoli, Schrödinger pervenne ad una formula che esprimeva la frequenza ν misurata dallo spettrografo in funzione delle velocità dell’atomo prima e dopo l’emissione

$$\nu^* = \nu \sqrt{\frac{c - v_1 \cos \theta_1}{\sqrt{c^2 - v_1^2}} \times \frac{c - v_2 \cos \theta_2}{\sqrt{c^2 - v_2^2}}} \quad (25)$$

perfettamente simmetrica rispetto agli indici 1 e 2; con

$$\nu^* = \frac{E_1^2 - E_2^2}{2h\sqrt{E_1/E_2}}$$

Non è chiaro il motivo per cui Schrödinger si sia fermato alla formula (25): verosimilmente, la ragione risiede nella simmetria dell'equazione rispetto alle velocità dell'atomo prima e dopo l'emissione. Tuttavia, tale simmetria è solo formale: una volta fissata la velocità dell'atomo prima dell'emissione, la velocità dopo l'emissione è determinata dalle caratteristiche del processo di emissione, cioè dalle equazioni (22-24). Pertanto, eliminando v_2 dalla (22) si ottiene, con pochi passaggi l'equazione

$$v = v_0 \frac{\sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 - v_1 \cos \theta_1} \quad (26)$$

con

$$v_0 = \frac{\Delta E}{h} \left(1 - \frac{\Delta E}{2E_1} \right), \quad \Delta E = E_1 - E_2 \quad (27)$$

Si noti che ΔE è la differenza in energia tra i due livelli atomici interessati alla transizione. La (26) coincide, formalmente, con l'equazione dell'effetto Doppler ricavata sulla base della descrizione ondulatoria. Tuttavia, il contenuto fisico delle due equazioni (ondulatoria e corpuscolare) è diverso. Nella descrizione corpuscolare v_0 rappresenta la frequenza misurata da un osservatore che vede l'atomo in quiete *prima dell'emissione* e $\Delta E / 2E_1$ rappresenta l'energia di rinculo dell'atomo. La descrizione ondulatoria non contiene l'equazione (27) ed afferma che v_0 è la frequenza misurata da un osservatore che vede l'atomo in quiete senza poter specificare se prima o dopo l'emissione. Infatti, secondo la descrizione ondulatoria, l'atomo emette un'onda sferica e quindi esso non rincula durante l'emissione: se l'atomo è in quiete prima dell'emissione lo sarà anche dopo. Si noti infine che questo tipo di trattazione è estensibile anche al caso dell'assorbimento. L'equazione che si ottiene per l'assorbimento è ancora la (26), mentre nella (27) il segno (-) è sostituito dal segno (+): infatti, in questo caso, il quanto di luce deve possedere un'energia maggiore di ΔE per poter essere assorbito dall'atomo.

Questo lavoro di Schrödinger è passato pressoché inosservato. Per la prima volta l'energia e la quantità di moto del quanto di luce sono usate contemporaneamente; le equazioni di conservazione (22-24) sono concettualmente le stesse di quelle usate due anni dopo da Arthur Compton e Debye per spiegare il cosiddetto effetto Compton: né Compton né Debye citano Schrödinger. Inoltre, per quanto a mia conoscenza, la descrizione corpuscolare dell'effetto Doppler non è mai stata usata in lavori di ricerca, anche quando il suo uso sarebbe stato necessario;³¹ non è neanche facile trovarne traccia nei manuali.³²

1923. Louis De Broglie, mescolando formule relativistiche e quantiche, suggerisce che ad una particella dotata di quantità di moto p , si debba associare un'onda avente lunghezza d'onda pari $\lambda = h/p$. Il procedimento di De Broglie è eterodosso. Considerata una particella di massa (a riposo) m_0 ed energia a riposo $m_0 c^2$, De Broglie afferma che "il principio quantico suggerisce di attribuire questa energia interna ad un semplice moto periodico di frequenza ν_0 tale che

$$h \nu_0 = m_0 c^2 \quad (28)$$

dove c è sempre la velocità limite della teoria della relatività e h la costante di Planck". In realtà, il "principio quantico" non suggerisce nulla del genere poiché non ha nulla da dire circa l'energia a riposo

³¹ Si veda ad esempio: I. Bonizzoni e G. Giuliani, "The interpretations by experimenters of experiments on 'time dilation': 1940-1970 circa", <http://matsci.unipv.it/percorsi/td.htm>.

