lineamenti di elettromagnetismo

giuseppe giuliani

ilaria bonizzoni

La Goliardica Pavese

lineamenti di elettromagnetismo

giuseppe giuliani

ilaria bonizzoni

Pavia, 2021

Prefazione a questa edizione

Penso possa essere di qualche interesse proporre la riedizione di questo manuale del 2004 in formato digitale. Il testo qui presentato è quello originale pubblicato da La Goliardica Pavese: sono stati corretti alcuni errori e riscritti alcuni brevi passaggi della sezione II.5.

Giuseppe Giuliani

Pavia, agosto 2021

a Marisa g.g.

ai miei genitori i.b.

Indice

Prefazione a questa edizione	3
Prefazione	ix
I Scienza e Fisica	1
I.1 Introduzione	1
I.2 Le tre componenti della Scienza	3
I.3 I presupposti della Scienza	3
I.3.1 Fisica e realtà	4
I.3.2 Il ruolo della misura	5
I.3.3 Immagini del mondo	7
I.3.4 Teoria ed esperimento	9
II Sistemi inerziali	11
II.1 Spazio e tempo	11
II.1.1 Costruzione di una funzione $f(t)$	13
II.1.2 La durata di un fenomeno	14
II.2 Sistemi di riferimento inerziali: I	14
II.2.1 Definizione operativa di lunghezza	16
II.2.2 Definizione operativa di velocità	17
II.2.3 Come si misura l'accelerazione	18
II.3 Le trasformazioni di Galileo	19
II.3.1 Il principio di invarianza di Galileo	21
II.3.2 La dinamica newtoniana	22
II.3.3 Massa inerziale e massa gravitazionale	24
II.4 Esperimenti ideali con lampi di luce	25
II.4.1 'Dilatazione del tempo'	26
II.5 Verifica sperimentale della 'dilatazione del tempo'	29
II.5.1 Effetto Doppler: I	32

II.5.2 'Contrazione delle lunghezze'	33
II.5.3 Le trasformazioni di Lorentz: I	36
II.6 Se <i>t</i> è una coordinata	38
II.6.1 Le trasformazioni di Lorentz: II	42
II.7 Principio di invarianza di Einstein	43
II.8 La nozione di spazio - tempo	44
II.8.1 Cinematica relativistica	46
II.8.2 Dinamica relativistica	48
II.9 Materia, massa ed energia	52
II.9.1 <i>Red - shift</i> gravitazionale	58
II.10 La radiazione cosmica di fondo	62
II.11 Sistemi di riferimento inerziali: II	64
II.12 Derivazione di trasformazioni di coordinate simil - Lorentz	66
III Maxwell e Lorentz	75
III.1 Cariche e correnti	75
III.2 Le equazioni di Maxwell nel vuoto	77
III.2.1 Invarianza delle equazioni di Maxwell	78
III.2.2 Implicazioni delle equazioni di Maxwell	80
III.2.3 Nata nell'Etere	81
IV Campi, potenziali, onde	83
IV.1 I potenziali scalare e vettore	83
IV.1.1 Soluzione in assenza di sorgenti	86
IV.1.2 Grandezze sinusoidali	90
IV.1.3 Serie e integrali di Fourier	93
IV.1.4 Soluzione in presenza di sorgenti	94
IV.2 L'energia del campo elettromagnetico	96
IV.3 Campo di una carica puntiforme	99
IV.3.1 Campo di una carica puntiforme in moto qualunque	101
IV.3.2 Campo di una carica puntiforme in moto rettilineo uni-	
forme	107
IV.4 Elettromagnetismo e quadrivettori	110
IV.4.1 Un'applicazione del formalismo relativistico	112
V Onde e particelle	113
V.1 Interferometro di Michelson	116
V2 Coerenza di fasci di luce	119
V.3 Emissione della radiazione	121

	124
	128
	130
	132
	133
	134
	140
	143
	145
	147
	150
	153
	156
	158
	158
	160
	160
	163
	168
	169
	175
	177
	177
	180
	181
	184
	186
	186
	188
	189
	191
	193
	195
	000
	200
0	200 202
0	200 202 203
0	200 202 203 204

VI.5 Effetti magnetici sulle correnti	208
VI.5.1 Definizione dell'unità di corrente	208
VI.5.2 Circuito rigido	209
VI.5.3 Spira rettangolare	209
VI.5.4 Spira elementare	210
VI.6 Effetto Hall	212
VI.6.1 Effetto Hall quantico	214
VII Proprietà magnetiche	215
VII.1 Introduzione	215
VII.1.1 Micro - correnti e magnetizzazione	216
VII.1.2 Proprietà magnetiche ed equazioni	
di Maxwell	218
VII.1.3 Una classificazione fenomenologica	219
VII.2 Il modello di Bohr dell'atomo di idrogeno	220
VII.3 Fisica quantica e livelli atomici	227
VII.4 Un dettaglio <i>fine</i> : la riga H_{α} dell'idrogeno	230
VII.5 Modelli microscopici	233
VII.5.1 Un modello ibrido: elettrone su orbita circolare	233
VII.5.2 L'esperimento di Stern e Gerlach	236
VII.5.3 Paramagnetismo: descrizione quantica	239
VII.5.4 Diamagnetismo: modello classico	240
VII.5.4.1 Effetto Zeeman	243
VII.5.5 Ferromagnetismo: descrizione fenomenologica	246
VIII Onde elettromagnetiche negli isolanti	251
VIII.1 Le equazioni di Maxwell negli isolanti	251
VIII.2 Indice di rifrazione di un isolante	252
VIII.2.1 Dispersione attraverso un prisma	257
VIII.3 Continuità dei campi tra due mezzi isolanti	258
VIII.4 Riflessione e rifrazione	260
VIII.4.1 Intensità dell'onda riflessa e trasmessa	262
VIII.4.1.1 Polarizzazione perpendicolare	262
VIII.4.1.2 Polarizzazione parallela	264
VIII.4.1.3 Coefficienti di riflessione e trasmissione	265
VIII.4.1.4 Onda incidente non polarizzata	267
VIII.5 Riflessione totale	268

IX Onde elettromagnetiche nei metalli	271
IX.1 Conduzione elettrica nei metalli	271
IX.1.1 Campi elettrici costanti	272
IX.1.2 Campi elettrici sinusoidali: basse frequenze	276
IX.1.3 Dipolo oscillante	278
IX.1.4 Onde nei metalli: basse frequenze	280
IX.1.5 Onde nei metalli: alte frequenze	283
IX.1.6 Oscillazioni di plasma	285
IX.2 Effetto fotoelettrico	287
IX.3 Effetto Compton	288
X Luce polarizzata	291
X.1 Onde piane polarizzate	291
X.2 Materiali otticamente anisotropi	294
X.2.1 Dalle equazioni di Maxwell	295
X.2.2 Il ruolo dell'anisotropia	297
X.2.3 Ellissoide degli indici	298
X.2.4 Uso di materiali otticamente anisotropi	300
X.2.5 Misura della polarizzazione della luce	304
X.2.6 Appendice	305
X.3 Stati di polarizzazione dei fotoni	308
X.3.1 Fotoni, polaroid e lamine	310
X.4 Luce e momento angolare	313
X.4.1 Momento angolare della luce: esperimenti	313
XI Induzione elettromagnetica	317
XI.1 Introduzione	317
XI.2 La legge generale dell'induzione	319
XI.2.1 Derivazione dell'equazione (XI.7)	323
XI.2.2 $\vec{A} \circ \vec{B}$?	324
XI.3 Studio di casi particolari	325
XI.3.1 Barra metallica in moto	325
XI.3.2 Circuiti in corrente continua	330
XI.3.3 Il disco di Faraday: I	331
XI.3.4 Il disco di Corbino	335
XI.3.5 Il disco di Faraday: II	337
XI.3.6 Alternatore	338
XI.4 Faraday e l'induzione	339
XI.5 Maxwell e l'induzione	340

XI.6 Einstein e l'induzione
XII La fisica dei circuiti 345
XII.1 Introduzione
XII.2 Circuiti in corrente continua
XII.3 Il coefficiente di autoinduzione
XII.4 Chiusura e apertura di un circuito
XII.5 Il condensatore
XII.5.1 Carica di un condensatore
XII.5.2 Scarica di un condensatore
XII.5.3 La "corrente di spostamento"
XII.6 Circuiti in corrente alternata
XII.6.1 Legge del circuito in corrente alternata
XII.6.2 Il circuito <i>LC</i>
XII.6.3 Misura della costante dielettrica relativa 364
XII.6.4 Il circuito <i>RLC</i> in serie
XII.7 Condensatori e induttanze ad alte frequenze
XII.8 Cavità risonanti
XII.9 Onde guidate
XII.10 Linee di trasmissione
XII.11 Il trasformatore 382
XIII Strumenti e misure 385
XIII.1 Carica elettrica
XIII.1.1 L'esperimento di Millikan
XIII.2 Corrente elettrica
XIII.3 Differenza di potenziale
XIII.4 Resistenza elettrica
XIII.5 Campi elettrici
XIII.6 Campi magnetici
XIII.7 Frequenze
XIII.8 Energia
XIII.9 Osservazione
XIII.10 Sistema Internazionale delle unità di misura
XIII.11 Nuovi standards di unità di misura
XIV Glossario 393
Distribuzione maxwelliana

9	Statistica di Fermi - Dirac	395
5	Statistica di Bose - Einstein	395
]	Potenziale chimico	396
]	Reticoli cristallini	396
- -	Temperatura de Debye	399
9	Struttura a bande	400
(Quantità di moto cristallina	401
I	Massa effettiva	403
]	Isolanti	404
I	Metalli	404
9	Semiconduttori	406
(Giunzione $p-n$	410
(Giunzione $p - n$ polarizzata	412
]	Fononi	413
]	Laser	413
]	Piezoelettricità	416
7 Anno	ndiai matamatiaha	417
	Vettori e tensori	417
AV.1	XVI 1 Vettori e tensori nello snazio - tempo	417
1	XV1.2 Algebra tensoriale	121
1	XVI.2 Augebia tensoriale	423
XV2	Campi scalari e vettoriali	428
111.2	XV2 1 L'operatore gradiente	428
2	XV2.2 L'operatore divergenza	432
1	XV2 3 L'operatore rotore	432
2	XV2.4 Campi conservativi	433
2	XV.2.5 L'operatore ∇^2 (di Laplace)	435
2	XV.2.6 Gli operatori differenziali in coordinate polari	436
2	XV.2.7 Teoremi di Green e di Stokes	442
2	XV.2.8 Teorema di Helmoltz	442
XV.3 I	La funzione δ (di Dirac)	444
XV.4 I	L'equazione di Poisson dell'elettrostatica	447
XV.5 I	potenziali elettromagnetici	450
XV.6 I		
	potenziali ritardati	453
1	I potenziali ritardati	453 456
XV.7 (I potenziali ritardati	453 456 460

XV

XVI Cronologia XVI.1 Fenomeni elettrici e magnetici	465 465 478 486
Che cos'è che non va?	499
Costanti fisiche	503
Riferimenti bibliografici delle citazioni	
Indice analitico	511

Prefazione

Ragazzo, prendi e leggi. Se puoi arrivare sino alla fine di questo libro, non sarai incapace di comprenderne uno migliore. Siccome mi sono proposto non tanto di istruirti quanto di farti esercitare, non mi importa che tu adotti le mie idee o che tu le respinga, purché esse riescano ad impegnare tutta la tua attenzione. Qualcuno più abile ti insegnerà a conoscere le forze della natura; mi basterà di averti fatto saggiare le tue.

Denis Diderot

La fisica, come la scienza, è il prodotto di un processo storico. Ciò non implica, tuttavia, che essa debba essere studiata seguendo un percorso che riproduca le sequenze storicamente date, come solitamente avviene per lo studio dei fenomeni elettromagnetici.

L'approccio ipotetico - deduttivo, scelto per la trattazione dei fenomeni elettromagnetici *nel vuoto*, privilegia l'unitarietà della descrizione teorica, permette di porre naturalmente l'accento sugli aspetti concettuali ed epistemologici e conferisce ad ognuno dei capitoli così sviluppati una quasi completa autonomia: diventano quindi possibili letture parziali e percorsi diversi da quello proposto.

Questa impostazione, tuttavia, non discende da una rigida scelta metodologica. Sono stati ampiamente usati approcci fenomenologici, operativi ed euristici nonché modelli suggeriti dalla conoscenza empirica dei fenomeni o delle proprietà dei materiali. Particolare attenzione è stata rivolta alla valutazione degli ordini di grandezza.

Non è un manuale onnicomprensivo. La scelta e l'estensione degli argomenti ha seguito un percorso che parte da alcune riflessioni epistemologiche, rivisita la dinamica newtoniana, affronta il problema della trasformazione delle coordinate, sviluppa la relatività ristretta ed approda infine alla trattazione dei fenomeni elettromagnetici.

Alcuni argomenti sono stati trattati con un approccio non usuale:

 Il 'tempo' è considerato come una variabile matematica i cui valori, dal punto di vista operativo, sono 'mostrati' (non misurati) dagli orologi. Questa concezione del tempo, oltre ad essere ovviamente compatibile con le procedure sperimentali e l'interpretazione degli esperimenti, si dimostra particolarmente efficace nell'evitare l'insorgere (o nel favorire il superamento) di rappresentazioni scorrette.

- Le trasformazioni di coordinate tra due sistemi di riferimento inerziali sono ricavate seguendo due percorsi:
 - attraverso un insieme di esperimenti ideali, basati sullo scambio di segnali luminosi di durata idealmente nulla e sull'ipotesi della costanza della velocità della luce; come risultati intermedi si ottengono le formule della 'dilatazione del tempo' e della 'contrazione delle lunghezze'. In questo contesto è data una nuova definizione operativa della lunghezza di un'asta in moto;
 - utilizzando l'omogeneità e l'isotropia dello spazio, l'omogeneità della variabile tempo, nonché un principio di invarianza ridotto (cinematico), si ottengono trasformazioni che possono essere chiamate 'trasformazioni di Lorentz generalizzate'; assumendo la velocità limite in esse contenuta uguale alla velocità della luce nel vuoto, come richiesto dalle equazioni di Maxwell, si ottengono le trasformazioni di Lorentz.
- La trattazione dei fenomeni elettromagnetici inizia dal sistema di equazioni di Maxwell per il vuoto, integrato dall'espressione della forza di Lorentz. Posto in rilievo il carattere intrinsecamente relativistico della teoria di Maxwell Lorentz, si procede all'integrazione del sistema di equazioni di Maxwell in termini dei potenziali, prima in assenza di sorgenti, poi tenendo conto delle medesime. Come caso particolare è studiato il campo elettromagnetico generato da una carica puntiforme in moto qualunque; successivamente, quello di una carica puntiforme in moto inerziale, utilizzando sia i potenziali. L'elettrostatica e la magnetostatica nel vuoto sono studiate come casi particolari descritti dalle equazioni di Maxwell non dipendenti dalla variabile tempo.
- Nella discussione sul rapporto tra descrizione ondulatoria e corpuscolare della luce si sottolinea come il formalismo ondulatorio serva per descrivere il comportamento statistico dei fotoni. La trattazione corpuscolare dell'effetto Doppler per la luce mostra che esso

è un fenomeno compiutamente descritto solo dalle equazioni della dinamica relativistica. Si pone in rilievo come le trattazioni dei fenomeni interferenziali (esperimento delle due fenditure) basate, rispettivamente, sull'elettromagnetismo classico e sulla meccanica quantica, presentino più caratteristiche comuni di quanto comunemente inteso.

- Le proprietà di polarizzazione della luce sono discusse anche dal punto di vista corpuscolare ponendo in evidenza la connessione tra polarizzazione di un'onda e spin dei fotoni.
- Si deduce una legge generale dell'induzione elettromagnetica di cui la 'regola del flusso' è solo un caso particolare. La legge generale racchiude in sé le due origini, fisicamente distinte, della forza elettromotrice indotta: la variazione temporale del campo magnetico e la componente magnetica della forza di Lorentz. In questo contesto, si studia la fisica di un circuito in corrente continua la cui sorgente è costituita da una forza elettromotrice indotta.
- Il manuale è completato da una cronologia che ripercorre le tappe dello sviluppo storico dello studio dei fenomeni elettrici e magnetici, dei fenomeni luminosi e di quelli connessi alla struttura della materia.

Un glossario descrive sinteticamente alcuni termini usati, ma non trattati nel manuale.

Un'appendice matematica, curata da *Giancarlo Campagnoli*, fornisce gli strumenti matematici necessari e sviluppa alcuni calcoli non contenuti nei capitoli del manuale.

Sono state citate anche fonti presenti in rete non ostante la loro 'volatilità': la rete è ricca di testi (in lingua inglese) riguardanti, praticamente, tutti i fenomeni fisici e costituisce pertanto un prezioso strumento di studio e di lavoro. Si tratta solo di esercitare, nei loro confronti, uno spirito critico adeguato: quello stesso che, in realtà, andrebbe esercitato anche nei confronti dei testi a stampa.

Il nostro orientamento epistemologico è sinteticamente esposto nel primo capitolo. In alcune citazioni emergono posizioni epistemologiche diverse: la lettura dei testi originali nella loro interezza accentua, talora, questa diversità.

Una proficua lettura da parte degli studenti sarà assicurata dalle conoscenze acquisite in un buon corso di Fisica della Scuola Secondaria e dalla padronanza dei concetti e degli strumenti fondamentali del calcolo vettoriale e dell'Analisi Matematica.

I manuali servono anche per la preparazione degli esami. Ci permettiamo pertanto di suggerire allo studente di non trascurare le parti di testo in carattere minore. Raccomandiamo inoltre la lettura del saggio di Enrico Persico *Che cos'è che non va?* - riprodotto a pagina 499 - quale antidoto alla tendenza a privilegiare gli aspetti formali della descrizione matematica rispetto alla comprensione dei fenomeni in termini qualitativi - cosa succede e perché - e alla capacità di valutarne gli ordini di grandezza.

Ringraziamo tutti coloro, colleghi e studenti, che hanno contribuito a migliorare il risultato del nostro lavoro. In seguito ad una lettura parziale del manoscritto, sono state preziose le osservazioni, le critiche, i suggerimenti e le segnalazioni di errori di Silvia d'Addezio, Giovanni Falcone, Cristina Guanella, Olivia Levrini, Paoloantonio Marazzini, Barbara Mastracchio, Ezio Mognaschi, Fabio Pavesi e Giorgio Samoggia. Sono state fonte di sollecitazioni stimolanti le discussioni informali con (o seminari di) Silvio Bergia, Giancarlo Campagnoli, Antonio Casella, Gianfranco Chiarotti, Mario Guidone, Paolo Mascheretti, Francesco Melchiorri, Bruno Preziosi, Enrico Santamato e Andrew Zangwill (via *e* - mail).

Un ringraziamento particolare è dovuto a Giancarlo Campagnoli per la stesura delle appendici matematiche.

Saremo grati a tutti coloro che vorranno inviarci osservazioni e suggerimenti.

> Giuseppe Giuliani Ilaria Bonizzoni

Pavia, dicembre 2003.

giuseppe.giuliani@unipv.it ilaria.bonizzoni@unipv.it

http://fisica.unipv.it/percorsi/

Una lunga esperienza ha mostrato allo scienziato che diverse cose ostacolano la via verso una risposta corretta. Ha scoperto che non è sufficiente credere alle parole del suo vicino, ma che, se vuole essere sicuro, deve essere in grado di verificare un risultato egli stesso. Pertanto, lo scienziato è nemico di ogni autoritarismo. Inoltre, egli scopre che spesso fa degli errori e che deve imparare come evitarli. Non può permettersi alcun pregiudizio circa il tipo di risultato che otterrà, né di farsi influenzare da presunzioni favorevoli o preferenze personali.

Percy Bridgman

Capitolo I

Scienza e Fisica

La decisione di dedicarmi alla Scienza fu conseguenza diretta di una scoperta, che non ha mai cessato di riempirmi di entusiasmo fin dalla prima giovinezza: le leggi del pensiero umano coincidono con le leggi che regolano la successione delle impressioni che riceviamo dal mondo intorno a noi, sì che la logica pura può permetterci di penetrare il meccanismo di quest'ultimo. A questo proposito è di fondamentale importanza che il mondo esterno sia qualcosa di indipendente dall'uomo, qualcosa di assoluto.

Max Planck

I.1 Introduzione

Qual è lo scopo della Scienza?

Verso la fine dell'Ottocento Heinrich Hertz scriveva:

"Il problema più diretto e, in un certo senso, il più importante, che *la conoscenza consapevole della natura* ci permette di risolvere, è quello di poter anticipare gli eventi futuri, in modo tale che noi possiamo predisporre le nostre faccende in accordo con queste anticipazioni." ¹

La preminenza data da Hertz alla capacità predittiva della Scienza ne sottolinea il valore strumentale e/o applicativo. La "*conoscenza consapevole*

¹H. Hertz, *The principles of mechanics presented in a new form*, Dover Publications, New York, 1956, p. 1. Ristampa della prima edizione inglese del 1899. Dell'opera di Hertz è ora disponibile una traduzione italiana a cura di Giovanni Gottardi, Pavia, La Goliardica Pavese, 1996. Il corsivo è nostro.

Capitolo I. Scienza e Fisica

della natura", da cui tale capacità deriva, costituisce lo scopo primario della Scienza. Uno dei più affascinanti compiti della ricerca storica è quello di indagare come la specie umana abbia concepito la necessità di conoscere la natura e abbia progressivamente sviluppato e parzialmente realizzato tale progetto.

All'interno della Scienza, una particolare disciplina si identifica in primo luogo in base all'oggetto di studio e, secondariamente, in funzione dei metodi di indagine e dei linguaggi utilizzati; oggetto, metodi e linguaggi evolvono nel corso della storia. Oggi la Fisica si occupa delle proprietà fondamentali della 'materia' su dimensioni che vanno da quelle delle particelle elementari a quelle del Cosmo; nel suo campo d'indagine affondano alcune delle loro radici altre discipline come la Chimica e la Biologia.

A partire dal XVI secolo, lo sviluppo della Tecnica e la progressiva diffusione di metodi di indagine fondati sull'esperimento e sulla misura quantitativa hanno dato avvio ad un profondo mutamento nella Scienza. Le sollecitazioni provenienti dalla Tecnica hanno aperto nuovi campi di ricerca e l'esperimento ha iniziato a svolgere un fondamentale ruolo propulsivo nell'acquisizione di nuove conoscenze.

Analizzando lo sviluppo della Scienza negli ultimi quattro secoli si può individuare un primo periodo caratterizzato dal ruolo trainante della Tecnica: nell'ambito della Fisica, questo periodo culmina con l'invenzione della macchina a vapore (seconda metà del Settecento). L'Ottocento costituisce, per tutte le discipline scientifiche, un secolo di transizione in cui il ruolo primario, all'interno del rapporto Scienza - Tecnica, viene progressivamente assunto dalla Scienza.

Oggi la Scienza e la Tecnica sono intimamente connesse e, nella pratica quotidiana, sono inestricabilmente fuse nella Tecno - Scienza.² L'uso diffuso delle nuove tecnologie ha modificato la struttura economica, sociale e culturale delle società sviluppate e introdotto significative mutazioni nell'ecosistema. L'efficacia strumentale della Tecno - Scienza rischia di creare l'illusione che essa possa risolvere tutti i problemi che la nostra specie ha oggi di fronte.

Solo se le generazioni future riscopriranno la 'conoscenza *consapevole* della natura' e la coltiveranno come un bene prezioso, si recupereranno le tracce della Scienza che entusiasmava Planck e di cui parlava Hertz.

²In questo termine la Tecnica precede la Scienza solo per ragioni fonetiche.

Secondo la Reale commissione Britannica sui veicoli a motore del 1908, il problema più serio legato a questa tecnologia era la polvere sollevata dalle strade non asfaltate.

David Collingridge

I.2 Le tre componenti della Scienza

E' ormai un luogo comune affermare che la Scienza moderna è nata e si è sviluppata quando fu riconosciuto il ruolo fondante e propulsivo dell'esperimento; ciononostante, molte ricostruzioni storiche hanno di fatto trascurato il ruolo della sperimentazione e della misura quantitativa. Non si tratta di rovesciare questa impostazione, relegando in una posizione marginale la componente teorica: è necessario invece riconoscere le tre componenti costitutive della Scienza – filosofica, sperimentale e teorica – e valutarne adeguatamente i rispettivi ruoli, senza lasciarsi fuorviare dalle contingenze storiche, che hanno visto la prevalenza di una di esse.

Le crescenti applicazioni tecniche e la progressiva trasformazione della Scienza in un fenomeno sociale hanno contribuito a oscurarne il valore conoscitivo e, quindi, il substrato filosofico. Due ordini di considerazioni mostrano che la Scienza possiede un substrato filosofico: a) la risposta alla domanda 'che tipo di conoscenza produce la Scienza?' può essere data solo sulla base di riflessioni tradizionalmente considerate come filosofiche; b) la Scienza si è sviluppata sulla base di opzioni realiste di fondo: anche questi presupposti sono stati e sono oggetto di un dibattito tradizionalmente considerato come filosofico. Dunque, a meno di negare il valore conoscitivo della Scienza e/o di ignorarne lo sviluppo storico, non si può eludere una riflessione filosofica sulla Scienza.

I.3 I presupposti della Scienza

L'analisi storica mostra che la Scienza si è sviluppata sulla base di tre presupposti:

P1 Esiste un mondo, indipendente dall'osservatore, di cui l'osservatore fa parte.

Su questo presupposto si sono radicati altri due postulati:

P2 Ogni evento ha una causa (principio di causalità).

P3 Il funzionamento del mondo è costante nel tempo (riproducibilità dei fenomeni).

Capitolo I. Scienza e Fisica

Questi tre postulati sono, dal punto di vista epistemologico, diversi: il primo può essere sostenuto con argomenti razionali; e, sebbene sia stato posto in discussione con argomentazioni di vario genere, sovente al limite del paradosso, costituisce il fondamento della Scienza e del senso comune. Il principio di causalità è certamente più problematico; tuttavia, la ricerca di connessioni causali è stata una caratteristica fondamentale della Scienza ed uno dei principali motori del suo sviluppo. Infine il terzo postulato è stato, sinora, corroborato sia dalla pratica scientifica sia – più in generale – dall'esperienza umana.

I.3.1 Fisica e realtà

La storia della fisica ci mostra in ogni pagina che questo difficilissimo compito fu sempre risolto ammettendo un mondo reale indipendente dai sensi umani, e non c'è dubbio che sarà così anche in futuro. Oltre al mondo sensibile ed al mondo reale c'è ancora, ed occorre tenerlo ben distinto dagli altri due,

il mondo quale ce lo presenta la Scienza fisica: l'immagine fisica del mondo. Questo terzo mondo, contrariamente agli altri due, è stato creato coscientemente per un determinato scopo dallo spirito umano, e perciò varia e va soggetto ad un certo sviluppo.

Max Planck

L'accettazione del postulato fondamentale del realismo (*P*1), fa sorgere immediatamente il problema del rapporto tra mondo, descrizioni (teorie) e immagine del mondo. Per immagine del mondo intendiamo una descrizione del mondo o di sue parti che utilizza asserzioni ontologiche, che fa cioè affermazioni sull'esistenza di qualcosa.

Le descrizioni della Fisica tendono ad assumere la forma di teorie matematizzate in cui sono usati, tra l'altro, due tipi di concetti: le *entità teoriche* e le *grandezze fisiche*.

Le entità teoriche fondamentali della Fisica del Novecento sono quelle di particella, onda e campo. Altre entità teoriche sono, per esempio, quella di atomo, protone, elettrone, ecc... Le grandezze fisiche sono concetti che permettono di descrivere *proprietà* delle entità teoriche o *interazioni* o *relazioni* tra esse e sono caratterizzate dal fatto di *poter essere*, in generale, *sottoposte a misura*. Per esempio i concetti di massa, carica, spin, momento magnetico sono grandezze fisiche che descrivono proprietà dell'elettrone o

di altre particelle; il concetto di forza permette di descrivere l'interazione, per esempio, di due elettroni; quello di velocità descrive invece una relazione tra due entità teoriche: il corpo considerato in moto e il sistema di riferimento rispetto al quale il corpo è in moto.

Le posizioni realiste in Fisica possono essere suddivise in tre classi: realismo delle teorie, realismo delle entità teoriche, realismo delle grandezze fisiche. Il realismo delle teorie è caratterizzato dalla convinzione che le teorie descrivano ciò che effettivamente accade nel mondo e implica il realismo degli altri due tipi. Il realismo delle entità teoriche ritiene che alcune o tutte le entità teoriche usate dalle teorie esistano nel mondo; quindi risponde, non sempre negativamente, a domande del tipo: esiste l'elettrone, esiste l'onda elettromagnetica...? Infine, il realismo delle grandezze fisiche, che presuppone il realismo delle entità teoriche, è caratterizzato dalla credenza che alcune o tutte le grandezze fisiche usate da una teoria siano proprietà reali delle entità teoriche (considerate esistenti) cui sono associate.

Al realismo delle teorie sono state mosse obiezioni di vario tipo. Innanzitutto: per affermare che una teoria descrive esattamente 'ciò che accade nel mondo' dovremmo conoscere 'ciò che accade nel mondo' indipendentemente dalla teoria in questione. Una seconda obiezione nasce dalla costatazione che uno *stesso* gruppo di fenomeni può essere (e, di fatto, è stato) descritto da teorie *diverse*. Anche a questa obiezione non si può rispondere se si richiede che le teorie siano 'copie' del mondo. A queste obiezioni se ne aggiunge una terza: il realismo delle teorie implica il realismo degli altri due tipi, perché deve necessariamente asserire che *tutte* le entità teoriche usate dalle teorie esistono e *tutte* le grandezze fisiche sono proprietà reali delle entità teoriche cui sono associate. Tuttavia, come vedremo, le asserzioni ontologiche non discendono logicamente dalla conoscenza acquisita, ma sono solo rese plausibili da essa. Il realismo delle teorie è quindi intrinsecamente insostenibile.

I.3.2 Il ruolo della misura

Da un punto di vista matematico, l'aspetto più importante di ogni fenomeno è quello di una grandezza misurabile.

James Clerk Maxwell

La *misura* è un insieme di procedure sperimentali che permettono di attribuire ad una grandezza fisica - dopo averne fissata l'unità di misura - un valore più o meno definito, esprimibile mediante un numero accompagnato da un margine di errore.

Consideriamo la misura di una grandezza fisica G_E associata ad una entità teorica E effettuata mediante un apparato A (parte superiore della figura I.1).



Figura I.1. i punti che separano la parte inferiore della figura da quella superiore ricordano che l'immagine del mondo non discende logicamente dalla conoscenza acquisita, anche se deve essere compatibile con essa; l'asterisco ricorda che le proprietà del *quid* o dell'oggetto possono essere diverse da quelle descritte dalla teoria.

Nell'ambito di una determinata teoria o di una descrizione basata sulla conoscenza acquisita, l'esito della misura dipende dal rapporto o dall'interazione tra l'entità teorica e lo strumento di misura (considerato anch'esso come un'entità teorica) e non può, in nessun caso, essere interamente attribuito allo strumento. Se la misura consiste nell'interazione tra l'entità teorica e lo strumento di misura, lo stato dello strumento è modificato dal processo di misura e la modifica dello stato è, per esempio, indicata dallo spostamento di un indice o dalla variazione di un numero. Anche il valore della grandezza fisica misurata è, in generale, modificato dal processo di misura.

Per esempio, nella misura della corrente di un circuito mediante un amperometro, l'inserimento dell'amperometro nel circuito ne aumenta la resistenza e, quindi, ne diminuisce la corrente.

Sulla base del postulato *P*1, l'esito della misura riflette una proprietà del mondo che deve essere attribuita, come P_{Q_E} , ad un *quid* (Q_E) che, nel mondo, corrisponde all'entità teorica *E* considerata. Il *quid* può essere molto diverso dall'entità teorica *E* cui corrisponde; analogamente, la proprietà P_{Q_E} del *quid* può essere molto diversa da quella descritta dalla grandezza fisica G_E . Ciò significa che la misura di una grandezza fisica non assicura la sua realtà, né quella dell'entità teorica cui è associata.

I.3.3 Immagini del mondo

E quando ai Fisici, già sopraffatti dalla complicazione del meccanismo ideato, si chiede se i nuovi enti, ch'essi maneggiano come cose vive, abbiano un'esistenza obbiettiva o rappresentino solo un mezzo economico e provvisorio d'indagine, la immensità del problema li sgomenta e li dissuade dalla elaborazione scientifica di una risposta qualsiasi. E rinunziando alla qualità d'uomini di scienza, ma ubbidendo solo alle proprie tendenze sentimentali, precipitano la loro opinione così come se giudicassero di un problema di religione o di politica o di estetica. Orso Mario Corbino

L'accettazione del postulato *P*1 implica, quindi, che una misura significativa fornisce informazioni sulle proprietà del mondo e sulla sua struttura. A questo livello di analisi, è possibile solo stabilire corrispondenze tra entità teoriche e *quid*, grandezze fisiche e proprietà dei *quid*. Per procedere oltre, è necessario costruire una *immagine del mondo* mediante asserzioni sull'esistenza delle entità teoriche usate dalle teorie e sulla realtà delle grandezze fisiche ad esse associate. *Tali asserzioni, pur non derivando logicamente dall'insieme della conoscenza acquisita*, debbono essere con essa compatibili. E', per esempio, compatibile con l'intera conoscenza acquisita l'asserzione che esiste l'elettrone: ciò significa che pensiamo esista un ente le cui proprietà sono, perlomeno, in corrispondenza con quelle specificate dall'insieme delle nostre conoscenze teoriche e sperimentali.³ Tale ente ha dimensioni molto ridotte (< 10^{-18} m) e – perlomeno – è dotato di proprietà che sono in corrispondenza con la massa, la carica, il momento angolare e il momento magnetico dell'entità teorica elettrone. A ciascuna di queste

³Come contro - esempio, si pensi all'Etere, entità teorica largamente usata nell'Ottocento: asserire la sua esistenza non è oggi compatibile con la conoscenza acquisita.

Capitolo I. Scienza e Fisica

proprietà corrispondono insiemi di comportamenti dell'elettrone descritti dalla teoria e osservabili sperimentalmente.

Un'entità teorica descritta come esistente in una immagine del mondo può essere considerata un *oggetto*, per sottolineare il fatto che essa non differisce sostanzialmente dagli oggetti della vita quotidiana (parte inferiore della figura I.1).

A cosa serve un'immagine del mondo? Ha, innanzitutto, un valore conoscitivo, perché – nei limiti di attendibilità della conoscenza acquisita e delle asserzioni ontologiche compatibili con essa – mostra come è fatto il mondo e come funziona. L'immagine del mondo ha, come la conoscenza acquisita da cui deriva, carattere storico, e quindi varia nel tempo; tuttavia l'attendibilità delle sue componenti più antiche cresce con il tempo e queste tendono a divenire più stabili della stessa conoscenza acquisita da cui derivano. Per esempio, le teorie che descrivono il comportamento dell'elettrone sono cambiate nel tempo e non possiamo escludere che mutino ancora; confidiamo tuttavia che l'elettrone – come oggetto – continuerà a far parte delle immagini del mondo che verranno.

L'immagine del mondo costituisce inoltre il fondamento di ogni pratica scientifica: guida lo sperimentatore in laboratorio e svolge un ruolo euristico nella riflessione teorica; nella versione socializzata, costituisce uno strumento di interpretazione e organizzazione dell'esperienza e di guida comportamentale.

[...] In fisica dobbiamo ritenere a buon diritto che il quadro attuale, benché ancora variamente colorato, a seconda dell'individualità del ricercatore, contenga già alcuni tratti che non potranno essere cancellati, qualsiasi rivoluzione avvenga in

natura o nello spirito umano. Questa entità costante, indipendente da ogni individualità umana e da ogni intelletto, è appunto ciò che noi chiamiamo realtà. [...] Certamente non c'è nessuna regola generale che ci permetta di stabilire fino a che punto ci sia lecito spingere la nostra fiducia di avere fin d'ora fissato i tratti della futura immagine fisica del mondo.

Max Planck

I.3.4 Teoria ed esperimento

Lo sviluppo storico della meccanica quantistica illustra, pertanto, la distinzione fra contesto di scoperta e contesto di giustificazione; distinzione che deve venir fatta per tutti i generi di ricerca scientifica. La strada della scoperta corre attraverso una "serie di inferenze che sono profondamente avvolte nell'oscurità dell'indovinare istintivo", se mi è permesso applicare qui una frase che Schrödinger mi rivolse in una sua lettera, scritta alcuni anni prima delle sue grandi scoperte nel campo della meccanica quantistica. Una volta poi che una teoria è stata costruita, essa va giudicata entro il contesto di giustificazione, vale a dire mediante l'evidenza induttiva a essa conferita dal successo empirico. Hans Reichenbach

Il rapporto tra descrizione teorica ed osservazione sperimentale è assai complesso e può essere studiato da diversi punti di vista. E' opportuno distinguere il *contesto della scoperta* dal *contesto della giustificazione*. Il contesto della scoperta è caratterizzato dal fatto che, in generale, lo scienziato non si preoccupa di rispettare regole metodologiche comunemente condivise.

Con le parole di Bridgman:

Una lunga esperienza ha mostrato allo scienziato che diverse cose ostacolano la via verso una risposta corretta. Ha scoperto che non è sufficiente credere alle parole del suo vicino, ma che, se vuole essere sicuro, deve essere in grado di verificare un risultato egli stesso. Pertanto, lo scienziato è nemico di ogni autoritarismo. Inoltre, egli scopre che spesso fa degli errori e che deve imparare come evitarli. Non può permettersi alcun pregiudizio circa il tipo di risultato che otterrà, né di farsi influenzare da presunzioni favorevoli o preferenze personali.

[...]

Nell'attacco al suo problema specifico egli non soffre di alcuna inibizione dovuta a casi precedenti o autorità, ma è completamente libero di adottare qualunque percorso il suo ingegno sia in grado di suggerirgli. Nessuno può predire ciò che il singolo scienziato farà o che metodo seguirà. In breve, la scienza è ciò che gli scienziati fanno e ci sono tanti metodi scientifici quanti scienziati.⁴

Il contesto della scoperta rimanda alla necessità di un'indagine storica per cercare di comprendere come osservazioni, concetti, ipotesi, esperimen-

⁴ P. Bridgman, *Reflections of a physicist*, Philosophical Library, New York, (1955), pp. 82 - 83.

Capitolo I. Scienza e Fisica

ti e teorie sono emersi e sono stati correlati nel corso dello sviluppo della scienza. Questa indagine deve essere sorretta da una epistemologia, senza la quale la ricostruzione storica rischia di essere cieca.

Nel contesto della giustificazione, il rapporto tra teoria ed esperimento deve essere considerato alla luce di regole metodologiche comunemente condivise: questo insieme di regole non scritte è, a sua volta, oggetto di indagine storica (oggi anche sociologica) perché, il 'metodo della scienza' o meglio i 'metodi delle scienze' intesi appunto come insieme di regole metodologiche largamente condivise dalle comunità scientifiche disciplinari variano nel tempo.

Nella sezione VII.4 (pagina 230) si dà, forse, un'idea della complessità del rapporto esperimento - teoria - esperimento discutendo un argomento circoscritto, ma, da questo punto di vista, esemplare: la struttura della riga H_{α} dello spettro dell'atomo di idrogeno.

I problemi connessi al rapporto tra teoria ed esperimento affiorano anche in altre pagine del manuale. Il lettore interessato saprà cogliere questi spunti di riflessione.

Capitolo II

Sistemi inerziali

II.1 Spazio e tempo

Anche il tempo non esiste per sé, ma dalle cose stesse deriva il senso di ciò che si è svolto, di ciò che è presente, di ciò che seguirà. Bisogna riconoscere che nessuno avverte il tempo per sé, separato dal movimento e dalla placida quiete delle cose.

Lucrezio

Il tempo del primo libro è il tempo della nostra intuizione interna. Esso è quindi una grandezza, dalla cui variazione possono essere pensate dipendere le variazioni delle rimanenti grandezze considerate, mentre esso rimane di per se stesso una variabile indipendente.

Heinrich Hertz

Sulla base delle considerazioni sviluppate nelle sezioni precedenti, è opportuno svolgere alcune riflessioni sui concetti di spazio e di tempo con l'obiettivo minimo di precisarne l'uso che ne faremo.

E' innanzitutto essenziale distinguere le concezioni dello spazio e del tempo usate nelle teorie da quelle derivanti da una interpretazione realista delle stesse: questa non è legittimata dal fatto che le predizioni delle teorie – basate su una determinata descrizione dello spazio e del tempo – sono in accordo con l'esperimento. Per esempio: il fatto che una teoria della gravitazione basata su uno spazio - tempo curvo sia in accordo con l'espe-

Capitolo II. Sistemi inerziali

rimento, non ci autorizza a credere che l'Universo sia effettivamente "collocato" in uno spazio - tempo quadridimensionale dotato di quelle caratteristiche. Infatti, la conformità di una teoria con l'esperimento non implica né che la teoria descriva esattamente come funziona il mondo, né che le entità teoriche utilizzate dalla teoria esistano.

Per descrivere tutti i fenomeni fisici, *che non coinvolgano interazioni gravitazionali*, si assume come postulato che essi si svolgano in uno spazio tridimensionale, omogeneo e isotropo. Supporre lo *spazio omogeneo* significa che qualunque sua regione è indistinguibile dalle altre: dal punto di vista della Fisica, ciò comporta che un sistema fisico *isolato* presenta gli stessi fenomeni qualunque sia la regione dello spazio in cui esso è collocato.¹ Supporre lo *spazio isotropo* significa che tutte le sue direzioni sono equivalenti: se si considera un sistema fisico *isolato*, ciò comporta che esso presenta gli stessi fenomeni comunque sia orientato nello spazio.

