

La teoria della radiazione di corpo nero: il percorso di Planck

Giuseppe Giuliani

Dipartimento di Fisica “Volta”, Università di Pavia

1 Introduzione

Lo studio delle proprietà della radiazione di corpo nero ha svolto un ruolo di fondamentale importanza nello sviluppo della fisica quantica. Esso infatti ha condotto all'introduzione, da parte di Planck, della costante h , successivamente denotata con il suo nome. Non solo: lo sviluppo, da parte di Einstein, della complessa tematica di quello che verrà successivamente indicato come il dualismo onda - particella, sebbene originato dall'esigenza di una rappresentazione formale unitaria di sistemi di onde e di sistemi di particelle¹ e dall'intuizione che la teoria delle onde elettromagnetiche di Maxwell può entrare in conflitto con l'esperienza nel caso di fenomeni concernenti l'interazione radiazione - materia, si realizza all'interno della problematica del corpo nero. Il percorso di Einstein all'interno delle proprietà della radiazione di corpo nero, descritte usando l'apparato concettuale e matematico della fisica statistica, inizia nel 1905 e si conclude nel 1924 - 25 con l'applicazione al gas perfetto della neonata statistica di Bose (1924). Questa, a sua volta, è un sottoprodotto del tentativo, sostanzialmente riuscito,² di ricavare in modo rigoroso la formula della radiazione di corpo nero proposta da Planck nel 1900.

2 Cronologia³

La storia del corpo nero inizia intorno al 1860 quando Kirchhoff definisce che cosa si intende per corpo nero e formula alcune leggi generali sulle sue proprietà. Lo stimolo allo studio della connessione tra emissione ed assorbimento

¹A. Einstein, “Über einen die Erzeugung und Verwandlung des Lichtes betreffenden heuristischen Gesichtspunkt”, *Annalen der Physik*, **17**, 132-148 (1905); trad.it. in A. Einstein, “La teoria dei quanti di luce”, Newton Compton, Roma.

²S. Bose, “Plancks Gesetz und Lichtquantenhypothese”, *Zeitschrift für Physik*, **26**, 178-181 (1924); trad. inglese in: Theimer H., Ram B., “The beginning of quantum statistics”, *American Journal of Physics*, **44**, 1056-1057 (1976).

³Per la stesura di questo paragrafo ho fatto ampio uso delle ricostruzioni storiche di: M. Jammer, “The conceptual development of quantum mechanics”, McGraw-Hill, 1966; J. Mehra, H. Rechenberg, “The historical development of quantum theory”, vol. 1, part 2, Springer-Verlag, 1982; G. Tagliaferri, “Storia della fisica quantistica”, Angeli, 1985.

di radiazioni da parte di un corpo venne a Kirchhoff dall'indagine sulle righe nere osservate da Fraunhofer nello spettro solare. Kirchhoff avanzò l'ipotesi secondo cui un corpo è in grado di assorbire le radiazioni che emette dando così una spiegazione delle righe nere osservate da Fraunhofer e permettendo di trarre delle conclusioni sulla composizione dell'atmosfera solare. Kirchhoff dimostrò poi che:

Ad una determinata temperatura e per una determinata lunghezza d'onda, il rapporto tra il potere emissivo e quello d'assorbimento è lo stesso per tutti i corpi.

Indicato con e il potere emissivo e con a quello d'assorbimento possiamo esprimere la legge di Kirchhoff scrivendo che:

$$\frac{e(\lambda, T)}{a(\lambda, T)} = f(\lambda, T) \quad (1)$$

$f(\lambda, T)$ è quindi una *funzione universale*, non dipendendo dalla natura del corpo preso in considerazione. Kirchhoff espresse l'augurio che la formulazione esplicita di questa legge non avrebbe incontrato grosse difficoltà perché “...*tutte le funzioni indipendenti dalla natura dei corpi sinora incontrate hanno una forma semplice*”. Come sappiamo, questo auspicio venne eluso dagli sviluppi successivi: la forma della funzione universale non risultò semplice, ci vollero quarant'anni circa per ottenerne l'espressione e più di sessanta per delinearne una deduzione rigorosa.