³² Due eccezioni sono costituite dai manuali di Møller e French: C. Møller, *The theory of relativity*, Second Edition, (Oxford, 1972), pp. 401-407; A.P. French, *Special Relativity*, (London, 1968), pp. 197-199.

totale di una particella. Come mostrato anche dalla trattazione di Schrödinger appena discussa, se si considera un atomo eccitato a riposo, l'energia quantica ΔE contribuisce semplicemente all'energia totale a riposo dell'atomo. L'equazione postulata da De Broglie nasce da un'associazione di due concetti, quello di energia a riposo e quello di quanto di radiazione che non possono essere correlati come indicato da De Broglie se non mediante un nuovo postulato. In effetti, De Broglie postula la (28) ed è perfettamente consapevole di questo; l'ambiguità nasce dal suo desiderio di ancorare in qualche modo la nuova ipotesi alla conoscenza acquisita. L'ambiguità dell'ipotesi si evidenzia nei passaggi successivi. Infatti: in un sistema di riferimento che vede la particella muoversi con velocità $v = \beta c$ ($\beta < 1$), l'energia della particella è data da

$$m_0 c^2 \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

e, quindi, alla particella è “attribuibile” una frequenza

$$\nu = \nu_0 \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad (29)$$

ben diversa da quella

$$\nu_1 = \nu_0 \sqrt{1 - \beta^2} \quad (30)$$

che il sistema di riferimento che vede la particella muoversi attribuirebbe al “moto periodico interno” della particella sulla base delle trasformazioni di Lorentz. La (29) e la (30) sono incompatibili, a meno di attribuire alla (29) un nuovo significato fisico distinto da quello contenuto nella (30). E' questa la via d'uscita scelta da De Broglie. Con le sue parole:

Supponiamo che all'istante $t = 0$ l'oggetto in moto coincida nello spazio con un'onda di frequenza ν definita sopra e che si propaghi nella medesima direzione dell'oggetto in moto con velocità c / β . Quest'onda dotata di velocità superiore a c non può corrispondere ad una trasmissione di energia; *la considereremo solo come un'onda fittizia associata al moto dell'oggetto mobile.*³³

L'ipotesi di De Broglie ha svolto un fondamentale ruolo euristico nell'evoluzione verso la meccanica ondulatoria di Schrödinger.

1923. Nello stesso anno, Compton e Debye fornirono, l'uno indipendentemente dall'altro, una spiegazione della diffusione dei raggi X da parte della materia con aumento della lunghezza d'onda. Questo effetto era già stato osservato,³⁴ ma aveva tenacemente resistito a diversi tentativi di spiegazione “classica” inclusi quelli pluriennali di Compton. Il nucleo dei lavori di Compton e Debye è costituito dalle equazioni relativistiche di conservazione dell'energia e della quantità di moto riferite alla collisione tra un quanto di luce ed un elettrone. Nel lavoro di Compton compare anche l'equazione dell'effetto Doppler all'interno di una descrizione corpuscolare. Tuttavia, l'equazione (26) è costruita in modo pragmatico: è pertanto assente l'espressione di ν_0 data dalla (27). Come già ricordato, manca qualsiasi riferimento al lavoro di Schrödinger.

1924. Compare la derivazione di Bose delle legge di Planck. Satyendra Nath Bose era allora un trentenne Professore Associato all'università di Dacca (Bengala). Le difficoltà incontrate nell'insegnamento della legge di Planck lo portarono alla stesura dell'articolo che lo rese famoso.

³³ L. De Broglie, 'Ondes et quanta', *Comptes rendus*, **177**, (1923), 507-510. Corsivo mio.

³⁴ A.A. Bartlett, 'Compton effect: historical background', *American Journal of Physics*, **32** (1964), 120-127.

Il manoscritto fu inizialmente inviato al *Philosophical Magazine* che lo rifiutò. Allora Bose scrisse ad Einstein:

Stimato Signore,

ho osato inviarle l'articolo allegato per sottoporlo alla sua attenzione ed opinione. Sono ansioso di sapere che cosa ne pensa. Vedrà che ho cercato di dedurre il coefficiente $8\pi\nu^2/c^3$ della legge di Planck in modo indipendente dall'elettrodinamica classica, assumendo semplicemente che la cella elementare dello spazio delle fasi ha volume h^3 . Non conosco il tedesco in misura sufficiente per tradurre l'articolo. Se lei pensa che il lavoro sia degno di pubblicazione, le sarò grato se farà in modo che sia pubblicato su *Zeitschrift für Physik*. Sebbene io sia completamente sconosciuto a lei, non esito a farle questa richiesta. Poiché noi siamo tutti suoi allievi, anche se godiamo del suo insegnamento solo attraverso i suoi lavori.....