Gli oggetti che occupano porzioni di spazio interagiscono con modalità che la Fisica cerca di descrivere: le interazioni sono la causa dei fenomeni, cioè dei mutamenti che osserviamo negli oggetti stessi e/o nella loro posizione spaziale.² L'acquisizione del concetto di mutamento o variazione ha generato quello di tempo.

Il *tempo*, nella Fisica pre - relativistica, può essere definito come una *variabile t assunta convenzionalmente come positiva*, che permette di descrivere, mediante una funzione f(t), le variazioni di una grandezza fisica o, mediante la funzione vettoriale $\vec{r}(t)$, la variazione di posizione di un oggetto. Nella Fisica relativistica, il tempo è invece trattato come una delle quattro coordinate di un continuo quadridimensionale.

La *variabile t* della Fisica pre - relativistica può essere *simulata* da uno strumento dotato - *secondo la teoria che descrive il suo funzionamento* - di una proprietà misurabile che sia funzione lineare o periodica della variabile t.³ Tali strumenti, come è noto, sono chiamati 'orologi': l'adeguatezza degli orologi a svolgere la loro funzione è stabilita dall'esperienza. Usualmente

¹La supposta omogeneità dello spazio ('piano') richiede che esso sia illimitato: se ciò non fosse, le regioni 'prossime ai confini' non potrebbero essere equivalenti alle regioni 'interne'. Un esempio di spazio 'curvo' limitato e omogeneo è quello bidimensionale di una superficie sferica.

²La posizione spaziale di un oggetto può mutare anche se esso non è sottoposto ad alcuna interazione.

 $^{{}^{3}}$ E' possibile usare una grandezza fisica la cui dipendenza dalla variabile *t* sia diversa, purché indicata dalla teoria. Tali grandezze non sono tuttavia convenienti dal punto di vista pratico.

si dice che "il tempo è misurato dagli orologi", così come, per esempio, "la corrente è misurata dagli amperometri". C'è, tuttavia, una differenza fondamentale. Un amperometro misura una proprietà di un *quid* distinto da sé e il processo di misura è costituito da un'interazione fra il *quid* e l'amperometro: lo stato dell'amperometro viene modificato dal processo di misura. Gli orologi, invece, *mostrano* semplicemente i loro numeri o la posizione delle loro lancette. Nel caso in cui il funzionamento di un orologio si basi su un fenomeno periodico, l'orologio conteggia il numero dei periodi del fenomeno: a tale numero sono correlati, mediante proporzionalità diretta, i numeri mostrati dall'orologio o la posizione delle sue lancette. E' in questo modo che gli orologi simulano la variabile *t*, chiamata *tempo*: il *tempo* non viene misurato, ma semplicemente *mostrato* da un orologio.

Gli orologi usati normalmente, nella vita quotidiana e in laboratorio, sono strumenti basati su fenomeni periodici: per esempio, gli orologi con oscillatori al quarzo (pagina 416) o gli orologi atomici (pagina 59). Tipicamente, questi orologi mostrano una sequenza discreta e crescente di numeri che corrispondono a multipli del loro periodo fondamentale. Un orologio che simula con continuità una variabile matematica, può essere realizzato facendo scorrere, su un tratto piano e di moto rettilineo uniforme, un rotolo di carta millimetrata: la direzione di moto individua l'asse della variabile *t*. In direzione perpendicolare a questo asse, un pennino segna sulla carta un valore proporzionale a quello della grandezza fisica *F* misurata. Il risultato è il grafico della funzione F(t). Strumenti di questo tipo erano ampiamente utilizzati in laboratorio e per applicazioni industriali. Ora si tende a sostituirli con sistemi di acquisizione (discreta) di dati basati sull'uso di elaboratori.

Il funzionamento di un orologio può essere modificato da un'interazione dell'orologio con un altro sistema fisico, per esempio la Terra: l'interazione è, in questo caso, di tipo gravitazionale. Come per ogni altro strumento, è necessario conoscere come funziona un orologio e come interazioni con altri sistemi fisici ne possano influenzare il funzionamento.

II.1.1 Costruzione di una funzione f(t)

Consideriamo un sistema fisico a riposo nel sistema di riferimento del laboratorio e sia T una sua grandezza fisica, per esempio la sua temperatura. Se T varia, possiamo descrivere le sue variazioni in funzione della variabile *tempo*. Dopo aver collocato un orologio nelle vicinanze del sistema fisico in esame, eseguiamo una misura di T, per esempio con un termometro, in corrispondenza di un numero t_1 mostrato dall'orologio: otteniamo così

Capitolo II. Sistemi inerziali

due numeri T_1 e t_1 che sono stati messi in relazione dall'operazione che abbiamo eseguito. Ripetendo l'operazione per un numero sufficiente di volte, possiamo tracciare un grafico T(t). In questa descrizione, abbiamo implicitamente usato il concetto di *simultaneità locale*:⁴ la lettura del numero mostrato dall'orologio deve essere *simultanea* con quella del numero mostrato dal termometro con cui effettuiamo la misura della temperatura.

II.1.2 La durata di un fenomeno

Per definire la *durata* di un processo fisico o fenomeno è necessario individuare l'inizio e la fine del fenomeno, cioè definirne l'evento iniziale e l'evento finale. *Evento* è qualcosa che accade in un punto dello spazio ad un certo istante. Se t_i e t_f sono gli istanti di tempo associati, rispettivamente, agli eventi iniziale e finale, la *durata del fenomeno* è data da $\Delta t = t_f - t_i$. I valori di t_i e t_f sono letti su un orologio. La durata del fenomeno dipende dalla definizione dell'evento iniziale e finale: definiti questi, la durata è una proprietà del fenomeno in esame ed è una grandezza fisica misurabile. Mentre gli orologi non misurano alcunché, *con* gli orologi si misurano le durate dei fenomeni, leggendo su di essi i numeri corrispondenti agli eventi iniziale e finale.

II.2 Sistemi di riferimento inerziali: I

Un corpo che non è sottoposto a forza alcuna non può che muoversi di moto rettilineo ed uniforme. E' questa una verità che si impone a priori alla nostra mente? Se così fosse, come avrebbero potuto i Greci ignorarla? Come avrebbero potuto credere che il movimento cessa quando viene a mancare la causa che l'ha prodotto? O ancora, che ogni corpo, se nulla lo ostacola, assumerà un moto circolare, il più nobile di tutti i movimenti?

Henri Poincaré

Le leggi della Fisica sono formulate relativamente ad un sistema di riferimento. Per *sistema di riferimento* si intende un corpo rigido cui è associato un sistema di coordinate, per esempio una terna di assi cartesiani ortogo-

⁴Il concetto di simultaneità locale è primitivo: non è definibile e deve essere considerato come una comune acquisizione del nostro patrimonio culturale. La simultaneità qui usata si dice locale perché relativa ad eventi che accadono nello stesso punto.

nali. Un tipico sistema di riferimento è costituito dal laboratorio in cui si effettuano esperimenti o osservazioni.

Si definisce *inerziale* (*SRI*) un sistema di riferimento in cui *un corpo, non sottoposto ad alcuna forza derivante dalla interazione con altri corpi, si muove di moto rettilineo uniforme o è in quiete.* Questa definizione non ha significato operativo, perché non è possibile individuare una procedura sperimentale che permetta di stabilire se sul corpo agisca una forza. Tuttavia, è possibile valutare se sul corpo agisce una forza basandosi sulla conoscenza del contesto in cui si opera.

Un laboratorio collocato sulla Terra è, con buona approssimazione, un sistema inerziale. Ad eccezione degli ultimi decenni, in cui misure di vario tipo sono state effettuate in laboratori in orbita intorno alla Terra o in navicelle spaziali in *caduta libera*⁵ nello spazio, la Fisica si è sviluppata in laboratori terrestri. Ritorneremo su questo argomento nella sezione II.11 (pagina 64).

Se esiste un sistema inerziale, ne esistono infiniti: quelli che si muovono di moto rettilineo uniforme rispetto ad esso.

Svolgeremo le nostre argomentazioni in relazione a due *SRI*, *K* e *K'*, aventi le seguenti caratteristiche: assi paralleli ed equiversi; *K'* in moto rettilineo uniforme, rispetto a *K*, con velocità *V* lungo la direzione positiva dell'asse $x \equiv x'$.



Figura II.1. coppia di sistemi di riferimento inerziali. Si veda il testo.

La scelta di questa particolare coppia di *SRI* semplifica la trattazione formale, ma non limita la sua generalità, grazie ai postulati della *omogeneità e isotropia dello spazio*: considerata infatti una qualunque coppia di *SRI* è

⁵Un corpo si dice in 'caduta libera' quando il suo moto è univocamente determinato, prescindendo dalle condizioni iniziali, da un campo gravitazionale.
sempre possibile ricondurla a quella scelta mediante opportune rotazioni e traslazioni.

II.2.1 Definizione operativa di lunghezza

Per definizione operativa di una grandezza fisica si intende l'insieme delle procedure necessarie per misurarla. Di ogni grandezza fisica, si può dare, in generale, più di una definizione operativa: ognuna di esse deve essere coerente con la definizione concettuale.

Per esempio, se definiamo la *lunghezza di un'asta a riposo* come la distanza tra i suoi punti estremi, due possibili definizioni operative sono le seguenti. E' possibile misurare la lunghezza di un'asta *a riposo* in un *SRI* mediante l'uso di un regolo campione, oppure, operando nel vuoto (in aria), si può procedere nel modo seguente.



Figura II.2. definizione operativa di lunghezza mediante l'uso di lampi di luce di durata idealmente nulla.

Nell'estremo *A* dell'asta sono posti una sorgente di luce ed un orologio; nell'estremo *B* è invece collocato uno specchio. Dall'estremo *A* viene lanciato verso *B* un lampo di luce di durata idealmente nulla; il lampo viene istantaneamente riflesso dallo specchio in *B* e ritorna in *A*. Se *c* è la velocità della luce - supposta nota e identica in entrambe le direzioni per l'isotropia dello spazio - e t_1 e t_2 gli istanti di tempo corrispondenti alla partenza del lampo da *A* ed al suo ritorno in *A*, la lunghezza *l* dell'asta è:⁶

$$l = c \frac{t_2 - t_1}{2}$$

Questa procedura, che riduce la misura di una lunghezza a quella di una durata, cioè di un intervallo di tempo, è estensibile anche alla misura della lunghezza di un'asta in moto (sezione II.5.2, pagina 33).

⁶Si osservi che la misura della velocità della luce presuppone la misura di una lunghezza effettuata con il metodo tradizionale del regolo campione.

II.2.2 Definizione operativa di velocità

Consideriamo un oggetto che si muova a velocità costante: per esempio un treno che si muova in linea retta sulle rotaie di una ferrovia. In questo caso, il sistema di riferimento del 'laboratorio' è costituito dalle rotaie. Collochiamo due orologi identici in due punti A e B delle rotaie e assicuriamoci che siano sincronizzati. La sincronizzazione dei due orologi può essere effettuata in due modi distinti.

- Collochiamo i due orologi in A e operiamo sulle loro manopole di regolazione in modo tale che essi mostrino simultaneamente lo stesso numero; trasportiamo ora uno dei due orologi in B. Questo procedimento di sincronizzazione si basa sul presupposto che il funzionamento degli orologi non sia influenzato dalla loro velocità e/o dalla loro accelerazione.
- ◇ Dopo aver collocato un orologio in A e l'altro in B, viene inviato un segnale luminoso un lampo di durata idealmente nulla da A verso B: all'orologio in B è rigidamente fissato uno specchio che riflette il segnale luminoso verso A. Sia t₁ il numero mostrato dall'orologio in A quando il lampo di luce parte da A e t₂ il numero mostrato dall'orologio in A quando il lampo di luce ritorna in A. L'orologio in B, per sincronizzarsi con l'orologio in A, deve, per esempio, regolarsi sul numero 0 in coincidenza con l'arrivo del segnale in B; l'orologio in A si dovrà allora regolare sul numero (0 + (t₂ − t₁)/2) quando il lampo ritorna in A. Implicitamente si è assunto che la velocità della luce sia la stessa in entrambe le direzioni, cioè che lo spazio sia isotropo.

Siamo ora in grado di dare la definizione operativa di velocità del treno. Quando la testa del treno passa da *A* l'operatore che si trova in *A* legge il numero t_A mostrato dal suo orologio; l'operatore posto in *B* legge il numero t_B mostrato dal suo orologio quando la testa del treno giunge in *B*. La velocità del treno è data, per definizione, da:

$$v = \frac{l}{t_B - t_A}$$

dove *l* è la distanza tra *A* e *B*, previamente misurata. $t_B - t_A$ fornisce la durata del fenomeno costituito dal mutamento di posizione del treno il cui evento iniziale è 'testa del treno in *A*' e il cui evento finale è 'testa del treno in *B*'. Si osservi come nel definire la velocità del treno abbiamo in realtà definito la

Capitolo II. Sistemi inerziali

velocità del punto 'testa del treno', con l'ipotesi implicita che tutti i punti del treno abbiano la stessa velocità.

Alternativamente, avremmo potuto definire la velocità del treno nel modo seguente. Con un solo orologio collocato in un punto delle rotaie, per esempio in *A*, registriamo gli istanti in cui la testa e la coda del treno passano in *A*: siano essi, rispettivamente, $t_T \in t_C$. Allora, se la lunghezza del treno è l_{treno} , la velocità del treno sarà definita da:

$$\nu = \frac{l_{treno}}{t_C - t_T} \tag{II.1}$$

Nella sezione II.5.2 (pagina 33) vedremo che la lunghezza l_{treno} non coincide con quella - l_0 - misurata da un passeggero in quiete sul treno.

Si osservi infine che se il moto del treno non è uniforme, la definizione operativa data è quella di velocità media.

II.2.3 Come si misura l'accelerazione

Gli strumenti che permettono misure di accelerazione si chiamano accelerometri. Il loro funzionamento si basa sulla legge $\vec{F} = m\vec{a}$ e sulla legge di Hooke $\vec{F} = -k\Delta x$ che descrive le deformazioni elastiche.



Figura II.3. schema dell'accelerometro.

In figura II.3 è mostrato il principio di funzionamento degli accelerometri. Il corpo di massa *m* è collegato ad una base mediante la molla *S* e, idealmente, può scorrere sul piano della base senza attrito. Se la base viene sottoposta ad una accelerazione costante *a* verso sinistra, la molla si tende e la sua massima estensione Δx è legata all'accelerazione impressa alla base dalla relazione

$$\Delta x = -\frac{m}{k}a$$

I diversi tipi di accelerometro si differenziano in base al sensore utilizzato per misurare Δx o la forza esercitata dalla molla.

II.3 Le trasformazioni di Galileo

Le *trasformazioni di Galileo* costituiscono *una* risposta alla domanda: come si trasformano le coordinate spaziali di un punto dello spazio quando si passa da un *SRI* ad un altro (da *K* a *K'*)? Il problema, così formulato, presuppone l'assunzione implicita che, indicato con *t* l'istante di tempo associato ad un evento osservato da *K* e con *t'* l'istante di tempo associato allo stesso evento da *K'*, sia t = t' per qualunque evento. Questa assunzione verrà lasciata cadere dalla teoria della relatività ristretta (*TRR*). Sia per operare in vista di questa prospettiva, che per rendere esplicita l'assunzione sugli istanti di tempo associati da diversi *SRI* agli stessi eventi, sarà inclusa nelle trasformazioni di Galileo anche quella relativa alla variabile tempo.

Le trasformazioni di Galileo si ricavano considerando la coppia di *SRI K* e *K'* definiti a pagina 15. Per semplificare le formule, si può supporre che, ad un determinato istante (t = 0), le origini dei due sistemi di riferimento coincidano: questa scelta particolare, grazie alla presupposta *omogeneità dello spazio e del tempo*, non riduce la validità delle formule che saranno ricavate. Si consideri pertanto un punto dello spazio *P* e siano *x*, *y*, *z* e x', y', z' le sue coordinate nei sistemi di riferimento *K* e *K'*, rispettivamente. Le trasformazioni cercate sono:

$$x' = x - Vt$$
$$y' = y$$
$$z' = z$$
$$t' = t$$

dove t è una variabile indipendente, mentre le tre coordinate spaziali sono legate tra di loro dalla relazione:

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2$$

dove r è la distanza del punto P dall'origine.

Dalle trasformazioni di Galileo seguono immediatamente:

A. L'invarianza della distanza tra due punti: l = l'

B. La regola di composizione delle velocità:

$$v'_x = v_x - V$$
$$v'_y = v_y$$
$$v'_z = v_z$$

dove le componenti accentate e non accentate sono quelle della velocità di un punto secondo K' e K, rispettivamente.

C. L'invarianza della accelerazione di un punto: $\vec{a}' = \vec{a}$.

II.3.1 Il principio di invarianza di Galileo

La nave da cui siamo trasportati, si muove, mentre sembra star ferma; quella che rimane immobile all'ormeggio, si crede che proceda oltre. E sembra che a poppa fuggano colline e pianure oltre le quali conduciamo la nave e con le vele voliamo.

Lucrezio

Riserratevi con qualche amico nella maggiore stanza che sia sotto coverta di alcun gran navilio, e quivi fate d'aver mosche, farfalle e simili animaletti volanti; siavi anco un gran vaso d'acqua, e dentrovi de' pescetti; sospendasi anco in alto qualche secchiello, che a goccia a goccia vadia versando dell'acqua in un altro vaso di angusta bocca, che sia posto a basso: e stando ferma la nave, osservate diligentemente come quelli animaletti volanti con pari velocità vanno verso tutte le parti della stanza; i pesci si vedranno andar notando indifferentemente per tutti i versi; le stille cadenti entreranno tutte nel vaso sottoposto; e voi, gettando all'amico alcuna cosa, non più gagliardamente la dovrete gettare verso quella parte che verso questa, quando le lontananze sieno eguali; e saltando voi, come si dice, a pie' giunti, eguali spazii passerete verso tutte le parti. Osservate che avrete diligentemente tutte queste cose, benché niun dubbio ci sia che mentre il vassello sta fermo non debbano succeder così, fate muover la nave con quanta si voglia velocità; che (pur che il moto sia uniforme e non fluttuante in qua e in là) voi non riconoscerete una minima mutazione in tutti li nominati effetti, né da alcuno di quelli potrete comprender se la nave cammina o pure sta ferma...

Galileo Galilei

Questo principio può essere così enunciato:

I fenomeni riguardanti uno stesso sistema fisico si manifestano nello stesso modo in ogni SRI.

Questa asserzione, per essere corretta, deve includere nella definizione di 'stesso sistema fisico' la parità delle condizioni iniziali.

Ai tempi di Galileo la 'fisica' coincideva, sostanzialmente, con quella che oggi chiamiamo 'meccanica': pertanto, sebbene il principio di invarianza

Capitolo II. Sistemi inerziali

di Galileo riguardasse 'tutti i fenomeni fisici' allora conosciuti, è divenuto usuale enunciare il principio di invarianza di Galileo come riferito ai soli fenomeni meccanici.

Il principio di invarianza di Galileo implica, in particolare, che:

Le leggi della meccanica hanno la stessa forma in qualunque SRI.

Di solito, il principio di invarianza di Galileo è chiamato 'principio di relatività'. 'Principio di invarianza' è preferibile perché:

- richiama il fatto che il contenuto del principio è l'invarianza dei fenomeni o delle leggi fisiche;
- sottolinea implicitamente il fatto che sono più significative le grandezze che hanno lo stesso valore in qualunque *SRI*, rispetto a quelle il cui valore varia passando da un *SRI* ad un altro.

II.3.2 La dinamica newtoniana

La dinamica newtoniana si fonda su alcuni postulati comuni a tutte le teorie fisiche non gravitazionali e basate su descrizioni spazio - temporali, nonché su tre postulati specifici. I postulati comuni a tutte le descrizioni spazio temporali sono quelli relativi alla omogeneità e isotropia dello spazio e alla omogeneità del tempo. Si è già illustrato a pagina 12 il significato di queste proprietà attribuite allo spazio. L'*omogeneità del tempo*, formalmente assicurata dalla scelta di considerare il tempo come una variabile, implica che il valore dell'istante iniziale nella descrizione di un fenomeno può essere scelto ad arbitrio.

I tre postulati specifici possono essere espressi nella forma seguente:⁷

- **N1** Le leggi della dinamica hanno la stessa forma in ogni sistema di riferimento inerziale.
- **N2** $\vec{F} = m\vec{a}$, dove \vec{F} è il risultante delle forze esercitate da altri corpi sul corpo di massa $m \in \vec{a}$ è la sua accelerazione.
- **N3** Il principio di azione e reazione: se un corpo *A* esercita una forza \vec{F} sul corpo *B*, allora *B* esercita la forza $-\vec{F}$ sul corpo *A*.

⁷La forma in cui è usualmente presentata la meccanica newtoniana è il risultato di un lungo processo che ha percorso l'intero XVIII secolo. Si veda, ad esempio: G. Maltese, *La storia di F = ma: la seconda legge del moto nel XVIII secolo*, Olschki, Firenze, 1992.

La *legge fondamentale della dinamica newtoniana*, espressa relativamente al sistema di riferimento inerziale *K*, può essere scritta nella forma:

$$F_x = m \frac{d^2 x}{dt^2}$$

$$F_y = m \frac{d^2 y}{dt^2}$$

$$F_z = m \frac{d^2 z}{dt^2}$$
(II.2)

Se, nelle (II.2), si sostituiscono alle variabili non accentate quelle accentate, usando le trasformazioni di Galileo, si ottiene:

$$F_{x} = m \frac{d^{2}x'}{dt'^{2}}$$

$$F_{y} = m \frac{d^{2}y'}{dt'^{2}}$$

$$F_{z} = m \frac{d^{2}z'}{dt'^{2}}$$
(II.3)

Queste equazioni sono di transizione perché contengono simboli accentati e simboli non accentati. Per ottenere quelle definitive, si osservi che le trasformazioni di Galileo (e la implicitamente supposta invarianza della massa) rendono invarianti i secondi membri delle (II.3): pertanto, per assicurare l'invarianza delle (II.2) si deve imporre che $F'_i = F_i$ (i = x, y, z). Affinché questa condizione sia soddisfatta, occorre che le forze siano funzioni solamente di grandezze, relative alla particella, invarianti. In base alle trasformazioni di Galileo, tali grandezze possono essere solo la variabile tempo t, la distanza r della particella dall'origine e la sua accelerazione \vec{a} . Le (II.3) diventano allora:

$$F'_{x} = m \frac{d^{2}x'}{dt'^{2}}$$
$$F'_{y} = m \frac{d^{2}y'}{dt'^{2}}$$
$$F'_{z} = m \frac{d^{2}z'}{dt'^{2}}$$

con

$$F'_x = F_x$$

$$F'_y = F_y$$

$$F'_z = F_z$$

Quindi, nella dinamica newtoniana, la forza che agisce su una particella non può dipendere, a rigore, dalla sua velocità.

II.3.3 Massa inerziale e massa gravitazionale

Una gran pietra messa nella bilancia non solamente acquista peso maggiore col soprapporgli un'altra pietra, ma anco la giunta di un pennecchio di stoppa la farà pesar più quelle sei o dieci once che peserà la stoppa; ma se voi lascerete liberamente cader da un'altezza la pietra legata con la stoppa, credete voi che nel moto la stoppa graviti sopra la pietra, onde gli debba accelerar il suo moto, o pur credete che ella la ritarderà, sostenendola in parte? Sentiamo gravitarci su le spalle mentre vogliamo opporci al moto che farebbe quel peso che ci sta addosso; ma se noi scendessimo con quella velocità che quel tal grave naturalmente scenderebbe, in che modo volete che ci prema e graviti sopra? Non vedete che questo sarebbe un voler ferir con la lancia colui che vi corre innanzi con tanta velocità, con quanta o con maggiore di quella con la quale voi lo seguite? Concludete pertanto che nella libera e naturale caduta la minor pietra non gravita sopra la maggiore, ed in consequenza non le accresce peso, come fa nella quiete.

Galileo Galilei

La massa m^i che compare nell'equazione fondamentale della dinamica newtoniana

$$\vec{F} = m^i \vec{a} \tag{II.4}$$

si chiama *massa inerziale*. La forza che compare nella (II.4) è dovuta alle interazioni tra il corpo di massa m^i e altri corpi: essa è la *causa* della accelerazione.

La legge di gravitazione universale è espressa dall'equazione:

$$\vec{F}_{12} = G \frac{m_1^g m_2^g}{r_{21}^3} \vec{r}_{21}$$

24

dove \vec{F}_{12} è la forza che il corpo 1 di massa gravitazionale m_1^g esercita sul corpo 2 di massa gravitazionale m_2^g e \vec{r}_{21} è il vettore spiccato da 2 verso 1. Il corpo di massa gravitazionale m_2^g e di massa inerziale m_2^i subirà quindi un'accelerazione data da:

$$\vec{a}_2 = G \frac{m_1^g}{r_{21}^3} \frac{m_2^g}{m_2^i} \vec{r}_{21}$$

L'accelerazione \vec{a}_2 è proporzionale al rapporto m_2^g / m_2^i fra la massa gravitazionale e la massa inerziale del corpo 2. Già Galileo aveva dedotto dai suoi esperimenti che tutti i corpi subiscono la stessa accelerazione nel campo gravitazionale della Terra; quindi $m^g = \alpha m^i$. Le moderne teorie della gravitazione postulano $\alpha = 1$ (principio di equivalenza 'debole'). Sul concetto di massa si tornerà più avanti, studiando la relatività ristretta.

II.4 Esperimenti ideali con lampi di luce

Assumeremo questa congettura (il contenuto della quale nel seguito sarà chiamato 'principio di relatività') come postulato, e oltre a questo introdurremo il postulato con questo solo apparentemente incompatibile, che la luce nello spazio vuoto si propaghi sempre con una velocità determinata c, indipendente dallo stato di moto dei corpi emittenti. Albert Einstein

In questa sezione saranno descritti esperimenti ideali basati sull'uso di segnali luminosi di durata idealmente nulla che permetteranno di ricavare:

- vuna relazione tra la misura della durata di un fenomeno che si svolge nello stesso punto di un SRI (durata propria) e la misura della durata dello stesso fenomeno in un altro SRI: in quest'ultimo il fenomeno si svolge su un intervallo spaziale diverso da zero;
- una relazione tra la misura della lunghezza di un'asta a riposo in un SRI (lunghezza propria) e la misura della lunghezza della medesima asta in un altro SRI (che vede l'asta in moto);
- le trasformazioni di coordinate di Lorentz per il passaggio da un SRI ad un altro.

Le derivazioni che seguono utilizzano i seguenti postulati:⁸

- 1. Lo spazio è omogeneo ed isotropo.
- 2. Il tempo è omogeneo.
- 3. La velocità della luce è la stessa in ogni *SRI* e, quindi, non dipende dal moto della sorgente.
- 4. Un principio di invarianza ridotto che stabilisce l'equivalenza cinematica dei sistemi di riferimento inerziali.

II.4.1 'Dilatazione del tempo'



Figura II.4. scambio di segnali luminosi tra due *SRI*. Si veda la tabella II.1 e il testo. La distanza *d* tra *O* ed *O'* è riferita all'istante t_R in cui viene riflesso il secondo segnale da parte di *O'*.

Considerati i due *SRI K* e *K'*, si supponga che sia t = t' = 0 quando le origini *O* e *O'* dei due *SRI* coincidono. *O* invia verso *O'* lampi di luce (di durata idealmente nulla) a intervalli di tempo regolari *T* lungo la direzione di moto di *O'*; questi lampi sono istantaneamente riflessi da *O'* verso *O*. *O* invia il primo lampo all'istante t = t' = 0 (cioè quando le due origini coincidono) ed il secondo all'istante t = T. *O'* riceve il primo lampo all'istante t' = 0ed il secondo all'istante t' = T'. Indicato con $\Delta t' = T'$ l'intervallo di tempo

⁸Questo insieme di postulati è identico a quello usato da Einstein nell'articolo del 1905: A. Einstein, 'L'elettrodinamica dei corpi in movimento', (1905); in rete all'indirizzo: http://matsci.unipv.it/persons/antoci/re/Einstein05.pdf

che, secondo O', separa la ricezione dei due lampi (e quindi anche le due riflessioni), si può porre (figura II.4 e tabella II.1) :

$$\Delta t' = T' = kT \tag{II.5}$$

perché, per l'omogeneità del tempo, la relazione tra $t \in t'$ è lineare.

Lampo	Primo	Secondo
Emesso da O	t = 0	t = T
Ricevuto e		
riflesso da O'	t' = 0	t' = T' = kT
Ricevuto da O	t = 0	$t = k^2 T$

Tabella II.1. scambio di lampi luminosi tra due *SRI*. Si veda la figura II.4 e il testo.

Il coefficiente k deve essere positivo. Se fosse negativo, O' riceverebbe il secondo lampo - lanciato ad un istante t' > 0 - all'istante -|k|T: il lampo arriverebbe prima di essere prodotto. Inoltre, per l'omogeneità del tempo, k non può dipendere dall'istante in cui il lampo viene emesso da O né dal valore dell'intervallo di tempo T che separa l'emissione di due lampi successivi; per l'omogeneità dello spazio, k non può dipendere dalla posizione in cui O emette il lampo né da quella in cui O' lo riceve. k può quindi dipendere solo da V (V, nella presente trattazione, è una quantità positiva). Per l'equivalenza dei due sistemi di riferimento e per la (II.5), l'intervallo di tempo che intercorre tra la ricezione, da parte di O, del primo e del secondo lampo riflesso da O' è dato da:

$$\Delta t = kT' = k^2 T$$

La velocità della luce è la stessa in entrambe le direzioni (isotropia dello spazio) e non dipende dal moto della sorgente; quindi, secondo *O*, la distanza di *O*' al momento della riflessione del secondo lampo è data da:

$$d = \frac{1}{2}cT(k^2 - 1)$$
(II.6)

Questa distanza può anche essere espressa in termini di V:

$$d = V t_R = \frac{1}{2} (k^2 + 1) V T$$
(II.7)

dove

$$t_R = (1/2)(T + k^2 T) = \frac{k^2 + 1}{2}T$$
 (II.8)

27

è l'istante di tempo in cui avviene, secondo O, la riflessione del secondo lampo da parte di O'. Pertanto, uguagliando il secondo membro della (II.6) con il terzo della (II.7), si ottiene:

$$\frac{V}{c} = B = \frac{k^2 - 1}{k^2 + 1}$$

Ne segue che, essendo k > 0:

$$k = \sqrt{\frac{1+B}{1-B}} \tag{II.9}$$

Valgono inoltre le seguenti relazioni:

$$\frac{k^2 + 1}{2k} = \frac{1}{\sqrt{1 - B^2}} = \Gamma$$
(II.10)
$$\frac{k^2 - 1}{2k} = \Gamma B$$

Se si indica con t'_R l'istante in cui avviene, secondo O', la riflessione del secondo lampo, si ha:

$$t'_R = kT$$

da cui, tenendo conto della (II.8) e della prima delle (II.10):

$$t_R = \Gamma t'_R = \frac{t'_R}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}$$
(II.11)

La (II.11) mostra che i due osservatori associano istanti diversi allo stesso evento: la riflessione del secondo lampo da parte di O'. Se fosse $c = \infty$, sarebbe $t_R = t'_R$: ciò indica che il risultato ottenuto dipende dalle proprietà della luce e non ha nulla a che vedere con il funzionamento (e quindi la struttura degli orologi). Nel caso in cui V = 0, quando cioè i due osservatori sono in quiete l'uno rispetto all'altro, si ottiene, indipendentemente dal valore di c, $t_R = t'_R$: l'uguaglianza degli istanti di tempo associati dai due osservatori allo stesso evento è quindi un caso particolare e non, come nella cinematica newtoniana, la norma.

La (II.11), poiché il primo lampo viene riflesso da O' all'istante t = t' = 0, può essere scritta nella forma:

$$\Delta t = \Gamma \Delta t' = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}$$
(II.12)

dove:

- ♦ $\Delta t'$ rappresenta l'intervallo di tempo secondo O' tra due eventi (l'arrivo del primo e del secondo lampo) che avvengono nello stesso punto del suo sistema di riferimento (K') e, quindi, la durata del fenomeno individuato da questi due eventi. La durata di un fenomeno misurata da un orologio collocato 'nel punto' in cui il fenomeno si sviluppa si chiama durata *propria*. La (II.12) mostra che la durata propria di un fenomeno è quella minima.
- ♦ Δt rappresenta l'intervallo di tempo secondo *O* tra gli stessi due eventi che, per *O*, avvengono in due punti distinti del suo sistema di riferimento (*K*).

La formula (II.12) viene usualmente indicata come la formula della 'dilatazione del tempo'. Il fattore

$$\Gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}$$

compare in molte formule. Il suo valore numerico, per diversi valori di V/c, si trova nella tabella II.2. L'andamento di Γ in funzione di V/c è mostrato in

V/c	Γ
0.01	1.00005
0.1	1.005
0.9	2.294
0.99	7.089
0.999	22.366
0.9999	70.706

Tabella II.2. alcuni valori del fattore relativistico Γ.

figura II.5.

La possibilità di rivelare sperimentalmente gli effetti del fattore Γ dipende, oltre che dal suo valore, dal tipo di misura. Per esempio, l'effetto di Γ corrispondente a V/c = 0.01 è facilmente misurabile nel caso si tratti di una frequenza.

II.5 Verifica sperimentale della 'dilatazione del tempo'

La 'dilatazione del tempo' è stata studiata sperimentalmente usando particelle elementari instabili. La vita media delle particelle è prima misurata in



Figura II.5. and amento del fattore relativistico Γ in funzione di V/c.

laboratorio quando le particelle sono in quiete. Indicato con N_0 il numero di particelle all'istante t = 0 e con N il numero di particelle che all'istante tnon si sono ancora disintegrate, il numero di particelle che si disintegrano nell'intervallo di tempo compreso tra t e t + dt sarà:

$$-dN = \frac{N}{\tau} dt$$

dove τ ha le dimensioni di un tempo. Integrando:

$$N = N_0 e^{-t/\tau}$$

La vita media delle particelle sarà allora data da:

$$< t > = \frac{1}{N_0} \int -dN t = \frac{1}{\tau} \int_0^\infty e^{-t/\tau} t \, dt = \tau$$

 τ rappresenta quindi la vita media delle particelle. Se le medesime particelle sono in moto inerziale con velocità *V* rispetto al laboratorio e il loro numero è N_0 all'istante t = 0 nel punto x = 0, allora il loro numero all'istante t sarà dato da:

$$N = N_0 e^{-t/\tau} = N_0 e^{-x/V\tau} = N_0 e^{-x/V}$$

dove $\lambda = V\tau$ è la distanza media percorsa dalle particelle prima della loro disintegrazione.

L'esperimento consiste nel misurare:

- la velocità delle particelle. La misura viene effettuata misurando, con due orologi sincronizzati tra loro, l'intervallo di tempo impiegato dalle particelle a percorrere una distanza nota (misura del tempo di volo);
- ♦ il numero delle particelle che decadono in un tratto Δx. La misura viene effettuata rivelando i prodotti del decadimento delle particelle (elettroni se si tratta di muoni negativi) e permette di ricostruire la funzione |ΔN/Δx| da cui si ricava λ.

Il prodotto finale delle misure è quindi il valore di $\tau = \lambda/V$. Indicando con τ_0 la vita media delle particelle in quiete, risulta dalle misure che:

$$\tau = \frac{\tau_0}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}$$
(II.13)

nei limiti dell'errore sperimentale (tipicamente di una parte su mille). Naturalmente, se un osservatore in volo con le particelle effettuasse misure dello stesso tipo su particelle in quiete nel laboratorio, troverebbe esattamente gli stessi risultati.

Si osservi infine che entrambi gli osservatori concordano sul numero dei muoni 'sopravvissuti' nell'origine del sistema di riferimento dei muoni in volo. Supponiamo che all'istante t = t' = 0 i muoni in volo che si trovano nell'origine del sistema di riferimento del laboratorio - coincidente con l'origine del sistema di riferimento comovente con i muoni - siano N_0 . Alla distanza l_0 dall'origine, i muoni ancora non disintegrati nel sistema di riferimento del laboratorio saranno:

$$N = N_0 e^{-(l_0/V)(1/\tau)} = N_0^{-(t/\tau_0)\sqrt{1 - V^2/c^2}}$$
(II.14)

Nel sistema comovente con i muoni, i muoni non ancora disintegrati saranno invece:

$$N' = N_0 e^{-(t'/\tau_0)} = N_0 e^{-(l_0/\Gamma V)(1/\tau_0)} = N_0 e^{-(t/\tau_0)\sqrt{1 - V^2/c^2}} = N$$
(II.15)

⇒ I muoni negativi sono particelle instabili aventi una vita media in quiete di 2.2µs. Se essi sono in moto inerziale uniforme rispetto al laboratorio con una velocità pari a 0.9994 c, dove c è la velocità della luce, la (II.33) predice che la loro vita media misurata in laboratorio (come rapporto tra la distanza media percorsa dai muoni prima della disintegrazione e la loro velocità) deve essere di 63.518µs.

Capitolo II. Sistemi inerziali

Sono state effettuate misure sia con particelle in moto rettilineo uniforme, sia con particelle in moto circolare uniforme. In entrambi i casi, la (II.13) è soddisfatta. Il caso delle particelle in moto circolare uniforme è particolarmente importante per le sue implicazioni: nel caso di moto circolare uniforme, la (II.13) vale solo se l'accelerazione cui sono sottoposte le particelle non altera la loro vita media. I risultati di questi esperimenti mostrano che la vita media delle particelle usate non è influenzata da un'accelerazione centripeta pari a $\approx 10^{18}$ g, dove g è l'accelerazione di gravità.⁹ Siccome le particelle instabili come i muoni possono essere usati come orologi in cui la vita media a riposo svolge il ruolo del periodo fondamentale di un orologio basato su un fenomeno periodico, dobbiamo concludere che il funzionamento di un 'orologio a muoni' non è influenzato dalla accelerazione e, quindi, per il principio di equivalenza, dalla gravità.

Altri esperimenti sulla dilatazione del tempo sono stati effettuati studiando l'effetto Doppler della radiazione emessa da atomi o nuclei in moto. In questi casi, obiettivo degli esperimenti è quello di verificare la dipendenza della frequenza della radiazione dal fattore $\sqrt{1 - V^2/c^2}$. Per approfondire questi argomenti si suggerisce la consultazione della sezione II.3.5 del volume di Giuliani *Elettromagntismo, relatività, quanti - Fisica, epistemologia, didattica*. Ivi è anche discusso in dettaglio l'esperimento sull'effetto viaggio di Hafele e Keating (1972).¹⁰

II.5.1 Effetto Doppler: I

Usando l'espressione (II.9) trovata per il coefficiente *k*, la (II.5) assume la forma: $T' = T \sqrt{\frac{1+B}{2}}$

cioè:

$$T' = T \frac{1 + V/c}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}$$
(II.16)

T e T' rappresentano, rispettivamente, l'intervallo di tempo (misurato da O) tra la partenza del primo e del secondo lampo e l'intervallo di tempo (misurato da O') tra la ricezione del primo e del secondo lampo. Se O invia lampi di luce ad intervalli regolari T, O' li riceve ad intervalli regolari T': T è allora il periodo del 'segnale' costituito dall'insieme dei lampi di luce

⁹Si veda, per esempio: J. Bailey, et al. 'Measurements of Relativistic Time Dilation for Positive and Negative Muons in a Circular Orbit', *Nature* 268 (1977), 301 - 305.

¹⁰G. Giuliani, *Elettromagntismo, relatività, quanti - Fisica, epistemologia, didattica,* Pavia University Press (2019).

inviati da $O \in T'$ è il periodo del 'segnale' costituito dall'insieme dei lampi di luce ricevuti da O'. La (II.16) è la formula dell'effetto Doppler, relativo alla propagazione della luce nel vuoto lungo la direzione del moto relativo dei due osservatori. La (II.16), scritta in termini di frequenze, diventa:

$$v' = v \frac{\sqrt{1 - V^2/c^2}}{1 + V/c}$$
(II.17)

La frequenza di un segnale luminoso periodico diminuisce se la sorgente e l'osservatore si allontanano. Se il moto relativo tra sorgente e osservatore è di avvicinamento, si ottiene la relazione:

$$v' = v \frac{\sqrt{1 - V^2/c^2}}{1 - V/c}$$
(II.18)

Le formule (II.16), (II.17) e (II.18) valgono anche per un'onda elettromagnetica: in questo caso è sufficiente considerare come 'segnale' l'insieme dei valori massimi del campo elettrico o di qualunque altra grandezza ad esso correlata.

II.5.2 'Contrazione delle lunghezze'

Estendendo la definizione già adottata per la lunghezza di un'asta a riposo (pagina 16), si perviene ad una definizione operativa della 'lunghezza di un'asta in moto'.

Si consideri la disposizione della figura II.6.



Figura II.6. le due piattaforme $OB \in O'B'$ si stanno avvicinando con velocità V.