Kirchhoff definì “*corpo nero perfetto, o più brevemente, corpo nero*” come quello che assorbe tutta la radiazione incidente, qualunque sia la sua lunghezza d'onda. Essendo quindi uguale ad uno il potere d'assorbimento del corpo nero, il suo potere emissivo coincide con la funzione universale definita dall'equazione (1). Kirchhoff mostrò poi, con considerazioni termodinamiche, che, all'equilibrio termico, la radiazione contenuta in una cavità le cui pareti siano impermeabili alla radiazione è della stessa “*qualità ed intensità*” di quella di un corpo nero alla stessa temperatura. Questa conclusione contiene implicitamente l'idea che per realizzare in laboratorio un corpo nero si debba usare una cavità isoterma con un piccolo foro. Infatti, la radiazione entrante viene, con buona approssimazione, tutta assorbita rendendo quindi molto prossimo ad 1 il potere di assorbimento della cavità; d'altra parte, la radiazione uscente dal foro, se sufficientemente piccolo, non altera apprezzabilmente le condizioni di equilibrio della cavità. Il fascio di radiazione uscente è quindi un campione della radiazione della cavità. Tuttavia, l'idea che cavità isoterme potessero essere usate per lo studio della radiazione di corpo nero fu espressa esplicitamente solo nel 1884 da C. Christiansen e la prima cavità costruita ed utilizzata a questo scopo fu quella di Lummer e Wien (1895).

Nel 1879 Stefan, basandosi su dati sperimentali di altri autori, sostenne che l'energia totale emessa da un corpo nero è proporzionale a σT^4 . Oggi noi sappiamo che l'inferenza di Stefan fu piuttosto audace, nel senso che i dati a sua disposizione non permettevano di trarre una conclusione certa.⁴ Tuttavia prima della sua “*conferma*” sperimentale, la legge di Stefan trovò una dimostrazione teorica da parte di Boltzmann nel 1884. L'idea da cui partì Boltzmann era contenuta in un lavoro del fisico italiano Adolfo Bartoli pubblicato nel 1876 a Firenze e riprodotto dallo stesso Bartoli in un articolo comparso su *Il Nuovo Cimento* nel 1884. Bartoli, utilizzando un brillante “esperimento ideale” sulla radiazione termica, dimostrò che era possibile far passare, attraverso un ciclo, calore da un corpo ad un altro a temperatura superiore. Per il secondo principio della termodinamica questo trasferimento richiede un lavoro equivalente. Secondo Bartoli, l'ipotesi “più semplice” - anche se non l'unica - per spiegare l'origine di tale lavoro, è quella di supporre che la *radiazione termica* eserciti una pressione. Boltzmann, riprendendo l'idea di Bartoli e supponendo esplicitamente la radiazione termica come costituita da onde elettromagnetiche, stabilì che la pressione della radiazione termica sulle pareti di una cavità completamente assorbente è data da $\frac{1}{3}u$, ove u è la densità di energia all'interno della cavità.⁵ Applicando poi considerazioni puramente termodinamiche alla radiazione della cavità, ricavò la legge di Stefan.

Nel 1893 Wien, combinando, come già aveva fatto Boltzmann, elettromagnetismo e termodinamica, dimostrò che la densità di energia della radiazione in una cavità isoterma è data dall'espressione:

$$u(\nu, T) = \nu^3 f\left(\frac{\nu}{T}\right) \quad (2)$$

Questa legge⁶ svolse un ruolo di fondamentale importanza nello sviluppo successivo dello studio della radiazione di corpo nero. Da allora in poi il problema teorico fu quello di mettere a punto una deduzione rigorosa dell'espressione della funzione $f(\nu/T)$ o, più modestamente, di trovarne in qualche modo un'espressione che interpolasse i risultati sperimentali. Tuttavia, dati sperimentali attendibili incominciarono a comparire solo dopo che Lummer e Wien costruirono la prima cavità realizzata sulla base del suggerimento di Christiansen.

⁴I dati sperimentali ottenuti da Tyndall, sui quali essenzialmente si basava la conclusione di Stefan, provenivano da misure effettuate con fili di platino incandescenti che erano ben lungi dal poter essere considerati dei “*corpi neri*”. La legge di Stefan fu posta su solide basi sperimentali solo nel 1897 da Paschen, Lummer e Pringsheim, Mendenhall e Saunders.

⁵Il fattore $\frac{1}{3}$ deriva da un processo di media su tutte le possibili direzioni di incidenza della radiazione sulle pareti.