Bose non avrebbe potuto scegliere un interlocutore più sensibile: egli aveva individuato la soluzione del problema posto nel 1906, quando Einstein argomentò che il punto di partenza della derivazione planckiana (equazione 5) era incompatibile con la *necessaria* ipotesi che i livelli energetici dei risonatori fossero quantizzati. Einstein stesso tradusse il lavoro di Bose e lo fece pubblicare con il seguente commento:

A mio parere, la derivazione di Bose della formula di Planck costituisce un importante passo in avanti. Il metodo usato conduce anche alla teoria quantica del gas perfetto, come mostrerò in dettaglio altrove.³⁵

Scrive Bose:

Sin dalla sua pubblicazione nell'anno 1901, sono state suggerite molte derivazioni della formula. Viene riconosciuto che le assunzioni fondamentali della teoria quantica sono incompatibili con l'elettrodinamica classica. Tutte le derivazioni esistenti usano la relazione [la nostra (5)]

$$u(\nu, T) = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} \bar{U}(\nu, T)$$

che lega la densità della radiazione all'energia media di un oscillatore, e fanno assunzioni sui gradi di libertà dell'etere come indicato da questa equazione (il primo termine del secondo membro). Tuttavia, questo termine può essere dedotto solo dalla teoria classica. Questo è il punto debole di ogni derivazione, e non sorprendono che siano gli sforzi fatti per cercare una derivazione priva di questa debolezza logica.

Una derivazione molto elegante è stata data da Einstein. Riconoscendo il difetto logico delle derivazioni esistenti, egli ha cercato di dedurre la formula indipendentemente da ogni teoria classica.....

Tuttavia, per far in modo che questa formula [la nostra (19)] coincida con quella di Planck, egli ha dovuto usare la legge dello spostamento di Wien ed il principio di corrispondenza di Bohr. La legge di Wien è basata sulla teoria classica; il principio di corrispondenza assume che la teoria quantica coincide asintoticamente con la teoria classica in certi casi limite. In tutti i casi mi sembra che le derivazioni abbiano un'insufficiente fondamento logico. Diversamente, la combinazione dell'ipotesi dei quanti di luce e della meccanica statistica nella forma adattata da Planck alle esigenze della teoria quantica appare sufficiente per una derivazione della legge indipendente da ogni teoria classica. Mostrerò ora, schematicamente, il nuovo metodo.

Il metodo di Bose consiste nel considerare la radiazione contenuta in una cavità isoterma come costituita da quanti dotati di energia $h\nu$ e quantità di moto lineare $h\nu/c$. Considerato lo spazio

³⁵ Una traduzione inglese del lavoro di Bose si trova in: O. Theimer e B. Ram, *American Journal of Physics*, **44**, (1976), 1056-1057.

a sei dimensioni delle coordinate e delle quantità di moto dei quanti di luce, Bose osserva che l'intervallo di frequenze $d\nu$ è associato al volume (dello spazio a sei dimensioni considerato)

$$\frac{4\pi}{c^3} \nu^2 h^3 V d\nu$$

dove V è il volume della cavità. Se si assume il volume della cella elementare di questo spazio uguale a $h^3 \text{Joule}^3 \times s^3 \times m^3$, avremo che il numero di celle contenute nel volume precedente sarà

$$\frac{4\pi}{c^3} \nu^2 V d\nu \quad (31)$$

Si noti come, a meno di un fattore 2, compaia nella (31) il fattore di cui parla Bose. Per recuperare il fattore 2, Bose afferma

Per tener conto della polarizzazione, sembra obbligatorio moltiplicare questo numero per un fattore 2 così che il numero di celle appartenenti all'intervallo $d\nu$ diventa $8\pi V(\nu^2 d\nu / c^3)$.