Le due piattaforme $OB \in O'B'$ hanno la stessa lunghezza a riposo l_0 (lunghezza propria) e sono in moto relativo uniforme di avvicinamento. Gli orologi $O \in B$ sono sincronizzati tra loro e così pure $O' \in B'$; ogni orologio è dotato di uno specchio per riflettere i lampi di luce in arrivo. L'orologio O', quando incontra O all'istante t'_0 , invia verso B un lampo di luce (di durata idealmente nulla): questo viene riflesso da B e ritorna in O' all'istante t'_1 ; viene riflesso da O', raggiunge B, viene riflesso e ritorna in O' all'istante t'_2 ; e così via. Si ha:

$$c(t_1' - t_0') = 2l' - V'(t_1' - t_0')$$

dove è stata indicata con l' la distanza \overline{OB} vista da O' e con V' la velocità di \overline{OB} secondo O'. Ne segue che:

$$t_1' - t_0' = 2l' \frac{1}{c + V'} \tag{II.19}$$

Analogamente:

$$c(t'_2 - t'_1) = 2l' - 2V'(t'_1 - t'_0) - V'(t'_2 - t'_1)$$

da cui:

$$t_2' - t_1' = \frac{2l' - 2V'(t_1' - t_0')}{c + V'}$$

e quindi, tenendo conto della (II.19):

$$t_2' - t_1' = 2l' \frac{c - V'}{(c + V')^2}$$
(II.20)

Posto:

$$t'_1 - t'_0 = \alpha$$

 $t'_2 - t'_1 = \beta$

si ottiene dalla (II.19):

$$2l' = \alpha(c + V') \tag{II.21}$$

e dalla (II.20):

$$2l' = \beta \frac{(c+V')^2}{c-V'}$$

Uguagliando i secondi membri di queste due equazioni e ricavando V', si ottiene:

$$V' = c \frac{\alpha - \beta}{\alpha + \beta} = c \frac{2t'_1 - (t'_2 + t'_0)}{t'_2 - t'_0}$$

Sostituendo il valore così ottenuto per V' nella (II.21) si ottiene infine:

$$l' = c \frac{\alpha^2}{\alpha + \beta} = c \frac{(t'_1 - t'_0)^2}{t'_2 - t'_0}$$

L'osservatore O' può pertanto ricavare il valore di V' e di l' effettuando tre letture di tempo: t'_0 , t'_1 , t'_2 .

Ritornando all'esperimento ideale effettuato da O', si osservi che il generico intervallo di tempo è dato da:

$$t'_{n} - t'_{n-1} = 2l' \frac{(c - V')^{n-1}}{(c + V')^{n}}$$

L'intervallo di tempo $t'_B - t'_0$ che separa i due eventi iniziale (O' incontra O) e finale (O' incontra B) sarà allora dato da:

$$t'_B - t'_0 = \sum_{n=1}^{\infty} 2l' \frac{(c - V')^{n-1}}{(c + V')^n} = \frac{2l'}{c + V'} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{c - V'}{c + V'}\right)^{n-1}$$

La somma che compare nell'equazione precedente è una serie geometrica. Si ottiene pertanto:

$$t'_B - t'_0 = \frac{2l'}{c + V'} \frac{1}{1 - \left[(c - V')/(c + V')\right]} = \frac{l'}{V'}$$

Si noti che questo risultato è in accordo, come deve essere, con la definizione di velocità (II.1) data a pagina 18.

Le misure effettuate da O' possono essere descritte anche da O. O scrive le stesse formule scritte da O' in cui le grandezze accentate sono sostituite dalle grandezze non accentate. Si osservi che O non è in grado di misurare il generico intervallo di tempo $t_n - t_{n-1}$, ma solo di calcolarlo. $O \in B$ sono invece in grado di misurare l'intervallo di tempo:

$$t_B - t_0 = \frac{l_0}{V}$$

dove *V* è la velocità di *O'* rispetto ad *OB*. In linea di principio, dobbiamo ammettere la possibilità che sia $V' \neq V$. Tuttavia, è possibile dimostrare che V' = V.¹¹ Ne segue che, posto $\Delta t' = t'_B - t'_0$ e $\Delta t = t_B - t_0$, si ottiene, ponendo V' = V:

$$\frac{\Delta t'}{\Delta t} = \frac{l'}{l_0}$$

Nella sezione II.4 (pagina 25), studiando lo scambio di segnali luminosi tra $K \in K'$, si è visto che:

$$\frac{\Delta t'}{\Delta t} = \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}$$

¹¹Si veda, per esempio: V. Berzi, V. Gorini, 'Reciprocity principle and the Lorentz transformations', *Journal of Mathematical Physics*, 10, (1969), 1519 - 1524.

Si conclude allora che:

$$l' = l_0 \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}$$
(II.22)

Si osservi infine che se O effettuasse a sua volta l'esperimento effettuato da O' otterrebbe gli stessi risultati:

$$l = l_0 \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}$$
(II.23)

La (II.22) e la (II.23) descrivono la cosiddetta 'contrazione delle lunghezze'.

II.5.3 Le trasformazioni di Lorentz: I

I risultati ottenuti costituiscono la base per la derivazione delle trasformazioni di Lorentz (figura II.7).



Figura II.7. esperimento ideale per la derivazione delle trasformazioni di Lorentz. Lo specchio è a riposo nel sistema di riferimento K'.

All'istante t_1 , O invia un lampo di luce verso O'; O' riceve il lampo all'istante t'_1 . Si consideri l'evento E costituito dall'arrivo e dalla riflessione del lampo emesso da O su uno specchio in quiete nel sistema di riferimento K' e situato nel punto P'. Siano $(x, t) \in (x', t')$ le coordinate assegnate a questo evento da $O \in O'$, rispettivamente. Il lampo riflesso dallo specchio posto nel punto P' è ricevuto da O' all'istante t'_2 e da O all'istante t_2 . Le coordinate (x, t) che O attribuisce all'evento E sono legate ai tempi t_1 e t_2 dalle relazioni:

$$t_1 = t - \frac{x}{c} \tag{II.24}$$

$$t_2 = t + \frac{x}{c} \tag{II.25}$$

Analogamente, per quanto concerne O':

$$t'_{1} = t' - \frac{x'}{c}$$
(II.26)
$$t'_{2} = t' + \frac{x'}{c}$$

Sommando membro a membro le due precedenti equazioni, si ottiene:

$$t' = \frac{1}{2}(t'_1 + t'_2) \tag{II.27}$$

Per la definizione del coefficiente *k*, risulta:

$$t_1' - 0 = k(t_1 - 0)$$

$$t_2 - 0 = k(t_2' - 0)$$

La (II.27) diventa allora, tenendo conto delle (II.24), (II.25) e delle (II.10):

$$t' = \Gamma\left(t - \frac{B}{c}x\right) = \Gamma\left(t - \frac{V}{c^2}x\right)$$

Con un procedimento simile si ottiene, sottraendo membro a membro le (II.26) e procedendo come nel caso precedente:

$$x' = \Gamma(x - Vt)$$

Queste due ultime equazioni sono le trasformazioni di Lorentz relative alle variabili x e t.

Per ricavare le trasformazioni relative alle coordinate $y \in z$ si procede nel modo seguente. L'osservatore O' lancia un lampo di luce nella direzione y'verso uno specchio posto alla distanza l' dalla sua origine. Vale la relazione:

$$\Delta t' = \frac{2l'}{c} \tag{II.28}$$

dove $\Delta t'$ è la durata del 'viaggio' di andata e ritorno del lampo. L'osservatore O descrive lo stesso fenomeno come mostrato nella figura II.8.

La durata del viaggio di andata e ritorno del lampo, secondo O è:

$$\Delta t = \frac{2}{c} \sqrt{l^2 + V^2 \frac{\Delta t^2}{4}}$$

Capitolo II. Sistemi inerziali



Figura II.8. il lampo di luce lanciato da *O'* lungo la direzione *y'* viene riflesso dallo specchio *S'*. Le linee tratteggiate indicano il percorso della luce secondo *O*. O'_1, O'_2, O'_3 indicano le successive posizioni di *O'* nel sistema di riferimento di *O*. Risulta: $\overline{O'_1 O'_2} = \overline{O'_2 O'_3} = V\Delta t/2$, dove Δt è la durata del viaggio di andata - ritorno del lampo secondo *O*.

Cioè:

$$\Delta t^2 \left(1 - \frac{V^2}{c^2} \right) = \frac{4}{c^2} l^2$$

E infine, usando la (II.12) e la (II.28):

l = l'

cioè y = y'. Allo stesso modo si dimostra che z = z'.

II.6 Se t è una coordinata...

Le trasformazioni delle coordinate si possono anche ricavare sulla base di un numero minimo di ipotesi, considerando la variabile tempo t come una coordinata, alla stessa stregua delle tre coordinate spaziali. Si deve scrivere, in questo caso:

$$x' = x'(x, y, z, t)$$
$$y' = y'(x, y, z, t)$$
$$z' = z'(x, y, z, t)$$
$$t' = t'(x, y, z, t)$$

38

ammettendo quindi che la coordinata t' possa dipendere, oltre che da t, anche dalle coordinate spaziali x, y, z. Da questo punto di partenza, utilizzando l'omogeneità e l'isotropia dello spazio, l'omogeneità del tempo ed un principio di invarianza limitato (cinematico), si ottengono - mediante il calcolo sviluppato in appendice (pagina 66) - le seguenti trasformazioni di coordinate:

$$x' = \frac{1}{\sqrt{1 + V^2/\alpha}} (x - Vt)$$

$$y' = y$$

$$z' = z$$

$$t' = \frac{1}{\sqrt{1 + V^2/\alpha}} \left(t + \frac{V}{\alpha}x\right)$$

(II.29)

dove α è un parametro diverso da zero. Nel corso della deduzione, si ricava anche la seguente equazione:

$$u_x' = \frac{u_x - V}{1 + u_x V/\alpha} \tag{II.30}$$

dove $u'_x = dx'/dt'$ e $u_x = dx/dt$ sono le componenti della velocità di un punto lungo l'asse $x \equiv x'$ valutate da K' e K rispettivamente. Dalla (II.30) si deduce che $|\alpha|$ ha le dimensioni del quadrato di una velocità.

Le trasformazioni di coordinate date dalle (II.29) lasciano indeterminato il parametro α che, come si è visto, deve essere *diverso da zero*. Si consideri inizialmente il caso di $\alpha < 0$. Ponendo $\alpha = -\kappa^2$, le (II.29) diventano:

$$x' = \frac{1}{\sqrt{1 - V^2/\kappa^2}} (x - Vt)$$

$$y' = y$$

$$z' = z$$

$$t' = \frac{1}{\sqrt{1 - V^2/\kappa^2}} \left(t - \frac{V}{\kappa^2}x\right)$$

(II.31)

39

e la regola di composizione delle velocità (II.30):

$$u_x' = \frac{u_x - V}{1 - u_x V/\kappa^2}$$

Si noti che se $u_x = \kappa$, allora anche $u'_x = \kappa$: κ è una velocità limite.

Si esamini ora il caso di $\alpha > 0$, considerando il seguente esperimento ideale. Nel sistema di riferimento K', un segnale viene inviato dal punto x'_1 all'istante t'_1 nella direzione positiva dell'asse x'; si supponga che esso giunga in x'_2 all'istante t'_2 . Nel sistema di riferimento K, l'intervallo di tempo che separa i due eventi, partenza e arrivo del segnale, sarà dato da:

$$\Delta t = \frac{1}{\sqrt{1 + V^2/\alpha}} \left(\Delta t' - \frac{V}{\alpha} \Delta x' \right)$$

Se $\alpha > 0$, quando:

$$\frac{\Delta x'}{\Delta t'} = \delta' > \frac{\alpha}{V}$$

si ottiene che $\Delta t < 0$ ($\delta' = \Delta x' / \Delta t'$ è la velocità del segnale nel sistema di riferimento K'). Nel sistema di riferimento K l'arrivo del segnale risulterebbe precedere la sua partenza: verrebbe quindi violato il principio di causalità. Questa conclusione è sufficiente per scartare il caso di $\alpha > 0$. Si segnala tuttavia che anche la regola di composizione delle velocità fornisce risultati inaccettabili. Dalla:

$$u_x = \frac{u'_x + V}{1 - u'_x V / \alpha}$$

segue infatti che $u_x = \infty$ per $u'_x V = \alpha$; inoltre si avrebbe $u_x < 0$ quando u'_x e *V* sono entrambi positivi e $u'_x V > \alpha$.

Si è così stabilito che le trasformazioni di coordinate fisicamente significative sono le (II.31), dove κ rappresenta una velocità limite.

Si consideri ora l'insieme delle seguenti asserzioni:

- a) le equazioni di Maxwell che descrivono il campo elettromagnetico nel vuoto sono corrette;
- b) vale il principio di invarianza secondo cui le equazioni che descrivono i fenomeni fisici assumono la stessa forma in ogni sistema di riferimento inerziale.

a) e b) implicano che la velocità di propagazione delle onde elettromagnetiche nel vuoto è la stessa in ogni sistema di riferimento inerziale. Questo

risultato ci induce a porre nelle (II.31) $\kappa = c$. Con questa posizione, le (II.31) diventano le *trasformazioni di Lorentz*:

$$x' = \frac{1}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} (x - Vt)$$
$$y' = y$$
$$z' = z$$
$$t' = \frac{1}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} \left(t - \frac{V}{c^2} x \right)$$

Da queste si ottengono le trasformazioni inverse:

$$x = \frac{1}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} (x' + Vt')$$

$$y = y'$$

$$z = z'$$

$$t = \frac{1}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} \left(t' + \frac{V}{c^2} x' \right)$$

Durata dei fenomeni in sistemi inerziali distinti

Si considerino due eventi qualsiasi e siano $(x'_1, 0, 0, t'_1)$ e $(x'_2, 0, 0, t'_2)$ le coordinate ad essi associate nel *SRI K'*. L'intervallo di tempo che separa i due eventi nel sistema *K* sarà dato, in base alla trasformazione di Lorentz relativa alla coordinata temporale, da:

$$\Delta t = \frac{1}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} \left(\Delta t' + \frac{V}{c^2} \Delta x' \right)$$
(II.32)

dove $\Delta x' = x'_2 - x'_1$. Se $\Delta x' = 0$, cioè se i due eventi accadono nello stesso punto nel sistema di riferimento K', la (II.32) si riduce alla:

$$\Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} \tag{II.33}$$

La (II.33) fornisce la relazione tra le durate dello stesso fenomeno espresse in funzione delle coordinate temporali $t \in t'$, quando il fenomeno si svolge nello stesso punto del sistema di riferimento K' (e in punti distinti del sistema di riferimento K). Abbiamo così ritrovato la relazione (II.12) ottenuta precedentemente a pagina 28 con gli esperimenti ideali basati sulla propagazione di lampi di luce di durata idealmente nulla.

Se il fenomeno avviene nello stesso punto del sistema di riferimento *K*, allora:

$$\Delta t' = \frac{\Delta t}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} \tag{II.34}$$

La simmetria tra la (II.33) e la (II.34) riflette l'equivalenza dei due sistemi di riferimento.

Lunghezza di un'asta in moto

Dalla trasformazione di Lorentz relativa alle coordinate x, x', si ottiene:

$$\Delta x' = \frac{1}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} \left(\Delta x - V \Delta t \right)$$

Se $\Delta x'$ rappresenta la lunghezza l_0 di un'asta a riposo in K', allora Δx rappresenta la lunghezza l della medesima asta in K se $\Delta t = 0$. Risulta allora:

$$l = l_0 \sqrt{1 - V^2 / c^2}$$

che è identica alla (II.22) e alla (II.23) di pagina 36.

II.6.1 Le trasformazioni di Lorentz: II

I due procedimenti usati per ricavare le trasformazioni di Lorentz sono radicalmente diversi, anche se hanno in comune i seguenti postulati:

- a) Omogeneità e isotropia dello spazio.
- b) Omogeneità del tempo.
- c) Un principio di invarianza cinematico.¹²

Questo insieme di postulati è sufficiente per ricavare trasformazioni di coordinate che potremmo chiamare *trasformazioni di Lorentz generalizzate* e

¹²Questo principio è meno esteso di quello galileiano o di quello einsteniano (che riguardano tutti i fenomeni fisici).

che contengono *intrinsecamente* una velocità limite; esse diventano le trasformazioni di Lorentz se si pone questa velocità limite uguale a quella della luce nel vuoto.

Il metodo dei lampi di luce richiede, rispetto all'altra derivazione, il postulato aggiuntivo secondo cui la velocità della luce è la stessa in qualunque *SRI*. Questo metodo permette di ricavare la 'dilatazione del tempo' e la 'contrazione delle lunghezze' senza l'uso delle trasformazioni di Lorentz e mostra che 'dilatazione' e 'contrazione' sono il prodotto di particolari procedimenti di misura basati sulle proprietà di propagazione della luce.

II.7 Principio di invarianza di Einstein

Il principio universale della teoria della relatività ristretta è contenuto nel postulato: le leggi della fisica sono invarianti rispetto alle trasformazioni di Lorentz (nel passaggio da un sistema inerziale ad un altro, scelto arbitrariamente). Questo è un principio restrittivo delle leggi naturali, paragonabile al principio restrittivo della non - esistenza del perpetuum mobile, che sta alla base della termodinamica.

Albert Einstein

Il principio di invarianza di Einstein coincide, nell'enunciato, con quello di Galileo:

I fenomeni fisici, a parità di condizioni iniziali, si manifestano allo stesso modo in ogni sistema di riferimento inerziale.

O, equivalentemente:

Le leggi dei fenomeni fisici assumono la stessa forma in ogni sistema di riferimento inerziale.

Il principio di invarianza è solitamente chiamato principio di relatività: a pagina 22 abbiamo spiegato perché la prima dizione è preferibile.

In generale, si distinguono i principi di invarianza di Galileo e di Einstein restringendo la validità del primo ai soli fenomeni meccanici (si veda a pagina 21). Questa distinzione non è giustificata perché, come già osservato, ai tempi di Galileo la 'fisica' coincideva sostanzialmente con la meccanica e Galileo non aveva alcuna ragione per restringere la validità del suo principio ai 'soli' fenomeni meccanici. La riaffermazione, da parte di Einstein, del

Capitolo II. Sistemi inerziali

principio di invarianza ha prodotto, nel mutato contesto delle conoscenze, proprio la modificazione delle leggi della meccanica.

Siccome valgono le trasformazioni di coordinate di Lorentz, il principio di invarianza di Einstein richiede che la forma delle leggi fisiche sia invariante per trasformazioni di Lorentz: si dice allora che la teoria che contiene queste leggi è relativisticamente invariante. In questo manuale studieremo due teorie relativistiche: la teoria di Maxwell - Lorentz e la dinamica relativistica. La teoria di Maxwell - Lorentz è stata sviluppata prima dell'avvento della relatività: è pertanto necessario verificare che le sue leggi siano invarianti per trasformazioni di Lorentz (sezione III.2.1, pagina 78). Nelle prossime sezioni sarà sviluppata la dinamica relativistica usando enti matematici, i quadrivettori, che, per trasformazioni di Lorentz, si trasformano come le coordinate: le leggi fisiche saranno equazioni in cui compaiono quadrivettori e grandezze invarianti e saranno quindi automaticamente invarianti per trasformazioni di Lorentz.

II.8 La nozione di spazio - tempo

Oggetto della nostra osservazione sono sempre, e soltanto, spazio e tempo insieme considerati. Non ha mai alcuno osservato un luogo se non ad un certo tempo, né un tempo se non in un luogo determinato. Hermann Minkowski

Si riprendano in considerazione le trasformazioni di Lorentz:

$$x' = \frac{1}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} (x - Vt)$$
$$y' = y$$
$$z' = z$$
$$t' = \frac{1}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} \left(t - \frac{V}{c^2} x \right)$$

Ponendo B = V/c, possono essere scritte nella forma:

$$x' = \Gamma(x - Bct)$$

$$y' = y$$

$$z' = z$$

$$ct' = \Gamma(ct - Bx)$$

Si consideri ora lo spazio quadridimensionale le cui coordinate sono (ct, x, y, z) e lo si chiami 'spazio - tempo'. Un punto (ct, x, y, z) dello spazio - tempo individua allora le coordinate spazio - temporali di un evento. Dati due punti dello spazio - tempo (ct_1 , x_1 , y_1 , z_1) e (ct_2 , x_2 , y_2 , z_2), l'espressione:

$$s^{2} = c^{2}(t_{2} - t_{1})^{2} - (x_{2} - x_{1})^{2} - (y_{2} - y_{1})^{2} - (z_{2} - z_{1})^{2}$$

è il quadrato dell'*intervallo* tra i due punti considerati ed è un invariante perché il suo valore è lo stesso in qualunque *SRI*. Infatti, con le notazioni $\Delta t = t_2 - t_1$; $\Delta x = x_2 - x_1$, ecc.:

$$s'^{2} = c^{2}(t'_{2} - t'_{1})^{2} - (x'_{2} - x'_{1})^{2} - (y'_{2} - y'_{1})^{2} - (z'_{2} - z'_{1})^{2}$$
$$= c^{2}\Gamma^{2} \left(\Delta t - \frac{B}{c}\Delta x\right)^{2} - \Gamma^{2} (\Delta x - Bc\Delta t)^{2} - \Delta y^{2} - \Delta z^{2}$$

Sviluppando i quadrati, raccogliendo i fattori comuni e ricordando che $\Gamma^2 = 1/1 + B^2$:

$$s'^{2} = c^{2}\Delta t^{2} - \Delta x^{2} - \Delta y^{2} - \Delta z^{2} = s^{2}$$

Si osservi che il quadrato dell'intervallo tra due punti dello spazio - tempo può anche essere negativo: in questo caso l'intervallo *s* è rappresentato da un numero immaginario. Il segno del quadrato dell'intervallo tra due punti dello spazio - tempo ha il seguente significato:

a) $s^2 > 0$, cioè $c^2 \Delta t^2 > l^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2$. La distanza spaziale *l* tra i due punti P_1 e P_2 dello spazio - tempo è minore della distanza che la luce percorrerebbe nell'intervallo di tempo Δt , che rappresenta la separazione temporale dei due punti: ciò significa che l'evento E_2 cui è associato il punto P_2 può essere connesso causalmente all'evento E_1 cui è associato il punto P_1 , perché l'evento E_1 può essere la causa di E_2 mediante un'interazione propagantesi da P_1 a P_2 con la velocità della luce. Un intervallo di questo genere si dice di tipo 'temporale'.

Capitolo II. Sistemi inerziali

- **b**) $s^2 < 0$, cioè $c^2 \Delta t^2 < l^2$. In questo caso E_2 non può essere connesso causalmente ad E_1 e l'intervallo si dice di tipo 'spaziale'.
- c) $s^2 = 0$, cioè $c^2 \Delta t^2 = l^2$. In questo caso i due eventi E_1 ed E_2 possono essere connessi solo se costituiti, rispettivamente, dalla partenza e dall'arrivo di una interazione propagantesi con la velocità della luce.

II.8.1 Cinematica relativistica

La nozione di spazio - tempo permette di sviluppare un formalismo particolarmente adatto a rappresentare le leggi fisiche e la loro invarianza per trasformazioni di Lorentz. L'idea è quella di rappresentare le grandezze fisiche – quando possibile – con enti matematici tali che la forma delle equazioni in cui tali enti compaiono rimanga invariata passando da un *SRI* ad un altro. Alcuni di questi enti sono i *quadrivettori*.

Un *quadrivettore* \vec{S} è un insieme di quattro grandezze (S_0, S_x, S_y, S_z) che si trasformano, nel passaggio da un *SRI* ad un altro, come le coordinate (ct, x, y, z); inoltre il quadrato del loro modulo è dato, per definizione, da $S^2 = S_0^2 - S_x^2 - S_y^2 - S_z^2$.¹³ Le coordinate (ct, x, y, z) di un punto *P* dello spazio - tempo sono le componenti di un quadrivettore: esso, indicato con $\vec{\mathcal{R}}$, individua il punto *P*.

A partire dal quadrivettore $\hat{\mathscr{R}}$ è possibile definire il quadrivettore velocità ed il quadrivettore accelerazione di un punto. A questo proposito, si osservi che, se la variazione delle coordinate spaziali *x*, *y*, *z* di un punto nel sistema di riferimento *K* relativa all'intervallo di tempo *dt* è data, rispettivamente, da *dx*, *dy*, *dz*, lo spostamento del punto è descritto nello spazio tempo dall'intervallo $ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$. Nel sistema *K*'', istantaneamente comovente con il punto considerato, l'intervallo corrispondente è invece dato da $ds''^2 = c^2 dt''^2$, perché dx'' = dy'' = dz'' = 0. Allora:

$$ds^2 = c^2 dt''^2 (II.35)$$

dt'' è l'*intervallo di tempo proprio*, cioè l'intervallo di tempo tra due eventi che accadono nello stesso punto dello spazio tridimensionale. Si indichi tale intervallo con $d\tau$: la (II.35) assicura che esso è un invariante, perché ds^2 è un invariante.

Si definisce il quadrivettore velocità così:

$$\vec{\mathcal{V}} = \frac{d\vec{\mathscr{R}}}{d\tau}$$

¹³I quadrivettori saranno rappresentati con lettere calligrafiche per distinguerli dagli usuali vettori tridimensionali.

con:

$$d\tau = dt'' = dt\sqrt{1 - v^2/c^2} = \frac{1}{\gamma}dt$$
 (II.36)

dove v è il modulo del vettore velocità (tridimensionale) del punto e $\gamma = 1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$. Si noti la definizione di un *nuovo* parametro $\gamma = 1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$ in cui compare la velocità v (tridimensionale) del punto, da non confondersi con $\Gamma = 1/\sqrt{1 - V^2/c^2}$ in cui compare la velocità V relativa dei due *SRI*.

Ne segue che le componenti del quadrivettore velocità sono date da:

$$\vec{\mathcal{V}} = \vec{\mathcal{V}}(\gamma c, \gamma v_x, \gamma v_y, \gamma v_z)$$

In dettaglio:

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{V}_0 &=& \gamma c \\ \mathcal{V}_1 &=& \gamma v_x \\ \mathcal{V}_2 &=& \gamma v_y \\ \mathcal{V}_3 &=& \gamma v_z \end{array}$$

dove v_x , v_y , v_z sono le componenti della velocità del punto considerato nello spazio tridimensionale. Il quadrato del modulo del quadrivettore velocità è un invariante ed è uguale a c^2 , come si verifica immediatamente ponendosi in un sistema di riferimento istantaneamente comovente con il punto (in questo caso $\Gamma = \gamma$).

Mediante le equazioni di trasformazione delle componenti del quadrivettore velocità si può trovare la legge di composizione delle velocità, parzialmente ricavabile anche nel corso della deduzione delle trasformazioni di Lorentz (sezione II.12, pagina 66). La trasformazione relativa alla componente temporale:

$$\gamma' c = \Gamma \left(\gamma c - \frac{V}{c} \gamma \nu_x \right)$$

permette di scrivere che:

$$\frac{\gamma}{\gamma'} = \frac{1}{\Gamma\left(1 - \nu_x V/c^2\right)} \tag{II.37}$$

Le equazioni di trasformazione delle altri componenti sono:

$$\begin{aligned} \gamma' \nu'_x &= \Gamma \left(\gamma \nu_x - \frac{V}{c} \gamma c \right) \\ \gamma' \nu'_y &= \gamma \nu_y \\ \gamma' \nu'_z &= \gamma \nu_z \end{aligned}$$

47

che, tenendo conto della (II.37), diventano:

$$v'_{x} = \frac{v_{x} - V}{1 - v_{x}V/c^{2}}$$

$$v'_{y} = \frac{\sqrt{1 - V^{2}/c^{2}}}{1 - v_{x}V/c^{2}}v_{y}$$

$$v'_{z} = \frac{\sqrt{1 - V^{2}/c^{2}}}{1 - v_{x}V/c^{2}}v_{z}$$

Il quadrivettore accelerazione è definito da:

$$\vec{W} = \frac{d\vec{V}}{d\tau}$$

Le sue componenti sono:

$$\vec{\mathcal{W}}\left(\gamma \frac{d(\gamma c)}{dt}, \gamma \frac{d(\gamma v_x)}{dt}, \gamma \frac{d(\gamma v_y)}{dt}, \gamma \frac{d(\gamma v_z)}{dt}\right)$$

Si ha:

$$\mathcal{W}_0 = \frac{1}{c} \frac{v \dot{v}}{(1-\beta^2)^2}$$
$$\mathcal{W}_\alpha = \frac{\dot{v}_\alpha}{1-\beta^2} + \frac{v_\alpha(v \dot{v})}{c^2(1-\beta^2)^2} \quad \alpha = 1, 2, 3$$

dove si è posto $\beta = v/c$. Si osservi che le componenti del quadrivettore accelerazione sono tutte nulle quando il moto della particella è rettilineo uniforme ($\dot{v} = 0$) e che, nel *SRI* istantaneamente comovente con la particella (v = 0), la componente temporale è nulla e le tre componenti spaziali coincidono con quelle tridimensionali. Ne consegue che il quadrato del modulo del quadrivettore accelerazione coincide con il quadrato del modulo della accelerazione tridimensionale valutato nel sistema di riferimento istantaneamente comovente con la particella.

II.8.2 Dinamica relativistica

Se si suppone di poter caratterizzare una particella attribuendole una massa m invariante,¹⁴ si può definire il *quadriimpulso* della particella:

 $\vec{\mathcal{P}} = m\vec{\mathcal{V}} = \vec{\mathcal{P}}(\gamma mc, \gamma mv_x, \gamma mv_y, \gamma mv_z)$

 $^{^{14}}$ Per ragioni che diverranno chiare in seguito, *m* è talora chiamata *massa a riposo* della particella.

Il problema è quello di individuare l'equazione di moto corrispondente alla seconda legge di Newton: *si assume* che la legge del moto sia, analogamente alla seconda legge della dinamica newtoniana:

$$\frac{d\hat{\mathscr{P}}}{d\tau} = \vec{\mathscr{F}} \tag{II.38}$$

La (II.38) definisce automaticamente la *quadriforza*. Ricordando la (II.36), le sue componenti sono:

$$\vec{\mathscr{F}} = \vec{\mathscr{F}} \left(\gamma \frac{d(\gamma mc)}{dt}, \gamma \frac{d(\gamma mv_x)}{dt}, \gamma \frac{d(\gamma mv_y)}{dt}, \gamma \frac{d(\gamma mv_z)}{dt} \right)$$
(II.39)

Si considerino le componenti spaziali della quadriforza:

$$\mathscr{F}_i = \gamma \frac{d(\gamma m v_i)}{dt} \quad i = 1, 2, 3$$

Siccome si vuole che queste equazioni tendano a quelle della meccanica newtoniana per $(v/c) \rightarrow 0$, è sufficiente che sia:

$$\mathscr{F}_i = \gamma F_i \quad i = 1, 2, 3$$

dove le F_i sono le componenti tridimensionali della forza. Ne segue che:

$$F_i = \frac{d(\gamma m v_i)}{dt} \quad i = 1, 2, 3$$

Queste, scritte in forma vettoriale, danno:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} \tag{II.40}$$

La (II.40) è formalmente identica all'equazione della dinamica newtoniana: $\gamma m \vec{v} = \vec{p}$ è, infatti, l'impulso relativistico tridimensionale. La differenza tra le due equazioni risiede nella definizione di \vec{p} : $\vec{p} = m\vec{v}$ nella dinamica newtoniana; $\vec{p} = \gamma m\vec{v}$ nella dinamica relativistica. La (II.40) viene sovente interpretata definendo la *massa relativistica* di una particella come $m_{rel} = \gamma m$ e dicendo che la massa relativistica dipende dalla velocità come $\gamma = 1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$. E' questa la ragione per cui *m* viene talora indicata come la *massa a riposo* della particella.

Per trovare l'espressione della componente temporale della quadriforza in funzione delle grandezze tridimensionali si procede nel modo seguente. Il quadrato del modulo del quadrivettore velocità è dato da:

$$\mathcal{V}^{2}_{0} - \mathcal{V}^{2}_{1} - \mathcal{V}^{2}_{2} - \mathcal{V}^{2}_{3} = c^{2}$$

Differenziando l'equazione precedente rispetto a $d\tau$, si ottiene, tenendo conto della relazione $d\mathcal{V}_i/d\tau = (1/m)\mathcal{F}_i$, i = 0, 1, 2, 3 (derivante dalla equazione di moto (II.38)):

$$\mathcal{F}_0 = \frac{\gamma}{c} (F_x v_x + F_y v_y + F_z v_z) = \frac{\gamma}{c} (\vec{F} \cdot \vec{v})$$

In conclusione, la quadriforza, espressa in funzione delle grandezze tridimensionali, è data da:

$$\vec{\mathscr{F}} = \left(\frac{\gamma}{c}(\vec{F} \cdot \vec{v}), \gamma \vec{F}\right) \tag{II.41}$$

Nel passaggio da un *SRI* ad un altro, le componenti della quadriforza si trasformano in modo tale che:

$$F_{x} = \frac{F'_{x} + V/c^{2}(\vec{F}' \cdot \vec{v}')}{1 + Vv'_{x}/c^{2}}$$

$$F_{y} = \frac{F'_{y}\sqrt{1 - V^{2}/c^{2}}}{1 + Vv'_{x}/c^{2}}$$

$$F_{z} = \frac{F'_{z}\sqrt{1 - V^{2}/c^{2}}}{1 + Vv'_{x}/c^{2}}$$
(II.42)
$$\vec{F} \cdot \vec{v} = \frac{\vec{F}' \cdot \vec{v}' + VF'_{x}}{1 + Vv'_{x}/c^{2}}$$

dove si è fatto uso della relazione

$$\frac{\gamma'}{\gamma} = \frac{1}{\Gamma(1 + V v'_x / c^2)}$$

e, come al solito, V è la velocità relativa dei due *SRI* e v' la velocità della particella nel sistema di riferimento K'. Si noti che nelle (II.42) compaiono le componenti tridimensionali della forza. Confrontando le componenti temporali fornite dalla (II.39) e dalla (II.41), si ottiene:

$$\frac{d}{dt}(\gamma mc^2) = \vec{F} \cdot \vec{v} \tag{II.43}$$

Il secondo membro della (II.43) rappresenta il lavoro compiuto dalla forza tridimensionale nell'unità di tempo; il primo membro dovrebbe quindi rappresentare la variazione dell'energia cinetica nell'unità di tempo. La (II.43) suggerisce quindi di definire l'energia della particella (esclusa quella potenziale) come:

$$\mathscr{E} = \gamma m c^2 + A \tag{II.44}$$

50

Il valore della costante *A* non può essere scelto arbitrariamente, perché si richiede che le formule relativistiche tendano, per velocità piccole ($v/c \rightarrow 0$, $V/c \rightarrow 0$), a quelle della meccanica newtoniana. La (II.44), implica, per la componente temporale del quadriimpulso, l'espressione:

$$\gamma mc + A/c$$

Allora la relazione di trasformazione della componente $\gamma m v_x$ del quadriimpulso è:

$$\gamma' m v'_{x} = \Gamma \left[\gamma m v_{x} - \frac{V}{c} \left(\gamma m c + \frac{A}{c} \right) \right]$$

che, per Γ , $\gamma \in \gamma'$ tendenti ad 1 (limite newtoniano), diventa:

$$mv_x' = mv_x - mV - \frac{VA}{c^2}$$

Affinché si possa ritrovare la legge di composizione delle velocità di Galileo, deve essere A = 0. Questo risultato rappresenta una netta cesura rispetto alla dinamica newtoniana dove l'energia di una particella, fissato un *SRI*, è sempre definita a meno di una costante. Ne consegue che l'energia di una particella assume l'espressione definitiva:

$$\mathscr{E} = \gamma m c^2$$

Quando v = 0, si ottiene:

$$\mathcal{E}_0 = mc^2$$

Pertanto, la dinamica relativistica prevede che si debba associare ad una particella a riposo di massa m la energia mc^2 , detta *energia a riposo della particella*.

 \Rightarrow Per esempio, l'energia a riposo dell'elettrone è pari a circa 0.511 MeV.

L'energia cinetica di una particella sarà allora data da:

$$\mathscr{E}_{cin} = \mathscr{E} - \mathscr{E}_0 = mc^2(\gamma - 1)$$

Nel limite di velocità piccole $v \ll c$, l'espressione dell'energia cinetica è ben approssimata da quella newtoniana:

$$\mathscr{E}_{cin} \approx \frac{1}{2}mv^2$$
A conclusione di queste considerazioni si osservi che il quadriimpulso di una particella può essere scritto come:

$$\vec{\mathscr{P}} = \vec{\mathscr{P}} \left(\frac{\mathscr{E}}{c}, \vec{p} \right) \tag{II.45}$$

ed il quadrato del suo modulo invariante vale:

$$\frac{\mathscr{E}^2}{c^2} - p^2 = m^2 c^2 \tag{II.46}$$

come si verifica immediatamente ponendosi nel *SRI* in cui la particella è istantaneamente in quiete. Per la forma della (II.45), il quadriimpulso viene anche chiamato *quadrivettore energia - impulso*.

Se la particella si trova in un campo di forze conservativo, si ha (dalla II.43):

$$d(\gamma mc^2) = \vec{F} \cdot \vec{v} dt = -dU$$

dove *U* è l'energia potenziale della particella. L'energia totale della particella $\gamma mc^2 + U$ è quindi costante nel *SRI* scelto.

II.9 Materia, massa ed energia

...se un corpo emette un'energia L sotto forma di radiazione, la sua massa diminuisce di L/c^2 . Il fatto che l'energia sottratta al corpo divenga energia di radiazione non è essenziale...Non è da escludere che la teoria trovi conferma nel caso di corpi a contenuto energetico fortemente variabile, come i sali di radio. Se la teoria è conforme ai fatti, allora la radiazione trasporta inerzia tra corpi emittenti e corpi assorbenti.

Albert Einstein

La grandiosa importanza concettuale della teoria della relatività, come contributo ad una più profonda comprensione dei rapporti tra spazio e tempo, e le vivaci e spesso appassionate discussioni a cui essa ha in conseguenza dato luogo anche fuori degli ambienti strettamente scientifici, hanno forse un po' distolta l'attenzione da un altro suo risultato che, per esser meno clamoroso e, diciamolo pure, meno paradossale, ha tuttavia nella fisica conseguenze non meno degne di nota, ed il cui interesse è verosimilmente destinato a crescere nel prossimo svilupparsi della scienza. Il risultato a cui accenniamo è la scoperta della relazione che lega la massa di un corpo alla sua energia.

Enrico Fermi

Secondo la Meccanica e la Fisica classica, 'materia' è 'quella cosa' di cui sono fatti i corpi. La materia 'possiede' una *massa inerziale* ed una *massa gravitazionale* che possono essere definite mediante le equazioni:

$$\vec{F} = m_i \vec{a} \tag{II.47}$$

$$\vec{F}_g = m_g \vec{g} \tag{II.48}$$

La (II.47) è la seconda legge della dinamica newtoniana, mentre la (II.48) esprime la forza agente su un corpo di massa gravitazionale m_g posto nel campo gravitazionale \vec{g} . Allora, l'accelerazione di gravità di un corpo sarà data da:

$$\vec{a}_g = \frac{m_g}{m_i}\vec{g}$$

Dalla conclusione di Galileo secondo cui l'accelerazione dovuta al campo gravitazionale è la stessa per tutti i corpi, segue che il rapporto tra massa gravitazionale e inerziale è lo stesso per tutti i corpi. Il *principio di equivalenza* (nella sua enunciazione 'debole') stabilisce che sia $m_i = m_g$. Retrospettivamente, la verifica sperimentale del principio di equivalenza è iniziata con Newton: nella tabella II.3 sono riassunti i risultati di alcune di queste misure.

Esperimento	Metodo	Sostanze	η
Newton (1686)	Pendolo	Varie	10^{-3}
Bessel (1832)	Pendolo	Varie	2×10^{-5}
Eötvös et al. (1922)	Bilancia di torsione	Varie	5×10^{-9}
Dicke et al. (1964)	Bilancia di torsione	Alluminio e oro	10^{-11}
Koester (1976)	Caduta libera	Neutroni	3×10^{-4}

Tabella II.3. verifiche sperimentali del principio di equivalenza. η è un indice della accuratezza della misura: $\eta = 2|a_1 - a_2|/|a_1 + a_2|$, dove a_1 e a_2 sono le accelerazioni gravitazionali di due corpi di diversa composizione. I valori di η vanno intesi nel senso che 'se c'è una violazione del principio di equivalenza, tale violazione è inferiore a η '.

Considerata una particella 'puntiforme' isolata (non interagente con alcuna altra particella) ad essa è possibile associare una energia cinetica data da $T = (1/2)mv^2$; se invece la particella interagisce con un'altra (o con altre) e l'interazione è descrivibile mediante un campo conservativo, allora si può associare alla particella anche un'energia potenziale *U*. In un sistema

Capitolo II. Sistemi inerziali

fisico costituito da un insieme di particelle isolato,¹⁵ le cui interazioni siano descrivibili mediante campi conservativi, la somma T + U è costante.

Quindi, secondo la Fisica classica, la descrizione dei fenomeni fisici (inclusi quelli elettromagnetici) può essere effettuata usando e distinguendo i concetti di materia e di energia. Secondo questa concezione, la materia ha la caratteristica essenziale di 'possedere' una massa; alla materia può inoltre essere associata un'energia cinetica e/o potenziale. Va tuttavia sottolineato che, nell'ambito dell'elettromagnetismo, il concetto di energia è concettualmente indipendente da quello di massa: basti pensare al fatto che si associa energia al campo elettromagnetico.