⁶Questa legge è nota con il nome di legge dello spostamento perché da essa si può dedurre che $\lambda_M T = \text{costante}$ ove λ_M è la lunghezza d'onda del massimo di intensità della radiazione di corpo nero in funzione della lunghezza d'onda.

Altrettanto importante fu, per il progresso delle misure sulla radiazione di corpo nero l'invenzione da parte dell'astrofisico americano Langley del bolometro (1880), la cui sensibilità era di un ordine di grandezza superiore a quella delle termocoppie in serie (termopile) sino ad allora usate. Determinate fu quindi il fatto che, verso la fine del secolo, si potesse disporre, per lo studio della radiazione di corpo nero, di una nuova sorgente e di un nuovo rivelatore. Non è infatti casuale che il periodo 1860 - 1895 sia stato essenzialmente caratterizzato da progressi teorici (Kirchhoff, Boltzmann e Wien), con marginali contributi sperimentali e che nel successivo quinquennio si sia invece realizzata una felice interazione tra teoria ed esperimento. Questi due periodi, così profondamente diversi tra loro, mostrano non solo l'efficacia di uno sviluppo armonico di teoria ed esperimento, ma anche il ruolo fondamentale svolto dallo sviluppo tecnico. Anche gli aspetti istituzionali non vanno trascurati: presso l'Istituto Imperiale di Fisica e Tecnica, fondato a Berlino nel 1887, si sviluppò una serie di ricerche sulle proprietà della radiazione di corpo nero che diede un contributo decisivo sul versante sperimentale. Infatti fu in questo Istituto che nel 1895, come già ricordato, Lummer e Wien misero a punto la prima sorgente di radiazione di corpo nero basata sull'idea della cavità isoterma; e da questo Istituto uscirono, a cavallo tra i due secoli, i dati sperimentali più significativi, resi ancora più importanti dalla vicinanza fisica di Planck, professore a Berlino a partire dal 1889.

Nel 1896 Wien pubblicò un'articolo in cui, sulla base di alcune ipotesi, arrivò alla conclusione che:

$$u(\nu, T) = a\nu^3 e^{-b\nu/T} \quad (3)$$

Wien, partì dall'ipotesi che per le molecole di un solido emettente la radiazione di corpo nero valesse la legge di distribuzione delle velocità di Maxwell-Boltzmann.⁷ Wien suppose inoltre che la frequenza e l'intensità della radiazione emessa dalle molecole dipendesse solo dalla loro velocità e che, a sua volta, il quadrato della velocità delle molecole dipendesse solo dalla frequenza emessa. Partendo dalla funzione di distribuzione di Maxwell-Boltzmann:

$$Av^2 e^{-v^2/aT} \quad (4)$$

Wien arrivò così a scrivere che:

$$u(\nu, T) = f(\nu) e^{g(\nu)/T} \quad (5)$$

Imponendo infine che la (5) avesse la forma richiesta dalla sua legge dello spostamento, Wien pervenne alla (3). La (3), nonostante fosse fondata su

⁷Questa ipotesi era precedentemente stata usata da V.A. Michelson, "Essai théorique sur la distribution de l'énergie dans les spectra des solides", Journal de Physique, **6**, 467-480 (1887).

ipotesi assai discutibili, apparve in buon accordo con i dati ottenuti da Paschen (1897) e da Paschen e Wanner (1899). L'accordo era ritenuto soddisfacente al punto tale da invogliare Planck a ricercare una deduzione rigorosa della "legge di Wien" data dalla (3).