Questo passaggio è chiaramente cruciale, ma oscuro: Bose riecheggia termini ondulatori (la polarizzazione di un'onda) in un contesto corpuscolare. Qualche anno dopo, apparirà chiaro che al quanto di luce deve essere associato anche un vettore momento angolare: esso può essere diretto lungo la direzione di propagazione o in senso opposto. Ciò comporta che, se si vuole fare la statistica dei quanti sulla base delle celle disponibili in cui collocare i quanti, sia possibile: a) assumere che il numero delle celle è dato dalla (31) e tenere conto che il quanto "destrorso" è distinguibile da quello "sinistrorso" (ma due quanti "destrorsi" o due "sinistrorsi" sono indistinguibili); oppure, b) assumere che il numero delle celle è doppio di quello fornito dalla (31) e, al contempo, che i quanti sono indistinguibili. Se scegliamo con Bose l'opzione b), dovremo procedere assumendo, appunto, che i quanti siano indistinguibili e le celle distinguibili. Bose procede effettivamente in questo modo, senza peraltro rendere esplicite le scelte. Perviene quindi, in modo lineare, alla formula di Planck.

1924-1925. Einstein applica il metodo di Bose per sviluppare la statistica del gas perfetto. Trova anche che, in determinate condizioni [quando la lunghezza d'onda di De Broglie diventa paragonabile alla distanza media tra le molecole], le molecole del gas tendono a collocarsi nello stato fondamentale. Con le parole di Einstein:

Affermo che in questo caso, al crescere della densità, un numero di molecole crescente cade nello stato fondamentale (la cui energia cinetica è nulla).....si realizza una separazione; una parte [delle molecole] condensa, le rimanenti rimangono a far parte di un gas perfetto saturo.

Questo fenomeno sarà chiamato *condensazione di Bose-Einstein*.

1925-1926. Nasce la meccanica quantistica nella formulazione delle matrici ed in quella ondulatoria. Ad essa contribuisce un gruppo di giovani fisici (tra parentesi la loro età nel 1925): Werner Heisenberg (24), Pascual Jordan (23), Wolfgang Pauli (25), Paul Dirac (23). In confronto, Schrödinger (36) è "vecchio". Nei postulati delle due versioni compare, strutturalmente, la costante h di Planck (o \hbar).

1926-1927. Con i contributi indipendenti di Enrico Fermi (24 anni nel 1925) e di Dirac, nasce la statistica delle particelle che obbediscono al principio di esclusione di Pauli. Si stabilisce che le particelle con spin intero (*bosoni*) sono descritte dalla statistica di Bose-Einstein, mentre quelle a spin semi-intero (*fermioni*) dalla statistica di Fermi-Dirac.

Fine anni venti-primi anni trenta. Nasce la teoria delle bande dei solidi cristallini che permette di introdurre la fondamentale distinzione tra isolanti, metalli e semiconduttori. Dirac pone i fondamenti dell'elettrodinamica quantistica e concepisce l'idea di antiparticella. L'elettrodinamica quantistica verrà sviluppata verso la fine degli anni quaranta da Richard P. Feynman, Julian S. Schwinger e Shin'ichiro Tomonaga. Essa diventerà l'archetipo delle teorie quantistiche di campo.

1947. John Bardeen, William B. Shockley e Walter H. Brattain inventano il transistor. Per questa invenzione sarà loro attribuito il premio Nobel nel 1956.

1953. Viene realizzato da Charles H. Townes il primo *maser* (Microwave Amplification by Stimulated Emission of Radiation) .

1957. Appare la teoria (BCS) della superconducibilità di John Bardeen (B), Leon N. Cooper (C) e John R. Schrieffer (S). Sarà loro attribuito il premio Nobel nel 1972.

1960. Theodore H. Mainman realizza il primo *laser* (Light Amplification by Stimulated Emission of Radiation).

1960-1962. Ivar Giaever studia sperimentalmente gli effetti di *tunneling* di elettroni attraverso un sottile strato di isolante che separa un superconduttore da un conduttore normale. Brian Josephson sviluppa la teoria delle cosiddette (a posteriori) giunzioni Josephson costituite da due superconduttori separate da un sottile strato di isolante ($\approx 10nm$). Gli studi di Giaever e Josephson sono basati sulla teoria BCS della superconducibilità. Una giunzione Josephson è attraversata da una corrente senza che vi sia ai suoi capi alcuna differenza di potenziale (*dc Josephson effect*). Il suo valore è dato da:

$$I = I_{Max} \sin \delta$$

dove I_{Max} è la corrente massima e δ la differenza di fase tra le funzioni d'onda delle coppie di Cooper tra le due parti della giunzione. I_{Max} decresce esponenzialmente in funzione dello spessore dello strato isolante.