Vediamo come la *TRR* modifica questa concezione. Si inizi riscrivendo il quadrato del modulo del quadrivettore energia - impulso:

$$\vec{\mathscr{P}}^2 = \frac{\mathscr{E}^2}{c^2} - \vec{p}^2$$
 (II.49)

che è un invariante. Questa formula è di semplice lettura solo quando è riferita ad una particella 'elementare' isolata; intendendo per 'elementare' una particella non composta, cioè non costituita da sub - particelle. In questo caso il secondo membro della (II.49) si riduce a m^2c^2 . Per un sistema fisico composto da più particelle (per esempio una particella composta, un solido, un liquido o un gas) la (II.49) assume la forma:

$$\vec{\mathscr{P}}^2 = \frac{1}{c^2} \left(\sum_i \mathscr{E}_i \right)^2 - \left(\sum_i \vec{p}_i \right)^2 \tag{II.50}$$

Se si pone uguale a M^2c^2 il secondo membro della (II.50), *si definisce* la massa M (invariante) di una particella composta o, in generale, di un sistema fisico composto da più particelle. Per calcolare M è conveniente scegliere il SRI in cui la quantità di moto totale del sistema $\vec{P} = \sum_i \vec{p}_i$ è nulla. Si ottiene allora:

$$M = \frac{1}{c^2} \sum_i \mathscr{E}_i = \frac{1}{c^2} \mathscr{E}$$

Essendo:

$$\mathscr{E} = \sum_{i} m_i c^2 + T + U$$

dove m_i , $T \in U$ sono, rispettivamente, la massa della particella i - esima, l'energia cinetica e l'energia potenziale del sistema di particelle, si ottiene:

$$M = \sum_{i} m_{i} + \frac{1}{c^{2}}(T + U)$$
(II.51)

¹⁵Cioè tale che le uniche interazioni cui ogni particella dell'insieme è sottoposta siano quelle con le altre particelle del sistema.

La massa di un insieme di particelle *non* è uguale alla somma delle masse delle particelle che lo costituiscono. In particolare, per un sistema costituito da due particelle, nel passaggio da uno stato in cui le particelle sono a distanza infinita ad uno stato in cui le particelle interagiscono con energia potenziale negativa (attrazione), la massa del sistema può diminuire. La (II.51) implica che, considerato un insieme isolato di particelle, alla loro energia totale T + U è associata una massa pari a $(T + U)/c^2$. I risultati possono essere riassunti nello schema della tabella II.4.

Massa	$\sum m_i$	⇒	$\sum m_i c^2$	Energia	0
Massa	$(T + U) / c^2$	⇐	T + U	Energia	*
Massa totale	$\sum m_i + (T+U)/c^2$	⇔	$\sum m_i c^2 + (T+U)$	Energia totale	0

Tabella II.4. massa ed energia nella relatività ristretta. $\sum m_i$ è la massa, *T* indica l'energia cinetica, *U* quella potenziale. La stella indica l'energia e la massa messe in gioco in processi usuali; il circolo, la massa e l'energia messe in gioco in reazioni particella - antiparticella.

Questi risultati sono usualmente commentati dicendo che massa ed energia sono equivalenti o che la massa si può trasformare in energia (o viceversa). Un'analisi più attenta mostra che queste asserzioni sono fonte di ambiguità o fraintendimenti. Si consideri una particella composta, per esempio un atomo *A*. Le sue proprietà sono descritte in termini delle masse delle particelle elementari (o che si possono considerare tali nei processi presi in esame) che lo costituiscono, nonché della loro energia di interazione (potenziale e cinetica). Per la (II.51), alla somma dell'energia cinetica e potenziale delle particelle costituenti si deve associare una massa pari a $(T+U)/c^2$: essa fa parte della massa dell'atomo, ma deve essere distinta dalla massa delle particelle costituenti.¹⁶ Si supponga ora che l'atomo *A* emetta un fotone di energia e_f e che questo fotone venga poi assorbito da un altro atomo *B* (*risonanza*): come si descrive il processo di emissione - assorbimento? Emettendo il fotone, l'energia dell'atomo *A* diminuisce di una quantità e_f e la

¹⁶L'atomo è considerato in quiete.

sua massa di una quantità e_f/c^2 . In questo processo non sono coinvolte le masse delle particelle costituenti l'atomo: l'atomo perde parte della energia T + U delle particelle che lo costituiscono. Il fotone emesso viaggia nel vuoto con velocità c: la sua massa è nulla. Quando il fotone viene assorbito dall'atomo B, avviene il processo inverso: l'energia di B aumenta di e_f e la sua massa di e_f/c^2 . Anche in questo caso non sono coinvolte le masse delle particelle elementari costituenti.



Figura II.9. energia media di legame per nucleone in funzione del numero di massa *A* (numero dei nucleoni).

Un'analisi dello stesso tipo vale anche per le reazioni nucleari di fissione e fusione: quella che viene posta in gioco è la massa associata all'energia T+U delle particelle costituenti i nuclei e non la loro massa.

L'equazione (II.51) spiega come possa essere liberata energia nei processi di fissione e fusione nucleare. Se un nucleo di massa M contiene N_p protoni e N_n neutroni, l'energia di legame media E_l per nucleone (protone o neutrone) del nucleo è definita nel modo seguente:

$$E_{l} = -\frac{[M - (N_{p}m_{p} + N_{n}m_{n})]}{N_{p} + N_{n}}c^{2}$$

dove m_p è la massa del protone e m_n la massa del neutrone. L'energia liberata durante una reazione di fissione o fusione è allora:

$$E = N(E_l^f - E_l^i)$$

dove N è il numero dei nucleoni coinvolti nella reazione e E_l^i , E_l^f l'energia media di legame per nucleone iniziale e finale. L'energia media di legame per nucleone in funzione del numero di massa aumenta sino al valore di circa 8.7 *MeV*, in corrispondenza del numero di massa (numero dei nucleoni) 56, per poi diminuire gradualmente (figura II.9). Pertanto, la fusione di due nuclei leggeri e la fissione di un nucleo pesante opportunamente scelti libera energia (sotto forma di energia cinetica e di fotoni).

Ci sono tuttavia dei processi in cui, effettivamente, viene messa in gioco la massa delle particelle: sono le reazioni particella - antiparticella, per esempio elettrone - positrone.¹⁷ In queste reazioni la coppia particella - antiparticella, scomparendo, dà origine ad una coppia di fotoni.¹⁸

Alla luce delle considerazioni svolte, appare evidente come la concezione della materia della Fisica classica sia inadeguata per descrivere il complesso dei fenomeni fisici osservati. Ad essa bisogna sostituire una concezione della materia come costituita da massa e da energia. Le relazioni tra queste due grandezze sono specificate nella tabella II.4. Queste relazioni sono tali per cui i due principi di conservazione della Fisica classica riguardanti la massa e l'energia, sono sostituiti da un unico principio di conservazione: quello dell'ENERGIA. Si noti, in riferimento all'analisi del processo di emissione e di assorbimento di un fotone, che la massa non è conservata: quando il fotone è in volo tra un atomo e l'altro, *manca* una massa pari a e_f/c^2 .

Si dirà con ragione che non appare possibile che, almeno in un prossimo avvenire, si trovi il modo di mettere in libertà queste spaventose quantità di energia, cosa del resto che non si può che augurarsi, perché l'esplosione di una così spaventosa quantità di energia avrebbe come primo effetto di ridurre in pezzi il fisico che avesse la disgrazia di trovar il modo di produrla.

Enrico Fermi

¹⁷Un positrone è una particella di massa e spin uguale a quelli dell'elettrone, ma dotata di carica opposta.

 $^{^{18}}$ E' anche possibile il processo inverso in cui un fotone, interagendo con un nucleo, dà origine ad una coppia elettrone - positrone.

Capitolo II. Sistemi inerziali

II.9.1 Red - shift gravitazionale

I risultati ottenuti permettono di predire l'effetto noto come *red - shift* gravitazionale, originariamente previsto dalla teoria della relatività generale. Si consideri un atomo eccitato posto nel campo gravitazionale della Terra e si suppongano entrambi a riposo nel sistema di riferimento scelto. L'energia a riposo del complesso (atomo + Terra) sarà allora data da:

$$\mathcal{E}_0 = Mc^2 + \left(mc^2 + \Delta E\right) - \frac{GM}{r}\left(m + \frac{\Delta E}{c^2}\right)$$

dove *M* e *m* sono, rispettivamente, la massa della Terra e dell'atomo non eccitato, *G* la costante di gravitazione universale, *r* la distanza tra atomo e centro della Terra e ΔE è l'energia di eccitazione dell'atomo in assenza di campo gravitazionale ($r \rightarrow \infty$). L'energia disponibile per l'emissione di un fotone da parte dell'atomo – o quella necessaria per il suo assorbimento – sarà quindi:

$$\Delta E(r) = \Delta E\left(1 - \frac{GM}{r}\frac{1}{c^2}\right) = \Delta E\left(1 + \frac{\phi(r)}{c^2}\right) \tag{II.52}$$

dove ϕ è il potenziale gravitazionale della Terra nel punto distante *r* dal suo centro. Questo risultato coincide con quello previsto dalla relatività generale, nel caso di campi gravitazionali non troppo intensi ($\phi \ll c^2$).

La trattazione di questi argomenti basata sulla relatività generale usa la formula che fornisce l'energia di un atomo eccitato in quiete in un campo gravitazionale:¹⁹

$$\mathscr{E} = (mc^2 + \Delta E)\sqrt{1 + \frac{2\phi}{c^2}}$$
(II.53)

dove *m* è la massa a riposo dell'atomo non eccitato e ΔE è la sua energia di eccitazione in assenza di campo gravitazionale; ϕ è il potenziale gravitazionale nel punto in cui si trova l'atomo. L'energia disponibile per l'emissione di un fotone da parte dell'atomo – o quella necessaria per il suo assorbimento – sarà quindi, se $\phi \ll c^2$:

$$\Delta E(\phi) = \Delta E\left(1 + \frac{\phi}{c^2}\right)$$

che coincide con la (II.52). Siccome, per il principio di equivalenza debole, un campo di accelerazione è localmente equivalente ad un campo gravitazionale (sezione II.11, pagina 64), le due equazioni precedenti si applicano anche ai campi di accelerazione.

¹⁹Si veda, per esempio: C. Møller, *The theory of relativity*, Second Edition, Clarendon Press, Oxford, 1972, p. 387.

Considerando due valori di *r*, *R* e R + h, dove $R = 6378 \times 10^3 m$ è il raggio della Terra, si ha:

$$\Delta E(R) = \Delta E\left(1 - \frac{GM}{c^2}\frac{1}{R}\right)$$
(II.54)

$$\Delta E(R+h) = \Delta E\left(1 - \frac{GM}{c^2} \frac{1}{R+h}\right)$$
(II.55)

Se $h \ll R$, allora:

$$\frac{1}{R+h} \approx \frac{1}{R} \left(1 - \frac{h}{R} \right)$$

Pertanto:

$$\Delta E(R+h) \approx \Delta E(R) + \Delta E \frac{gh}{c^2} \approx \Delta E(R) \left(1 + \frac{gh}{c^2}\right)$$
(II.56)

dove $g = GM/R^2 = 9.8 m s^{-2}$ è l'accelerazione di gravità.

⇒ L'approssimazione $\Delta E(R) \approx \Delta E$ richiede un chiarimento. Dalla (II.54) si deduce che:

$$\frac{GM}{Rc^2} = \frac{GMR}{R^2c^2} = \frac{gR}{c^2} \approx 6.95 \times 10^{-10}$$

mentre:

$$\frac{gh}{c^2} \approx 1.18 \times 10^{-15}$$

se h = 20 m. Pertanto, sostituendo nella (II.56) $\Delta E(R)$ a ΔE si introduce un errore il cui ordine di grandezza è dell'ordine di $10^{-10} \times 10^{-15} = 10^{-25}$ che è 10^{10} volte più piccolo del valore che si deve misurare.

Orologi atomici. Il funzionamento degli orologi atomici è basato sull'assorbimento di fotoni da parte degli atomi o delle molecole che ne costituiscono la parte "atomica". Per esempio, negli orologi al Cesio,²⁰ gli atomi di ¹³³*Cs* (55 protoni e 78 neutroni; 55 + 78 = 133) assorbono le onde elettromagnetiche (microonde) prodotte da uno strumento pilotato in frequenza – attraverso una catena moltiplicatrice di frequenze – da un oscillatore al quarzo "bloccato" in frequenza dal segnale dovuto all'assorbimento delle microonde da parte degli atomi di Cesio. L'orologio è detto "atomico" perché sono gli atomi di Cesio a "bloccarne" la frequenza di funzionamento; la frequenza misurata è una frequenza 'elettrica', proporzionale a quella delle microonde.

 $^{^{20}}$ Il Cesio è, a temperatura ambiente, un solido dall'aspetto argenteo; si ossida molto facilmente e fonde a 28.44 $^oC.$

Capitolo II. Sistemi inerziali

In dettaglio, uno schema di orologio al Cesio può essere del tipo seguente. Lo stato fondamentale dell'elettrone di valenza del Cesio è suddiviso in due livelli dall'interazione, detta iperfine, tra il momento magnetico dell'elettrone di valenza e quello del nucleo: i due livelli sono individuati dai numeri quantici F = 3 e F = 4, rispettivamente (lo stato F = 3 è quello minore in energia). Il Cesio viene fatto evaporare in un 'forno' da cui escono atomi di Cesio dotati di una velocità di circa $250 m s^{-1}$. Il fascio di atomi, ben distanziati e in alto vuoto, viene suddiviso da un campo magnetico disomogeneo in modo tale che solo gli atomi nello stato F = 3 proseguono il loro cammino; gli altri, nello stato F = 4, sono intercettati da un assorbitore di carbonio. Gli atomi nello stato F = 3 passano quindi in una cavità dove microonde di lunghezza d'onda opportuna provocano transizioni tra lo stato F = 3 e lo stato F = 4; siccome non tutti gli atomi effettuano questa transizione, un altro 'filtro' costituito da un campo magnetico disomogeneo e da un assorbitore di carbonio intercetta, in questo caso, gli atomi che sono rimasti nello stato F = 3. Gli atomi nello stato F = 4 sono quindi ionizzati, per impatto, da un filo caldo, selezionati da uno spettrometro di massa, e finalmente rilevati mediante un 'electron multiplier' il cui funzionamento è basato sul fatto che l'impatto di una particella (carica o neutra) sulla superficie di un elettrodo provoca l'emissione di elettroni. Infine, un circuito elettronico di reazione controlla la frequenza delle microonde in modo tale da mantenere massimo il segnale rivelato.

Il primo orologio atomico al Cesio incominciò ad operare nel 1952 e gli orologi atomici divennero disponibili sul mercato a partire dal 1958. I migliori orologi al Cesio attuali posseggono una precisione pari a circa 5 parti su 10^{15} : ciò corrisponde ad un errore di un secondo in 6.341.959 anni. Gli orologi al Cesio sono utilizzati per mantenere lo standard del tempo mondiale ed in ogni applicazione tecnica richiedente la loro precisione. Essi costituiscono il nucleo del sistema di posizionamento chiamato *GPS* (Global Position System): la loro precisione richiede che si tenga conto degli effetti dovuti al campo gravitazionale terrestre e all'accelerazione.

Studiamo l'equazione (II.56) in due casi: a) due orologi atomici identici posti ad altitudini diverse; b) emissione di un fotone ad una altitudine e assorbimento dello stesso fotone ad un'altitudine maggiore.

a) La (II.56) indica che le microonde devono fornire più energia ad altitudini maggiori per provocare la transizione quantica tra due livelli energetici. Ne consegue che le frequenze delle microonde dei due orologi posti ad altitudini diverse saranno correlate dalla relazione:

$$v(R+h) \approx v(R) \left(1 + \frac{gh}{c^2}\right)$$

e i periodi fondamentali dei due orologi dalla relazione:

$$T(R+h) \approx T(R) \left(1 - \frac{gh}{c^2}\right)$$
 (II.57)

60

⇒ In base alla (II.57), il *secondo* scandito da un orologio atomico posto sulla cima del Monte Bianco è minore di quello scandito da un orologio identico posto a livello del mare di circa 5.24×10^{-13} s. Abbiamo posto h = 4810 m e assunto la medesima accelerazione di gravità per le due località.

b) Se un atomo A_1 emette alla distanza R_1 dal centro della Terra un fotone verso l'alto, la sua energia non è sufficiente per provocare la transizione in un atomo A_2 identico posto alla distanza $R_2 = R_1 + h$ dal centro della Terra. Dalla (II.56) si ottiene infatti che l'energia del fotone emesso dall'atomo A_1 è più bassa di quella necessaria alla transizione:

$$e_f(A_1) \approx e_f(A_2) \left(1 - \frac{gh}{c^2}\right)$$
 (II.58)

L'atomo A_2 , per poter assorbire il fotone, deve muoversi verso l'atomo A_1 con velocità adeguata a compensare, per effetto Doppler, l'energia mancante. Usualmente ci si riferisce alla (II.58) parlando di *red - shift gravitazionale*, per indicare che la frequenza del fotone appare all'atomo assorbente come spostato verso il rosso. Naturalmente, nel caso in cui l'atomo emittente si trovi ad una altitudine maggiore di quella dell'atomo assorbente, quest'ultimo 'vede' il fotone spostato verso il violetto.

Si noti che il valore del rapporto gh/c^2 è pari a 2.46×10^{-15} per h = 22.55 m. La distanza di 22.55 m tra nucleo emittente e assorbente è quella usata da Pound e Rebka per la prima verifica sperimentale della (II.58).²¹

Per controllare sperimentalmente la predizione teorica è quindi necessario poter misurare l'energia di un fotone con una precisione di una parte su 10¹⁵. Ciò è stato reso possibile dalla scoperta, avvenuta nel 1957, dell'effetto Mössbauer. A temperature sufficientemente basse, nuclei radioattivi in solidi cristallini possono emettere o assorbire fotoni γ con un rinculo praticamente nullo, perché l'energia di rinculo (pagina 166), rispetto a quella che entra in gioco quando ad emettere o ad assorbire è il nucleo di un atomo isolato, viene ridotta di un fattore pari al numero degli atomi del cristallo. Usando come rivelatore del materiale identico a quello della sorgente, i nuclei in esso contenuti possono assorbire i fotoni emessi dai nuclei della sorgente (risonanza) solo se la differenza di energia ΔE tra i livelli quantici coinvolti nell'emissione o nell'assorbimento dei fotoni è lo stessa per

²¹R.V. Pound e G.A. Rebka jr. 'Apparent weight of photons', *Physical Review Letters* 4 (1960), 337 - 341.

Capitolo II. Sistemi inerziali

i nuclei della sorgente e del rivelatore: più precisamente, la risonanza è possibile solo se l'energia di rinculo del cristallo è minore della larghezza naturale (sezione V.4, pagina 124) della riga di emissione (o di assorbimento). Se, per esempio, la ΔE dei nuclei della sorgente viene modificato da un campo gravitazionale, i nuclei del rivelatore non sono in grado di assorbire i fotoni emessi dalla sorgente. Tuttavia, muovendo, in questo caso, il rivelatore verso la sorgente, i nuclei del rivelatore possono, per effetto Doppler, assorbire i fotoni: per aumentare la sensibilità della misura, il rivelatore viene sottoposto ad un moto armonico in modo tale che esso entra ed esce periodicamente dalla condizione di risonanza.

II.10 La radiazione cosmica di fondo

La cosmologia è una scienza che possiede solo pochi dati osservativi su cui lavorare. La scoperta della radiazione cosmica di fondo ne ha aggiunto uno - la temperatura attuale della radiazione dell'universo. Questa, tuttavia, ha costituito un allargamento significativo della nostra conoscenza perché essa richiede una cosmologia con una sorgente della radiazione ad un'epoca primitiva ed essa è una nuova sonda di quell'epoca. Misure più accurate della radiazione di fondo ci permetteranno in futuro di scoprire nuovi fatti riguardanti l'Universo. Robert W. Wilson

Nel 1965 Arno Penzias e Robert Wilson scoprirono che la Terra è investita da una radiazione elettromagnetica sostanzialmente isotropa.

In realtà la radiazione cosmica di fondo presenta variazioni *intrinseche* di intensità *non* isotrope dell'ordine di una parte su 10⁵. In quel che segue, tale anisotropia, dovuta secondo la teoria cosmologica del Big - Bang, alla distribuzione della materia e dell'energia nelle prime fasi di vita dell'Universo, è ignorata.

Misure effettuate con il satellite *COBE* (COsmic Background Explorer), lanciato nel 1989, hanno mostrato che tale radiazione corrisponde a quella emessa da un corpo nero alla temperatura di $2.725 \pm 0.002 K$ e che l'anisotropia *non* intrinseca osservata è interpretabile come dovuta - per effetto Doppler - al moto del satellite intorno alla Terra, della Terra intorno al Sole, del Sole nella Galassia e della Galassia attraverso l'Universo: la Terra viaggia nello spazio ad una velocità di circa 360 km al secondo.

La radiazione di corpo nero è, operativamente, quella contenuta in un corpo cavo isotermo: essa è indipendente dalla costituzione atomica del corpo (sezione V.12, pagina 169). Secondo la formula ricavata per la prima volta da Planck (1900), la densità di energia (energia per unità di volume e di frequenza) all'interno della cavità isoterma è data da:

$$u(v, T) = \frac{8\pi v^2}{c^3} \frac{hv}{e^{hv/kT} - 1}$$

dove *v* è la frequenza, *T* la temperatura assoluta del corpo cavo, *k* la costante di Boltzmann e *h* quella di Planck (per il valore di queste costanti, si veda a pagina 503). La densità di radiazione *u* è massima in corrispondenza della lunghezza d'onda $\lambda_M = 0.2897 \times 10^{-2}/T$: ne segue che la lunghezza d'onda per cui è massima l'intensità della radiazione cosmica di fondo è pari a 1.06 mm corrispondente ad una frequenza v_M uguale a $2.83 \times 10^{11} Hz$. L'effetto Doppler del primo ordine dovuto ad una velocità V = 600 km al secondo comporta una variazione di questa frequenza data da (equazione V.30, pagina 159):

$$\Delta v_M / v_M = V / c = \pm 2 \times 10^{-3}$$

(dove abbiamo posto $\cos\theta = \pm 1$) ed una variazione della corrispondente lunghezza d'onda data da $\Delta\lambda_M = -c (1/v_M^2) \Delta v_M = \mp 2.12 \times 10^{-3} mm.^{22}$

Questa osservazione sperimentale, interpretata come sopra indicato, implica le seguenti conclusioni:

- Il moto del satellite nell'Universo è il suo moto rispetto al sistema di riferimento che vedrebbe la radiazione cosmica di fondo isotropa: questo sistema di riferimento, *K_C*, costituisce un sistema di riferimento privilegiato rispetto al quale definire lo stato di quiete *assoluta* o di moto *assoluto* di un corpo.
- ◇ Siccome la misura è effettuata dal satellite nel suo sistema di riferimento, la sua velocità in questo sistema è nulla. La velocità \vec{v} del satellite che emerge dalle misure da esso effettuate è quella relativa a *K*_C: questa univocità di \vec{v} ne individua il carattere assoluto.

L'esistenza di un sistema di riferimento privilegiato potrebbe apparire, a prima vista, incompatibile con la teoria della relatività. L'evoluzione storica

²²Per maggiori dettagli sulla radiazione cosmica di fondo, si veda il sito http://lambda.gsfc.nasa.gov/index.cfm

Capitolo II. Sistemi inerziali

dei concetti di spazio e di tempo è stata infatti costantemente descritta come un'inconciliabile contrapposizione tra assoluto (Newton) e relativo (Einstein). In realtà, la chiave di volta del passaggio da Newton ad Einstein è costituito dalla sostituzione delle trasformazioni di coordinate di Galileo con quelle di Lorentz. Queste ultime nulla dicono intorno alla possibile esistenza di un sistema di riferimento privilegiato. Solo l'osservazione sperimentale può dare una risposta a questa domanda: la scoperta della radiazione cosmica di fondo indica che la risposta è affermativa.

Si ricordi comunque che nel confronto tra misure effettuate in due *SRI* interviene solo la loro velocità relativa.

Nel 1907, Kurd von Mosengheil, su suggerimento di Planck, ha studiato il seguente problema.²³ Un osservatore è in moto rettilineo uniforme in una cavità isoterma: come appare all'osservatore la radiazione di corpo nero contenuta nella cavità? La risposta di Mosengheil, ottenuta attraverso un percorso complicato:

$$T = T_0 \frac{\sqrt{1 - V^2/c^2}}{1 - (V/c)\cos\theta}$$

dove T_0 è la temperatura della cavità (misurata da un osservatore in quiete rispetto alle pareti della cavità), T la temperatura misurata dall'osservatore in moto, \vec{V} la velocità dell'osservatore rispetto alle pareti della cavità e θ l'angolo formato dalla direzione di propagazione della radiazione con il vettore $-\vec{V}$. La formula di Mosengheil è corretta e si applica, quindi, ad un osservatore in moto nella 'cavità' del Cosmo.

II.11 Sistemi di riferimento inerziali: II

L'identità tra massa inerziale e massa gravitazionale suggerisce che un campo di accelerazione \vec{a} è *localmente* indistinguibile da un campo gravitazionale $-\vec{a}$. La situazione è, emblematicamente, descritta dal comportamento degli accelerometri. Se collocassimo un accelerometro, come quello mostrato in figura II.3 (pagina 18), con il suo asse (l'asse *x* della figura) parallelo alla verticale al polo Nord, esso misurerebbe un'accelerazione di retta *verso l'alto* uguale a g_N , dove g_N è il valore dell'accelerazione di gravità (e del campo gravitazionale) al polo Nord. Lo stesso accelerometro posto all'equatore misurerebbe, a parità delle altre condizioni, un'accelerazione pari a $g_N - 4\pi^2 R/T^2$, dove il termine sottratto è l'accelerazione centripeta all'equatore.

²³K. von Mosengheil, 'Theorie der stazionären Strahlung in einem gleichförmig bewegten Hohlraum', *Annalen der Physik*, 22, (1907), 867 - 904.

⇒ Il valore medio dell'accelerazione di gravità g è di circa 9.8 ms^{-2} . All'equatore, l'accelerazione centripeta dovuta alla rotazione della Terra intorno al suo asse è data da:

$$a_c = \frac{4\pi^2}{T^2}R$$

dove R è il raggio equatoriale e T il periodo di rotazione. Essendo:

$$R = 6378 \times 10^3 m$$
 e $T = 24 \times 3600 s$

si ha:

$$a_c = 3.37 \times 10^{-2} \ ms^{-2}$$

quindi:

$$\frac{a_c}{g} = 3.4 \times 10^{-3}$$

Consideriamo ora un laboratorio in quiete rispetto alla massa che genera il campo gravitazionale \vec{g} . Un accelerometro collocato nel laboratorio misura un'accelerazione $-\vec{g}$. Se il laboratorio viene lasciato libero, esso inizierà una *caduta libera* nel campo gravitazionale e l'accelerometro misurerà un'accelerazione $-\vec{g} + \vec{g} = 0$. Nel sistema di riferimento del laboratorio in caduta libera, *un corpo di prova lasciato libero rimarrà in quiete o, se dotato di quantità di moto iniziale, si muoverà di moto rettilineo uniforme*.

Ciò è vero solo se il campo gravitazionale è uniforme: in generale, i campi gravitazionali non lo sono; pertanto, l'affermazione precedente è approssimativamente verificata purché le dimensioni del laboratorio siano sufficientemente piccole.

Se si considerano due laboratori collocati in un campo gravitazionale uniforme \vec{g} , di cui uno in caduta libera (*CL*) e l'altro (*Q*) in quiete rispetto alla massa che genera il campo, le loro caratteristiche sono riassunte nella tabella II.5.

laboratorio	accelerazione	omogeneità	isotropia
CL	0	sì	sì
Q	- <i>ថ</i>	no	no

Tabella II.5. confronto tra due laboratori in un campo gravitazionale uniforme \vec{g} ; *CL* è in caduta libera, mentre Q è in quiete rispetto alla massa che genera il campo. L'accelerazione che compare nella seconda colonna è misurata all'interno dei due *SRI*. L'omogeneità e l'isotropia si riferiscono allo spazio.

Capitolo II. Sistemi inerziali

Nel sistema CL lo spazio è omogeneo e non c'è alcuna direzione privilegiata. Nel sistema Q, c'è una direzione privilegiata: è quella lungo cui 'cade' un corpo lasciato libero (o quella, opposta alla precedente, lungo cui l'accelerometro misura l'accelerazione g). Inoltre, lo spazio non è omogeneo perché, per esempio, due atomi identici collocati in due posizioni diverse lungo la retta della direzione privilegiata emettono (o assorbono) fotoni di energia diversa (sezione II.9.1, pagina 58).

A questo punto è necessario coordinare le riflessioni svolte in questa e nelle sezioni II.2 (pagina 14) e II.10 (pagina 62).

Possiamo ora definire inerziali quei sistemi che sono in moto rettilineo uniforme rispetto al sistema di riferimento privilegiato K_C . I laboratori in caduta libera sono, rispetto a K_C , in moto accelerato e, se collocati in campi gravitazionali diversi, in moto accelerato tra di loro. Quindi, due laboratori in caduta libera in campi gravitazionali diversi non sono connessi da trasformazioni di Lorentz (o di Galileo).

I fenomeni fisici, ad eccezione di quelli connessi alla gravitazione, si manifestano allo stesso modo nei sistemi inerziali e nei laboratori in caduta libera.

A rigore, i laboratori terrestri non soddisfano le condizioni di omogeneità e isotropia dello spazio che stanno alla base delle trasformazioni di coordinate (sia galileiane che di Lorentz): per questo motivo e perché sottoposti all'accelerazione dovuta alla rotazione della Terra intorno al proprio asse, essi sono solo approssimativamente inerziali. D'altra parte, anche nei laboratori in caduta libera lo spazio non è omogeneo, perché i campi gravitazionali non sono, in generale, uniformi. L'approssimazione con cui i laboratori soddisfano le condizioni richieste, dipende quindi dalla sensibilità degli strumenti e dall'accuratezza richiesta dallo sperimentatore.

II.12 Derivazione di trasformazioni di coordinate simil - Lorentz

La filosofia è scritta in questo grandissimo libro che continuamente ci sta aperto innanzi a gli occhi (io dico l'Universo), ma non si può intendere se prima non s'impara a intender la lingua, e conoscer i caratteri, ne' quali è scritto. Egli è scritto in lingua matematica, e i caratteri son triangoli, cerchi, ed al-

tre figure geometriche, senza i quali mezi è impossibile a intenderne umanamente parola; senza questi è un aggirarsi vanamente per un oscuro laberinto.

Galileo Galilei

Se si considera t come una coordinata alla stessa stregua delle tre coordinate spaziali, si deve scrivere: $^{\rm 24}$

$$x' = x'(x, y, z, t)$$

$$y' = y'(x, y, z, t)$$

$$z' = z'(x, y, z, t)$$

$$t' = t'(x, y, z, t)$$

(II.59)

Si ammette quindi che la coordinata t' possa dipendere, oltre che da t, anche dalle coordinate spaziali x, y, z. Riferendosi sempre alla coppia di *SRI K* e K' definiti in precedenza, si suppone che all'istante t = t' = 0 le due origini O ed O' coincidano. Si osserva ora che:

 ◇ Siccome lo spazio ed il tempo sono omogenei, le coordinate accentate devono essere funzioni lineari di (x, y, z, t). Se ciò non fosse, l'espressione della distanza tra due punti infinitamente vicini dipenderebbe dal punto dello spazio e dall'istante di tempo in cui essa viene calcolata e lo stesso varrebbe per un intervallo di tempo infinitesimo: *ciò sarebbe in contraddizione con l'omogeneità e l'isotropia dello spazio e l'omogeneità del tempo*.

²⁴La deduzione presentata in questa sezione segue da vicino quella di: Carlo Cattaneo, 'Sui postulati comuni alla cinematica classica e alla cinematica relativistica' *Rendiconti dell'Accademia dei Lincei*, 24 (1958), 527 - 32.

Le equazioni precedenti debbono pertanto essere della forma:

$$x' = a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + a_{14}t$$

$$y' = a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z + a_{24}t$$

$$z' = a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z + a_{34}t$$

$$t' = a_{41}x + a_{42}y + a_{43}z + a_{44}t$$

(II.60)

Per l'omogeneità dello spazio e del tempo, i coefficienti a_{ij} non possono dipendere dalle coordinate spazio - temporali. L'unico parametro da cui possono dipendere è la velocità relativa tra i due *SRI*: più precisamente, possono dipendere solo da *V* (per semplicità di scrittura indicheremo la dipendenza di a_{ij} da *V* solo quando opportuno).

♦ Siccome gli assi *X* e *X'* coincidono, deve essere y' = z' = 0, se y = z = 0. Dalla seconda delle (II.60) segue allora che $a_{21}x = -a_{24}t$; e dalla terza che $a_{31}x = -a_{34}t$. Entrambe queste relazioni devono valere per qualunque *x* e qualunque *t*; siccome i coefficienti a_{ij} sono indipendenti da *x* e da *t*, ne segue che deve essere $a_{21} = a_{24} = a_{31} = a_{34} = 0$. Le (II.60) assumono allora la forma:

$$x' = a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + a_{14}t$$

$$y' = a_{22}y + a_{23}z$$

$$z' = a_{32}y + a_{33}z$$

$$t' = a_{41}x + a_{42}y + a_{43}z + a_{44}t$$

(II.61)

◇ Per la simmetria del problema e la *isotropia dello spazio*, tutte le direzioni perpendicolari alla direzione del moto relativo sono equivalenti. Ciò comporta che le (II.61) non devono cambiare in seguito ad una qualunque rotazione intorno all'asse *X*. Deve pertanto essere

$$a_{12} = a_{13} = a_{23} = a_{32} = a_{42} = a_{43} = 0$$
. Si ottiene quindi:

$$x' = a_{11}x + a_{14}t$$

$$y' = a_{22}y$$

$$z' = a_{33}z$$

$$t' = a_{41}x + a_{44}t$$
(II.62)

◊ Per V = 0 i due sistemi K e K' coincidono; quindi le (II.62) devono ridursi a delle identità. Deve cioè essere:

$$a_{11}(0) = a_{22}(0) = a_{33}(0) = a_{44}(0) = 1$$
 (II.63)

e:

$$a_{14}(0) = a_{41}(0) = 0 \tag{II.64}$$

La (II.63) implica che $a_{11}(V)$, $a_{22}(V)$, $a_{33}(V)$ non possono essere negativi: se lo fossero, esisterebbe un valore di *V* che li annulla; il che renderebbe le prime tre equazioni (II.62) non invertibili.

♦ La prima delle (II.62), scritta per x' = 0, diventa:

$$0 = a_{11}Vt + a_{14}t = a_{11}\left(V + \frac{a_{14}}{a_{11}}\right)t$$

Questa relazione deve valere per qualunque *t*; siccome $a_{11} > 0$, deve essere $a_{14} = -a_{11}V$. Le (II.62) diventano allora:

$$x' = a_{11}(V)(x - Vt)$$

$$y' = a_{22}(V)y$$

$$z' = a_{33}(V)z$$

$$t' = a_{41}(V)x + a_{44}(V)t$$

(II.65)

♦ Se si invertono contemporaneamente i versi degli assi X, X' e quello della velocità di K' le (II.65) diventano:

$$-x' = a_{11}(-V)(-x+Vt)$$

$$y' = a_{22}(-V)y$$

$$z' = a_{33}(-V)z$$

$$t' = -a_{41}(-V)x + a_{44}(-V)t$$

(II.66)

Ora, per la *isotropia dello spazio*, le (II.65) e le (II.66) devono essere le stesse. Quindi:

$$a_{11}(V) = a_{11}(-V)$$

$$a_{22}(V) = a_{22}(-V)$$

$$a_{33}(V) = a_{33}(-V)$$

$$a_{44}(V) = a_{44}(-V)$$

$$a_{41}(V) = -a_{41}(-V)$$
(II.67)

Cioè, dei coefficienti rimasti, quelli con indice ripetuto sono pari, mentre a_{41} è dispari.

♦ Siccome l'inversione delle equazioni di trasformazione corrisponde al cambiamento di V in −V, si ha:

$$y = a_{22}(-V)y' = a_{22}(-V)a_{22}(V)y$$

da cui, per la seconda delle (II.67), risulta che $[a_{22}(V)]^2 = 1$, cioè $a_{22} = \pm 1$ per qualsiasi *V*. Ma, per *V* = 0, questo coefficiente è uguale ad 1; quindi: $a_{22} = 1$. Per le stesse ragioni risulta: $a_{33} = 1$. Le equazioni di trasformazione diventano quindi:

$$x' = a_{11}(x - Vt)$$

$$y' = y$$

$$z' = z$$

$$t' = a_{41}x + a_{44}t$$
(II.68)

70

Differenziando la prima e la quarta delle (II.68) e dividendo poi membro a membro si ottiene la *legge di composizione delle velocità* per un punto che si muova lungo gli assi X, X':

$$u' = \frac{a_{11}(V)(u-V)}{a_{41}(V)u + a_{44}(V)}$$
(II.69)

dove si è posto u' = dx'/dt' e u = dx/dt.

♦ Si consideri ora un terzo *SRI*, *K*["], che abbia gli assi diretti come quelli di *K* e *K*'; si supponga inoltre che, per t = t' = t'' = 0, le tre origini siano coincidenti. *K*["] si muova con velocità *U*' rispetto a *K*' e con velocità *U* rispetto a *K*. Se si indica con *u*["] la velocità, rispetto a *K*["] di un punto che si muova lungo gli assi *X*, *X*', *X*", per la (II.69) deve essere, se *w* è la velocità dello stesso punto rispetto a *K*:

$$u'' = \frac{a_{11}(U)(w-U)}{a_{41}(U)w + a_{44}(U)}$$

Se il punto di cui la equazione precedente fornisce la velocità è l'origine di K', risulta (perché K' si muove rispetto a K'' con velocità -U'):

$$u'' = -U' = \frac{a_{11}(U)(V-U)}{a_{41}(U)V + a_{44}(U)}$$

Questa equazione può essere scritta nella forma:

$$U' = \frac{a_{11}(U)(U-V)}{a_{41}(U)V + a_{44}(U)}$$
(II.70)

Inoltre, la (II.69), scritta per l'origine O'' di K'', dà:

$$U' = \frac{a_{11}(V)(U-V)}{a_{41}(V)U + a_{44}(V)}$$
(II.71)

Uguagliando i secondi membri della (II.70) e della (II.71) si ottiene:

$$\frac{a_{41}(V)}{a_{11}(V)}U + \frac{a_{44}(V)}{a_{11}(V)} = \frac{a_{41}(U)}{a_{11}(U)}V + \frac{a_{44}(U)}{a_{11}(U)}V$$

valida per qualsiasi valore di *V* e di *U*. Se si pone una delle due velocità uguale a zero e si tiene conto della (II.63) e della (II.64), si ottiene l'uguaglianza $a_{44} = a_{11}$ che, introdotta nella equazione precedente, permette di concludere che:

$$\frac{a_{11}(V)}{a_{41}(V)}V = \frac{a_{11}(U)}{a_{41}(U)}U = costante$$

Si osservi che questa costante può assumere qualunque valore ad eccezione dello *zero*. Posta questa costante uguale a α , il primo e l'ultimo membro della precedente uguaglianza danno:

$$a_{41}(V) = a_{11}(V)\frac{V}{\alpha}$$

Pertanto, la legge di composizione delle velocità (II.69) diventa:

$$u' = \frac{u - V}{1 + uV/\alpha}$$

dalla quale emerge che $|\alpha|$ ha le dimensioni di un quadrato di una velocità. Il sistema (II.68) assumerà allora la forma:

$$x' = a_{11}(x - Vt)$$

$$y' = y$$

$$z' = z$$

$$t' = a_{11}(t + (V/\alpha)x)$$

(II.72)

♦ Ricavando l'espressione di *t* da quella di *t*' e sostituendola in quella di *x*', si ricava:

$$x = \frac{x' + V t'}{a_{11}(V)(1 + V^2/\alpha)}$$

Scambiando tra di loro i ruoli di *K* e K' si sa che, *per il principio di relatività*, la relazione che esprime *x* in funzione delle coordinate accentate deve avere la stessa forma della prima equazione delle (II.72) (con *V* sostituito da -V):

$$x = a_{11}(-V)(x' + Vt')$$

che, confrontata con la precedente, dà:

$$a_{11}(V)a_{11}(-V) = \frac{1}{\left(1 + V^2/\alpha\right)}$$

Poiché a_{11} è una funzione pari di *V* ed è positivo, si deve concludere che:

$$a_{11} = \frac{1}{\sqrt{1 + V^2/\alpha}}$$

72

Cosicché le trasformazioni cercate assumono l'aspetto definitivo:

$$x' = \frac{1}{\sqrt{1 + V^2/\alpha}} (x - Vt)$$

$$y' = y$$

$$z' = z$$

$$t' = \frac{1}{\sqrt{1 + V^2/\alpha}} (t + (V/\alpha)x)$$
(II.73)

Ricavando *x* dalla prima delle (II.73) e sostituendo nella relazione così trovata l'espressione di *t* ricavata dall'ultima delle (II.73) si ottiene facilmente la relazione inversa x = x(x', t'). Procedendo allo stesso modo per la variabile *t*, si ottengono le relazioni inverse seguenti:

$$x = \frac{1}{\sqrt{1 + V^2/\alpha}} (x' + Vt')$$

$$y = y$$

$$z = z$$

$$t = \frac{1}{\sqrt{1 + V^2/\alpha}} (t' - (V/\alpha)x')$$

Si verifica così che le trasformazioni inverse delle (II.73) si possono scrivere immediatamente sostituendo alle variabili accentate quelle non accentate e sostituendo $V \operatorname{con} - V$. Quest'ultima regola può anche essere derivata osservando che se si assume il sistema K' in quiete allora il sistema K sarà in moto con velocità -V rispetto a K': per il principio di relatività devono valere le (II.73), naturalmente con le variabili scambiate e con V sostituita da -V.