3 Il percorso di Planck

Una delle ipotesi fondamentali del procedimento usato da Wien per arrivare alla (3) era costituito dall'estensione della legge di distribuzione delle velocità di Maxwell - Boltzmann alle molecole di un solido. Questa legge di distribuzione, secondo la teoria cinetica dei gas rappresenta le condizioni di equilibrio di un processo irreversibile che ha avuto origine da condizioni iniziali arbitrarie. Siccome la radiazione di corpo nero non dipende dalla natura dei materiali di cui esso è costituito, Planck iniziò a lavorare su di un modello di cavità in cui le pareti erano costituite da "risonatori" cioè da oscillatori armonici elettricamente carichi in grado di scambiare energia con la radiazione elettromagnetica alla loro propria frequenza di oscillazione. Planck riteneva che, considerando un insieme di risonatori interagenti con la radiazione e supponendo arbitrarie le condizioni iniziali, si potesse pervenire, attraverso un processo *irreversibile* descritto dalla teoria di Maxwell - Hertz, ad una situazione di equilibrio: la radiazione in equilibrio con i risonatori sarebbe stata allora la radiazione di corpo nero. Secondo Planck l'irreversibilità del processo di raggiungimento dell'equilibrio termico del sistema (radiazione+risonatori) era assicurato da alcune caratteristiche direzionali nel tempo del processo di emissione di radiazione da parte dei risonatori. Tuttavia, Boltzmann osservò che le leggi dell'elettromagnetismo non possono descrivere, in assenza di ulteriori condizioni, processi irreversibili; sottolineò anche che, per quanto concerne la teoria cinetica dei gas, le leggi della meccanica non possono condurre ad alcun processo irreversibile, a meno che non si introduca qualche ipotesi aggiuntiva come quella del *disordine molecolare* iniziale. Planck tenne conto delle osservazioni di Boltzmann introducendo l'ipotesi della *radiazione naturale*⁸ che, nelle sue intenzioni, avrebbe dovuto svolgere lo stesso ruolo svolto dall'ipotesi del *disordine molecolare* nella teoria cinetica dei gas. Questo approccio di Planck alla teoria della radiazione del corpo nero è interessante non tanto per i risultati acquisiti, quanto per l'impianto concettuale. Infatti, lo scopo di individuare un sistema fisico retto dalle leggi dell'elettromagnetismo e per il quale valesse, senza ipotesi ulterio-

⁸ "Quando si dice che un raggio elettromagnetico possiede le proprietà della radiazione naturale, si dovrebbe intendere che l'energia della radiazione è distribuita in modo completamente irregolare tra le vibrazioni parziali di cui si può pensare composto il raggio." M. Planck, *Annalen der Physik*, **1**, 69-122, p. 73 (1900).

ri, il secondo principio della termodinamica, non venne raggiunto. Tuttavia, l'ipotesi della radiazione naturale permise a Planck di definire l'entropia della radiazione e di ricercare la funzione di distribuzione della radiazione di corpo nero imponendo che l'entropia del sistema (radiazione+risonatori) fosse massima. Non solo: nel contesto di questo programma di ricerca, Planck ricavò, *basandosi solo sulle leggi dell'elettromagnetismo*, la formula:

$$u(\nu, T) = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} \bar{U}_\nu \quad (6)$$

che esprime la densità di energia della radiazione nella cavità $u(\nu, T)$ in funzione dell'energia vibrazionale media del risonatore \bar{U}_ν . Come vedremo, questa formula diverrà il punto di partenza per tutti i tentativi di deduzione della legge di distribuzione della radiazione di corpo nero sino all'approccio innovativo di Einstein del 1917.

Le linee essenziali del percorso di Planck erano ormai tracciate ed egli le seguì per una deduzione “*rigorosa*” della legge di distribuzione di Wien. Il procedimento seguito da Planck nella deduzione della legge di distribuzione di Wien e, successivamente, della “legge di Planck”, è costituito dall'uso congiunto di quattro relazioni:

- 1) La prima è la relazione (6) da lui ricavata tra densità di energia della radiazione nella cavità ed energia vibrazionale media del risonatore.
- 2) la seconda è una relazione, da determinarsi, tra l'entropia e l'energia vibrazionale media del risonatore. Nel caso specifico, Planck *assunse* che detta relazione fosse data da:

$$S = -\frac{\bar{U}}{b\nu} \ln \frac{\bar{U}}{e a \nu} \quad (7)$$

dove e è la base dei logaritmi naturali.

- 3) la terza è:

$$\frac{\partial S}{\partial \bar{U}} = \frac{1}{T} \quad (8)$$

che altro non è che il primo principio della termodinamica scritto per una trasformazione a volume costante.

- 4) La formula per la distribuzione in energia della radiazione di corpo nero ottenuta attraverso i passi 1 - 3, deve infine obbedire alla legge dello spostamento di Wien (2).