Se ad una giunzione Josephson viene applicata una ddp continua ΔV , essa viene attraversata da una corrente I data da (*ac Josephson effect*):

$$I = I_{Max} \sin(\delta + 2\pi f t) \quad (32)$$

dove f la frequenza della corrente che attraversa la giunzione. Si ha:

$$f = \frac{2e}{h} \Delta V \quad (33)$$

Se la giunzione viene irraggiata con microonde di frequenza f' , il diagramma corrente – ddp presenta dei gradini in corrispondenza dei valori ΔV_n della ddp:

$$\Delta V_n = n \frac{h}{2e} f' \quad (34)$$

con n intero. La (34) permette di determinare il rapporto $h/2e$, misurando ΔV_n e f' ; essa permette anche di definire l'unità standard per la ddp.

Nel 1973 viene assegnato il premio Nobel a Giaever, Josephson e Leo Esaki.

1965. Arno Penzias e Robert Wilson scoprono la radiazione cosmica di fondo. La scoperta di questa radiazione - che è una radiazione di corpo nero a $2.735^{\circ}K$ - permette di individuare un sistema di riferimento inerziale privilegiato: esso è quello per cui la radiazione di fondo è isotropa.

1980. La resistenza di Hall R_H è definita dal rapporto tra la differenza di potenziale di Hall ΔV_H e la corrente che attraversa la lamina:

$$R_H = \frac{\Delta V_H}{I} = \frac{B}{nes} \quad (35)$$

dove B è il campo magnetico, n la concentrazione degli elettroni, e la loro carica e s lo spessore della lamina (nella figura 2, v_d è la velocità di deriva degli elettroni, a, l, s le dimensioni della lamina e B il campo magnetico). Klaus von Klitzing, operando con semiconduttori in cui gli elettroni sono confinati in uno strato bidimensionale, a temperature sufficientemente basse e campi magnetici sufficientemente elevati, ha trovato che la resistenza di Hall è quantizzata secondo la formula:

$$R_H = \frac{h}{ie^2} \quad (36)$$

con i intero. La resistenza di Hall quantizzata dipende solo dalle costanti e ed h ed è indipendente dalle caratteristiche dei materiali usati. Una resistenza di Hall quantizzata è prevista ogni qual volta la densità superficiale n_s degli elettroni e il campo magnetico B hanno valori tali per cui il rapporto:

$$\frac{n_s h}{eB} \quad (37)$$

assume valori interi (si ricordi che in questa equazione n_s ha le dimensioni dell'inverso di una superficie).

L'effetto Hall quantistico può essere utilizzato per definire l'unità di resistenza standard. Nel 1982 Daniel Tsui e Horst Störmer hanno osservato l'effetto Hall quantistico frazionario: il rapporto dato dalla (37) assume, in generale, i valori m/n con m, n interi.

Nel 1985 viene assegnato il premio Nobel a von Klitzing; nel 1998 a Tsui, Störmer e Robert Laughlin "per la loro scoperta di una nuova forma di fluido quantistico con eccitazioni dotate di carica frazionaria".

1990, circa. Il satellite COBE (Cosmic Background Explorer) si configura come l'osservatore in moto in una cavità isoterma di Mosengeil (1907): dalla anisotropia misurata nella radiazione cosmica di fondo si ricava la velocità del moto della Terra nell'universo. Essa è di circa 600 Km al secondo.

1995. M.H. Anderson, J.R. Matthews, C.E. Wieman e E.A. Cornell realizzano la prima condensazione di Bose-Einstein, prevista da Einstein settanta anni prima. Viene usato vapore di ^{87}Rb (che possiede 37 elettroni) ed un momento magnetico pari ad un magnetone di Bohr, dovuto all'elettrone di valenza. Questi atomi sono costituiti da un numero pari di *fermioni* (protoni, neutroni ed elettroni): sono pertanto *bosoni*. Il vapore, contenuto in una cella di vetro in cui è stato prodotto un vuoto spinto e le cui dimensioni lineari sono dell'ordine del *cm*, viene

raffreddato usando la tecnica del *laser cooling* che permette di raggiungere temperature dell'ordine di $50\mu K$ e densità dell'ordine di 10^{11} atomi per cm^3 . La tecnica del *laser cooling* è stata sviluppata da Steven Chu, Claude Cohen-Tannoudji e William D. Phillips che hanno ricevuto il premio Nobel nel 1997 “per avere sviluppato metodi di raffreddamento e intrappolamento di atomi con luce laser”.