E' ora legittima la domanda: è forse sbagliata la deduzione che ha condotto alle trasformazioni di Galileo? Inizialmente si osservi che la deduzione delle trasformazioni di Galileo svolta in precedenza non è in realtà una deduzione: infatti si sono scritte le trasformazioni cercate basandosi sulla intuizione (y' = y, z' = z) e usando implicitamente la relazione t' = t, quando si è posto x' = x - Vt. Si sarebbe invece dovuto effettuare un percorso analogo a quello seguito in questa sezione, partendo quindi dalle (II.59) e avendo però cura di sostituire alla quarta equazione l'uguaglianza t' = t. Così operando, si sarebbe ottenuto il sistema di equazioni corrispondente al (II.65):

$$x' = a_{11}(x - Vt)$$

$$y' = a_{22}y$$

$$z' = a_{33}z$$

$$t' = t$$
(II.74)

A questo punto, la legge di composizione delle velocità sarebbe stata:

$$u' = a_{11}(V)(u - V)$$

che, scritta per u' = -V (velocità di *K* rispetto a *K'*) avrebbe dato:

$$-V = -a_{11}(V)V$$

da cui si sarebbe dedotto che $a_{11}(V) = 1$. Le (II.74) si sarebbero quindi trasformate nelle *relazioni di Galileo*. Queste considerazioni mostrano che la deduzione svolta, sebbene insoddisfacente, non era sbagliata: è l'ipotesi di partenza t' = t che conduce, correttamente dal punto di vista deduttivo, alle trasformazioni di Galileo. Se si abbandona questa ipotesi, si ottengono, come si è visto, le (II.73).

Capitolo III

Maxwell e Lorentz

Alla domanda, "Che cosa è la teoria di Maxwell?", io non so rispondere in modo più conciso o più preciso che dicendo: "La teoria di Maxwell è il sistema di equazioni di Maxwell".

Heinrich Hertz

III.1 Cariche e correnti

I fenomeni elettromagnetici sono dovuti alla presenza, in natura, delle cariche elettriche. La materia ordinaria è costituita da atomi e questi da un nucleo, formato da nucleoni (protoni e neutroni), intorno al quale 'ruotano' gli elettroni.

Il *protone* è una particella di massa $m_p \approx 1.673 \times 10^{-27} kg$ e carica positiva $e \approx 1.602 \times 10^{-19} C$; il *neutrone* è una particella avente carica elettrica nulla e massa $m_n \approx 1.674 \times 10^{-27} kg$; infine, l'*elettrone* ha carica negativa $-e \approx -1.602 \times 10^{-19} C$ e massa $m_e \approx 9.109 \times 10^{-31} kg$. Il raggio dell'elettrone è minore di $10^{-18} m$; quello di un nucleone è dell'ordine di $10^{-15} m$.

La materia ordinaria è, generalmente, elettricamente neutra. Per descriverne lo stato di carica, si usano modelli che prevedono cariche 'puntiformi' o distribuzioni continue di cariche. Queste ultime possono essere utilizzate per descrivere le proprietà di un insieme di cariche puntiformi purché, in ogni punto della regione dello spazio considerata, sia definibile, in termini della carica Q contenuta nell'elemento di volume $\Delta \tau$, una funzione

 $\rho(\vec{r}) = Q/\Delta\tau$

che rappresenta la *densità di carica* (carica per unità di volume). Nella definizione di ρ , si deve utilizzare un elemento di volume $\Delta \tau$ che sia sufficientemente piccolo da rendere ρ sensibile alle variazioni spaziali e, nel contempo, sufficientemente grande da assicurarne la continuità.

Si supponga di avere *n* cariche puntiformi *q* per unità di volume, tutte dotate della stessa velocità \vec{v} . Considerata una superficie piana *S* comunque orientata rispetto al vettore \vec{v} , tutte le cariche contenute in un volume $Sv \cos \alpha$ attraverseranno in un secondo la superficie *S* (figura III.1).



Figura III.1. definizione di corrente elettrica.

Si ha:

$$I = n q v S \cos \alpha$$

dove α è l'angolo acuto formato dalla normale alla superficie *S* con la direzione di \vec{v} . La grandezza *I*, detta *corrente*, rappresenta, per definizione, la carica che attraversa la superficie *S* in un secondo.

Si consideri ora il vettore

$$\dot{J} = n q \vec{v}$$

Esso ha le dimensioni di una densità di corrente (corrente per unità di superficie) e può essere scritto anche come

$$\vec{J} = \rho \vec{v}$$

purché sia $\rho = n q$. Nel caso più generale, \vec{J} è definito in ogni punto della regione spaziale considerata; si può allora scrivere che:

$$I = \int_{S} \vec{J} \cdot \hat{n} \, dS \tag{III.1}$$

dove *S* è una superficie qualunque ed \hat{n} è il versore normale all'elemento di superficie *dS*. Se *S* è una superficie chiusa, allora, per convenzione, \hat{n} è il versore normale a *dS* ed uscente dalla superficie. Si osservi che l'espressione al secondo membro della (III.1) è, per definizione, il *flusso* del vettore \vec{J} attraverso la superficie *S*.

III.2 Le equazioni di Maxwell nel vuoto

Queste asserzioni [equazioni] formano, per quanto concerne l'Etere, la parte essenziale della teoria di Maxwell. Maxwell arrivò ad esse partendo dall'idea di azione - a - distanza e attribuendo all'Etere le proprietà di un mezzo dielettrico altamente polarizzabile. Possiamo pervenire ad esse in altri modi. Ma in nessun modo una prova diretta di queste equazioni può essere dedotta dall'esperienza. Appare pertanto più logico guardare ad esse indipendentemente dal modo in cui sono state ottenute, considerandole come assunzioni ipotetiche e lasciando dipendere la loro probabilità dal grandissimo numero di leggi naturali che esse abbracciano.

Heinrich Hertz

Il punto essenziale è il fine: rappresentare la moltitudine dei concetti e degli enunciati più prossimi all'esperienza come teoremi deducibili per via logica a partire da una base, la più ristretta possibile, di concetti e di relazioni fondamentali che possono venir scelti liberamente (assiomi). La libertà di scelta, tuttavia, è di un tipo particolare: non è affatto simile alla libertà di uno scrittore di romanzi. Essa è piuttosto simile a

quella di chi è impegnato nella risoluzione di un ben congegnato cruciverba. Egli può, è vero, proporre ogni volta qualsiasi parola come soluzione; ma ogni volta è una sola parola che dà la chiave per risolvere il cruciverba in tutte le sue parti.

Albert Einstein

Si supponga che in ogni punto di una regione *R* dello spazio sia definita la funzione densità di carica ρ e la velocità \vec{v} delle cariche (come si vedrà, queste due funzioni non possono essere indipendenti): allora in ogni punto di *R* è definito anche il vettore $\vec{J} = \rho \vec{v}$. L'insieme delle seguenti equazioni – *equazioni di Maxwell* – individuano due campi vettoriali \vec{E} e \vec{B} , detti rispettivamente campo elettrico e campo magnetico:

$$div \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \tag{III.2}$$

$$rot \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$
(III.3)

$$div\vec{B} = 0 \tag{III.4}$$

$$rot\vec{B} = \mu_0\left(\vec{J} + \varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right)$$
 (III.5)

dove ε_0 e μ_0 sono, rispettivamente, la *costante dielettrica* e la *permeabilità magnetica* del vuoto il cui valore è da determinarsi.¹

I due campi vettoriali \vec{E} e \vec{B} sono tali che la forza che si esercita su una carica puntiforme *q*, posta in un punto *P* e dotata di velocità \vec{v} , è:

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \tag{III.6}$$

dove \vec{E} e \vec{B} sono i valori del campo elettrico e magnetico nel punto *P* considerato. La (III.6), detta *forza di Lorentz*, completa la definizione di \vec{E} e di \vec{B} , stabilendone il significato fisico e le dimensioni (nel Sistema Internaziona-le); di conseguenza determina anche le dimensioni di ε_0 e μ_0 .

Si noti come la forza di Lorentz descriva effetti non inclusi nelle equazioni di Maxwell: l'azione dei campi sulle cariche.

Se si assume

$$\mu_0 = 4\pi 10^{-7} N A^{-2}$$

il valore sperimentale di ε_0 risulta pari a

$$8.854 \times 10^{-12} F m^{-1}$$

L'insieme dei postulati rappresentato dalle equazioni (III.2 - III.5, III.6) è sufficiente per descrivere tutti i fenomeni elettromagnetici nel vuoto.

III.2.1 Invarianza delle equazioni di Maxwell

Le equazioni di Maxwell sono invarianti – cioè la loro forma non cambia – per trasformazioni di Lorentz. Indichiamo qui la procedura per trovare le condizioni che assicurano l'invarianza delle equazioni di Maxwell, rinviando lo svolgimento dei calcoli alla sezione XV.7 (pagina 460).

¹Il teorema di Helmoltz (sezione XV.2.8, pagina 442) assicura che un campo vettoriale è noto se sono noti la sua divergenza e il suo rotore.

- 1. Si considerano due *SRI*, *K* e *K*['] aventi le caratteristiche indicate a pagina 15.
- 2. Si scrivono le equazioni di Maxwell per il sistema di riferimento K.
- 3. Si sostituiscono in esse alle coordinate x, y, z, t le corrispondenti coordinate x', y', z', t' usando le trasformazioni di Lorentz. Così facendo, si ottengono delle equazioni miste in cui, insieme alle coordinate accentate, compaiono ancora le grandezze fisiche non accentate.
- 4. A questo punto si impone che le equazioni miste così ottenute abbiano la stessa forma delle equazioni di partenza.

Affinché quest'ultima condizione sia soddisfatta, occorre che:

$$E'_{x} = E_{x}$$

$$E'_{y} = \Gamma[E_{y} + (\vec{V} \times \vec{B})_{y}] \qquad (\text{III.7})$$

$$E'_{z} = \Gamma[E_{z} + (\vec{V} \times \vec{B})_{z}]$$

$$B'_{x} = B_{x}$$

$$B'_{y} = \Gamma \left[B_{y} - \frac{1}{c^{2}} (\vec{V} \times \vec{E})_{y} \right]$$

$$B'_{z} = \Gamma \left[B_{z} - \frac{1}{c^{2}} (\vec{V} \times \vec{E})_{z} \right]$$
(III.8)

(dove $\Gamma = 1/\sqrt{1 - V^2/c^2}$) e che ρc e J_x, J_y, J_z costituiscano le componenti di un quadrivettore: la quadricorrente $\vec{\mathcal{J}} = (\rho c, J_x, J_y, J_z)$. Le (III.7) e le (III.8) sono, rispettivamente, le equazioni di trasformazione delle componenti dei campi elettrici e magnetici. Le equazioni di trasformazione delle componenti di \vec{J} si ottengono ricordando che costituiscono le componenti spaziali della quadricorrente.

Si osservi che l'espressione della forza di Lorentz (III.6) postulata a pagina 78 può essere ricavata usando le equazioni di trasformazione dei campi e delle componenti di una forza, sulla base del *postulato* secondo cui la forza esercitata su una carica puntiforme in quiete $q \in \vec{F} = q\vec{E}$. Si consideri, per semplicità, una carica puntiforme q che si muova con velocità \vec{v} lungo la direzione positiva dell'asse x rispetto al sistema di riferimento K solidale con la sorgente del campo magnetico \vec{B} . In un sistema K' istantaneamente comovente con la carica, la forza che si esercita sulla carica ha come componenti:

$$F'_x = qE'_x$$

$$F'_y = qE'_y$$

$$F'_z = qE'_z$$

che, tenendo conto delle equazioni di trasformazione del campo elettrico (III.7) e delle forze (II.42), diventano:

$$F_x = qE_x$$

$$\Gamma F_y = q\Gamma[E_y + (\vec{V} \times \vec{B})_y]$$

$$\Gamma F_z = q\Gamma[E_z + (\vec{V} \times \vec{B})_z]$$

Queste equazioni, scritte in forma vettoriale, tenendo conto che $\vec{v} = \vec{V}$ è diretta come l'asse *x*, danno:

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$$

Si noti tuttavia che questa derivazione non toglie alla forza di Lorentz il carattere di postulato aggiuntivo rispetto alle equazioni di Maxwell. Infatti, questa derivazione si basa sul postulato secondo cui la forza che si esercita su una carica a riposo è $\vec{F} = q\vec{E}$.

La trattazione dell'elettromagnetismo con formalismo spazio - temporale non conduce alla previsione di nuovi fenomeni: ciò è una conseguenza del fatto che le equazioni di Maxwell e l'espressione della forza di Lorentz sono invarianti per trasformazioni di Lorentz. Il formalismo relativistico rende solo possibile trattare agevolmente i fenomeni elettromagnetici in sistemi di riferimento inerziali diversi.

III.2.2 Implicazioni delle equazioni di Maxwell

Dalle equazioni (III.2 - III.5) si possono dedurre alcune conseguenze rilevanti:

1. Applicando l'operatore divergenza alla (III.5), e tenendo conto della (III.2), nonché del fatto che $div rot \equiv 0$, si ottiene:

$$d\,i\,v\,\vec{J} = -\frac{\partial\rho}{\partial\,t}$$

Questa equazione, detta equazione di continuità o di *conservazione della carica*, stabilisce la relazione che deve sussistere tra le sorgenti

 $\rho \in \vec{J} = \rho \vec{v}$ dei campi. Se si integra su un volume τ delimitato da una superficie *S*, si ottiene, utilizzando il teorema della divergenza:

$$\int_{S} \vec{J} \cdot \hat{n} \, dS = -\frac{\partial}{\partial t} \int_{\tau} \rho \, d\tau$$

Cioè: il flusso della carica attraverso la superficie *S* nell'unità di tempo è uguale alla variazione, cambiata di segno, della carica totale contenuta nel volume τ ; la carica si conserva.

2. Se \vec{E}_1 e \vec{B}_1 sono le soluzioni delle equazioni di Maxwell per una data distribuzione di sorgenti ρ_1 , \vec{J}_1 , ed \vec{E}_2 , \vec{B}_2 sono le soluzioni corrispondenti alla distribuzione di sorgenti ρ_2 , \vec{J}_2 , allora la soluzione corrispondente alla distribuzione di sorgenti ($\rho_1 + \rho_2$, $\vec{J}_1 + \vec{J}_2$) è data da $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$ e $\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2$. Questo risultato, che segue immediatamente dal fatto che le equazioni di Maxwell sono lineari in \vec{E} e \vec{B} , è noto sotto il nome di *regola di sovrapposizione*.

III.2.3 Nata nell'Etere

La teoria di Maxwell è stata concepita in un contesto caratterizzato da un'immagine del mondo in cui l'Etere svolgeva un ruolo fondamentale. Maxwell stesso aveva scritto la voce *Etere* per la nona edizione dell'*Enciclopedia Britannica* (1875 - 1889). Il campo elettromagnetico era concepito come una deformazione meccanica dell'Etere; Maxwell, inoltre, non possedeva un modello definito di elettricità né di corrente elettrica. Scriveva Maxwell:

La corrente elettrica non può essere concepita se non come un fenomeno cinetico. [...] Gli effetti della corrente, come l'elettrolisi e il trasferimento di elettricità da un corpo ad un altro, sono tutte azioni progressive che richiedono tempo per essere compiute, e sono pertanto della natura dei moti. Per quanto riguarda la velocità della corrente, essa potrebbe essere dell'ordine di un decimo di pollice all'ora o di un centinaio di miglia al secondo [qui Maxwell cita il paragrafo 1648 delle *Experimental Researches* di Faraday]. Siamo così lontani dal conoscere il suo valore assoluto che non sappiamo neppure se ciò che chiamiamo direzione positiva è la vera direzione del moto o la direzione contraria.²

E' quindi sorprendente che, ciò non ostante, la teoria di Maxwell sia sopravvissuta all'abbandono dell'Etere, alla nascita della teoria della relatività e al

²J.C. Maxwell, *A Treatise on Electricity and Magnetism*, Third edition, vol. II, Dover Publications, 1954, pp. 210 - 211, par. 569.

Capitolo III. Maxwell e Lorentz

risorgere della descrizione corpuscolare della luce. La ragione principale risiede nel fatto che, come sosteneva Hertz, la "teoria di Maxwell è il sistema di equazioni di Maxwell". Queste, re - interpretate alla luce dell'espressione della forza di Lorentz, permettono di descrivere tutti i fenomeni elettromagnetici nel vuoto e, con l'aggiunta di opportuni postulati, anche nei mezzi materiali. Questo spiega come la 'teoria di Maxwell' abbia potuto sopravvivere alla 'scomparsa' dell'Etere. La nascita della teoria della relatività non ha posto problemi alla teoria di Maxwell per il semplice fatto che essa è una teoria relativistica: le sue equazioni, come abbiamo visto, sono invarianti per trasformazioni di Lorentz. Anzi, la teoria di Maxwell è stata un punto di riferimento per la nascita della teoria della relatività attraverso il postulato einsteniano secondo cui "la luce nello spazio vuoto si propaga sempre con una velocità determinata c, indipendente dallo stato di moto dei corpi emittenti". In modo indiretto, la teoria di Maxwell è quindi stata la causa delle necessarie modificazioni che si sono dovute apportare alla dinamica newtoniana per trasformarla nella dinamica relativistica, invariante per trasformazioni di Lorentz. Più avanti si vedrà che, con opportune ipotesi aggiuntive, la teoria di Maxwell può anche descrivere il comportamento statistico dei fotoni (pagina 157). Infine, le equazioni di Maxwell per il vuoto e senza sorgenti, con il campo elettrico e magnetico sostituiti da opportuni operatori quantici, stanno alla base dell'elettrodinamica quantica. Nella storia della fisica non c'è alcun'altra teoria che, come quella di Maxwell, si sia mantenuta vitale e creativa attraverso così tante trasformazioni.

Capitolo IV

Campi, potenziali, onde

IV.1 I potenziali scalare e vettore

Siccome, come abbiamo mostrato, il [flusso del] campo magnetico attraverso una superficie delimitata da una curva chiusa dipende dalla curva chiusa, e non dalla forma della superficie delimitata da essa, deve essere possibile determinare [il flusso del] campo magnetico attraverso una curva chiusa mediante un processo dipendente solo dalla natura di quella curva, senza implicare la costruzione di una superficie che formi un diaframma della curva.

Ciò può essere fatto trovando un vettore \vec{A} legato a \vec{B} , il campo magnetico, in modo tale che l'integrale di linea di \vec{A} , esteso lungo la linea chiusa, sia uguale all'integrale di superficie di \vec{B} esteso su una superficie delimitata dalla curva chiusa...il vettore \vec{A} ...è chiamato potenziale vettore del campo magnetico.

James Clerk Maxwell

Il sistema di equazioni di Maxwell:

$$div \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \tag{IV.1}$$

$$rot \vec{E} = -\frac{\partial B}{\partial t}$$
(IV.2)

$$div\vec{B} = 0 \tag{IV.3}$$

$$rot \vec{B} = \mu_0 \left(\vec{J} + \varepsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t} \right)$$
(IV.4)

è costituito da otto equazioni scalari, mentre le incognite sono solo sei (le tre componenti del campo elettrico e le tre del campo magnetico). Per verificare che il sistema di equazioni non è sovradeterminato, si procede nel seguente modo.

La (IV.3), ricordando che la divergenza di un rotore è sempre nulla, permette di scrivere che:

$$\vec{B} = rot \vec{A} \tag{IV.5}$$

dove \vec{A} è detto *potenziale vettore*. La (IV.5) non è sufficiente a determinare \vec{A} : infatti, secondo il teorema di Helmoltz, un campo vettoriale è univocamente determinato quando ne sono noti il rotore e la divergenza (sezione XV.2.8, pagina 442). Mentre *rot* \vec{A} è determinato dalla condizione fisica espressa dalla (IV.5), la *di v* \vec{A} può essere scelta arbitrariamente.

Se si sostituisce la (IV.5) nella (IV.2), si ottiene, scambiando tra loro gli operatori *rot* e $\partial/\partial t$:

$$rot\left(\vec{E} + \frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\right) = 0$$

Si può dunque porre, poiché un campo irrotazionale (pagina 178) può essere sempre scritto come il gradiente di un campo scalare:

$$\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\operatorname{grad} \varphi$$

dove φ è una funzione delle coordinate e del tempo, detta *potenziale scalare*: la scelta del segno meno è motivata dal suo significato fisico (pagina 179). L'equazione precedente può essere scritta nella seguente forma:

$$\vec{E} = -grad\,\varphi - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t} \tag{IV.6}$$

La (IV.5) e la (IV.6) permettono di calcolare \vec{E} e \vec{B} , se sono noti il potenziale scalare e il potenziale vettore.

I potenziali \vec{A} , φ del campo elettromagnetico non sono univocamente determinati. Infatti ogni altra coppia di potenziali \vec{A}' , φ' con

$$\vec{A}' = \vec{A} + grad f$$
(IV.7)
 $\varphi' = \varphi - \frac{\partial f}{\partial t}$

dove $f(\vec{r}, t)$ è una funzione sufficientemente regolare, ma peraltro arbitraria, fornisce attraverso le (IV.5) e (IV.6) gli stessi valori per i campi $\vec{E} \in \vec{B}$.

Le equazioni (IV.7) sono dette *trasformazioni di gauge* e indicano come sia possibile effettuare una scelta tra tutti i potenziali possibili mediante l'imposizione di condizioni addizionali. Questo permette di semplificare le equazioni a cui i potenziali soddisfano (si veda anche a pagina 451).

Sostituendo la (IV.6) nella (IV.1), si ottiene:

$$-\nabla^2 \varphi - \frac{\partial (divA)}{\partial t} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$
(IV.8)

Questa è una delle due equazioni che legano i potenziali alle sorgenti. L'altra si ottiene sostituendo nella (IV.4) a \vec{E} e \vec{B} le loro espressioni in funzione dei potenziali (IV.6, IV.5). Usando la relazione $rot(rot \vec{A}) = grad(div \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A}$, si ottiene:

$$-\nabla^{2}\vec{A} + grad(div\vec{A}) + \varepsilon_{0}\mu_{0}grad\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right) + \varepsilon_{0}\mu_{0}\frac{\partial^{2}\vec{A}}{\partial t^{2}} = \mu_{0}\vec{J}$$
(IV.9)

Questa equazione può essere semplificata scegliendo l'espressione di $div\vec{A}$:

$$di \, v \, \vec{A} = -\varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \varphi}{\partial t} \tag{IV.10}$$

Le (IV.8, IV.9) diventano allora:

$$\nabla^2 \varphi - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$
(IV.11)

$$\nabla^2 \vec{A} - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = -\mu_0 \vec{J}$$
 (IV.12)

L'analisi dimensionale di queste due equazioni mostra che il prodotto $\varepsilon_0 \mu_0$ ha le dimensioni dell'inverso del quadrato di una velocità. Le due equazioni precedenti sono equivalenti a quattro equazioni scalari:

$$\nabla^{2} \varphi - \varepsilon_{0} \mu_{0} \frac{\partial^{2} \varphi}{\partial t^{2}} = -\frac{\rho}{\varepsilon_{0}}$$
(IV.13)

$$\nabla^{2} A_{i} - \varepsilon_{0} \mu_{0} \frac{\partial^{2} A_{i}}{\partial t^{2}} = -\mu_{0} J_{i} \quad (i = 1, 2, 3)$$

Queste equazioni, equivalenti al sistema di equazioni di Maxwell, mostrano che esso non è sovradeterminato.

In assenza di sorgenti, le equazioni (IV.13) sono le stesse cui obbediscono le componenti dei campi elettrico e magnetico. Si consideri, infatti, la (IV.2): applicando ai suoi due membri l'operatore rotore ed usando la (IV.4) con $\vec{J} = 0$, si ottiene:

$$\nabla^2 \vec{E} - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0$$

che è un'equazione identica alle (IV.13) in assenza di sorgenti. Con procedimento analogo, si dimostra che il campo magnetico soddisfa la stessa equazione.

IV.1.1 Soluzione in assenza di sorgenti

Immaginate quello che provò quando le equazioni differenziali che aveva formulato gli dimostrarono che il campo elettromagnetico si propagava in forma di onde polarizzate e con la velocità della luce! A pochi uomini al mondo è stata concessa una tale esperienza. In quel momento emozionante certo non pensò minimamente che l'ambigua natura della luce, apparentemente spiegata in maniera così completa, avrebbe continuato a frustrare gli sforzi di generazioni successive.

Albert Einstein

La conclusione più diretta è la conferma del punto di vista di Faraday secondo cui le forze elettriche sono polarizzazioni che esistono indipendentemente nello spazio. Perché nei fenomeni che abbiamo studiato queste forze persistono nello spazio anche quando le cause che le hanno prodotte sono scomparse. Pertanto queste forze non sono semplicemente parte o attributi delle loro cause, ma corrispondono a condizioni mutate dello spazio.

Heinrich Hertz

Le equazioni per i potenziali del campo elettromagnetico si scrivono, per una regione dello spazio in cui non ci siano sorgenti ($\rho = 0, \vec{J} = 0$):

$$\nabla^2 \varphi - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0$$
(IV.14)
$$\nabla^2 A_i - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 A_i}{\partial t^2} = 0 \quad (i = 1, 2, 3)$$

In ciascuna delle precedenti equazioni si riconosce *l'equazione tridimensionale delle onde di d'Alembert*. L'equazione monodimensionale delle onde ha la forma:

$$\frac{\partial^2 f(x,t)}{\partial x^2} - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 f(x,t)}{\partial t^2} = 0$$

Una sua soluzione è data da:

$$f_1 = f_1(x - ct)$$

con $c = 1/\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}$: *c* è la velocità di propagazione delle onde elettromagnetiche nel vuoto . Si verifica che essa soddisfa l'equazione delle onde. Ponendo infatti $(x - ct) = \alpha$, si ottiene:

$$\frac{d^2f_1}{d\alpha^2} - \frac{1}{c^2}\frac{d^2f_1}{d\alpha^2}c^2 \equiv 0$$

qualunque sia l'espressione analitica di f_1 . Allo stesso modo si verifica che anche $f_2(x + ct)$ è soluzione dell'equazione monodimensionale delle onde. Essendo quest'ultima lineare in f, anche una qualunque combinazione lineare di $f_1(x - ct)$ e $f_2(x + ct)$ è soluzione della stessa equazione.

L'uguaglianza

$$x_2 - x_1 = c(t_2 - t_1)$$

è condizione necessaria e sufficiente affinché, qualunque sia l'espressione analitica di f_1 , si abbia:

$$f_1(x_1 - ct_1) = f_1(x_2 - ct_2)$$

dove (x_1, t_1) e (x_2, t_2) sono due coppie di variabili arbitrariamente scelte. Questa proprietà della $f_1(x - ct)$ caratterizza il concetto di onda: il valore che la funzione assume all'istante t_2 nel punto x_2 è lo stesso che la funzione aveva all'istante precedente t_1 nel punto x_1 la cui distanza da x_2 è pari a $c(t_2 - t_1)$. In altri termini: è *come se* il valore della funzione in questione *si*
fosse spostato da x_1 a x_2 ($x_2 > x_1$) con velocità c. Per queste ragioni, si dice che la $f_1(x-ct)$ rappresenta un'*onda progressiva*; analogamente, la $f_2(x+ct)$ si dice *onda regressiva*.

La f_1 e la f_2 non dipendono da y e da z. Fissata una coppia di valori (x, t), la f_1 e la f_2 hanno lo stesso valore in tutti i punti del piano x = costante, detto *fronte d'onda*: per questa ragione sono chiamate onde piane.

Si considerino ora soluzioni delle (IV.14) che siano onde piane progressive:

$$\varphi = \varphi(x - ct)$$
$$A_i = A_i(x - ct)$$

Queste soluzioni non dipendono da y e da z. La (IV.6), scritta per la componente x del campo elettrico, assume la forma:

$$E_x = -\frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial t}$$

Siccome per qualunque funzione ψ dell'argomento (*x*-*ct*), vale la relazione:

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = -c \frac{\partial \psi}{\partial x}$$

l'equazione precedente, per la (IV.10) e tenendo conto che

$$\partial A_y / \partial y = \partial A_z / \partial z = 0$$

diventa:

 $E_x = 0$

Procedendo in modo analogo per le altre due componenti si ottiene:

$$E_{y} = c \frac{\partial A_{y}}{\partial x}$$
$$E_{z} = c \frac{\partial A_{z}}{\partial x}$$

Per quanto concerne il campo magnetico, ricordando che $\vec{B} = rot \vec{A}$, si ottiene:

$$B_x = 0$$

$$B_y = -\frac{\partial A_z}{\partial x} = -\frac{E_z}{c}$$

$$B_z = \frac{\partial A_y}{\partial x} = \frac{E_y}{c}$$

L'analisi delle componenti dei campi mostra quindi che:

- ◊ in un'onda piana che si propaga lungo la direzione positiva dell'asse x, B ed E sono perpendicolari alla direzione di propagazione, perché E_x = B_x = 0;
- ♦ \vec{E} e \vec{B} sono tra loro perpendicolari, perché il loro prodotto scalare è nullo;
- ♦ fissato \vec{E} , \vec{B} forma un angolo di $\pi/2$ con \vec{E} in senso antiorario, se il piano dell'onda viene visto avvicinarsi dall'osservatore (figura IV.1); in termini vettoriali: $\vec{B} = \hat{s} \times \vec{E}/c$, dove \hat{s} è il versore di propagazione dell'onda.
- ♦ i moduli dei due campi sono legati dalla relazione B = E/c.



Figura IV.1. relazione vettoriale tra campo elettrico e magnetico in un'onda piana: per semplicità di rappresentazione si è posto c = 1.

Oltre alle onde piane, possiamo considerare onde sferiche, cioè onde il cui fronte d'onda sia una superficie sferica. Un'onda sferica deve essere la soluzione dell'equazione *monodimensionale* di d'Alembert:

$$\nabla^2 \varphi(r,t) - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \varphi(r,t)}{\partial t^2} = 0$$

dove la $\varphi(r, t)$ è una funzione che dipende solo da r e da t. Poiché, usando l'espressione (XV.12) dell'operatore laplaciano in coordinate polari, vale la relazione:

$$\nabla^2 \varphi = \frac{1}{r} \frac{\partial^2 (r\varphi)}{\partial r^2}$$

si ottiene:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial^2(r\varphi(r,t))}{\partial r^2}-\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2\varphi(r,t)}{\partial t^2}=0$$

Capitolo IV. Campi, potenziali, onde

Supponendo $r \neq 0$, si possono moltiplicare entrambi i membri della precedente equazione per r, ottenendo:

$$\frac{\partial^2(r\varphi(r,t))}{\partial r^2} - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2(r\varphi(r,t))}{\partial t^2} = 0$$

La funzione $(r\varphi)$ soddisfa quindi l'equazione *monodimensionale* delle onde nella variabile *r*. La sua soluzione avrà quindi la forma:

$$r\varphi(r,t) = f_1(r-ct) + f_2(r+ct)$$

con, al solito, $c = 1/\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}$. Pertanto, considerando solo l'onda progressiva, si ha:

$$\varphi(r,t) = \frac{1}{r} f_1(r-ct)$$

L'ampiezza di un'onda sferica diminuisce quindi come 1/r: si noti che la f_1 ha le dimensioni di φ moltiplicate per quelle di una lunghezza. Questa proprietà è legata al principio di conservazione dell'energia (pagina 98).

Quando i campi di un'onda elettromagnetica piana dipendono sinusoidalmente dal tempo, l'espressione della componente del campo elettrico lungo l'asse *y* (figura IV.1) assume la forma (per un'onda progressiva):

$$E_y = E_{y_0} \sin 2\pi \left(\frac{x}{\lambda} - vt\right) = E_{y_0} \sin \left(kx - \omega t\right)$$
(IV.15)

dove *v* è la frequenza della funzione sinusoidale, $\lambda = c/v$ è la lunghezza d'onda e $k = 2\pi/\lambda$ è il modulo del vettore d'onda diretto lungo la direzione di propagazione. Si noti come la (IV.15) sia una funzione sinusoidale di *x* e di *t*: fissato *x*, E_y varia sinusoidalmente in funzione di *t* con periodo T = 1/v; fissato *t*, E_y varia sinusoidalmente in funzione di *x* con periodo spaziale (lunghezza d'onda) λ . Un'onda descritta dalla (IV.15) si dice *mono-cromatica*, perché caratterizzata da una singola frequenza. Un'onda mono-cromatica con il vettore campo elettrico sempre diretto lungo la medesima direzione si dice polarizzata linearmente (capitolo X, pagina 291).

IV.1.2 Grandezze sinusoidali

Considerato l'uso esteso delle funzioni sinusoidali, ne richiamiamo alcune proprietà. Si consideri la funzione:

$$f(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$$
(IV.16)

A è l'ampiezza, $\omega = 2\pi v$ è la pulsazione (v è la frequenza) e l'espressione tra parentesi è la fase. Il valore medio del quadrato della funzione f(t) è dato da:

$$\frac{1}{T}\int_0^T A^2 \cos^2(\omega t + \varphi)dt = \frac{A^2}{2}$$

Si definisce valore efficace della funzione f(t) la grandezza $A/\sqrt{2}$.



Figura IV.2. rappresentazione di una grandezza sinusoidale mediante un vettore rotante (fasore).

Le grandezze sinusoidali possono essere rappresentate da un vettore rotante in un piano (fasore). Il modulo del vettore è uguale all'ampiezza della grandezza sinusoidale e l'angolo che esso forma con l'asse x - assunto come origine della fasi - è uguale alla fase della grandezza sinusoidale (figura IV.2). Questa rappresentazione è usata in diversi contesti; si veda alle pagine: 138, 140, 143 e 365.



Figura IV.3. rappresentazione di una grandezza sinusoidale nel piano complesso.

Le grandezze sinusoidali possono anche essere rappresentate mediante numeri complessi. Per esempio, la (IV.16) costituisce la parte reale del numero complesso:

$$Ae^{i(\omega t + \varphi)} = A\left[\cos(\omega t + \varphi) + i\sin(\omega t + \varphi)\right]$$
(IV.17)

La (IV.17) può essere rappresentata da un vettore nel piano complesso, come indicato in figura IV.3: al variare di *t*, il vettore ruota nel piano con velocità angolare ω . La somma di due funzioni complesse del tipo rappresentato dall'espressione (IV.17) corrisponde alla somma vettoriale dei rispettivi vettori.

La rappresentazione complessa di funzioni sinusoidali è sovente usata per rendere più semplici i calcoli. Per esempio: la derivata prima della funzione $e^{i\omega t}$ è, semplicemente, la medesima funzione moltiplicata per $i\omega$; la sua derivata seconda è la medesima funzione moltiplicata per $-\omega^2$. Quando la rappresentazione complessa è usata al solo scopo di semplificare i calcoli, le grandezze fisiche coinvolte sono pensate, usualmente, come rappresentate dalla parte reale del numero complesso. Si noti tuttavia che anche la parte immaginaria del numero complesso può svolgere la medesima funzione. Infatti, se scriviamo

$$e^{i\omega t} = \cos\omega t + i\sin\omega t$$

appare subito evidente che scegliere la parte reale o quella immaginaria per rappresentare la grandezza fisica implica solo una diversa scelta della fase iniziale. La notazione complessa è ampiamente usata nello studio dei circuiti dove la reattanza di un condensatore o di una induttanza sono rappresentate da un numero immaginario puro che segnala 'a vista' lo sfasamento introdotto dalla reattanza (sezione XII.6, pagina 359).

Tuttavia, l'uso più interessante della notazione complessa nella fisica classica si ha quando sia la parte reale che quella immaginaria di una grandezza fisica svolgono contemporaneamente un ruolo specifico nella descrizione dei fenomeni. E' questo, per esempio, il caso dell'indice di rifrazione dei mezzi materiali:

$$n = n_1 + i n_2$$

dove la parte reale n_1 controlla la propagazione dell'onda elettromagnetica nel mezzo ($v = c/n_1$ è la sua velocità di fase) mentre la parte immaginaria n_2 controlla l'assorbimento di energia da parte del mezzo (l'ampiezza dell'onda decresce come $e^{-k_0n_2z}$ in funzione della distanza z percorsa; k_0 è il vettore d'onda nel vuoto). In questi casi, la parte reale e quella immaginaria non sono intercambiabili. Si veda il capitolo VIII (pagina 251).

Nella fisica quantica ondulatoria la funzione d'onda che descrive lo stato di un sistema fisico è, in genere, una funzione complessa. I valori, rappresentati da un numero reale, delle grandezze fisiche misurabili sono dati dagli autovalori dell'equazione di Schödinger non dipendente dal tempo, o da valori medi calcolati a partire dalla funzione d'onda.

IV.1.3 Serie e integrali di Fourier

Una funzione f(x), definita nell'intervallo $-L \le x \le +L$, può essere scritta come una serie di funzioni *seno* e *coseno*:

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right]$$
(IV.18)

dove:

$$a_{0} = \frac{1}{L} \int_{-L}^{+L} f(x) dx$$

$$a_{n} = \frac{1}{L} \int_{-L}^{+L} f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx$$

$$b_{n} = \frac{1}{L} \int_{-L}^{+L} f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx$$

Se f(x) è periodica con periodo 2*L*, la serie (IV.18) rappresenta la funzione f(x) per qualunque *x* e gli integrali che permettono il calcolo dei coefficienti della serie possono essere calcolati su qualsiasi intervallo di ampiezza 2*L*.

Sia f(x) una funzione limitata: in qualsiasi intervallo (a, b) essa ha un numero finito di massimi e di minimi ed un numero finito di discontinuità (*condizioni di Dirichlet*). Se f(x) è assolutamente integrabile sull'intervallo $(-\infty, +\infty)$, cioè se:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| \, dx < \infty$$

la *trasformata di Fourier* di f(x) è la funzione g(k) definita dall'equazione:

$$g(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-ikx} dx$$
 (IV.19)

Nei punti di continuità della f(x), vale la relazione:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} g(k) e^{ikx} dk \qquad (IV.20)$$

La f(x) data da questa equazione si chiama *trasformata inversa* della g(k).

Se una funzione f(x) soddisfa le condizioni di Dirichlet ed è una funzione pari oppure è definita solo per valori positivi di x, la sua trasformata di Fourier è data da:

$$g(k) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty f(x) \cos(kx) \, dx$$

e la sua inversa da:

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty g(k) \cos(kx) \, dk \tag{IV.21}$$

Nel caso che la funzione f sia una funzione della variabile temporale t, valgono formule analoghe. Basta effettuare le seguenti sostituzioni:

$$x \rightarrow t$$
 (IV.22)

IV.1.4 Soluzione in presenzakdi sorgenti

Le soluzioni studiate nella sezione IV.1.1 (pagina 86) mostrano come si propaga il campo elettromagnetico in una regione priva di sorgenti: il campo è stato prodotto da qualche sorgente posta al di fuori della regione considerata. La soluzione generale di ciascuna delle (IV.11 - IV.12) è data dalla soluzione della corrispondente equazione omogenea (senza sorgenti) cui va sommata una soluzione particolare dell'equazione completa. Supponendo che le sorgenti siano assegnate mediante le funzioni $\rho \in \vec{J}$ – legate tra loro dall'equazione di conservazione della carica – e occupino una regione limitata dello spazio, si può mostrare che sono soluzioni particolari delle equazioni complete le funzioni (figura IV.4):¹

$$\varphi(x_1, y_1, z_1, t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int \frac{\rho(x_2, y_2, z_2, t - r_{21}/c)}{r_{21}} d\tau_2 \qquad (IV.23)$$

$$A_i(x_1, y_1, z_1, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{J_i(x_2, y_2, z_2, t - r_{21}/c)}{r_{21}} d\tau_2 \qquad (IV.24)$$

Si notino due importanti caratteristiche:

♦ il valore dei potenziali nel punto P₁ all'istante t è dovuto alle sorgenti poste nel generico volume $d\tau_2$ all'istante $(t - r_{21}/c)$: sono potenziali *ritardati*;

¹Si veda la sezione XV.6 (pagina 453) delle appendici matematiche.



Figura IV.4. i potenziali nel punto P_1 all'istante *t* sono dovuti alle sorgenti poste nel volume $d\tau_2$ all'istante $(t - r_{21}/c)$: sono potenziali *ritardati*.

 \diamond i potenziali 'si propagano' con velocità *c*.

Si osservi che sono soluzioni particolari delle equazioni complete anche le funzioni:

$$\begin{split} \varphi(x_1, y_1, z_1, t) &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int \frac{\rho(x_2, y_2, z_2, t + r_{21}/c)}{r_{21}} d\tau_2 \\ A_i(x_1, y_1, z_1, t) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{J_i(x_2, y_2, z_2, t + r_{21}/c)}{r_{21}} d\tau_2 \end{split}$$

Esse differiscono dalle precedenti per lo scambio del segno (–) con il segno (+) nell'argomento delle funzioni integrande: i potenziali si chiamano, in questo caso, *avanzati*. Il loro significato sarebbe il seguente: il valore del potenziale nel punto P_1 all'istante t è dovuto alle sorgenti poste nel generico volume $d\tau_2$, ma all'istante *successivo* $t'' = t + r_{21}/c$. Soluzioni di questo tipo sono normalmente escluse perché, in assenza di ipotesi aggiuntive, violano il principio di causalità.