E' facile verificare che risolvendo la (7) e la (8) rispetto a \bar{U} e sostituendo il valore così ottenuto nella (6), si ottiene la legge di distribuzione di Wien (3). Siccome Planck riteneva che l'espressione dell'entropia del risonatore data dalla (7) fosse l'unica consistente con il secondo principio della termodinamica e con la legge dello spostamento di Wien, egli ritenne di avere ricavato in modo rigoroso la formula proposta da Wien per la radiazione di corpo nero. Scrisse

infatti: [la definizione dell'entropia di un risonatore e la formula di Wien che ne consegue] . . . sono una necessaria conseguenza dell'applicazione del principio della crescita dell'entropia alla teoria elettromagnetica della radiazione e, [perciò] i limiti di validità della legge [di Wien], se ce ne sono, coincidono con quelli della seconda legge della termodinamica.⁹

Prima di procedere oltre, è necessario qualche commento sul procedimento usato da Planck e schematizzato nei tre passi 1 - 3, sopra riportati. Va innanzitutto osservato che, di fronte alla (6), la scelta più naturale avrebbe dovuto essere quella di cercare direttamente una espressione per $\bar{U}(\nu, T)$, cioè, per l'energia media del risonatore. Gli storici della fisica hanno dato spiegazioni diverse del comportamento "anomalo" di Planck. Un elemento tuttavia, appare indiscutibile: la continuità concettuale dell'approccio di Planck. Questa continuità è emblematicamente rappresentata dal ruolo assegnato da Planck al concetto di entropia: il tentativo iniziale tendente a descrivere un sistema fisico retto dalle equazioni di Maxwell e "spontaneamente" subordinato al secondo principio della termodinamica era, come abbiamo visto, fallito; tuttavia, proprio da questo programma di ricerca emerse per Planck il ruolo centrale dell'entropia nella descrizione delle proprietà della radiazione di corpo nero. Non è quindi sorprendente, da questo punto di vista, che Planck continuasse a privilegiare, pur nelle mutate condizioni, una descrizione centrata sul concetto di entropia. Fu proprio questo comportamento "anomalo" di Planck a condurlo alla stretta decisiva da cui emerse la costante h e successivamente, ma non per opera di Planck, l'idea della "quantizzazione" dell'energia del risonatore. La seconda osservazione riguarda l'espressione dell'entropia del risonatore data dalla (7). Planck non spiegò l'origine di questa espressione. Verosimilmente quello che Planck fece, fu di ricavare l'espressione (7) dalla legge di distribuzione di Wien con l'ausilio della (8) e ripercorrere poi, assumendo la (7), il cammino inverso.

Tuttavia, la convinzione di avere finalmente risolto teoricamente il problema del corpo nero, durò molto poco. Già verso la fine del 1899 (precisamente il 3 novembre) Lummer e Pringsheim in una comunicazione presentata a una riunione della Società Tedesca di Fisica indicavano l'esistenza di "discrepanze sistematiche tra teoria [il riferimento è alla formula di Wien] ed esperimento". In una sessione del 2 febbraio 1900, Lummer e Pringsheim sottolineavano che queste discrepanze erano maggiori nella regione dello spettro a grandi lunghezze d'onda (le loro misure si erano nel frattempo estese sino a 18μ). Successivamente, Rubens e Kurlbaum, estendendo le misure sino a 51.2μ , osservarono che, per grandi lunghezze d'onda e temperature elevate la densità della radiazione era proporzionale alla temperatura assoluta T . Secondo la testimonianza di uno studente di Planck (Gerhard Hettner), Planck venne a conoscenza di

⁹M. Planck, *Annalen der Physik*, **1**, 69-122, p. 69 (1900).

questi nuovi risultati durante una visita domenicale di Rubens, il 7 ottobre 1900. Il 19 ottobre, di nuovo durante una riunione della Società Tedesca di Fisica, Rubens e Kurlbaum presentarono una comunicazione sulla “Emissione da parte di un corpo nero [di radiazione] di grandi lunghezze d’onda” e Planck presentò una comunicazione intitolata “Un miglioramento delle legge spettrale di Wien”. Siamo all’inizio della svolta. Planck si era convinto che la legge di Wien costituiva ormai una buona interpolazione dei dati sperimentali solo per grandi valori del rapporto ν/T . D’altra parte non c’era alcuna ragione per abbandonare o modificare il procedimento da lui usato per “dimostrare” la legge di distribuzione di Wien: il punto debole del procedimento era evidentemente rappresentato dall’espressione dell’entropia (7); era solo necessario sostituire ad essa una espressione tale da fornire una formula di distribuzione in grado di interpolare tutti i dati sperimentali disponibili. Scrisse Planck:

... alla fine iniziai a costruire espressioni per l’entropia [del risonatore] completamente arbitrarie che, sebbene siano più complicate di quella di Wien, sembrano ancora soddisfare quasi completamente tutti i requisiti della termodinamica e della teoria elettromagnetica. Sono stato particolarmente attratto da una delle espressioni così costruite che è quasi semplice come l’espressione di Wien e che merita di essere presa in considerazione perché l’espressione di Wien non è sufficiente per interpolare tutte le osservazioni [sperimentali]. Otteniamo questa espressione ponendo

$$\frac{d^2 S}{d\bar{U}^2} = \frac{\alpha}{\bar{U}(\beta + \bar{U})} \quad (9)$$

Essa è di gran lunga la più semplice espressione che conduce ad una dipendenza logaritmica di S da \bar{U} - [dipendenza] che è suggerita da considerazioni probabilistiche - e che si riduce inoltre alla espressione di Wien per piccoli valori di \bar{U} .

Planck si riferisce qui al fatto che derivando due volte la (7) si ottiene la seguente relazione:

$$\frac{d^2 S}{d\bar{U}^2} = \frac{\text{costante}}{\bar{U}} \quad (10)$$

cui la (9) si riduce per piccoli valori di \bar{U} . Quindi, alla fine di un processo di “prova ed errore” Planck scelse la (9) che appare come il risultato di una piccola modifica della (10), consistente nell’introdurre al denominatore un termine in \bar{U}^2 . Planck ottenne così la relazione:

$$u(\nu, T) = \frac{A\nu^3}{e^{B\nu/T} - 1} \quad (11)$$

... che, per quanto si può giudicare al momento, interpola i dati sperimentali sinora pubblicati con la stessa precisione delle migliori equazioni proposte per lo spettro [della radiazione], cioè quelle di Thiesen, Lummer - Jahnke e Lummer - Pringsheim. Mi permetto pertanto di attirare la vostra attenzione su questa nuova formula che io considero la più semplice possibile dal punto di vista della teoria elettromagnetica della radiazione, se si eccettua l'espressione di Wien.

Le conclusioni di Planck erano quindi caute per almeno due ragioni: i dati sperimentali erano ancora incompleti e la “sua” formula, sebbene inserita in un contesto teorico dalle solide fondamenta e teoricamente più consistente delle altre formule citate da Planck, era comunque il risultato di una interpolazione matematica “arbitraria” e priva di interpretazione fisica. Planck si dedicò quindi alla ricerca di una interpretazione fisica dell'espressione dell'entropia del risonatore che l'aveva condotto alla (11). E' questo l'argomento della memoria presentata da Planck alla riunione della Società Tedesca di Fisica del 14 dicembre 1900. E' in questa memoria che compare per la prima volta la costante h . Inoltre, a questa memoria gli odierni manuali di fisica e molte delle ricostruzioni storiche fanno risalire la quantizzazione dell'energia dell'oscillatore armonico: vedremo più avanti come questa attribuzione non sia suffragata dai dati disponibili.

Due sono i punti cruciali della memoria del 14 dicembre 1900: l'uso della formula di Boltzmann che esprime l'entropia di un sistema fisico in funzione della probabilità dei suoi possibili stati, ed il calcolo di questa probabilità. Planck utilizzò la formula:

$$S = \text{costante} \times \ln R \quad (12)$$

ove R è il numero di “complezioni” corrispondenti allo stato del sistema preso in considerazione. Per “complezioni” Planck intende il numero dei modi in cui lo stato considerato può essere realizzato. Attraverso questa formula la fisica statistica fa il suo ingresso nella teoria della radiazione di corpo nero e nella fisica dei quanti. Vediamo ora come Planck calcola R . Planck suddivide i risonatori presenti nella cavità in gruppi in modo tale che i risonatori di ogni gruppo abbiano la stessa frequenza. Considerato uno di questi gruppi - N risonatori di frequenza ν a cui è attribuita l'energia E - il problema è quello di vedere come l'energia E può essere distribuita tra gli N risonatori. A questo proposito, Planck osserva che:

Se E è considerata come una quantità divisibile in modo continuo, questa distribuzione è possibile in un numero infinito di modi.