Questa tecnica (vedi figura 3) si basa su tre proprietà dell'interazione atomo-fotone: a) il fatto che la probabilità di transizione tra due livelli atomici è una banda di larghezza finita in energia; b) il fatto che, durante l'assorbimento di un fotone, l'atomo riceve una quantità di moto pari a $h\nu/c$ nella direzione di propagazione del fotone; c) il fatto che gli atomi che vanno incontro al fotone lo “vedono” più energetico, mentre gli atomi che fuggono davanti al fotone lo “vedono” meno energetico (si veda la trattazione alla Schrödinger svolta sopra). Pertanto, se, per esempio, il vapore è collocato tra due sorgenti laser che emettono fotoni lungo la direzione x e $-x$ ad una energia adeguatamente inferiore a quella corrispondente al picco della probabilità di transizione, si avrà che, praticamente, solo gli atomi che vanno incontro ai fotoni li assorbiranno venendo, di conseguenza, rallentati. Di fatto, il vapore viene collocato fra sei fasci laser posti, a coppie, lungo le tre direzioni x, y, z . Questo trattamento rallenta gli atomi e, quindi, raffredda il loro vapore. A questo punto, vengono spenti i laser e gli atomi, sottoposti alla forza di gravità, cadrebbero. Gli atomi vengono allora illuminati da un fascio laser di frequenza e polarizzazione opportuna in modo che, in presenza di un debole campo magnetico, avvenga pompaggio ottico in un livello Zeeman: la successiva applicazione di un campo magnetico opportunamente disomogeneo - in modo da formare un minimo di energia potenziale al centro della cella per gli atomi il cui momento magnetico è antiparallelo al campo - sostiene questi atomi al centro della cella (figura 4). Si ottiene così una “nube” di atomi, con momento magnetico antiparallelo al campo, collocata al centro della cella: gli atomi meno energetici stanno al centro della “nube”, quelli più energetici, ai suoi bordi. La fase finale è costituita da una “evaporazione” degli atomi più energetici indotta da un'opportuna radiazione a radiofrequenza che inverte la direzione del loro momento magnetico: questi atomi, come l'atomo m in figura, vengono espulsi dalla trappola magnetica e, cadendo per gravità, condensano sulla parete della cella. Questo processo di evaporazione, controllato attraverso la progressiva diminuzione della frequenza della radiazione che provoca il capovolgimento dei momenti magnetici, raffredda ulteriormente la nube di atomi sino al raggiungimento della “condensazione”. La nube di gas nella trappola magnetica viene osservata nel modo seguente: viene illuminata con luce laser di energia tale da poter essere assorbita e riemessa (in tutte le direzioni) dagli atomi del gas. Un rivelatore CCD (charge-coupled device) registra l'immagine del gas. Questa appare come un'ombra: la sua zona centrale è quella più scura perché corrisponde a zone di maggiore densità. Le dimensioni e l'intensità dell'ombra forniscono informazioni sullo stato termodinamico della nube. Siccome l'energia potenziale ha un andamento parabolico, la velocità di un atomo della nube non ancora condensata è proporzionale alla sua distanza dal minimo della figura 4 ($1/2mv^2 = 1/2ax^2$) e l'energia cinetica media degli atomi e, quindi, la temperatura della nube, è proporzionale a $\langle x^2 \rangle$. Ne deriva che una riduzione di un fattore 10 nelle dimensioni della nube implica una riduzione di un fattore 100 della sua temperatura; inoltre, se la densità dell'immagine è rimasta invariata, ciò significa che la densità della nube è aumentata dello stesso fattore. L'immagine della nube non condensata ha simmetria sferica: l'instaurarsi della condensazione è segnalata dalla comparsa, al centro dell'immagine a simmetria sferica della nube “termica”, di una macchia dalle dimensioni molto ridotte (ai limiti della risoluzione del rivelatore CCD), molto scura e avente la simmetria di un ellissoide di rotazione - dovuta alla simmetria cilindrica della trappola magnetica.

Gli atomi della fase condensata stanno tutti sullo stesso livello energetico minimo, descritto dalla funzione d'onda dello stato fondamentale di un oscillatore armonico (perché il potenziale è parabolico), cioè da una gaussiana. Ne deriva che

$$(x - \langle x \rangle)^2 (p_x - \langle p_x \rangle)^2 = \frac{\hbar^2}{4} \quad (38)$$

Siccome $\sqrt{(x - \langle x \rangle)^2}$ è una misura dell'estensione della nube nella direzione x , nella stessa direzione la distribuzione delle quantità di moto p_x risulterà inversamente proporzionale a $\sqrt{(x - \langle x \rangle)^2}$. Se viene tolta la trappola magnetica all'istante $t = 0$, la nube condensata si espande e, una sua immagine registrata all'istante t mostra la distribuzione spaziale degli atomi a questo istante: questa immagine rappresenta una mappa della distribuzione di velocità degli atomi all'istante $t = 0$, perché lo spazio percorso è proporzionale alla velocità iniziale (e costante) degli atomi. In accordo con la (38), la distribuzione delle velocità sarà compressa nella direzione in cui era espansa la distribuzione spaziale iniziale; e viceversa.