Feynman e Wheeler hanno sviluppato, negli anni quaranta del secolo scorso, una teoria elettrodinamica basata sull'uso congiunto delle soluzioni ritardate e avanzate. In questa teoria, per esempio, il campo elettrico \vec{E} in un punto qualsiasi è considerato come derivante dalla somma del campo elettrico ritardato e avanzato: $\vec{E} = (1/2)(\vec{E}_r + \vec{E}_a)$, con notazioni ovvie. Il risultato finale è costituito da equazioni in cui compaiono *solo* le cariche: esse interagiscono *a distanza* con velocità di interazione finita uguale a quella di propagazione della luce. Nella teoria di Feynman e Wheeler, svolge una funzione essenziale un *assorbitore* in un modello di universo statico in grado di assorbire tutta l'energia irraggiata dalle cariche elettriche: gli sviluppi più recenti usano modelli di universo in espansione.²

Si noti come la soluzione dell'equazione delle onde in assenza di sorgenti e quella in loro presenza svolgano funzioni diverse: la prima descrive il campo elettromagnetico in una regione dello spazio priva di sorgenti e prescindendo da esse; l'altra correla il campo elettromagnetico alle sorgenti che lo producono.

IV.2 L'energia del campo elettromagnetico

Quando la luce viene emessa, una certa quantità di energia viene persa dal corpo luminoso, e, se la luce viene assorbita da un altro corpo, questo corpo viene riscaldato, mostrando che esso ha ricevuto energia dall'esterno. Durante l'intervallo di tempo in cui la luce ha lasciato il primo corpo e prima che essa raggiunga il secondo, essa deve essere esistita come energia nello spazio tra i due corpi.

James Clerk Maxwell

Partendo dalla teoria di Maxwell, siamo naturalmente condotti a considerare il problema: come un'energia intorno

ad una corrente elettrica passa da punto a punto, cioè quali cammini e secondo quale legge essa viaggia dalla parte del circuito dove è per la prima volta riconoscibile come elettrica e magnetica a quelle parti in cui è trasformata in calore o in altre forme?

Lo scopo di questo lavoro è quello di dimostrare che esiste una legge generale per il trasferimento di energia, secondo la quale essa, in ogni punto, si muove perpendicolarmente al piano contenente le linee di forza elettrica e di forza magnetica, e che la quantità che attraversa l'unità di superficie in un secondo è uguale...

John Henry Poynting

Si supponga che al campo elettromagnetico sia associata dell'energia e che questa possa spostarsi da una regione all'altra dello spazio. Si indichi con

²Per una introduzione a queste problematiche, si veda: R. Feynman, R. Leighton, M. Sands, *Lectures on Physics*, Addison - Wesley, (1964), vol. II, **28**, 1 - 14.

u la densità di energia - incognita - del campo elettromagnetico e con \vec{S} il vettore il cui flusso attraverso una superficie A rappresenta l'energia elettromagnetica che, nell'unità di tempo, l'attraversa. Per il principio di conservazione dell'energia si deve scrivere:

$$-\frac{\partial}{\partial t}\int_{\tau} u\,d\tau = \int_{A}\vec{S}\cdot\hat{n}\,dA + \int_{\tau}\vec{E}\cdot\vec{J}\,d\tau \qquad (\text{IV.25})$$

dove τ è il volume delimitato dalla superficie *A* e l'ultimo integrale rappresenta il lavoro compiuto dal campo elettromagnetico, nell'unità di tempo, sulle cariche contenute nel volume τ .

Per verificare questa affermazione si proceda nel modo seguente: il lavoro compiuto dalle forze del campo elettromagnetico su un volume $d\tau$ nell'intervallo di tempo dt è dato da:

$$dL = \rho d\tau (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \cdot \vec{v} dt$$

da cui segue immediatamente:

$$\frac{dL}{dt} = \rho(\vec{v} \cdot \vec{E}) \, d\tau$$

che, integrata, fornisce l'ultimo termine della (IV.25).

La (IV.25) può essere scritta:

$$-\frac{\partial}{\partial t}\int_{\tau} u\,d\tau = \int_{\tau} d\,i\,v\,\vec{S}\,d\tau + \int_{\tau}\vec{E}\cdot\vec{J}\,d\tau$$

da cui, per l'arbitrarietà di τ :

$$\vec{E} \cdot \vec{J} = -div\,\vec{S} - \frac{\partial u}{\partial t} \tag{IV.26}$$

Dalla (IV.4) si ricava che:

$$\vec{J} = \frac{1}{\mu_0} rot \vec{B} - \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

Il primo membro della (IV.26) diventa allora:

$$\vec{E} \cdot \vec{J} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \cdot rot \vec{B} - \varepsilon_0 \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$
(IV.27)

Usando la relazione:

$$div(\vec{B} \times \vec{E}) = \vec{E} \cdot rot\vec{B} - \vec{B} \cdot rot\vec{E}$$

Capitolo IV. Campi, potenziali, onde

e l'equazione di Maxwell relativa a *r o t* \vec{E} , la (IV.27) diventa:

$$\vec{E} \cdot \vec{J} = \frac{1}{\mu_0} di \, v \, (\vec{B} \times \vec{E}) - \frac{1}{2\mu_0} \frac{\partial (\vec{B} \cdot \vec{B})}{\partial t} - \frac{\varepsilon_0}{2} \frac{\partial (\vec{E} \cdot \vec{E})}{\partial t}$$
(IV.28)

Confrontando la (IV.26) con la (IV.28), si trova che l'uguaglianza dei loro secondi membri è soddisfatta se si pone (condizione sufficiente, ma non necessaria):

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0} (\vec{E} \times \vec{B}) \tag{IV.29}$$

$$u = \frac{\varepsilon_0}{2}E^2 + \frac{1}{2\mu_0}B^2$$
 (IV.30)

E' stata così trovata una *possibile* coppia di espressioni per \vec{S} e *u*. Essa tuttavia, *non è l'unica*. Infatti il vettore \vec{S} dato dalla (IV.29) è definito a meno di un campo vettoriale uniforme; analogamente, la grandezza *u* data dalla (IV.30) è definita a meno di una costante arbitraria. Le espressioni date dalle (IV.29) e (IV.30) sono state trovate in accordo con le osservazioni sperimentali. Il vettore \vec{S} definito dalla (IV.29) si chiama *vettore di Poynting*; nel caso di un'onda, la sua direzione coincide con quella della propagazione dell'onda e si 'sposta' con velocità *c*: ciò implica che l'energia associata al campo elettromagnetico si propaga con la stessa velocità.

Il modulo del vettore di Poynting può essere espresso in funzione di *E* o di *B*, usando la relazione B = E/c. Si ha, per esempio, nel vuoto:

$$S = \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} E^2$$

e, se l'onda è sinusoidale:

$$\langle S \rangle = \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} \frac{E_0^2}{2}$$

dove la media è effettuata su un periodo ed E_0 è il valore massimo del campo elettrico. Nel caso in cui si tratti di onde sferiche generate da una sorgente puntiforme, l'energia media che attraversa, nell'unità di tempo, una superficie sferica di raggio r e avente il centro nella sorgente è quindi proporzionale ad E_0^2 ; siccome, d'altra parte, $E_0 \propto 1/r$ (pagina 90), questa energia è la stessa qualunque sia il raggio della sfera.

Con una procedura analoga si può individuare una coppia di grandezze costituita dalla quantità di moto per unità di volume \vec{g} associabile al campo elettromagnetico e dalla quantità di moto 'trasportata' (quantità di moto che attraversa la superficie unitaria nell'unità di tempo). Si trova che:

$$\vec{g} = \frac{1}{c^2}\vec{S} = \varepsilon_0(\vec{E}\times\vec{B}) \tag{IV.31}$$

E' quindi possibile definire una densità del momento della quantità di moto \vec{J} mediante la relazione:

$$\vec{J} = \vec{r} \times \vec{g} = \varepsilon_0 [\vec{r} \times (\vec{E} \times \vec{B})]$$
(IV.32)

Nella sezione X.4 (pagina 313) discuteremo il significato fisico del momento angolare associato alla radiazione elettromagnetica. Nel caso di un'onda piana, è possibile dare un immediato significato fisico alla (IV.31). Si supponga infatti che un'onda piana venga completamente assorbita da una parete disposta perpendicolarmente alla sua direzione di propagazione: alla parete viene completamente trasferita sia l'energia che la quantità di moto dell'onda. Indicando con p il modulo della quantità di moto della parete si ottiene, per una superficie unitaria:

$$\frac{dp}{dt} = \frac{S}{c} \tag{IV.33}$$

Ricordando che dp/dt = F, dove F è il modulo della forza che si esercita sulla parete, si conclude che il secondo membro della (IV.33) rappresenta la *pressione esercitata dalla radiazione* sulla parete. Se invece di essere completamente assorbita, la radiazione elettromagnetica fosse completamente riflessa, la quantità di moto trasferita alla parete sarebbe doppia di quella appena calcolata.

IV.3 Campo di una carica puntiforme

Consideriamo il caso di una carica puntiforme q in moto qualsiasi rispetto ad un sistema di riferimento: il campo elettrico nel punto P_1 all'istante t è quello dovuto alla carica q quando si trovava nel punto Q_2^* all'istante $t^* < t$ e la sua distanza da P_1 era $r_{21}^* = c(t-t^*)$, dove c è la velocità della luce (figura IV.5): le grandezze r^* , t^* si dicono *ritardate*. Siccome il moto della carica è noto, dato t, si ricava t^* ed r_{21}^* . Si ha infatti:

$$x_{2}^{*} = x_{2} + \int_{t}^{t^{*}} v_{x} dt$$

$$y_{2}^{*} = y_{2} + \int_{t}^{t^{*}} v_{y} dt$$

$$z_{2}^{*} = z_{2} + \int_{t}^{t^{*}} v_{z} dt$$

(IV.34)

e:

$$c^{2}(t-t^{*})^{2} = (x_{1}-x_{2}^{*})^{2} + (y_{1}-y_{2}^{*})^{2} + (z_{1}-z_{2}^{*})^{2}$$
(IV.35)

Se nella (IV.35) si inseriscono le espressioni di x_2^* , y_2^* , z_2^* date dalle (IV.34), si ottiene un'equazione nell'unica incognita t^* dalla cui soluzione si ricava $r_{21}^* = c(t - t^*)$.



Figura IV.5. carica puntiforme *q* in moto qualunque. Il punto $P_1(x_1, y_1, z_1)$ è quello in cui si vuole calcolare il campo all'istante *t*. Il punto $Q_2(x_2, y_2, z_2)$ è la posizione della carica all'istante *t*; il punto $Q_2^*(x_2^*, y_2^*, z_2^*)$ la sua posizione all'istante *ritardato* $t^* = t - (r_{21}^*/c)$.

Si trova che il potenziale scalare ed il potenziale vettore dovuti ad una carica puntiforme *q* in moto qualsiasi sono (sezione XV.6.1, pagina 456):

$$\varphi(x_1, y_1, z_1, t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{r_{21}^* - \vec{v}^* \cdot \vec{r}_{21}^*/c}$$
(IV.36)

$$\vec{A}(x_1, y_1, z_1, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q\vec{v}^*}{r_{21}^* - \vec{v}^* \cdot \vec{r}_{21}^*/c}$$
(IV.37)

dove le grandezze con l'asterisco devono essere valutate all'istante *ritarda*to $t^* = t - r_{21}^*/c$. Questi potenziali sono detti di Liénard e Wiechert. Dai

potenziali si ricavano poi i campi mediante le equazioni:

$$\vec{E} = -grad\varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$
$$\vec{B} = rot\vec{A}$$

Si noti che, nel caso della carica puntiforme, vale la relazione:

$$\vec{A} = \varphi \frac{\vec{v}^*}{c^2}$$

dove \vec{v}^* è la velocità della carica all'istante ritardato $t^* = t - r_{21}^*/c$.

IV.3.1 Campo di una carica puntiforme in moto qualunque

Il campo elettrico è dato da:

$$\vec{E} = -grad\varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$
(IV.38)

con i potenziali dati dalla (IV.36) e dalla (IV.37) in cui si introduce, per comodità di calcolo, la lunghezza d^* definita da:

$$d^* = r_{21}^* - \frac{\vec{v}^* \cdot \vec{r}_{21}^*}{c}$$
(IV.39)

Il calcolo di $grad \varphi$ implica quello di $grad d^*$. Iniziamo, pertanto, con il calcolo della:

$$\frac{\partial d^*}{\partial x_1} = \frac{\partial r_{21}^*}{\partial x_1} - \frac{1}{c} \left[\vec{v}^* \cdot \frac{\partial \vec{r}_{21}^*}{\partial x_1} + \vec{r}_{21}^* \cdot \frac{\partial \vec{v}^*}{\partial x_1} \right]$$

Siccome:

$$\vec{r}_{21}^* = \vec{r}_1 - \vec{r}_2^*$$

si ha:

•
$$\frac{\partial \vec{r}_{21}^*}{\partial x_1} = \hat{\imath} - \frac{\partial \vec{r}_2^*}{\partial t^*} \frac{\partial t^*}{\partial x_1} = \hat{\imath} - \vec{v}^* \frac{\partial t^*}{\partial x_1}$$

Per definizione:

$$r_{21}^{*^2} = \vec{r}_{21}^* \cdot \vec{r}_{21}^*$$

Da cui, derivando rispetto ad x_1 :

$$r_{21}^{*} \frac{\partial r_{21}^{*}}{\partial x_{1}} = \vec{r}_{21}^{*} \cdot \frac{\partial \vec{r}_{21}^{*}}{\partial x_{1}}$$

$$= \vec{r}_{21}^{*} \cdot \left(\hat{\imath} - \vec{v}^{*} \frac{\partial t^{*}}{\partial x_{1}}\right)$$

$$= (\vec{r}_{21}^{*})_{x_{1}} - \vec{v}^{*} \cdot \vec{r}_{21}^{*} \frac{\partial t^{*}}{\partial x_{1}}$$

$$= (\vec{r}_{21}^{*})_{x_{1}} + c(d^{*} - r_{21}^{*}) \frac{\partial t^{*}}{\partial x_{1}} \qquad (IV.40)$$

D'altra parte, si ha:

$$\frac{\partial t^*}{\partial x_1} = \frac{\partial}{\partial x_1} \left(t - \frac{r_{21}^*}{c} \right) = -\frac{1}{c} \frac{\partial r_{21}^*}{\partial x_1} \tag{IV.41}$$

che, usando la (IV.40), diventa:

$$r_{21}^* \frac{\partial t^*}{\partial x_1} = -\frac{1}{c} \left[(\vec{r}_{21}^*)_{x_1} + c(d^* - r_{21}^*) \frac{\partial t^*}{\partial x_1} \right]$$

da cui, infine:

•
$$\frac{\partial t^*}{\partial x_1} = -\frac{(\vec{r}_{21}^*)_{x_1}}{cd^*}$$
(IV.42)

Siccome equazioni analoghe valgono per $\partial t^* / \partial y_1$ e per $\partial t^* / \partial z_1$, si ha:

$$\operatorname{grad} t^* = -\frac{\vec{r}_{21}^*}{cd^*} \tag{IV.43}$$

Combinando la (IV.42) con la (IV.41):

•
$$\frac{\partial r_{21}^*}{\partial x_1} = \frac{(\vec{r}_{21}^*)_{x_1}}{d^*}$$

Usando le equazioni segnate con un •, e ricordando che

$$\frac{\partial \vec{v}^*}{\partial x_1} = \frac{\partial \vec{v}^*}{\partial t^*} \frac{\partial \vec{t}^*}{\partial x_1} = \vec{a}^* \frac{\partial \vec{t}^*}{\partial x_1}$$

siamo ora in grado di calcolare:

$$\begin{aligned} \frac{\partial d^*}{\partial x_1} &= \frac{\partial r_{21}^*}{\partial x_1} - \frac{1}{c} \left(\vec{v}^* \cdot \frac{\partial \vec{r}_{21}^*}{\partial x_1} + \vec{r}_{21}^* \cdot \frac{\partial \vec{v}^*}{\partial x_1} \right) \\ &= \left(1 - \frac{v^{*2}}{c^2} \right) \frac{(\vec{r}_{21}^*)_{x_1}}{d^*} - \frac{1}{c} v_{x_1}^* + \frac{(\vec{r}_{21}^*)_{x_1}}{c^2 d^*} (\vec{a}^* \cdot \vec{r}_{21}^*) \end{aligned}$$

Formule analoghe valgono per $\partial d^*/\partial y_1$ e $\partial d^*/\partial z_1$. Perveniamo così alla relazione cercata:

$$\operatorname{grad} d^* = \left(1 - \frac{v^{*2}}{c^2}\right) \frac{\vec{r}_{21}^*}{d^*} - \frac{1}{c} \vec{v}^* + \frac{\vec{r}_{21}^*}{c^2 d^*} (\vec{a}^* \cdot \vec{r}_{21}^*)$$
(IV.44)

Procedendo infine al calcolo della (IV.38) si ottiene, usando anche la relazione vettoriale $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b} (\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c} (\vec{a} \cdot \vec{b})$:

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{d^{*3}} \left\{ \left(1 - \frac{v^{*2}}{c^2} \right) \left(\vec{r}_{21}^* - \frac{r_{21}^*}{c} \vec{v}^* \right) + \frac{1}{c^2} \vec{r}_{21}^* \times \left[\left(\vec{r}_{21}^* - \frac{r_{21}^*}{c} \vec{v}^* \right) \times \vec{a}^* \right] \right\}$$
(IV.45)

Il campo magnetico è dato da:

$$\vec{B} = rot \vec{A} = q \frac{\mu_0}{4\pi} rot \left(\frac{\vec{v}^*}{d^*}\right)$$

Siccome:

$$rot \, \vec{v}^* = grad \, t^* \times \frac{\partial \vec{v}^*}{\partial t^*} = grad \, t^* \times \vec{a}^*$$

si ottiene:

$$\vec{B} = q \frac{\mu_0}{4\pi} \left(\frac{1}{d^*} rot \vec{v}^* - \vec{v}^* \times grad \frac{1}{d^*} \right) \\ = q \frac{\mu_0}{4\pi} \left[\frac{1}{d^*} (grad t^* \times \vec{a}^*) + \frac{1}{d^{*^2}} \vec{v}^* \times grad d^* \right]$$

Infine usando la (IV.43) e la (IV.44):

$$\vec{B} = q \frac{\mu_0}{4\pi} \left\{ \vec{a}^* \times \frac{\vec{r}_{21}^*}{c d^{*2}} + \frac{1}{d^{*2}} \left[\left(1 - \frac{v^{*2}}{c^2} \right) \frac{\vec{v}^* \times \vec{r}_{21}^*}{d^*} + (\vec{a}^* \cdot \vec{r}_{21}^*) \frac{\vec{v}^* \times \vec{r}_{21}^*}{c^2 d^*} \right] \right\}$$
(IV.46)

Tenendo conto della (IV.45), si dimostra che:

$$\vec{B} = \frac{1}{c}\hat{r}_{21}^* \times \vec{E}$$

Si riprenda in considerazione l'espressione del campo elettrico data dalla (IV.45). Essa mostra che il campo elettrico generato da una carica puntiforme *positiva* in moto qualunque è dato dalla somma di quattro vettori:

Capitolo IV. Campi, potenziali, onde

- a. uno diretto come il vettore \vec{r}_{21}^* congiungente la posizione ritardata della carica con il punto P_1 in cui si calcola il campo; questo termine può essere chiamato coulombiano;
- b. un secondo diretto come la velocità ritardata della carica \vec{v}^* ;
- c. un terzo, proporzionale all'accelerazione ritardata della carica a^* , perpendicolare al vettore \vec{r}_{21}^* congiungente la posizione ritardata della carica con il punto P_1 ;
- d. un quarto, il cui modulo è dello stesso ordine di grandezza di quello del precedente, diminuito di un fattore v^*/c . Questo termine è nullo quando la velocità e l'accelerazione ritardate della carica sono parallele (per esempio, quando la carica si muove di *moto armonico*).

Il peso dei quattro termini è determinato dalla loro dipendenza dalla distanza ritardata della carica, nonché dal valore del rapporto v^*/c . Se si considera solo la dipendenza dalla distanza, si osserva che i primi due termini dipendono da $1/r_{21}^{*^2}$, mentre gli altri due da $1/r_{21}^*$. E' interessante discutere due casi limite:

A) la velocità della carica è piccola rispetto a *c*, varia lentamente e si possono quindi trascurare i termini contenenti l'accelerazione. In questa situazione, essendo

$$r_{21}^* \approx r_{21}$$
 e $d^* \approx r_{21}$ $\vec{v}^* \approx \vec{v}$

si ha dalla (IV.45) e dalla (IV.46):

$$\vec{E} \approx \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\vec{r}_{21}}{r_{21}^3}$$
 (IV.47)

$$\vec{B} \approx \frac{q\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{v} \times \vec{r}_{21}}{r_{21}^3} \tag{IV.48}$$

La prima di queste due equazioni è la legge di Coulomb; la seconda conduce, con opportuni passaggi, alla legge di Biot e Savart (pagina 201).

> ⇒ Se la velocità della carica, piccola rispetto a quella della luce, si può considerare costante nell'intervallo di tempo $t - t^*$, possiamo porre $\vec{v}^* \approx \vec{v}$. D'altra parte, essendo $v \ll c$, risulta anche $\vec{r}_{21}^* \approx \vec{r}_{21}$. Se, per esempio, $r_{21}^* = 30 m$, allora $t - t^* = r_{21}^*/c \approx$ $10^{-7} s$. In questo caso, se la velocità della carica varia sinusoidalmente, la sua frequenza deve essere piccola rispetto a $10^7 Hz$. Nel caso di campi magnetici generati da correnti in conduttori, la velocità delle cariche è la loro velocità di deriva (si veda a pagina 274).

B) La carica si muove in una regione dello spazio le cui dimensioni lineari sono piccole rispetto alla distanza r_{21}^* , la sua velocità è piccola rispetto a c e la distanza r_{21}^* è sufficientemente grande da poter trascurare i termini dipendenti da $1/r_{21}^{*^2}$ rispetto a quelli dipendenti da $1/r_{21}^*$.

L'andamento delle funzioni $1/r e 1/r^2$ è mostrato in figura IV.6.



Figura IV.6. and amento delle funzioni $1/r e 1/r^2$ in funzione di *r*.

Sotto queste condizioni, essendo:

$$r_{21}^* \approx r_{21}$$
 e $d^* \approx r_{21}$

si ottiene:

$$\vec{E} \approx q \frac{\mu_0}{4\pi r_{21}^3} \vec{r}_{21} \times (\vec{r}_{21} \times \vec{a}^*)$$

Il campo elettrico è quindi diretto, se q > 0, come il versore \hat{n} della figura IV.7; la sua componente lungo \hat{n} , che è perpendicolare a \vec{r}_{21} , è data da:

$$E_{\perp} \approx q \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{r_{21}} a^* \sin \theta^* = -q \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{r_{21}} a_{\perp}^* = -q \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{r_{21}} a_{\perp} \left(t - \frac{r_{21}}{c} \right)$$

dove abbiamo introdotto il simbolo \perp per ricordare che il campo elettrico è diretto lungo la perpendicolare a \vec{r}_{21} . Questa formula, insieme a quella relativa al campo magnetico, fornisce il campo, detto *di radiazione*, generato da una carica in moto. Essa descrive il fenomeno basilare della generazione delle onde elettromagnetiche.

Capitolo IV. Campi, potenziali, onde



Figura IV.7. la carica *q* si muove di moto qualunque; \vec{a}^* è la sua accelerazione ritardata; il versore \hat{n} è diretto come il vettore $\vec{r}_{21}^* \times (\vec{r}_{21}^* \times \vec{a}^*)$.



Figura IV.8. le frecce sulla circonferenza rappresentano il campo elettrico di *radiazione* prodotto da una carica *positiva* puntiforme in moto armonico. Nei punti $A \in B$ il campo è nullo; \vec{a}^* è l'accelerazione ritardata della carica.

Sotto le condizioni sopra specificate, l'onda generata da una carica che si muove di moto armonico, a grandi distanze dalla sorgente, è polarizzata linearmente lungo la direzione perpendicolare a \vec{r}_{21} e giacente nel piano individuato da \vec{r}_{21} e dalla direzione di moto della carica.

L'andamento qualitativo del campo è mostrato nella figura IV.8. L'energia irraggiata nell'unità di tempo (potenza irraggiata) sarà data da:

$$P(t) = \int_A \vec{S} \cdot \hat{n} \, dA$$

dove *A* è una qualunque superficie sferica, di raggio sufficientemente grande, centrata sulla carica. Ricordando che $S = E^2/(\mu_0 c)$ e che $dA = 2\pi r^2 \sin\theta d\theta$



Figura IV.9. per il calcolo della potenza irraggiata da una carica in moto nell'approssimazione del campo di *radiazione*.

(r raggio della sfera), si ottiene:

$$P(t) = \frac{\mu_0 q^2 a^2 (t - r/c)}{8\pi c} \int_0^\pi \sin^3 \theta \, d\theta = \frac{\mu_0 q^2 a^2 (t - r/c)}{6\pi c}$$
(IV.49)

dove θ è l'angolo che il vettore \vec{a}^* forma con \vec{r} (figura IV.9) e

$$\int_0^\pi \sin^3\theta \, d\theta = 4/3$$

Nel caso in cui la carica si muova di moto armonico ($x = x_0 \cos \omega t$), la potenza irraggiata, mediata su un periodo, è data da:

$$=\frac{\mu_0 q^2 x_0^2 \omega^4}{12\pi c} = \frac{e^2 x_0^2 \omega^4}{12\pi \varepsilon_0 c^3}$$
 (IV.50)

dove x_0 è l'ampiezza massima di oscillazione della carica e $\omega = 2\pi v$ la pulsazione del suo moto.

IV.3.2 Campo di una carica puntiforme in moto rettilineo uniforme

Si supponga che la carica q, nell'origine delle coordinate all'istante t = 0, si muova con velocità \vec{v} costante lungo la direzione positiva dell'asse x (figura IV.10).

Dalla (IV.45) si ottiene, essendo nulla l'accelerazione della carica:

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{d^{*^3}} \left[\left(1 - \frac{v^{*^2}}{c^2} \right) \left(\vec{r}_{21}^* - \frac{r_{21}^*}{c} \vec{v}^* \right) \right] \\ = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{d^{*^3}} \left\{ \left(1 - \frac{v^{*^2}}{c^2} \right) \left[(x_1 - vt) \hat{\imath} + y_1 \hat{\jmath} + z_1 \hat{k} \right] \right\}$$
(IV.51)

 $\operatorname{con} d^*$ definita dalla (IV.39).



Figura IV.10. la carica *q* si muove con velocità costante lungo la direzione positiva dell'asse *x*. Q_2 è la posizione della carica all'istante *t*; Q_2^* , la sua posizione all'istante ritardato t^* .

Il campo elettrico ha componenti proporzionali a $(x_1 - vt)$, y_1 , z_1 che sono le componenti del vettore \vec{r}_{21} ; quindi il campo elettrico è diretto come \vec{r}_{21} : esso è radiale rispetto alla posizione attuale (all'istante t) della carica. Per calcolare le componenti del campo elettrico, è necessario calcolare il valore di d^* . Dalla definizione:

$$r_{21}^* = c(t - t^*)$$

si ottiene, elevando al quadrato ed esplicitando il valore di r_{21}^* :

$$c^{2}(t-t^{*})^{2} = (x_{1}-vt^{*})^{2} + y_{1}^{2} + z_{1}^{2}$$

Questa è un'equazione di secondo grado nell'incognita t^* :

$$(v^{2} - c^{2})t^{*2} - 2(x_{1}v - c^{2}t)t^{*} + x_{1}^{2} + y_{1}^{2} + z_{1}^{2} - c^{2}t^{2} = 0$$

Una delle sue soluzioni è:

$$\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)t^* = t - \frac{vx_1}{c^2} - \frac{1}{c}\sqrt{(x_1 - vt)^2 + \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)(y_1^2 + z_1^2)}$$

mentre l'altra è da scartare perché implica $t^* > t$. In questo caso, i campi nel punto P_1 all'istante t dipenderebbero dalla posizione della carica in un istante successivo: verrebbe così violato il principio di causalità. Vale dunque la relazione:

$$c\left[t - \frac{vx_1}{c^2} - \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)t^*\right] = \sqrt{(x_1 - vt)^2 + \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)(y_1^2 + z_1^2)}$$
(IV.52)

Siamo ora in grado di calcolare d^* :

$$d^* = r_{21}^* - \frac{\vec{v}^* \cdot \vec{r}_{21}^*}{c} = c(t - t^*) - \frac{v}{c}(x_1 - vt^*)$$
$$= c \left[t - \frac{vx_1}{c^2} - \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right) t^* \right]$$

cioè, per la (IV.52):

$$d^* = r_{21}^* - \frac{\vec{v}^* \cdot \vec{r}_{21}^*}{c} = \sqrt{(x_1 - vt)^2 + \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)\left(y_1^2 + z_1^2\right)}$$

Dalla (IV.51) si ottiene, infine:

$$E_x = \gamma \quad \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{x_1 - vt}{\left[\gamma^2 (x_1 - vt)^2 + y_1^2 + z_1^2\right]^{3/2}}$$
$$E_y = \gamma \quad \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{y_1}{\left[\gamma^2 (x_1 - vt)^2 + y_1^2 + z_1^2\right]^{3/2}}$$
$$E_z = \gamma \quad \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{z_1}{\left[\gamma^2 (x_1 - vt)^2 + y_1^2 + z_1^2\right]^{3/2}}$$

dove $\gamma = \sqrt{1 - (\nu^2/c^2)}$.

In un piano contenente la carica e perpendicolare all'asse x, la componente E_x è nulla perché $x_1 = vt$. Il campo elettrico è quindi perpendicolare all'asse x ed il suo modulo è dato da:

$$E_{\perp} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \frac{1}{y_1^2 + z_1^2}$$

In altri termini, il valore del campo è quello previsto dalla legge di Coulomb, aumentato del fattore $(1/\sqrt{1-v^2/c^2})$.

Sull'asse x le componenti E_y ed E_z del campo elettrico sono nulle, perché $y_1 = z_1 = 0$; la sua componente x è data da:

$$E_x = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \frac{x_1 - vt}{|x_1 - vt|^3}$$

ed il valore del campo è quello previsto dalla legge di Coulomb, diminuito del fattore $(1 - v^2/c^2)$.

Quindi, per $v \ll c$, il campo elettrico è dato con buona approssimazione dalla formula di Coulomb; invece, per velocità relativistiche ($v \approx c$), il campo elettrico è fortemente ridotto lungo la direzione del moto (in entrambi i sensi) e fortemente aumentato nelle direzioni perpendicolari.

Si consideri infine il campo magnetico \vec{B} . Si ha, ricordando che $A_y = A_z = 0$:

$$B_{x} = \frac{\partial A_{z}}{\partial y} - \frac{\partial A_{y}}{\partial z} = 0$$

$$B_{y} = \frac{\partial A_{x}}{\partial z} - \frac{\partial A_{z}}{\partial x} = \frac{v}{c^{2}}\frac{\partial \varphi}{\partial z} = -\frac{v}{c^{2}}E_{z}$$

$$B_{z} = \frac{\partial A_{y}}{\partial x} - \frac{\partial A_{x}}{\partial y} = -\frac{v}{c^{2}}\frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{v}{c^{2}}E_{y}$$

Quindi:

$$\vec{B} = \frac{\vec{v} \times \vec{E}}{c^2}$$

Le linee di campo (linee tali che in ogni loro punto il vettore campo è ad esse tangente) sono circonferenze centrate sull'asse x.

IV.4 Elettromagnetismo e quadrivettori

I quadrivettori dell'elettromagnetismo sono: la quadricorrente, il quadripotenziale e il quadrivettore d'onda. La quadricorrente è data da:

$$\vec{\mathcal{J}}=\vec{\mathcal{J}}(\rho c,J_x,J_y,J_z)$$

dove ρ è la densità di carica e \vec{J} il vettore densità di corrente. Il *quadripotenziale* è dato da:

$$\vec{\phi} = \vec{\phi} \left(\frac{\varphi}{c}, A_x, A_y, A_z \right)$$

dove φ è il potenziale scalare e \vec{A} il potenziale vettore. Il *quadrivettore d'onda* è dato da:

$$\vec{\mathcal{K}} = \left(\frac{\omega}{c}, k_x, k_y, k_z\right)$$

dove $\omega = 2\pi v$ è la *pulsazione* dell'onda sinusoidale e k_i (i = 1, 2, 3) sono le componenti del *vettore d'onda* tridimensionale $\vec{k} = (2\pi/\lambda)\hat{n}$.

Si consideri la divergenza della quadricorrente:

$$div\,\vec{\mathscr{J}} = \frac{\partial(\rho c)}{\partial(c t)} + \frac{\partial J_x}{\partial x} + \frac{\partial J_y}{\partial y} + \frac{\partial J_z}{\partial z} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + div\,\vec{J}$$

La legge della conservazione della carica, in notazione quadridimensionale, è quindi espressa dalla relazione:

$$div \vec{\mathcal{J}} = 0$$

Essa vale in qualunque *SRI*, perché la divergenza di un quadrivettore è invariante per trasformazioni di Lorentz. Si osservi infine che la condizione $(div \vec{A} = -(1/c^2)(\partial \varphi / \partial t))$ imposta a suo tempo per derivare le equazioni dei potenziali elettromagnetici è espressa in forma quadridimensionale dalla relazione:

$$div \vec{\phi} = 0$$

come si può verificare sviluppando il primo membro di questa equazione.

Opportune combinazioni di derivate del quadripotenziale individuano un tensore di rango 2 antisimmetrico: il *tensore elettromagnetico* (pagina 424). Mentre nello spazio euclideo il campo elettromagnetico è rappresentato da due vettori distinti, nello spazio - tempo esso è rappresentato da un unico ente matematico. Le equazioni cui obbediscono le componenti non nulle del tensore elettromagnetico sono equivalenti alle equazioni di Maxwell.

Il tensore elettromagnetico permette l'individuazione di due invarianti:

$$I_1 = c^2 B^2 - E^2$$
 $I_2 = (\vec{B} \cdot \vec{E})^2$

Quindi:

- ♦ Se i vettori \vec{E} e \vec{B} sono tra di loro perpendicolari ($I_2 = 0$, $\vec{E} \neq 0$, $\vec{B} \neq 0$) in un *SRI*, essi lo sono in qualunque altro *SRI*. Questo è, per esempio, il caso delle onde elettromagnetiche o quello del campo elettromagnetico generato da una carica puntiforme in moto rettilineo uniforme.
- ♦ Se $I_2 = 0$ ed $I_1 > 0$, allora può esistere un *SRI* in cui E = 0. Questo è, per esempio, il caso di un campo magnetico creato da un magnete: nel *SRI* solidale con il magnete il campo elettrico è nullo, mentre è diverso da zero e perpendicolare al campo magnetico in ogni altro *SRI*.

Capitolo IV. Campi, potenziali, onde

♦ Se $I_2 = 0$ e $I_1 < 0$, allora può esistere un *SRI* in cui il campo magnetico è nullo. Questo è, per esempio, il caso del campo elettromagnetico creato da una carica puntiforme: nel *SRI* solidale con la carica, il campo magnetico è nullo; in ogni altro *SRI* il campo magnetico è perpendicolare al campo elettrico.

IV.4.1 Un'applicazione del formalismo relativistico

L'uso del formalismo relativistico permette di risolvere con pochi passaggi problemi che altrimenti richiederebbero calcoli prolungati. Come esempio, calcoliamo di nuovo il campo elettromagnetico dovuto ad una carica puntiforme q in moto rettilineo uniforme con velocità \vec{v} diretta lungo l'asse x del *SRI K*. La carica è in quiete nel *SRI K'* comovente con essa. In *K'* c'è solo un campo elettrico coulombiano il cui potenziale scalare è dato da

$$\varphi' = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{r'}$$

E' inoltre

$$\vec{A}' = 0$$

Applicando le formule di trasformazione delle componenti del quadripotenziale, si ottiene:

$$\frac{\varphi}{c} = \Gamma\left(\frac{\varphi'}{c} + \frac{\nu}{c}A'_x\right) = \Gamma\frac{\varphi'}{c} = \Gamma\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0 c}\frac{q}{r'}\right)$$

perché $A'_x = 0$. Da cui, sostituendo a r' la sua espressione secondo K:

$$\varphi(x, y, z, t) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \cdot \frac{1}{\left[\left((x - vt)/\sqrt{1 - v^2/c^2}\right)^2 + y^2 + z^2\right]^{1/2}}$$

Il potenziale vettore è dato da:

$$A_x = \frac{\nu}{c^2}\varphi$$
$$A_y = 0$$
$$A_z = 0$$

Usando poi le relazioni $\vec{E} = -grad \varphi - \partial \vec{A}/\partial t$ e $\vec{B} = rot \vec{A}$, si trovano le espressioni dei campi già ottenuti nella sezione IV.3.2 (pagina 107).

Alternativamente, si possono ricavare direttamente le espressioni dei campi usando le relazioni di trasformazione dei campi della sezione III.2.1 (pagina 78).

Capitolo V

Onde e particelle

Secondo la teoria ondulatoria, c'è un mezzo materiale che riempie lo spazio tra i due corpi, ed è mediante l'azione di parti contigue di questo mezzo che l'energia viene trasmessa, da una porzione alla prossima, finché essa raggiunge il corpo illuminato.

James Clerk Maxwell

...quando un raggio luminoso uscente da un punto si propaga, l'energia non si distribuisce in modo continuo in uno spazio via via più grande; essa consiste invece in un numero finito di quanti di energia, localizzati in punti dello spazio, i quali si muovono senza dividersi e possono essere assorbiti e generati solo nella loro interezza.

Albert Einstein

La teoria dei fenomeni elettromagnetici che è stata sinora esposta riflette lo stato delle conoscenze quale era circa nel 1905. Gli sviluppi successivi hanno mostrato che la teoria di Maxwell - Lorentz non può essere usata per descrivere compiutamente l'emissione o l'assorbimento di radiazione elettromagnetica da parte di atomi o di nuclei. Einstein nel 1905 scriveva:

La teoria ondulatoria della luce basata su funzioni spaziali continue si è dimostrata eccellente per la descrizione dei fenomeni puramente ottici e non sarà certo mai sostituita da un'altra teoria. Si deve tuttavia tener presente che le osservazioni ottiche si riferiscono a valori medi temporali, e non già a valori istantanei, e nonostante gli esperimenti abbiano pienamente confermato la teoria della diffrazione, della ri-

Capitolo V. Onde e particelle

flessione, della rifrazione, della dispersione e così via, è concepibile che una teoria della luce basata su funzioni spaziali continue porti a contraddizioni con l'esperienza se la si applica ai fenomeni della generazione e della trasformazione della luce.¹

Ora si sa che il processo di emissione o assorbimento di radiazione elettromagnetica da parte di un atomo (o di un nucleo) è *discreto e direzionale*. Gli atomi (e i nuclei) emettono quanti di luce (fotoni) aventi ciascuno energia hv e quantità di moto lineare (hv/c) \hat{n} ; nella sezione X.3 (pagina 308) vedremo che i fotoni possono anche possedere un momento angolare intrinseco (spin) pari a $\pm (h/2\pi)$ \hat{n} . \hat{n} è il versore di propagazione del quanto di luce, h la costante di Planck e v la frequenza della radiazione elettromagnetica descritta in termini di onde.

Nella sezione V.8.7 (pagina 153), saranno discussi esperimenti di interferenza realizzati con sorgenti di luce talmente deboli che solo un fotone alla volta attraversa, in media, l'apparato di misura: questi esperimenti confermano il rapporto tra descrizione ondulatoria e corpuscolare della luce descritto qui sotto sulla base di esperimenti ideali.

Si collochi una sorgente di luce al centro di un pallone di vetro sferico e cavo sulla cui superficie interna è stato depositato un materiale luminescente (opaco se non illuminato). Se la sorgente è molto intensa, si osserva che il pallone viene uniformemente illuminato. Se si diminuisce progressivamente l'intensità della sorgente, si osserva che la luminosità del pallone diminuisce progressivamente senza tuttavia perdere la sua uniformità. Diminuendo ulteriormente l'intensità della sorgente si osserverà che il pallone si illumina solo per 'punti' il cui numero, per unità di tempo, diminuisce al diminuire ulteriore dell'intensità della sorgente. La teoria ondulatoria non ha alcuna difficoltà a descrivere quanto accade quando la superficie del pallone è uniformemente illuminata, quando cioè l'intensità della sorgente è sufficientemente intensa. Essa, tuttavia, non è in grado di descrivere i fenomeni discreti osservati quando la sorgente opera a basse intensità. Tale incapacità è dovuta al fatto che la teoria ondulatoria è una teoria del continuo, secondo la quale la sorgente emette onde sferiche e l'energia si propaga verso l'esterno con uniformità. Per poter spiegare la comparsa sulla superficie del pallone di un punto luminoso, la teoria dovrebbe spiegare come l'ener-

¹A. Einstein, 'Un punto di vista euristico relativo alla generazione e alla trasformazione della luce' (1905), in *Albert Einstein, Opere scelte* a cura di E. Bellone, Bollati Boringhieri, Torino, 1988, pp. 118 - 119.

gia distribuita su una superficie sferica si possa concentrare, all'improvviso, in un punto.