Tuttavia, noi supponiamo - questo è il punto essenziale di tutto il procedimento - che E sia composta di un numero ben definito di parti uguali ed useremo d'ora innanzi la costante della natura $h = 6.55 \times 10^{-27}$ erg sec. Questa costante, moltiplicata per la frequenza ν dei risonatori ci dà l'elemento di energia ε , e, dividendo E per ε otteniamo il numero P degli elementi di energia che debbono essere suddivisi tra gli N risonatori. Se il rapporto non è un intero, noi prendiamo per P un intero vicino.

E' questo il passo della memoria sulla cui base viene attribuita a Planck la quantizzazione dei livelli di energia del risonatore. Tuttavia:

a) Planck non scrive da alcuna parte che l'energia di un risonatore può assumere solo valori discreti. Il considerare E come composta da “*un numero ben definito di parti uguali*” costituisce innanzitutto un'affermazione intorno all'energia E complessivamente attribuita agli N risonatori. In secondo luogo, se Planck avesse concepito l'energia del singolo risonatore come quantizzata, non sarebbe stata necessaria la precisazione intorno ai valori di P non interi: in questo caso infatti, E avrebbe dovuto necessariamente essere un multiplo intero di ε . La suddivisione di E in “*un numero ben definito di parti uguali*” appare pertanto come un necessario procedimento di calcolo al fine di ottenere per il numero R delle “*complezioni*” un valore finito. Questo procedimento non è tuttavia privo, per Planck, di significato fisico. Esso infatti porta alla luce la “*costante della natura*” h il cui significato tuttavia non appare chiaro nel contesto della memoria che stiamo discutendo.

b) l'ipotesi della quantizzazione è in contraddizione con la (6) che si ricava supponendo che lo scambio di energia tra risonatore e radiazione avvenga in modo continuo.

Le tradizionali ricostruzioni storiche ci presentano quindi un Planck che: non esplicita chiaramente un'ipotesi fortemente innovativa come quella della quantizzazione dell'energia; utilizza questa ipotesi dopo aver assunto che lo scambio di energia tra risonatore e radiazione avvenga in modo continuo senza avvedersi della contraddizione o senza farne cenno. Indipendentemente da quanto scritto da Planck nella memoria del 14 dicembre e dalle possibili interpretazioni di essa, questo comportamento di Planck appare del tutto improbabile. Come vedremo in seguito, gli sviluppi successivi dell'atteggiamento di Planck rendono ancora meno credibile la ricostruzione storica tradizionale mentre si inquadrano coerentemente nell'interpretazione qui proposta.¹⁰

¹⁰Questa interpretazione è stata proposta per la prima volta da Thomas Kuhn in “Black-Body Theory and the Quantum Discontinuity: 1894-1912”, Oxford-New York, (1978); trad. it. “Alle origini della fisica contemporanea. La teoria del corpo nero e la discontinuità quantica”, Il Mulino, Bologna (1981). Kuhn, a sostegno della sua tesi, utilizza anche ampie

Ma torniamo alla memoria. Vediamo come Planck effettua il calcolo del numero dei modi (“complezioni”) in cui P elementi di energia possono essere distribuiti tra N risonatori. Planck (senza alcun commento) effettua il conteggio considerando *indistinguibili* gli elementi di energia e *distinguibili* i risonatori. Ottiene così la formula:

$$R = \frac{(N + P - 1)!}{(N - 1)!P!} \quad (13)$$

A questo punto, Planck avrebbe dovuto ricercare il massimo dell’espressione $\text{costante} \times \ln R$ mantenendo costante l’energia totale dei risonatori ed il loro numero. In effetti Planck accenna ad un procedimento analogo (ma non identico) a quello qui indicato, ma non lo segue. Planck percorre invece una scorciatoia, peraltro non illustrata, che lo porta rapidamente alla formula cercata. Tenendo anche conto dell’articolo pubblicato da Planck nel 1901¹¹ è possibile ricostruire il percorso della “scorciatoia”. Dall’espressione di R si ottiene, supponendo che tutte le complezioni siano equiprobabili, quelle dell’entropia degli N risonatori e, dividendo per N , quella dell’entropia di un singolo risonatore che risulta data da:

$$S = k \left[\left(1 + \frac{\bar{U}}{\varepsilon} \right) \ln \left(1 + \frac{\bar{U}}{\varepsilon} \right) - \frac{\bar{U}}{\varepsilon} \ln \frac{\bar{U}}{\varepsilon} \right] \quad (14)$$

Questa espressione ha la stessa forma di quella che Planck aveva già ricavato per ottenere, nella memoria del 19 ottobre, la formula della radiazione di corpo nero. Quindi Planck “sa” che la (14) corrisponde a quella dell’equilibrio termico. Basta quindi applicare la solita procedura (si vedano i punti 1 - 4) per ricavare la formula della radiazione di corpo nero.