1999-2000. Sono prodotti e osservati vortici in un condensato di Bose-Einstein. Il flusso del gas condensato intorno al vortice è quantizzato: ad ogni atomo compete un momento angolare pari a \hbar . In questi esperimenti, viene misurata la quantizzazione del momento angolare in modo diretto, cioè senza passare attraverso la misura di momenti magnetici associati ai momenti angolari.³⁶

4. 2100: nel segno di?

Il percorso che abbiamo compiuto è solo uno dei molteplici itinerari possibili all'interno della fisica quantistica del XX secolo. Esso ha ignorato intere regioni del territorio e ha evitato gli ostacoli epistemologici e filosofici nonché gli incroci con la tecnologia.

Dal punto di vista conoscitivo, l'invenzione di \hbar ha innescato un processo le cui ultime frange hanno lambito il nuovo secolo. La fisica quantistica, nata da \hbar , ha innervato la fisica della materia, quella delle particelle elementari e l'astrofisica, mentre i tentativi di congiunzione tra relatività generale e fisica quantistica sono ben lungi dal considerarsi compiuti.

La seconda metà del secolo XX è stata profondamente segnata dal radicamento e dalla diffusione delle tecnologie nate dalle invenzioni del transistor, del laser e, in generale, dallo studio delle proprietà della materia "ordinaria" in cui le energie in gioco sono quelle tipiche dei livelli elettronici negli atomi, nelle molecole e nei solidi. Le tecnologie legate alla fisica del nucleo hanno permesso la realizzazione dei reattori a fissione, oggi in discussione per le loro implicazioni ecologiche, mentre sono ancora in una fase embrionale quelle connesse alla fusione nucleare. Infine, lo sviluppo della fisica delle particelle elementari, ottenuto mediante la realizzazione di acceleratori sempre più potenti e costosi, non ha prodotto – per ragioni intrinseche legate alle energie messe in gioco – alcuna ricaduta tecnologica diretta. Lo sviluppo della biologia genetica e delle tecnologie connesse ha aperto un nuovo scenario dominato, anche nell'immaginario collettivo, dalla biologia.

La rilevanza che la scienza e le sue applicazioni hanno assunto nel corso del XX secolo non ha ridotto la consistenza e la diffusione di tendenze irrazionali, di credenze superstiziose, di atteggiamenti antiscientifici. Il radicamento delle nuove tecnologie ed i profondi mutamenti sociali che esse inducono non sono accompagnati da un'adeguata crescita della cultura collettiva intesa come capacità di assimilazione delle nuove conoscenze, di controllo delle tecnologie e di progetto.

In passato, le responsabilità civili e sociali degli uomini di scienza – di coloro che direttamente la producono e di coloro che la diffondono – hanno riguardato soprattutto le applicazioni tecniche della scienza e il loro uso da parte del potere politico e militare. Oggi diventa preminente un'assunzione di

³⁶ Laboratori JILA, Boulder, Colorado; Ecole Normale Supérieure, Paris. Si veda, per esempio, la pagina: <http://www.aip.org/pt/vol-53/iss-8/p19.html>

responsabilità rispetto ai temi dell'orientamento del senso comune sul terreno della diffusione delle conoscenze scientifiche, delle loro procedure, della razionalità che le sottende.
Perché, come scriveva Pascal:

Le scienze hanno due estremi che si toccano. Il primo è la pura ignoranza naturale, in cui si trovano, nascendo, tutti gli uomini; l'altro è quello cui giungono le grandi anime, le quali, avendo percorso tutto lo scibile umano, si avvedono di non saper nulla, e si ritrovano così nella stessa ignoranza iniziale. Ma la loro è un'ignoranza dotta che conosce se stessa.
Tra i due estremi si ritrovano coloro che sono usciti dall'ignoranza naturale, ma non sono potuti giungere all'altra: hanno una certa infarinatura di scienza presuntuosa e fanno i saputi. Costoro mettono a soqquadro il mondo e giudicano a sproposito di ogni cosa. ³⁷

Bibliografia.