Questo esperimento ideale può essere ulteriormente modificato sostituendo il materiale luminescente con uno strato di materiale fotosensibile come quello usato per le pellicole fotografiche. Si può ora eseguire un esperimento diviso in due parti:

- a) si fa operare la sorgente all'intensità I_a per un secondo: l'intensità è scelta in modo tale da annerire uniformemente il materiale fotografico depositato sulla parete interna del pallone;
- b) dopo aver cambiato il pallone, si effettua un'altra misura facendo funzionare la sorgente ad una intensità tale che la luce arrivi sulla parete interna del pallone 'per punti': sia I_b tale intensità. Si farà allora funzionare la sorgente per un numero di secondi pari a I_a/I_b .

Il grado di annerimento del pallone sarà lo stesso nei due casi: la teoria ondulatoria li descrive correttamente entrambi, quindi può essere usata ogniqualvolta il numero dei fotoni coinvolti è sufficientemente grande, *indipendentemente da come i fotoni entrano in gioco: uno alla volta o tutti insieme*. Dal punto di vista quantitativo, il raccordo tra descrizione ondulatoria e corpuscolare della radiazione si stabilisce ponendo:

< u >= nhv

dove $\langle u \rangle$ è il valore, mediato su un periodo, della densità di energia associata alla radiazione monocromatica di frequenza $v \in n$ la densità dei fotoni.

Capitolo V. Onde e particelle

V.1 Interferometro di Michelson

Supponiamo che un certo numero di onde di uguale altezza si muovano, con velocità costante, su di una superficie di un lago stagnante e che entrino in uno stretto canale che porti fuori dal lago; supponiamo poi che un'altra simile causa abbia prodotto un'altra serie di onde che arrivano allo stesso canale, con la stessa velocità e allo stesso istante. Nessuna delle due serie di onde distruggerà l'altra, ma i loro effetti si combineranno; se esse entreranno nel canale in modo tale che le creste di una serie coincideranno con quelle dell'altra, esse produrranno insieme una serie di creste più alte; ma se le creste di una serie sono collocate in modo tale da corrispondere agli avallamenti dell'altra, esse riempiranno esattamente quegli avallamenti e la superficie dell'acqua rimarrà piatta. Sostengo che effetti simili si producono ogniqualvolta due porzioni di luce si mescolano in questo modo; e chiamo questo la legge generale dell'interferenza della luce.

Thomas Young



Figura V.1. interferometro di Michelson. Si veda il testo.

Lo schema dell'apparato inventato da Michelson è mostrato in figura V.1:

1. *S* è una sorgente di luce estesa costituita, per esempio, da una lampada a scarica;

- 2. *F* è un filtro tale che solo una determinata 'riga' emessa dagli atomi del vapore contenuto nella lampada lo possa attraversare (la luce che attraversa *F* è quindi, *approssimativamente*, monocromatica);
- 3. *L* è una lente la cui funzione è di rendere il fascio di luce che l'attraversa parallelo, con una *certa approssimazione*;
- 4. M_1 è una lastra di vetro inclinata di 45° rispetto alla direzione di propagazione del fascio e la cui superficie più lontana da *S* è semi - argentata: la luce incidente su M_1 è parzialmente riflessa verso lo specchio M_2 , mentre l'altra porzione del fascio è trasmessa verso M_3 ;
- 5. *C* è una lastra di vetro (compensatore) identica a M_1 , ma non argentata: la sua funzione è di rendere uguali i cammini attraverso il vetro dei due fasci (quello verso M_2 e quello verso M_3);
- 6. $M_2 \in M_3$ sono due specchi;
- 7. *T* è uno schermo che permette l'osservazione del fenomeno.

I cammini dei due fasci sono:

- ♦ percorso $O: L \to M_1 \to C \to M_3 \to C \to M_1 \to T$
- ♦ percorso $V: L \to M_1 \to M_2 \to M_1 \to T$

Ai fini del calcolo dei cammini percorsi dai due fasci $O \in V$, è utile considerare il piano R che è il piano in cui l'immagine di M_3 viene riflessa da M_1 : R si chiama *piano di riferimento*. Se la superficie riflettente di M_2 coincide con R i cammini ottici dei due fasci sono identici. M_2 può essere spostato lungo la direzione verticale della figura con un apparato micrometrico che ne mantenga la perpendicolarità rispetto alla direzione del fascio V.

Supponiamo dapprima che il fascio uscente da *L* sia rigorosamente parallelo: questa condizione *non* è mai verificata; tuttavia, è utile prenderla in considerazione perché essa vale comunque per la porzione centrale del fascio. Sotto questa ipotesi, si osserverebbe in *T* un massimo di intensità luminosa quando la differenza tra i cammini dei due fasci (O, V) è un multiplo intero di lunghezze d'onda; si osserverebbe buio quando la differenza tra i cammini dei due fasci (O, V) è un multiplo intero dispari di mezze lunghezze d'onda; si osserverebbe una intensità compresa tra 0 e quella massima per situazioni intermedie. Capitolo V. Onde e particelle



Figura V.2. per il calcolo della differenza di cammino tra raggi paralleli riflessi dallo specchio M_2 e dal 'piano di riferimento' *R*. Si veda il testo. Gli angoli individuati da un • sono uguali a θ .

La situazione reale è invece quella in cui il fascio uscente da *L non* è esattamente parallelo. Ne consegue che solo una porzione centrale del fascio *V* incide perpendicolarmente sugli specchi; tenendo conto del fatto che il fascio *O* è come se venisse riflesso da *R*, vale la seguente trattazione. Sia *d* la distanza tra *R* e la superficie riflettente di M_2 . Al centro del fascio, se $2d = n\lambda$ con *n* intero, si ha un massimo di luce sullo schermo *T*. Il cono di luce costituito dai 'raggi' che sono inclinati di un angolo θ rispetto alla normale a M_2 darà luogo in *T* ad un anello di massima intensità se, con *n* intero:

$$2d\cos\theta = n\lambda$$

perché $2d\cos\theta$ è la differenza di cammino tra i 'raggi' riflessi da R (da M_3) e quelli riflessi da M_2 (figura V.2).

In generale, per i raggi inclinati di θ , vale la relazione

$$\delta = 2\pi \frac{2d\cos\theta}{\lambda} = \frac{4\pi d\cos\theta}{\lambda}$$

dove δ è la differenza di fase tra i 'raggi' riflessi da R (M_3) e quelli riflessi da M_2 . L'intensità risultante sarà proporzionale a:

$$2E_0^2 + 2E_0\cos\delta = 4E_0^2\cos^2\frac{\delta}{2}$$

se il valore massimo del campo elettrico dei fasci riflessi da R e M_2 è lo stesso ed uguale ad E_0 . La funzione

$$\cos^2\left(\frac{2\pi d\cos\theta}{\lambda}\right)$$

Giuliani Bonizzoni - Lineamenti di elettromagnetismo



Figura V.3. andamento dell'intensità che si osserverebbe con un interferometro di Michelson con luce rigorosamente monocromatica e con $d/\lambda = 1000$. Sullo schermo *T* della figura V.1 l'intensità è una funzione della distanza *l* dal centro dell'immagine. Siccome $l \propto \tan \theta \approx \theta$, questa figura riproduce l'andamento dell'intensità in funzione di *l*. Si veda il testo e la figura V.4.

è mostrata in figura V.3. Per d = 0 non c'è interferenza: in T si osserva un cerchio luminoso. Per $d \neq 0$ l'immagine osservata in T è costituita - se $d/\lambda = n/2$, dove n è un numero intero - da un cerchio centrale luminoso circondato da anelli alternativamente scuri e luminosi (figura V.4). Al variare di d le frange di interferenza si spostano: verso il centro per d crescente; verso l'esterno, per d decrescente.

Se la luce emessa dalla sorgente *S* fosse rigorosamente monocromatica, i minimi di intensità osservati in *T* sarebbero nulli, come mostrato in figura V.3. Siccome, tuttavia, la luce della sorgente non è mai rigorosamente monocromatica, Michelson utilizzò le caratteristiche delle frange di interferenza prodotte dal suo strumento per definire la *visibilità V* delle frange:

$$V = \frac{I_{max} - I_{min}}{I_{max} + I_{min}}$$

V.2 Coerenza di fasci di luce

Due fasci di luce che si sovrappongono in una regione dello spazio si dicono *coerenti* se la loro differenza di fase, in un punto qualsiasi della regione di

Capitolo V. Onde e particelle



Figura V.4. figura di interferenza osservata con un interferometro di Michelson. Figura tratta da: http://www.sciences.univnantes.fr/physique/enseignement/english/image.html

sovrapposizione, è costante nel tempo.

Le definizione di visibilità delle frange di interferenza permette di definire, in termini operativi, il *grado di coerenza* di due fasci di luce. Per esempio, i due fasci che interferiscono in *T* nell'interferometro di Michelson (figura V.1) si dicono:

- coerenti se, nelle migliori condizioni di osservazione (cioè quando le intensità dei due fasci sono identiche), danno luogo a frange di interferenza con visibilità uguale ad uno;
- incoerenti se non producono frange di interferenza;
- parzialmente coerenti se le migliori frange di interferenza da essi prodotte hanno visibilità compresa tra zero ed uno; in questo caso, la visibilità delle frange è assunta come una misura del grado di coerenza.

La *coerenza* è definita come una proprietà relazionale tra due fasci di luce; tale definizione può essere estesa anche a due sorgenti di luce. Quando due sorgenti di luce sono *coerenti* la differenza di fase tra di esse è costante e, quindi, esattamente definita; quando sono *incoerenti* la loro differenza di fase fluttua rapidamente e irregolarmente e, quindi, non ha un valore definito; quando sono *parzialmente coerenti* la luce proveniente da esse è sempre divisibile in due parti: una *coerente*, l'altra *incoerente*; le frange prodotte dalla parte coerente sono sovrapposte ad un fondo uniforme dovuto alla parte incoerente ed hanno pertanto una visibilità minore di uno.

Il concetto di *coerenza* può essere esteso anche ad un singolo fascio di luce. Si consideri il fascio di luce parallelo della figura V.5. In prima istanza,

si supponga che esso sia perfettamente monocromatico; se il fascio è intercettato da uno schermo con due piccoli fori *A* e *B*, questi diventano due sorgenti puntiformi. Ad esse si può quindi applicare il criterio di coerenza tra due sorgenti: la *larghezza di coerenza* del fascio è definita come la massima distanza tra i due fori che garantisce un grado di coerenza accettabile.



Figura V.5. per la definizione di *larghezza* e *lunghezza* di coerenza di un fascio di luce. Si veda il testo.

Se il fascio non è perfettamente monocromatico (come accade sempre) i due punti *B* e *C*, appartenenti allo stesso 'raggio' e considerati come sorgenti puntiformi, non sono perfettamente coerenti: si definisce pertanto una *lunghezza di coerenza del fascio* come la massima distanza tra due punti come *B* e *C* che garantisce un grado di coerenza accettabile.

La larghezza di coerenza specifica il grado di coerenza *spaziale* di un fascio di luce; la lunghezza di coerenza ne specifica invece il grado di coerenza *temporale*. La lunghezza di coerenza è infatti legata al *tempo di coerenza* τ dalla relazione: $l = c\tau$ (si veda a pagina 122).

V.3 Emissione della radiazione

Se un atomo emette radiazione elettromagnetica, la sua frequenza v è data, in prima approssimazione, da:²

$$v = \frac{E_i - E_f}{h}$$

dove E_i ed E_f sono, rispettivamente, l'energia dello stato elettronico iniziale e finale. L'osservazione sperimentale mostra tuttavia che l'intensità della radiazione emessa è diversa da zero su un intervallo finito di frequenze. Ciò implica che la radiazione emessa da una sorgente *macroscopica* non è mai rigorosamente monocromatica: si parla allora di *larghezza della riga*.

²Si trascura qui il rinculo dell'atomo e si suppone che l'atomo sia in quiete prima dell'emissione. Si veda la sezione V.10.4 (pagina 163).

Capitolo V. Onde e particelle

Alla larghezza di una riga contribuiscono fenomeni diversi: un fenomeno 'intrinseco' di natura quantica che dà origine alla cosiddetta *larghezza na-turale*; altri fenomeni o parametri che influiscono sulla larghezza della riga sono la pressione (pagina 127) e l'effetto Doppler (sezione V.11, pagina 168). Il fatto che l'energia dei fotoni emessi o assorbiti da un atomo (o da un nucleo) sia distribuita su un intervallo non nullo svolge, insieme al rinculo dell'atomo (pagina 166), un ruolo cruciale nel determinare la possibilità che un fotone emesso, per esempio da un atomo di idrogeno, possa essere assorbito da un altro atomo di idrogeno. Quando ciò avviene, si parla di 'risonanza': la risonanza è *possibile* solo quando, indicativamente, l'energia di rinculo è minore della larghezza della riga; in caso contrario il fotone emesso da un atomo (o da un nucleo) non può essere assorbito da un altro atomo (o nucleo) identico.

Il processo di emissione di radiazione elettromagnetica da parte di una sorgente macroscopica ha una durata limitata. Si consideri il caso ideale in cui N_0 atomi (che costituiscono la sorgente), compiano una transizione all'istante t = 0 che li collochi in uno stato elettronico eccitato E_i ; se la vita media dello stato E_i è τ , allora, dopo un intervallo di tempo t, il numero degli atomi che si trovano ancora nello stato eccitato sarà dato da:

$$N = N_0 e^{-t/\tau}$$

Per descrivere questo processo dal punto di vista ondulatorio, si può assumere τ come una ragionevole misura della durata del processo di emissione di un'onda sinusoidale di pulsazione ω da parte della sorgente. Diciamo allora che un'onda elettromagnetica sinusoidale di pulsazione ω è stata emessa nell'origine delle coordinate a partire dall'istante t = 0 sino all'istante $t = \tau$: all'istante $t = \tau$ l'onda si estende quindi, lungo la direzione x, su una lunghezza pari a $c\tau = x_1 - 0 = \Delta x$, se la propagazione avviene nel vuoto. In questo *modello*, la lunghezza l viene assunta come 'lunghezza di coerenza': l'intervallo di tempo τ si chiama *tempo di coerenza*. (Si noti che la 'lunghezza di coerenza' è stata precedentemente definita in termini puramente operativi, indipendenti dal modello teorico usato).

⇒ Se la vita media τ di uno stato eccitato di un atomo è di 10^{-8} s, ne segue che, secondo il modello adottato, la lunghezza di coerenza della radiazione emessa nel vuoto è di $c\tau \approx 3 m$. Nel caso dei laser (pagina 414), lo stato eccitato responsabile della transizione 'laser' può avere una vita media dell'ordine di 10^{-3} s: la lunghezza di coerenza della radiazione emessa è in questo caso dell'ordine di $3 \times 10^5 m$. L'onda sinusoidale considerata è quindi rappresentata, all'istante $t = \tau$ da una funzione sinusoidale su una lunghezza $\Delta x = c\tau$: al di fuori di questo intervallo l'ampiezza dell'onda è nulla. Si ha quindi:

$$f(x) = A\cos k_0 x \quad \text{per } 0 \le x \le x_1$$
$$f(x) = 0 \quad \text{per } x > x_1$$

Siccome f(x) è definita solo per valori positivi di x, è esprimibile come (si veda la IV.21, pagina 94):

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} g(k) \cos kx \, dk$$

dove g(k) è data dalla relazione:

$$g(k) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} f(x) \cos kx \, dx$$

cioè:

$$g(k) = A\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{x_1} \cos k_0 x \cos kx \, dx$$

= $\frac{A}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{x_1} \left[\cos(k_0 + k)x + \cos(k_0 - k)x \right] \, dx$
= $\frac{A}{\sqrt{2\pi}} \left[\frac{\sin(k_0 + k)x_1}{(k_0 + k)} + \frac{\sin(k_0 - k)x_1}{(k_0 - k)} \right]$

Per $k \rightarrow k_0$, il primo termine diventa trascurabile rispetto al secondo. Quindi:

$$g(k) \approx \frac{Ax_1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\sin(k_0 - k)x_1}{(k_0 - k)x_1}$$

Siccome l'energia associata all'onda di vettore d'onda *k* dipende dal quadrato della sua ampiezza, in figura V.6 è riprodotta, a meno del fattore moltiplicativo $(A^2 x_1^2/2\pi)$ la funzione $g^2(k)$. Per $k \to k_0$, $g^2(k) \to g(k_0) = (A^2 x_1^2/2\pi)$; al crescere di $|k_0 - k|$ il valore di $g^2(k)$ decresce rapidamente.

La trattazione svolta si basa su un *modello* piuttosto artificioso. I risultati ottenuti svolgono una funzione puramente illustrativa:


Figura V.6. andamento del quadrato dell'ampiezza della componente k del pacchetto d'onda in funzione di k secondo il modello discusso nel testo.

- ◇ se si *assume* che gli atomi emettano onde monocromatiche di pulsazione $ω_0 = 2πv_0$ (vettore d'onda $k_0 = 2π/λ_0$) per un intervallo di tempo finito τ, si ottiene che, in realtà, gli atomi emettono un *pacchetto d'onde* costituito dalla sovrapposizione di infinite onde la cui pulsazione ω è 'centrata' sulla frequenza $ω_0$ e la cui ampiezza decresce rapidamente al crescere di $|ω_0 - ω|$;
- ◊ un'onda rigorosamente monocromatica deve avere un'estensione spaziale infinita.

V.4 Larghezza naturale di una riga

Un modello classico più soddisfacente del processo di emissione è il seguente. Si considera una carica elettrica puntiforme in moto armonico di pulsazione ω_0 ; la carica, essendo accelerata, emette onde elettromagnetiche e perde quindi energia. Il suo moto è pertanto un moto armonico smorzato descritto dall'equazione:

$$\ddot{x} = -\omega_0^2 x - 2\gamma \dot{x}$$

dove ω_0 è la pulsazione del moto in assenza di smorzamento. Nel caso in cui lo smorzamento è debole - $\gamma \ll \omega_0$ - la soluzione diventa:

$$x = x_0 e^{-\gamma t} \cos(\omega_s t + \delta) \tag{V.1}$$

con

$$\omega_s = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$$

e con la costante di fase δ arbitraria. La (V.1) descrive un moto armonico di pulsazione ω_s la cui ampiezza decresce esponenzialmente in funzione del tempo. Si noti che la pulsazione del moto smorzato è minore di quella del moto non smorzato. Tuttavia, essendo $\gamma \ll \omega_0$, è possibile porre $\omega_s = \omega_0$. Nell'approssimazione in cui $\gamma \ll \omega_0$, l'accelerazione della particella è quindi data da:

$$a = -\omega_0^2 x \tag{V.2}$$

Sotto le condizioni del punto B) di pagina 105, il campo elettrico generato a distanze sufficientemente grandi dalla particella è proporzionale alla sua accelerazione ritardata. Tra queste condizioni, ricordiamo qui quella relativa alla velocità v della particella: $v \ll c$.

⇒ Se una particella si muove di moto armonico con pulsazione ω ($x = x_0 \sin \omega t$), la sua velocità quadratica media è data da:

$$v_{rms}^2 = \frac{K}{m} < \dot{x}^2 > = \frac{\omega^2 x_0^2}{2}$$

dove *K* è la costante di forza del moto ed *m* la massa della particella ($\omega = \sqrt{K/m}$). Pertanto:

$$v_{rms} = \frac{\omega x_0}{\sqrt{2}}$$

Per una lunghezza d'onda $\lambda = 600 nm$, $\omega = 3.14 \times 10^{15} rad s^{-1}$. Ne segue che $v_{rms} = 4.44 \times 10^5 m s^{-1} \ll c$, se si pone $x_0 = 0.2 nm$.

Pertanto, il campo elettrico dell'onda generata dalla particella in moto armonico smorzato può essere espresso dalla formula:

$$E(t) = 0 \text{ per } t < 0$$

$$E(t) = E_0 e^{-\gamma t} e^{i\omega_0 t} \text{ per } t \ge 0$$
(V.3)

La trasformata di Fourier della funzione E(t) è (si veda l'equazione IV.19):

$$\mathscr{E}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} E(t) e^{-i\omega t} dt$$

Quindi, per la (V.3):

$$\mathscr{E}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} E_0 \int_0^{+\infty} E(t) e^{-[i(\omega - \omega_0) + \gamma]} dt$$

Capitolo V. Onde e particelle

Pertanto:

$$\mathscr{E}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} E_0 \frac{\gamma - i(\omega - \omega_0)}{\gamma^2 + (\omega - \omega_0)^2}$$

Questa espressione rappresenta il valore del campo elettrico per unità di pulsazione dovuto alla componente di pulsazione ω ; il campo elettrico dovuto alle componenti comprese in un intervallo $\Delta \omega$ sufficientemente picco-lo (rispetto all'intervallo minimo in cui $\mathscr{E}(\omega)$ varia in modo significativo) è quindi dato da (equazioni IV.20 e IV.22):

$$\Delta E = \mathscr{E} \Delta \omega e^{i\omega t}$$

L'energia associata a questo campo, data dal valore medio del vettore di Poynting in un periodo, è:

$$\Delta I = \frac{E_0^2 \varepsilon_0}{4\pi} \frac{\Delta \omega^2}{\gamma^2 + (\omega - \omega_0)^2} \tag{V.4}$$



Figura V.7. andamento della lorentziana dell'equazione (V.6).

In corrispondenza di $\omega = \omega_0$ si ha il massimo di intensità:

$$\Delta I_0 = \frac{E_0^2 \varepsilon_0}{4\pi\gamma^2} \Delta \omega^2$$

Pertanto la (V.4) può essere scritta sotto la forma:

$$\Delta I = \Delta I_0 \frac{\gamma^2}{\gamma^2 + (\omega - \omega_0)^2} \tag{V.5}$$

La funzione:

$$f(\omega - \omega_0) = \frac{\gamma^2}{\gamma^2 + (\omega - \omega_0)^2} \tag{V.6}$$

detta *lorentziana*, è mostrata in figura V.7. L'intensità ΔI è uguale alla metà di ΔI_0 per

$$\omega - \omega_0 = \Delta \omega = \gamma$$

 γ è quindi la semi - larghezza della funzione $f(\omega - \omega_0)$ a metà altezza. La larghezza intera della riga a metà altezza è quindi uguale a 2γ .

Il risultato espresso dalla (V.5) coincide con quello della fisica quantica. Alla luce della fisica quantica, i presupposti del modello classico sono errati perché:

- si suppone che l'emissione di radiazione elettromagnetica sia dovuta al moto armonico di particelle elettricamente cariche;
- ◊ si suppone che l'emissione di energia sia un processo continuo.

La ragione per cui, ciò non ostante, il modello classico produce lo stesso risultato della fisica quantica risiede nel fatto che esso prevede che la carica oscillante perda energia secondo una legge esponenziale del tipo $e^{-2\gamma t}$; questa legge, se si pone $\tau = 1/2\gamma$, è la legge di decadimento quantico di un numero statisticamente significativo di atomi eccitati la cui vita media sia τ .

La potenza irraggiata da una carica in moto è proporzionale al quadrato della sua accelerazione (equazione IV.49, pagina 107). Quindi, nel nostro caso, per la (V.2) e la (V.1), essa è proporzionale a $e^{-2\gamma t}$.

La forma delle righe di emissione osservate sperimentalmente non è, in generale, una lorentziana. Ciò è dovuto al fatto che ci sono altre due cause di allargamento delle righe: i processi d'urto e l'effetto Doppler. Se la sorgente luminosa è costituita da un gas o un vapore, le sue molecole (o i suoi atomi) subiscono degli urti: se si suppone che una molecola eccitata emetta un fotone in seguito ad un urto, la legge che descrive la perdita di energia da parte delle molecole eccitate è ancora del tipo e^{-t/τ_c} , dove τ_c indica l'intervallo di tempo medio tra due urti consecutivi. Ne consegue che l'allargamento della riga dovuto alle collisioni è ancora di tipo lorentziano: siccome, tuttavia, τ_c è, in generale, più piccolo di τ , l'allargamento dovuto alle collisioni predomina rispetto a quello 'intrinseco', responsabile della larghezza naturale della riga.

⇒ Il libero cammino medio l delle molecole di un gas è espresso dalla relazione:

$$< l > = \frac{1}{\sqrt{2\pi}d^2n}$$

dove d è il diametro delle molecole e n la loro concentrazione. D'altra parte, la velocità media di una molecola è data da:

$$< v >= \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}}$$

dove k è la costante di Boltzmann, T la temperatura assoluta e m la massa delle molecole. Ricordando che, quando V = 1, per la legge dei gas perfetti:

$$n = \frac{p}{kT}$$

dove *p* è la pressione, si ottiene per il vapore di mercurio (peso atomico: 200.59; diametro atomico: $3 \times 10^{-10} m$) a *T* = 300 *K* e ad una pressione *p* = 0.1 *atm*:

$$n = 2.45 \times 10^{24} m^{-3}$$

$$< l > = 1.02 \times 10^{-6} m$$

$$< v > = 177.95 m s^{-1}$$

$$\tau_c = \frac{< l >}{< v >} = 5.74 \times 10^{-9} s^{-1}$$

L'allargamento della riga dovuto all'effetto Doppler sarà discusso nella sezione V.11 a pagina 168.

V.5 Emissione e assorbimento della radiazione

Si consideri un insieme statisticamente significativo di atomi (o molecole) contenuti in una cavità isoterma; la cavità conterrà anche radiazione elettromagnetica: sia u(v, T) la sua densità di energia per frequenza unitaria corrispondente alla frequenza v e alla temperatura T. Si noti che le dimensioni di u(v, t) sono [*energia* × t × l^{-3}]. Siano infine E_n ed E_m due stati elettronici degli atomi con $E_n > E_m$. Si suppone che la cavità, gli atomi e la radiazione siano all'equilibrio termico. Allora, per la statistica di Boltzmann (pagina 394):

$$N_n = Ce^{-E_n/kT} \quad N_m = Ce^{-E_m/kT}$$

dove N_n e N_m rappresentano il numero di atomi nello stato E_n ed E_m , rispettivamente; C è una costante. All'equilibrio termico, deve valere l'equazione:

$$N_n[A_{nm} + u(v, T)B_{nm}] = N_m u(v, T)B_{mn}$$
(V.7)

dove A_{nm} è la probabilità di una transizione *spontanea* $n \to m$; B_{nm} la probabilità di una transizione *stimolata* $n \to m$ e B_{mn} la probabilità di una transizione stimolata $m \to n$.³ Se si assume che u(v, T) tende all'infinito al tendere all'infinito di T, segue dalla (V.7) che $B_{nm} = B_{mn}$. Infatti, se $T \to \infty$, $N_n = N_m$ e, dalla (V.7):

$$A_{nm} = u(v, T)(B_{mn} - B_{nm})$$

Affinché A_{nm} rimanga finita quando $T \rightarrow \infty$ deve essere $B_{nm} = B_{mn}$. Dalla (V.7) si ottiene allora:

$$u(v, T) = \frac{A_{nm}}{B_{nm}} \frac{1}{e^{(E_n - E_m)/kT} - 1}$$

La u(v, T) altro non è che la densità di energia per unità di frequenza della radiazione di corpo nero la cui espressione è (pagina 171):

$$u(v,T) = \frac{8\pi v^2}{c^3} \frac{hv}{e^{hv/kT} - 1}$$

Ne segue che:

$$\frac{A_{nm}}{B_{nm}} = \frac{8\pi h \nu^3}{c^3}$$

e che:

$$E_n - E_m = hv$$

La prima di queste relazioni mostra che il rapporto A_{nm}/B_{nm} non dipende dal tipo di atomo; essa può essere considerata una variante della legge di Kirchhoff (pagina 169); la seconda relazione altro non è che la condizione di Bohr per il passaggio di un elettrone da uno stato quantico ad un altro (pagina 223).

³Questa trattazione è dovuta ad Einstein (1917). Si noti che Einstein non usa l'aggettivo 'spontanea' per A_{nm} , bensì la locuzione 'senza eccitazione mediante cause esterne'. Einstein, inoltre, utilizza questo procedimento per ricavare un'espressione quasi completa per la densità di energia della radiazione contenuta nella cavità isoterma all'equilibrio (radiazione di corpo nero, pagina 169). Qui, daremo per nota questa espressione e ricaveremo da essa il rapporto A_{nm}/B_{nm} . Una traduzione italiana dell'articolo di Einstein si trova all'indirizzo: http://matsci.unipv.it/persons/antoci/mq/Einstein17a.pdf

⇒ Per la transizione a 706.722 *nm* dell'argon (regione rossa dello spettro visibile), il rapporto A_{nm}/B_{nm} vale $4.72 \times 10^{-14} J s m^{-3}$. Per la transizione a $24 \times 10^9 Hz$ dell'ammoniaca, questo rapporto si riduce a $8.54 \times 10^{-27} J s m^{-3}$. Questa proprietà della molecola dell'ammoniaca è usata nei maser (pagina 414).

V.6 Velocità di fase, velocità di gruppo

Si consideri la sovrapposizione di due onde piane monocromatiche (di estensione infinita) aventi vettori d'onda \vec{k} , diretti lungo il verso positivo dell'asse x, e pulsazioni ω leggermente diverse:

$$A(x, t) = \cos[(k + \Delta k)x - (\omega + \Delta \omega)t] + \cos[(k - \Delta k)x - (\omega - \Delta \omega)t]$$

Questa equazione può essere scritta nella forma:

$$A(x,t) = 2\cos(kx - \omega t)\cos(\Delta kx - \Delta \omega t)$$
(V.8)

La (V.8) può essere letta nel modo seguente: l'onda con vettore d'onda k, pulsazione ω e velocità di propagazione ω/k ha un'ampiezza A' modulata:

$$A' = 2\cos(\Delta kx - \Delta\omega t)$$

L'ampiezza A' è anch'essa un'onda che si propaga con velocità

$$V_{A'} = \frac{\Delta\omega}{\Delta k}$$

La velocità ω/k delle due onde componenti si chiama *velocità di fase*; la velocità di propagazione dell'ampiezza A', data da $\Delta \omega/\Delta k$, si chiama *velocità di gruppo*. Per le onde elettromagnetiche nel vuoto vale la relazione

$$\omega = ck$$

Quindi, nel vuoto, la velocità di gruppo coincide con la velocità di fase.

Si consideri ora il caso di un pacchetto d'onde costituito dalla sovrapposizione di onde piane la cui ampiezza $\varphi(k)$ è sensibilmente diversa da zero solo in un piccolo intervallo centrato intorno a k_0 :

$$A(x,t) = \int \varphi(k) e^{i(kx - \omega t)} dk$$
 (V.9)

Giuliani Bonizzoni - Lineamenti di elettromagnetismo



Figura V.8. grafico della funzione A(x) (equazione V.8) per t = 0, k = 6 ($\lambda = 0.95 m$), $\Delta k = 0.3$. L'ampiezza della A(x) appare modulata dalla funzione $2\cos(\Delta k x)$ (curva tratteggiata) di periodo spaziale X = 20.94 m.

Lo sviluppo in serie di Taylor al primo ordine di $\omega(k)$ intorno a k_0 è dato da:

$$\omega(k) \approx \omega(k_0) + (k - k_0) \left(\frac{d\omega}{dk}\right)_{k=k}$$

Sostituendo questa espressione nella (V.9), si ottiene:

$$A(x, t) \approx e^{-i[\omega(k_0) - k_0 \omega'(k_0)]t} A(x - \omega'(k_0)t, 0)$$

dove $\omega'(k_0) = (d\omega/dk)_{k=k_0}$. Quest'ultima equazione mostra che, nell'approssimazione adottata, il pacchetto d'onde si propaga, mantenendo il profilo iniziale A(x, 0), con velocità di gruppo

$$V_g = \left(\frac{d\omega}{dk}\right)_{k=k_0}$$

Nei mezzi materiali, la velocità di propagazione delle singole onde monocromatiche dipende dall'indice di rifrazione *n* secondo la relazione:

$$V_f = \frac{\omega}{k} = \frac{c}{n}$$

per cui la velocità di gruppo risulta data da:

$$V_g = V_f(k_0) \left(1 - \frac{k}{n} \frac{dn}{dk} \right)_{k=k_0}$$

o, equivalentemente, da:

$$V_g = \frac{c}{[n + \omega(dn/d\omega)]_{\omega = \omega_0}}$$

dove $\omega_0 = \omega(k_0)$. Si noti che, se $dn/d\omega > 0$, si ha $V_g < c/n < c$; in questo caso si parla di *dispersione normale*; quando $dn/d\omega < 0$, si parla di *dispersione anomala* (si veda a pagina 256): in questo caso la velocità di gruppo può risultare maggiore di *c* e quindi non rappresenta la velocità di propagazione dell'energia.

Si noti che, sulla base della (V.9), l'approssimazione adottata vale per la propagazione del pacchetto d'onde in intervalli di tempo sufficientemente piccoli da poter trascurare, come è stato fatto, i termini di ordine superiore al primo nello sviluppo in serie di $\omega(k)$. Per intervalli di tempo più grandi, i termini trascurati modificano il profilo del pacchetto d'onde e la velocità di gruppo sopra definita perde di significato: il concetto di velocità di gruppo deve essere usato con cautela. D'ora innanzi, quando non diversamente specificato, la velocità di propagazione delle onde elettromagnetiche sarà sempre la loro velocità di fase.

V.7 Principio di Huyghens

Nello studio della propagazione delle onde, Huyghens utilizzò la seguente ipotesi: si consideri all'istante t_0 un fronte d'onda; tutti i suoi punti diventano origine di onde secondarie che, in un mezzo omogeneo ed isotropo, si propagano sotto forma di superficî sferiche; all'istante generico t il nuovo fronte d'onda è costituito dall'inviluppo delle onde secondarie. Questa ipotesi, oggi nota sotto il nome di *principio di Huyghens*, ha ricevuto una formulazione matematica da parte di Kirchhoff: riportiamo qui i risultati relativi al caso elettromagnetico.

Sia *S* una superficie che racchiude la sorgente puntiforme *O* di un campo elettromagnetico di pulsazione ω e sia *dS* una sua area elementare (figura V.9). In un punto *Q* di *dS* una generica componente del campo (componente cartesiana del campo elettrico o magnetico, potenziale scalare, componente cartesiana del potenziale vettore) avrà un'espressione del tipo:

$$\xi(Q,t) = R_0 \frac{\xi_0}{r_Q} \cos(kr_Q - \omega t) = R_0 \frac{\xi_0}{r_Q} \cos\left[\omega\left(\frac{r_Q}{c} - t\right)\right] \tag{V.10}$$

dove ξ_0 è l'ampiezza della componente alla distanza R_0 dalla sorgente. In P, la componente avrà un'espressione del tipo:

$$\xi(P,t) = R_0 \frac{\xi_0}{r} \cos(kr - \omega t) = R_0 \frac{\xi_0}{r} \cos\left[\omega \left(\frac{r}{c} - t\right)\right]$$



Figura V.9. *O* è una sorgente puntiforme e *dS* un'area elementare di una superficie chiusa *S* che racchiude *O*; \hat{n} è il versore normale a *dS*; *P* giace all'esterno di *S*; gli angoli indicati sono denotati con $\theta_O \in \theta_P$ nel testo.

Se $r_Q \gg \lambda$ e $r_P \gg \lambda$, questa componente, può essere espressa dalla formula:

$$\xi(P,t) \approx \frac{R_0}{\lambda} \int_S \frac{\xi_0}{r_Q r_P} \cos\left[\omega\left(\frac{r_Q}{c} + \frac{r_P}{c}\right) - \omega\left(t + \frac{T}{4}\right)\right] \cdot \frac{1}{2} (\cos\theta_Q + \cos\theta_P) \, dS \qquad (V.11)$$

L'ampiezza data dalla (V.11) deve coincidere con quella della (V.10) nel caso in cui la propagazione dell'onda sia libera (assenza di ostacoli). Il termine $K = (1/2)(\cos\theta_Q + \cos\theta_P)$ si chiama fattore di obliquità. La (V.11) mostra che l'ampiezza in *P* è esprimibile come sovrapposizione di onde sferiche, provenienti da sorgenti poste sulla superficie *S*, la cui ampiezza dipende dal fattore di obliquità *K* ed è inversamente proporzionale alla lunghezza d'onda. Il 'principio di Huyghens' è quindi un caso particolare del teorema di Kirchhoff: deriva da questo quando la superficie *S* è una superficie d'onda, cioè una sfera al cui centro sta la sorgente. In questo caso, $\cos\theta_Q = 1$, e il fattore di obliquità diventa $K = (1/2)(1 + \cos\theta_P)$.

Questi risultati sono usati nella descrizione dei fenomeni di diffrazione e interferenza: fenomeni originati dal fatto che un ostacolo intercetta parte del fronte d'onda in arrivo. Il teorema di Kirchhoff permette di calcolare l'ampiezza dell'onda in un punto posto oltre l'ostacolo, mediante l'uso della (V.11): l'integrale è effettuato sulla parte del fronte d'onda che non è intercettato dall'ostacolo.

V.8 Fenomeni di interferenza

Abbiamo già studiato un fenomeno di interferenza nella sezione V.1 (pagina 116) dedicata all'interferometro di Michelson.

Capitolo V. Onde e particelle

I fenomeni di interferenza sono dovuti alla sovrapposizione di perturbazioni elettromagnetiche: affinché possano essere osservati, occorre che la differenza di fase tra le onde sovrapponentesi sia costante nel tempo. Tratteremo il caso di onde polarizzate linearmente lungo una medesima direzione: polarizzazioni non lineari possono essere infatti descritte come opportune combinazioni di polarizzazioni lineari (capitolo X, pagina 291). Da un punto di vista sperimentale, non è necessario usare onde polarizzate o dotate di elevati gradi di coerenza, purché la sorgente fisica della luce sia unica e la distanza sorgente - luogo di osservazione sia inferiore alla lunghezza di coerenza del fascio di luce. L'uso di sorgenti laser (pagina 414) facilita l'osservazione dei fenomeni interferenziali.

V.8.1 Diffrazione attraverso una fenditura

Un fascio di luce monocromatico e (quasi) parallelo investe uno schermo con una fenditura di lunghezza l e larghezza b, con $b \ll l$ (figura V.10). La luce che attraversa la fenditura cade su uno schermo posto ad una distanza L dal primo, con $L \gg b$. I punti della superficie della fenditura diventano,



Figura V.10. diffrazione attraverso una fenditura di larghezza *b* e lunghezza *l* ($b \ll l$). Il lato maggiore della fenditura *l* è perpendicolare al piano del foglio. Il fascio di luce incidente è considerato, con buona approssimazione, parallelo. Lo schermo *S*, che intercetta la luce che attraversa la fenditura, è posto ad una distanza $L \gg b$: si assume pertanto che, fissato il punto *R* sullo schermo *S*, l'angolo θ sia lo stesso per qualunque *x*. Questa configurazione sperimentale si dice di Fraunhofer.

per il teorema di Kirchhoff, sorgenti di onde sferiche che, propagandosi oltre la fenditura, *interferiscono* dando luogo, sullo schermo *S*, a frange di interfe-

renza. Questo fenomeno viene classificato come un fenomeno di *diffrazione*. Come si vedrà, l'aspetto più significativo della diffrazione consiste nel fatto che il fascio incidente parallelo, dopo la fenditura, acquisisce un'apertura angolare diversa da zero: tale fenomeno è tanto più accentuato quanto più il rapporto b/λ tra la larghezza della fenditura *b* e la lunghezza d'onda λ della luce è piccolo. Per questa ragione, avendo supposto che la fenditura abbia il lato *l* molto maggiore del lato *b*, il fenomeno diffrattivo dovuto a quest'ultimo è l'unico significativo.

Siccome abbiamo supposto che:

- ♦ il fascio di luce incidente sulla fenditura sia (quasi) parallelo, l'area della fenditura corrisponde ad una parte del fronte d'onda di un'onda (quasi) piana: possiamo quindi assumere che nella (V.11) r_Q sia costante;
- ◇ lo schermo sia sufficientemente lontano dalla fenditura; essendo interessati a quanto avviene nei dintorni del punto *O*, possiamo porre *r*_P = *L* nel fattore ξ₀/*r*_Q*r*_P che compare nella (V.11) e supporre che il termine di obliquità *K* sia, con buona approssimazione, uguale a 1 (cosθ_Q = 1 e cosθ_P ≈ 1 per tutti i punti della fenditura).

Pertanto, sulla base della (V.11), l'ampiezza risultante del campo elettrico in un punto R dello schermo, individuato dall'angolo θ , e posto in prossimità dell'asse di simmetria del sistema, sarà data da:

$$E = a \int_0^b \cos(kr_P - \omega t + \Delta) \, dx$$

dove la costante *a* ha le dimensioni di un campo elettrico divise per quelle di una lunghezza e Δ è una costante adimensionale. Eliminando dall'equazione precedente la fase comune alle onde sferiche provenienti dalle varie zone della fenditura, si ottiene:

$$E = a \int_0^b \cos(kx\sin\theta - \omega t) \, dx \tag{V.12}$$

Si noti che, in questo integrale, gli angoli θ sono positivi per i punti dello schermo *S* posti al di sotto dell'asse di simmetria del sistema e negativi per i punti al di sopra dell'asse. Se si pone $y = kx\sin\theta$, allora $dx = dy/k\sin\theta$; ponendo inoltre $\delta = kb\sin\theta$ si ottiene, sviluppando $\cos(kx\sin\theta - \omega t)$:

$$E = \frac{a}{k\sin\theta} \int_0^\delta (\cos y \cos \omega t + \sin y \sin \omega t) \, dy$$



Figura V.11. andamento della funzione $\sin^2 \alpha(\theta) / \alpha^2(\theta)$ e quindi dell'intensità della luce diffratta, secondo la (V.14), da una fenditura rettangolare di lati *b* ed *l*, con *b* \ll *l*. L'angolo θ è mostrato in figura V.10. La curva continua corrisponde al valore 100 del rapporto *b*/ λ , tra la larghezza *b* della fenditura e la lunghezza d'onda λ della luce; quella tratteggiata, al valore 10 del medesimo rapporto.