Ritorniamo ora alla questione della quantizzazione dell’energia del risonatore, prendendo in considerazione la posizione assunta da Planck negli anni successivi. Planck ritorna in modo sistematico sul problema della radiazione di corpo nero nel 1906, anno di pubblicazione delle sue “Lezioni sulla teoria della radiazione termica”.¹² In queste lezioni Planck effettua il calcolo delle “complezioni” anche facendo ricorso ad una rappresentazione nello spazio bidimensionale delle fasi individuato dal momento del risonatore e dal suo momento coniugato. Come è noto, in questa rappresentazione, le curve ad energia costante sono delle ellissi: Planck parla “*della probabilità che l’energia di un risonatore si trovi tra i valori U e $U + \Delta U$* ”.¹³ Questo passaggio non citazioni tratte dalla corrispondenza di Planck con i suoi contemporanei. Questa parte del libro di Kuhn è particolarmente importante per il periodo che va dalla pubblicazione delle “lezioni” (1906) alla comparsa della “seconda teoria” di Planck (1912).

¹¹M. Planck, “Ueber das Gesetz der Energieverteilung im Normalspectrum”, *Annalen der Physik*, **4**, 553-563 (1901).

¹²M. Planck, “Vorlesungen über die Theorie der Wärmestrahlung”, Lipsia (1906).

¹³Vedi la nota precedente, pp. 154-156.

ha chiaramente senso al di fuori di un contesto in cui l'energia del risonatore varia in modo continuo. Bisogna poi attendere il 1912 per avere un'altra presa di posizione pubblica di Planck sulla teoria della radiazione di corpo nero. In una memoria presentata alla riunione della Società Tedesca di Fisica del 12 gennaio 1912, Planck sviluppa una nuova teoria (detta poi "seconda teoria" di Planck), in cui l'assorbimento di energia da parte del risonatore (ora chiamato "oscillatore") è un processo continuo mentre discontinuo è invece il processo di emissione.¹⁴ In particolare Planck suppone che l'emissione possa avvenire solo quando l'energia dell'oscillatore assume il valore $nh\nu$, con n intero: allora la probabilità che venga emessa l'energia $nh\nu$ è data da η con η che non dipende dall'energia dell'oscillatore ma è tale che $(1 - \eta)/\eta$ è proporzionale "*all'intensità della vibrazione che eccita l'oscillatore*". Due anni dopo Planck presenterà una modificazione della sua "seconda teoria" in cui anche il processo di emissione viene considerato come continuo e la discontinuità viene attribuita all'interazione tra oscillatori e particelle (molecole, atomi ed elettroni liberi) contenute nella cavità. L'interazione oscillatore - radiazione è quindi descritto interamente dalle equazioni di Maxwell; è invece lo scambio di energia tra oscillatori e particelle che può avvenire solo attraverso multipli interi di $h\nu$. Questi tentativi di Planck, coronati da successo per quanto concerne l'obiettivo di ricavare la formula della radiazione di corpo nero, non ebbero tuttavia grande risonanza perché effettuati in un periodo in cui l'idea della quantizzazione dell'energia stava ormai radicandosi nella comunità dei fisici. Questi tentativi sono peraltro assai significativi nel contesto di quello che abbiamo chiamato "il percorso di Planck". Essi, alla luce dell'interpretazione qui proposta, appaiono infatti come gli ultimi tentativi di resistenza, da parte di Planck, all'idea della quantizzazione dei livelli di energia del risonatore. La via, inconsapevolmente aperta da Planck il 14 dicembre 1900, si era ormai tramutata in una strada maestra.

¹⁴M. Planck, "Über die Begründung des Gesetz der schwarzen Strahlung", Verh. d. Deutsch. Phys. Ges., **15**, 113-118 (1912).