In rete si trovano validi testi su diversi argomenti trattati in questo scritto.

Ne segnalo due:

D. Kleppner e R. Jackiw, *One hundred years of quantum Physics*, all'indirizzo:

<http://www.arxiv.org/abs/quant-ph/0008092>

E. Cornell, *Very cold indeed: the nanokelvin Physics of Bose-Einstein condensation*, all'indirizzo:

<http://physics.nist.gov/Pubs/Bec/TofCont.html>

Tra i testi su supporto cartaceo ricordo:

M. Jammer, *The conceptual development of quantum mechanics*, seconda edizione, Tomash Publishier, American Institute of Physics, 1989.

G. Tagliaferri, *Storia della fisica quantistica*, Milano, 1985.

Infine, il volume degli Atti del Convegno *one hundred years of h* (Pavia, 2000), Bologna 2001 (in corso di stampa).

³⁷ Blaise Pascal, *Pensieri*, n. 338. (tr. it. di Paolo Serini, Einaudi, 1962).

Figura 1.

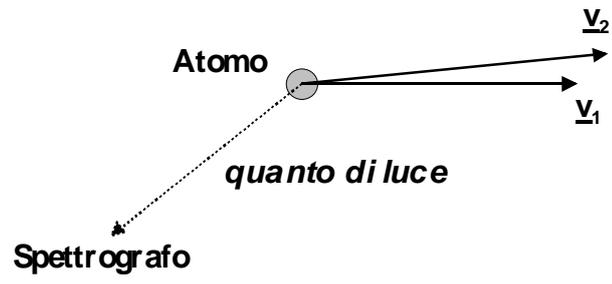
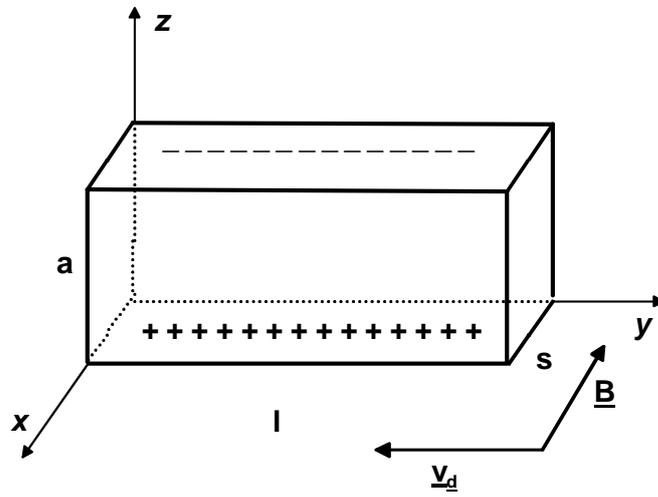


Figura 2. Effetto Hall (vedi testo).



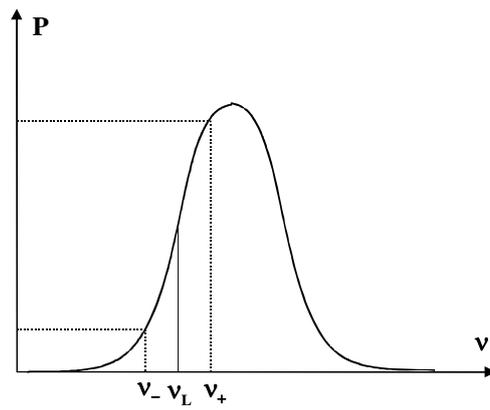


Figura 3. *Laser cooling*: la probabilità di transizione tra due livelli atomici in funzione della frequenza. ν, ν_+, ν_- sono, rispettivamente, la frequenza del laser e la frequenza “vista” dagli atomi che vanno incontro ai fotoni e che fuggono davanti ad essi.

Figura 4. Energia potenziale $U = -\mu_z B_z$ degli atomi di Rb^{87} con il momento magnetico μ_B antiparallelo al campo nel campo magnetico disomogeneo della trappola magnetica. Sugli atomi agisce una forza $F_x = \mu_B \partial B_z / \partial x$. La disomogeneità è tale per cui l'andamento di $U(x)$ è parabolico nei dintorni del minimo. La variazione di \vec{B} in funzione di x implica che l'energia $\mu_B B_z$ di separazione tra i due livelli Zeeman dipenda da x e cresce al crescere della distanza dal minimo.