Ponendo

$$A = \int_0^\delta \cos y \, dy = \sin \delta$$

$$B = \int_0^\delta \sin y \, dy = 1 - \cos \delta$$
(V.13)

si ottiene infine:

$$E = a\frac{b}{\delta}(A\cos\omega t + B\sin\omega t)$$

L'intensità media I in un punto generico dello schermo è data da:

$$I = \sqrt{\varepsilon_0/\mu_0} < E^2 >$$

Cioè:

cioè alla media temporale, effettuata su un periodo, del modulo del vettore di Poynting. Pertanto:

$$I = \sqrt{\varepsilon_0/\mu_0} \frac{a^2}{2} \frac{b^2}{\delta^2} (A^2 + B^2)$$

Infine, per le (V.13) e ponendo $\alpha = \delta/2 = (1/2)kb\sin\theta = (b/\lambda)\pi\sin\theta$:

$$I = \sqrt{\varepsilon_0/\mu_0} \frac{a^2 b^2}{2} \frac{\sin^2 \alpha}{\alpha^2} = I_{max} \frac{\sin^2 \alpha}{\alpha^2}$$
(V.14)

L'andamento dell'intensità della luce sullo schermo *S* è mostrato in figura V.11, dove si è assunta uguale ad 1 l'intensità massima: la curva continua corrisponde al valore 100 del rapporto b/λ tra la larghezza della fenditura e la lunghezza d'onda della luce; quella tratteggiata, al valore 10 del medesimo rapporto. Si noti come, diminuendo la larghezza della fenditura, si allarghi l'immagine centrale sullo schermo *S*. Secondo la (V.14) il primo minimo nullo dell'intensità diffratta si ha per sin $\theta \approx \theta = \lambda/b$ (si veda anche la curva tratteggiata della figura V.11).



Figura V.12. diffrazione attraverso la fenditura della figura V.10 con l'onda piana incidente inclinata.

Se l'onda incidente sulla fenditura ha un angolo di incidenza i, come mostrato in figura V.12, l'equazione (V.12) diventa:

$$E = a \int_0^b \cos[kx(\sin\theta + \sin i) - \omega t] \, dx$$

La formula finale è ancora la (V.14), con

$$\alpha = \frac{b}{\lambda}\pi(\sin\theta + \sin i)$$



Figura V.13. figure di diffrazione nel caso di angoli di incidenza diversi da zero (figura V.12). La curva continua corrisponde ad un angolo di incidenza *i* di due gradi; quella tratteggiata corrisponde all'angolo di incidenza -i.

e la figura di diffrazione è quella mostrata in figura V.13.

Si osservi che due onde piane aventi un angolo di incidenza diverso si possono considerare come provenienti da due punti di un oggetto posto a distanza sufficientemente grande dalla fenditura. Se i_1 e i_2 sono i due angoli di incidenza, per ipotesi positivi, il massimo della figura di diffrazione si avrà per $\theta_1 = -i_1$ e $\theta_2 = -i_2$, rispettivamente. Assumendo che le due figure di diffrazione sono distinte se, almeno, il massimo dell'una coincide con il primo minimo dell'altra, e ricordando che il primo minimo si ha per $\theta \approx \lambda/b$, si conclude che la fenditura permette di separare l'immagine di due onde piane incidenti tali che $|i_1 - i_2| \approx \lambda/b$. Il rapporto λ/b è, per definizione, il potere separatore della fenditura. Questa proprietà delle fenditure è importante nella progettazione degli apparati ottici in cui la 'fenditura' è rappresentata dal diaframma o, in assenza di questo, dall'obiettivo.

Si perviene allo stesso risultato rappresentato dalla (V.14) mediante un procedimento di tipo geometrico (figura V.14). Nel punto R dello schermo, si sovrappongono i campi elettrici provenienti dalle strisce infinitesime di ampiezza dx della fenditura; i campi provenienti da due strisce contigue hanno una differenza di fase pari a:

$$2\pi\sin\theta\frac{dx}{\lambda}$$



Figura V.14. diffrazione attraverso una fenditura. L'ampiezza risultante del campo elettrico in un punto *R* vicino al punto *O* dello schermo (figura V.10) è rappresentata dal fasore \vec{E} ; l'arco *OP* rappresenta invece l'ampiezza risultante nel punto *O*. L'angolo $\delta = (2\pi b/\lambda) \sin \theta$ è la differenza di fase tra i campi provenienti dalle due strisce infinitesime estreme della fenditura (la cui distanza è *b*).

Rappresentando ogni contributo infinitesimo al campo in R con un fasore, il campo risultante in R è rappresentato dalla corda \vec{E} della figura V.14 e il modulo E_{max} del campo elettrico nel punto O dello schermo S giacente sull'asse di simmetria del sistema (figura V.10) è dato dalla lunghezza dell'arco OP. Quindi:

$$E = 2\rho \sin \frac{\delta}{2}$$
$$E_{max} = \rho \delta$$

dove ρ è il raggio dell'arco *OP* e $\delta = 2(\pi b \sin \theta)/\lambda$ è la differenza di fase massima tra i due contributi infinitesimi provenienti dalle strisce estreme della fenditura. Ponendo $\alpha = \delta/2$ e passando alle intensità si ottiene di nuovo la (V.14):

$$I = I_{max} \frac{\sin^2 \alpha}{\alpha^2}$$

Se la fenditura rettangolare ha entrambi i lati (b, l) di lunghezza opportuna e paragonabile, questa equazione deve essere sostituita dalla:

$$I(\theta, \gamma) = I_{max} \frac{\sin^2 \alpha}{\alpha^2} \frac{\sin^2 \beta}{\beta^2}$$

dove $\beta = (l/\lambda)\pi sin\gamma$.

V.8.2 Interferenza con due fenditure

Un fascio di luce proveniente da una sorgente è diviso, mediante certi metodi ottici, in due parti e queste, dopo aver percorso cammini diversi, sono ricongiunte e cadono sopra uno schermo. Se uno dei due fasci è intercettato, l'altro cade sullo schermo e lo illumina; ma se entrambi i fasci passano, lo schermo diventa scuro in certi posti mostrando così che due porzioni di luce si sono distrutte a vicenda.

James Clerk Maxwell

Si consideri la disposizione sperimentale rappresentata in figura V.15.



Figura V.15. interferenza con due fenditure. Ogni fenditura è rettangolare di lati *b* ed *l*, con *b* \ll *l*; il lato lungo *l* delle due fenditure è perpendicolare al piano della figura. I 'raggi' uscenti dalle fenditure sono disegnati paralleli perché lo schermo, non disegnato in figura, si suppone sufficientemente lontano. Analogamente, i 'raggi' entranti nelle fenditure sono disegnati paralleli perché la sorgente che li genera è sufficientemente lontana. Questa disposizione sperimentale si chiama di Fraunhofer.

Si hanno ora due fenditure parallele, di lati *b* ed *l*, con *b* \ll *l*, poste ad una distanza *d*. In un punto *R* dello schermo non molto lontano dall'asse di simmetria del sistema, il campo elettrico risultante è ora dovuto al contributo delle due fenditure. Ricorrendo di nuovo alla composizione geometrica, si osservi che, date due strisce corrispondenti (distanti *d*) appartenenti alle due fenditure, la differenza di fase tra i campi elettrici in *R* provenienti da esse, è pari a

$$\gamma = 2\pi \frac{d\sin\theta}{\lambda} \tag{V.15}$$

I campi elettrici (\vec{E}_1, \vec{E}_2) dovuti alle due fenditure sono allora rappresentati da due fasori sfasati di γ (figura V.16); il modulo del campo elettrico risultante in *R* è allora dato da:



Figura V.16. calcolo dell'ampiezza del campo elettrico nel caso delle due fenditure. E_1 ed E_2 sono i due fasori (di modulo uguale in questa figura) che rappresentano il campo elettrico dovuto alla fenditura 1 e alla fenditura 2: i due fasori sono sfasati di un angolo $\gamma = 2\pi (d/\lambda) \sin \theta$, dove *d* è la distanza tra le due fenditure e λ la lunghezza d'onda della luce.

Se $E_1 = E_2$ e ricordando che $(1 + \cos \gamma = 2\cos^2 \gamma/2)$, si ottiene:

$$E = 2E_1 \cos \frac{\gamma}{2}$$

Infine, indicando con I_1 l'intensità dovuta ad una sola fenditura, data, secondo la (V.14), da:

$$I_1 = I_0 \left[\frac{\sin(\pi b \sin \theta / \lambda)}{\pi b \sin \theta / \lambda} \right]^2$$

si ottiene, per l'intensità risultante:

$$I = 4I_0 \left[\frac{\sin(\pi b \sin\theta/\lambda)}{\pi b \sin\theta/\lambda} \right]^2 \cos^2 \frac{\pi d \sin\theta}{\lambda}$$
(V.16)

L'intensità descritta dalla (V.16) è rappresentata in figura V.17, dove si è assunta uguale ad 1 l'intensità I_0 . La curva piena rappresenta l'intensità osservata; la curva tratteggiata il termine diffrattivo in (sin^2) : sarebbe la curva osservata con una sola fenditura la cui intensità fosse quadrupla di quella considerata.

Capitolo V. Onde e particelle



Figura V.17. figura di interferenza prodotta da due fenditure secondo la (V.16), in cui si è posto $I_0 = 1$. I valori dei parametri usati sono: $b/\lambda = 100$; d/b = 8. La curva piena rappresenta l'intensità osservata; la curva tratteggiata il termine diffrattivo in (*sin*²): sarebbe la curva osservata con una sola fenditura la cui intensità fosse quadrupla di quella considerata. Si veda la figura V.16 e il testo.

- ◇ Se le porzioni d'onda provenienti dalle due fenditure sono polarizzate linearmente lungo due direzioni perpendicolari, *non* si osservano frange di interferenza. Indicato con *E* il modulo istantaneo del campo elettrico risultante, con *E_x* e *E_y* i valori istantanei del campo elettrico lungo le due direzioni perpendicolari, vale la relazione: < $E^2 >= E_0^2$, dove la media è effettuata su un periodo e *E*₀ indica l'ampiezza massima del campo lungo *x* e lungo *y*. Questa relazione vale per qualunque relazione di fase tra le due componenti perpendicolari. Ne segue che sullo schermo di rivelazione l'intensità luminosa è uniforme. La prima osservazione sperimentale di questo fenomeno è dovuta ad Arago e Fresnel (pagina 481).
- Le frange di interferenza non appaiono anche nel caso in cui le due fenditure sono aperte una alla volta (per un intervallo di tempo uguale a quello usato con le due fenditure aperte contemporaneamente). In questo caso, ogni fenditura dà origine ad una figura di diffrazione centrata sul proprio asse e l'intensità osservata sullo schermo è semplicemente la somma delle intensità dovuta alle singole fenditure.

V.8.3 Interferenza con N fenditure

Se il numero delle fenditure è N, il campo elettrico risultante in un punto R dello schermo vicino al punto O (che giace sull'asse di simmetria del sistema) può essere facilmente calcolato ricorrendo di nuovo alla composizione geometrica (figura V.18).



Figura V.18. calcolo dell'intensità dovuta a *N* fenditure. $\phi = 2\pi (d/\lambda) \sin \theta$ è la differenza di fase tra i campi elettrici in un punto *R* dello schermo dovuti a due fenditure contigue distanti *d*.

Se E_1 è il modulo del campo elettrico dovuto ad una fenditura, si ha:

$$E_1 = 2\rho \sin \frac{\phi}{2}$$
$$E_T = 2\rho \sin \frac{N\phi}{2}$$

Pertanto:

$$E_T = E_1 \frac{\sin(N\phi/2)}{\sin(\phi/2)}$$

E, passando alle intensità:

$$I_T = I_1 \frac{\sin^2(N\phi/2)}{\sin^2(\phi/2)}$$

Infine, ricordando la (V.14):

$$I = I_0 \left[\frac{\sin^2(\pi b \sin\theta/\lambda)}{(\pi b \sin\theta/\lambda)^2} \right] \frac{\sin^2(N\pi d \sin\theta/\lambda)}{\sin^2(\pi d \sin\theta/\lambda)}$$
(V.17)



Figura V.19. andamento della funzione $I/(N^2 I_0)$ (equazione V.17). La curva continua corrisponde a 9 fenditure; quella punteggiata a 3 fenditure. $b/\lambda = 2$ e $d/\lambda = 10$; b è la larghezza di ogni fenditura; d è la distanza tra due fenditure; λ la lunghezza d'onda della luce. I valori dei massimi principali (si veda il testo), modulati dal secondo termine della (V.17), sono: 1,0.88,0.57,0.25,0.05. Per sin $\theta = 0.5$ l'intensità è nulla perché si annulla il secondo termine della (V.17). La curva tratteggiata rappresenta il secondo termine della (V.17).

dove *b* è la larghezza di ogni fenditura e I_0 l'intensità massima prodotta da una fenditura. In figura V.19 è mostrata la funzione $I/(N^2 I_0)$ nel caso di N = 9 (curva piena) e N = 3 (curva punteggiata). I massimi corrispondenti a sin $\theta = 0.1, 0.2, 0.3, 0.4$ si dicono massimi principali e derivano dalla condizione che rende nullo il denominatore del terzo termine della (V.17): sin $\theta = m(\lambda/d)$ con *m* intero; in corrispondenza di questi valori, il terzo termine della (V.17) vale N^2 . Tuttavia, questo valore è modulato dal secondo termine della (V.17) rappresentato in figura V.19 dalla curva tratteggiata. Si noti come l'incremento del numero *N* delle fenditure renda i massimi principali più alti e stretti.

Se il sistema di *N* fenditure è investito da luce non monocromatica funziona da elemento *dispersivo*, nel senso che separa spazialmente le varie lunghezze d'onda. Infatti:

- 1. per m = 0 il massimo principale si ha in corrispondenza di $\theta = 0$ per qualunque lunghezza d'onda;
- 2. per $m \neq 0$ la separazione angolare tra due massimi principali corri-

spondenti a lunghezze d'onda $\lambda \in \lambda + \Delta \lambda$ è data da

$$\Delta \theta = \frac{m}{d} \Delta \lambda \tag{V.18}$$

per angoli θ sufficientemente piccoli. Si noti che questa condizione vale solo per *m* sufficientemente piccoli. D'altra parte, aumentando *m* diminuisce l'intensità dei massimi principali: ciò sconsiglia l'uso di *m* troppo grandi;

3. si assume che il sistema di *N* fenditure possa distinguere tra due lunghezze d'onda separate da $\Delta\lambda$ se il massimo principale di una coincide (almeno) con il primo minimo dell'altra (criterio di Rayleigh). Il primo minimo si ha per un valore di

$$\sin\theta \approx \theta = \frac{\lambda}{Nd} \tag{V.19}$$

Quindi, uguagliando i secondi membri della (V.18) e della (V.19), si ottiene:

$$R = \frac{\lambda}{\Delta\lambda} = mN \tag{V.20}$$

dove R è, per definizione, il potere separatore del sistema di N fenditure.

V.8.4 Reticoli di diffrazione

Nel frattempo Fraunhofer (1821) trovò un altro dispositivo in grado di analizzare le componenti della luce: il reticolo di diffrazione che, ora, ha praticamente soppiantato il prisma. Il reticolo originale di Fraunhofer consisteva in un certo numero di fili equidistanti; successivamente, li costruiva tracciando linee sottili su una lastra di vetro coperta da una foglia d'oro e rimuovendo alternativamente le strisce. Ora si costruiscono tracciando con una punta di diamante linee sottili ed equidistanti su un vetro o una superficie metallica...

Albert Michelson

Un reticolo di diffrazione può essere costruire nel modo seguente. Su una superficie di vetro si deposita, sotto vuoto, uno strato metallico che rende la superficie riflettente. Lo strato riflettente viene poi asportato lungo N-1 strisce sottili e parallele in modo da ottenere una successione regolare di N

Capitolo V. Onde e particelle

strisce riflettenti e di N strisce non riflettenti. Le strisce riflettenti svolgono la funzione delle fenditure nel caso di un sistema di N fenditure discusso precedentemente: la distanza d tra due di esse viene chiamata *passo* del reticolo.



Figura V.20. intensità prodotta in uno dei massimi principali da un reticolo in funzione della differenza di fase ϕ tra due onde provenienti da due 'strisce' riflettenti contigue. Si è posto $I_0 = 1$, dove I_0 è l'intensità prodotta da una singola 'fenditura'.

La trattazione delle proprietà ottiche di un reticolo si basa su quella di un sistema di *N* fenditure, con *N* molto grande, studiato nella sezione precedente. Tuttavia, la differenza di fase ϕ tra due onde provenienti da due strisce omologhe di due 'fenditure' adiacenti non è, in generale, data dalla (V.15): essa dipende dalla struttura del reticolo e dalla configurazione geometrica del sistema ottico in cui il reticolo è inserito. Ne segue che l'espressione:

$$I = I_0 \frac{\sin^2(N\phi/2)}{\sin^2(\phi/2)}$$
(V.21)

rappresenta (figura V.20) l'andamento in funzione di ϕ dell'intensità di uno dei massimi principali prodotti dal reticolo, descritti dalla (V.17) (nel caso in cui $\phi = 2\pi (d/\lambda) \sin \theta$) e mostrati nella figura V.19.

Come descritto nel passo di Michelson citato all'inizio, i reticoli sono usati negli spettroscopi come dispositivi di dispersione della luce. Ad esclusione

del primo massimo principale, i massimi principali si hanno per posizioni angolari diverse a seconda della lunghezza d'onda della luce. Pertanto, per m > 0, si ha uno spettro di dispersione per ogni valore di m: il valore di m(che è un numero intero) stabilisce l'*ordine* dello spettro. Come mostrato dalla (V.20), il loro potere separatore aumenta all'aumentare dell'ordine mdello spettro. Tuttavia, all'aumentare di m, l'intensità dei massimi principali diminuisce: si tratta quindi di trovare il migliore compromesso tra due esigenze (intensità della luce diffratta e potere risolutore).

V.8.5 Diffrazione di raggi X



Figura V.21. schema di un tubo a raggi *X*, costituito da un'ampolla di vetro in cui è stato fatto il vuoto e sono stati inseriti i necessari elettrodi metallici. *F* è il catodo, *A* l'anticatodo (anodo). Tra *A* e *F* è applicata una differenza di potenziale (pagina 179) tale che l'anodo risulti a potenziale maggiore del catodo.

In figura V.21 è mostrato lo schema di un tubo a raggi X. Gli elettroni, emessi dal catodo F e accelerati dal campo elettrico creato tra catodo e anodo (anticatodo) A, colpiscono l'anticatodo: gli elettroni perdono la loro energia cinetica sia perché frenati dalla interazione con i campi elettrici degli elettroni contenuti nell'anticatodo sia perché inducono transizioni quantiche tra i livelli energetici degli elettroni appartenenti agli atomi dell'anticatodo.



Figura V.22. *A* e *B* sono due piani reticolari distanti *d*. Gli angoli indicati con un • sono uguali a θ . La differenza di cammino tra le onde riflesse da due piani contigui è $2d\sin\theta$.

L'energia persa dagli elettroni si tramuta in energia della radiazione elettromagnetica emessa dall'anticatodo: lo spettro di questa radiazione è uno spettro continuo, dovuto al frenamento degli elettroni, cui si sovrappongono 'righe' dovute alle transizioni quantiche provocate dagli elettroni incidenti. Tale radiazione, descritta con formalismo ondulatorio, è rappresentata da onde elettromagnetiche con lunghezza d'onda piccola (compresa tra $\approx 10^{-11} m e \approx 10^{-9} m$).

I cristalli, caratterizzati da una disposizione regolare degli atomi costituenti, fungono da reticoli di diffrazione tridimensionali per i raggi *X*: gli atomi svolgono la funzione delle fenditure di un reticolo di diffrazione ottico.

Le figure di diffrazione dei raggi *X* ottenute con cristalli, possono essere parzialmente interpretate sulla base di un modello dovuto a Lawrence Bragg. Il modello si basa sull'ipotesi che i piani cristallini fungano da superficî riflettenti delle onde elettromagnetiche (figura V.22). La condizione di interferenza costruttiva delle onde riflesse è allora:

$$2d\sin\theta = n\lambda$$

dove *n* è un intero.



Figura V.23. sul cristallo *CR* incide un'onda piana di vettore d'onda \vec{k} : si suppone che gli elettroni degli atomi del cristallo divengano sorgenti di onde sferiche secondarie. Il vettore \vec{r} individua la posizione di un atomo all'interno di una cella unitaria: il vettore d'onda \vec{k}_s dell'onda sferica prodotta da questo atomo ha lo stesso modulo di quello dell'onda piana incidente. Nel calcolo si assume che le condizioni siano tali per cui $\vec{r}_s \approx \vec{R} \in \vec{k}_s \approx \vec{k}'$. \vec{k}' è il vettore d'onda dell'onda diffratta: si assume che k' = k. θ è l'angolo di diffrazione.

Una descrizione più completa può essere sviluppata sulla base del seguente modello:

1. Si considerano, in prima approssimazione, gli atomi in quiete nelle loro posizioni reticolari. 2. Si descrivono i raggi X incidenti mediante un'onda piana:

$$E = E_0 e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}$$

- 3. Gli elettroni degli atomi danno origine a raggi *X* secondari: in un punto qualunque *P*, esterno al cristallo, i raggi *X* secondari interferiscono dando origine ad una intensità risultante.
- 4. Si tiene conto del moto degli atomi intorno alle loro posizioni di equilibrio. Questo introduce un fattore dipendente dalla temperatura nell'espressione dell'intensità risultante (fattore di Debye - Waller).

Svolgendo i calcoli sulla base dei punti 1 - 3, si ottiene per l'intensità risultante in un generico punto *P* esterno al cristallo (figura V.23):

$$I = \frac{E_0^2}{R^2} (S \cdot S^*) (L \cdot L^*)$$

dove *S* è il fattore di struttura e *L* quello reticolare. *S* e *L* sono numeri complessi. Il fattore di struttura dipende dal tipo di atomi contenuti nella cella unitaria e dalla sua struttura. La sua espressione è:

$$S = \sum_{j} f_{j}(\theta) e^{i(\vec{k}' - \vec{k}) \cdot \vec{r}_{j}}$$

dove la somma è effettuata sugli atomi *j* contenuti nella cella unitaria e dove i vettori \vec{r}_j ne individuano la posizione all'interno della cella. $f_j(\theta)$ è il fattore di forma atomico e dipende dalla densità elettronica di ogni singolo atomo e dall'angolo di diffrazione θ (figura V.23). Il quadrato del modulo del fattore reticolare *L* è dato da:

$$|L|^{2} = L \cdot L^{*} = \prod_{l=1}^{l=3} \frac{\sin^{2}[(N_{l}/2)\Delta \vec{k} \cdot \vec{a}_{l}]}{\sin^{2}[(1/2)\Delta \vec{k} \cdot \vec{a}_{l}]}$$
(V.22)

dove: $\Delta \vec{k} = \vec{k}' - \vec{k}$; N_l è il numero delle celle unitarie nella direzione l; \vec{a}_l i tre vettori che individuano la cella unitaria. La (V.22) ha una forma analoga alla (V.21) che qui trascriviamo:

$$I = I_0 \frac{\sin^2(N\phi/2)}{\sin^2(\phi/2)}$$
(V.23)

Come si è visto, la (V.23) rappresenta l'andamento di un massimo principale di un reticolo di diffrazione ottico (monodimensionale) in funzione della differenza di fase ϕ tra le onde provenienti da due strisce omologhe di due 'fenditure' contigue. La (V.22), letta alla luce della (V.23), indica che:

a. l'intensità risultante è data dal prodotto di tre termini perché il reticolo cristallino è tridimensionale;

- b. nel caso del cristallo, $(1/2)\Delta \vec{k} \cdot \vec{a}_l$ rappresenta la differenza di fase tra le onde provenienti da due atomi omologhi di due celle contigue lungo la direzione *l*;
- c. si osservi che $N_l \gg N$; per esempio, in un cristallo a forma di cubo di $1 mm^3$ di lato la cui cella unitaria sia cubica con lato pari a $4 \times 10^{-10} m$, risulta $N_l = 2.5 \times 10^6$.

Il fattore di Debye - Waller è dato da:

 $e^{-(1/3)\Delta k^2 < x^2 > x^2}$

dove $\langle x^2 \rangle$ è lo spostamento quadratico medio degli atomi dalla loro posizione di equilibrio. A temperature sufficientemente elevate ($T \gg \theta_D$, dove θ_D è la temperatura di Debye), $\langle x^2 \rangle \propto T$; pertanto, in questo limite, l'intensità delle onde diffratte diminuisce esponenzialmente all'aumentare della temperatura del cristallo.

La trattazione svolta suggerisce come si possa, mediante lo studio delle figure di diffrazione prodotte dai raggi *X*, risalire alle caratteristiche alla struttura dei solidi cristallini.

V.8.6 Diffrazione di elettroni

Questa onda, la cui velocità è maggiore di c, non può corrispondere a un trasporto di energia; la considereremo solamente come un'onda fittizia associata al moto della particella.

Louis de Broglie

A causa di queste somiglianze tra la diffusione di elettroni da parte del cristallo e la diffusione di onde da parte di reticoli tri - e bidimensionali, una descrizione dell'esistenza e del comportamento di fasci di diffrazione di elettroni in termini di diffusione di un'equivalente radiazione ondulatoria da parte degli atomi del cristallo e la sua susseguente interferenza, non solo è possibile, ma è la più semplice e naturale. Questo implica l'associazione di una lunghezza d'onda al fascio di elettroni incidente, e questa lunghezza d'onda appare in accettabile accordo con il valore h/mv della meccanica ondulatoria, la costante d'azione di Planck divisa per la quantità di moto dell'elettrone.

Clinton Davisson and Lester Germer

Giuliani Bonizzoni - Lineamenti di elettromagnetismo



Figura V.24. esperimento di interferenza con elettroni, analogo a quello con onde elettromagnetiche attraverso due fenditure. Si veda il testo.

Nel 1923, Louis de Broglie propose di associare ad una particella di massa m un'onda *fittizia*⁴ la cui lunghezza d'onda λ è legata alle proprietà della particella dalla relazione:

$$\lambda = \frac{h}{p}$$

dove h è la costante di Planck e p la quantità di moto della particella. La proposta di de Broglie ha progressivamente condotto ad una descrizione del comportamento delle particelle mediante un formalismo ondulatorio: la meccanica quantica *ondulatoria* di Schrödinger ne è un esempio.

Nel 1926, Davisson e Germer ottennero figure di diffrazione facendo diffondere un fascio di elettroni da cristalli di nichel.⁵ Successivamente (1928), G. P. Thomson, figlio di J.J. Thomson, produsse figure di diffrazione facendo passare un fascio di elettroni attraverso sottili fogli di metallo. Come indicato nel brano di Davisson e Germer riprodotto all'inizio, è possibile descrivere i fenomeni di diffrazione degli elettroni usando l'ipotesi di de Broglie e il modello di Bragg.

E' tuttavia interessante usare anche la descrizione della meccanica quantica.⁶ Consideriamo una disposizione sperimentale analoga a quella delle due fenditure discussa per la radiazione elettromagnetica (figura V.24): la sorgente di luce è sostituita da una sorgente di elettroni aventi tutti appros-

⁴Questo è il termine usato da de Broglie. Il lavoro di de Broglie cui ci riferiamo ('Ondes et quanta', *Comptes Rendus*, 177, (1923), 507 - 510) è consultabile in rete: http://www.davis-inc.com/physics/index.shtml

⁵Si veda la citazione all'inizio di questa sezione.

⁶Questa trattazione è ripresa da: R. Feynman, R. Leighton, M. Sands, *The Feynman lectures on Physics*, vol. II p. 15 - 7, 15 - 14, Addison - Wesley, 1989.

simativamente la stessa energia e quantità di moto e lo schermo è di natura tale da poter rivelare l'arrivo degli elettroni.

La descrizione si basa sui seguenti postulati:

- A) La probabilità che un elettrone, dopo aver lasciato la sorgente *S*, arrivi nel punto *R* dello schermo è data dal quadrato del modulo di un numero complesso $Ce^{i\phi}$ detto *ampiezza di probabilità*. Siano $C_A e^{i\phi_A}$ e $C_B e^{i\phi_B}$ le ampiezze di probabilità associate al cammino *SAR* e *SBR*, rispettivamente.
- B) La probabilità che un elettrone giunga nel punto *R* dello schermo attraversando la fenditura *A* quando l'altra è chiusa è data dal quadrato del modulo dell'ampiezza di probabilità relativa al cammino *SAR*, cioè da C_A^2 . Analogamente, la probabilità che un elettrone giunga nel punto *R* dello schermo attraversando la fenditura *B* quando l'altra è chiusa, è data dal quadrato del modulo dell'ampiezza di probabilità relativa al cammino *SBR*, cioè da C_B^2 .
- C) La probabilità che un elettrone giunga nel punto *R* dello schermo quando entrambe le fenditure sono aperte è data dal *quadrato del modulo della somma delle ampiezze relative ai due cammini SAR e SBR*.

Quando entrambe le fenditure sono aperte, la probabilità che un elettrone arrivi nel punto *R* dello schermo dipende dalla differenza di fase $\delta = \phi_A - \phi_B$. Infatti si ha

$$P = \left| (C_A e^{i\phi_A} + C_B e^{i\phi_B}) \right|^2 = C_A^2 + C_B^2 + 2C_A C_B \cos\delta$$

Indicata con $\lambda = h/p$ la lunghezza d'onda associata alle due ampiezze di probabilità (p è la quantità di moto degli elettroni), si ottiene, procedendo come nel caso della radiazione elettromagnetica, che la differenza di fase tra due cammini simmetrici rispetto alle due fenditure è data da:

$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda} d\sin\theta$$

Se si suppone che sia $C_A = C_B$ si ottiene infine:

$$P = 4C_A^2 \cos^2 \frac{\pi d \sin \theta}{\lambda}$$

Il secondo membro di questa equazione è identico al termine che compare al secondo membro dell'equazione (V.16) ricavata a suo tempo per le onde

elettromagnetiche e dovuto a due strisce omologhe delle due fenditure. Abbiamo così indicato come si possa pervenire, per la diffrazione di elettroni, a formule analoghe a quelle ottenute per le onde elettromagnetiche.

La descrizione in termini di ampiezze di probabilità può essere applicata anche ai fotoni. Le due descrizioni dell'interferenza luminosa, classica (elettromagnetismo) e quantica (ampiezze di probabilità), sono strutturalmente identiche: entrambe utilizzano un formalismo di tipo ondulatorio per descrivere il comportamento statistico di particelle. La tabella V.1 mostra le corrispondenze tra le due descrizioni.

Classica	\Leftrightarrow	Quantica
$\lambda = c/v$	⇔	$\lambda = h/p$
Campo elettrico \vec{E}	⇔	Ampiezza di probabilità $\eta = Ce^{i\phi}$
$\vec{E} = \vec{E}_A + \vec{E}_B$	⇔	$\eta = \eta_A + \eta_B$
Densità di energia $\propto E^2$	\Leftrightarrow	Probabilità $\propto \eta ^2$

Tabella V.1. descrizione classica e quantica dell'interferenza della radiazione elettromagnetica.

Ma l'accuratezza scientifica richiede saggiamente di non confondere la semplice e familiare figura, che ci è presentata dalla natura, con i brillanti ornamenti con cui eravamo abituati a vestirla. Di nostro arbitrio non possiamo in alcun modo modificare la prima; possiamo invece scegliere come ci piace il taglio ed il colore degli altri.

Heinrich Hertz

V.8.7 Interferenza e quanti di luce

Nel 1908, Geoffrey Ingram Taylor ha condotto un esperimento di diffrazione usando una sorgente di luce molto debole.⁷ L'idea dell'esperimento non fu suggerita dall'ipotesi dei quanti di luce di Einstein, ma da un'ipotesi simile di J.J. Thomson (suggerita, a sua volta, da esperimenti di ionizzazione condotti con luce e raggi X) secondo cui l'energia è distribuita

...non uniformemente sul fronte d'onda. Ci sono regioni di energia massima separate da grandi regioni non perturbate [senza energia]. Quando l'intensità della luce è ridotta, la separazione di queste regioni aumenta, ma la quantità di energia in ciascuna di esse non cambia;

⁷G. I. Taylor, 'Interference fringes with feeble light', *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 15, (1909), 114 - 115.

Capitolo V. Onde e particelle

cioè, esse sono unità indivisibili. Sinora, tutte le evidenze portate a supporto di questa teoria sono state di natura indiretta; poiché tutti i fenomeni ottici ordinari sono effetti medî, e sono pertanto incapaci di distinguere tra la usuale teoria elettromagnetica e la sua modificazione che stiamo considerando. Tuttavia, Sir J. J. Thomson ha suggerito che se in un esperimento di diffrazione l'intensità della luce viene ridotta a tal punto che solo poche di queste unità indivisibili sono contemporaneamente associate ad un zona di Huyghens, gli usuali fenomeni di diffrazione dovrebbero essere modificati.⁸

L'esperimento condotto usando come sorgente luminosa una fiamma a gas, filtri anneriti con fumo per diminuire l'intensità della luce, un ago quale elemento diffrattivo e lastre fotografiche quali rivelatori, ha condotto alla conclusione che le frange di diffrazione *non* si modificano diminuendo l'intensità della luce.

Secondo Taylor, l'intensità *I* della luce visibile usata nel caso dell'esposizione più lunga (2000 ore equivalenti a circa 83 giorni) era di $5 \times 10^{-9} J s^{-1} m^{-2}$. Assumendo per l'energia dei fotoni della luce visibile quella corrispondente alla lunghezza d'onda di 700 *nm* (assunzione che rende massima la densità dei fotoni), si ottiene, usando la formula *nhvc* = *I* (*n* è la densità dei fotoni), che il numero medio di fotoni contenuti in un cilindro avente una base di 1 *cm*² e un'altezza di 3 *m* è di 0.018.

Nel 1927, A.J. Dempster e H.F. Batho hanno eseguito un esperimento dello stesso tipo con un controllo superiore dei parametri in gioco.⁹ Infatti:

- ♦ la luce usata era monocromatica (riga a 447.1 nm dell'elio);
- ♦ la sua intensità era misurata paragonandola a quella emessa a 447.1 nm da un corpo nero a 1125 K;
- ♦ nei calcoli, è stata usata la vita media τ misurata dello stato eccitato responsabile della transizione che dà origine alla riga dell'elio usata: $\tau = 1.84 \times 10^{-8} s.$

Dempster e Batho, hanno studiato due tipi di figure di interferenza: quelle prodotte da un reticolo a gradini (*échelon*) e quelle prodotte da due lastre di

⁸Ivi, p. 114.

⁹A.J. Dempster, H.F. Batho, 'Light quanta and interference', *Physical Review*, 30, (1927), 644 - 648.

vetro separate da un sottile strato d'aria. In entrambi i casi, le figure di interferenza si formavano sulla lastra fotografica anche quando un solo quanto alla volta attraversava l'apparato interferenziale.

> ⇒ Nel caso del reticolo a gradini, l'energia misurata in corrispondenza dell'esposizione più lunga era equivalente a 95 fotoni per secondo: ciò significa che, in media, l'apparato era attraversato da (circa) un fotone ogni centesimo di secondo. Nell'altro caso, in corrispondenza dell'esposizione più lunga, il volume della lampada ad elio interessato all'esperimento, emetteva, in tutte le direzioni, 7.21 × 10⁵ quanti per secondo, cioè, circa un quanto ogni 1.4 microsecondi: in questo intervallo di tempo, la luce percorre nel vuoto circa 400 metri e, in un vetro con indice di rifrazione uguale a 1.5, circa 280 metri. Anche nel caso più sfavorevole (in cui tutti i quanti emessi attraversano l'apparato di misura), solo un quanto alla volta, attraversa, in media, l'apparato di interferenza.

La teoria di Maxwell predice correttamente l'intensità delle frange di interferenza anche nei casi in cui, dal punto di vista corpuscolare, solo un fotone alla volta è in volo tra la sorgente e lo schermo rivelatore. Ciò conferma che i valori assunti dalle grandezze fisiche usate nella teoria di Maxwell sono, dal punto di vista sperimentale, valori medî: la media deve essere effettuata su intervalli di tempo tali da coinvolgere, da un punto di vista corpuscolare, un numero statisticamente significativo di fotoni.

Il reticolo a gradini fu inventato da Michelson. Con le sue parole: 'Se una pila di lastre piane è costruita come mostrato in figura V.25, e la luce incide normalmente sulle superficî come mostrato dalle linee punteggiate, la luce sarà riflessa (e rifratta) in direzione perpendicolare in corrispondenza della lunghezza d'onda per la quale la differenza costante tra i cammini di due raggi successivi sia un numero intero esatto della lunghezza d'onda'.¹⁰

¹⁰A.A. Michelson, *Studies in Optics*, Dover Publications, New York, 1995, riedizione del testo pubblicato nel 1927, pp. 104 - 105.

Capitolo V. Onde e particelle



Figura V.25. reticolo a gradini di Michelson.

V.9 Onde e particelle

In altri termini non ci sono indicazioni incontrovertibili perché le particelle, microcomponenti della materia, anche alla luce della loro descrizione quantica, non possano essere considerate dei veri e propri corpuscoli e non delle onde. E' necessario sottolineare questo punto, apparentemente ovvio, dal momento che anche nel mondo scientifico è diffusa la convinzione che tali particelle debbano essere considerate contemporaneamente come corpuscoli e come onde.

Piero Caldirola

Nella letteratura fisica (ma non solo) si trovano ampie discussioni sul concetto di onda e di particella e sul cosiddetto *dualismo onda - corpuscolo*. Se si parte dal presupposto, *suggerito* dall'intera conoscenza acquisita, che la natura è discreta, allora si deve concludere che nel mondo esistono due tipi particelle: quelle dotate di massa non nulla (per esempio gli elettroni) e quelle prive di massa (per esempio i fotoni). Le teorie sviluppate per descrivere il loro comportamento, sia *classiche* (come la teoria elettromagnetica di Maxwell - Lorentz) o *quantiche* (come quella che utilizza il concetto di ampiezza di probabilità) - usando concetti e formalismi tipici delle descrizioni ondulatorie - predicono il comportamento statistico di molte particelle o quello probabilistico di una singola particella.

In letteratura è diffusa l'opinione secondo cui la descrizione quantica dell'esperimento delle due fenditure presenti elementi di novità rispetto alla descrizione classica, con riferimento al fatto che la teoria non è in grado di stabilire attraverso quale fenditura passino i fotoni (o gli elettroni). Una caratteristica analoga è presente nella descrizione basata sull'elettromagnetismo. Infatti:

- a) La predizione della distribuzione dell'energia sullo schermo è una conseguenza diretta della regola di sovrapposizione vettoriale dei campi, implicita nelle equazioni di Maxwell. In un generico punto *R* dello schermo, si sommano i campi elettrici delle porzioni d'onda provenienti dalle due fenditure *A* e *B*: l'energia depositata nel punto *R* risulta proporzionale al quadrato del campo elettrico risultante.
- b) Supponiamo che *R* sia un punto di buio, cioè un punto in cui i campi elettrici si sommano in modo tale per cui il loro risultante è nullo. I campi, provenienti da *A* e da *B* si incontrano in *R*, interferiscono e si annullano. Dove è finita l'energia associata alle due porzioni d'onda (ai due campi)?
- c) Supponiamo che *R* sia un punto di massima luce: i campi si sommano in modo tale da dare $\vec{E}_T = \vec{E}_A + \vec{E}_B = 2\vec{E}_0$, se si assume che l'ampiezza delle due onde in *R* sia la stessa ed uguale ad E_0 . L'energia depositata in *R* è in questo caso proporzionale a $4E_0^2$, mentre l'energia associata a ciascuno dei due campi interferenti è proporzionale a E_0^2 : da dove proviene l'eccesso di energia proporzionale a $2E_0^2$?

La teoria prevede correttamente quale è il valore dei campi in un generico punto dello schermo e quale è la distribuzione di energia sullo schermo: non è invece in grado di descrivere quale sia il percorso dell'energia tra le due fenditure e lo schermo e, quindi, quale sia il percorso dell'energia tra la sorgente e lo schermo.

Si noti infine come, introducendo l'ipotesi aggiuntiva secondo cui la probabilità che un fotone arrivi nel punto generico R dello schermo è proporzionale all'intensità nel punto R, la teoria di Maxwell - Lorentz acquista le stesse capacità predittive della descrizione quantica, nel senso che descrive anche il comportamento probabilistico di un singolo fotone.

Se, in riferimento alla figura V.17, si pone:

$$P(\theta)d\theta = aI(\theta)d\theta$$

dove *a* è una costante, e *P*(θ) rappresenta la probabilità che un fotone arrivi tra $\theta \in \theta + d\theta$, deve essere:

$$\int P(\theta) d\theta = a \int I(\theta) d\theta = 1$$

da cui:

$$a = \frac{1}{\int I(\theta) d\theta}$$

e:

$$P(\theta) = \frac{I(\theta)}{\int I(\theta) d\theta}$$

La spiegazione, da parte della teoria dei quanti di luce dei fenomeni sinora interpretati sulla base dell'ipotesi ondulatoria, quali l'interferenza, la diffusione, la dispersione ecc., appare come un'impresa molto impegnativa, e per realizzarla, sarà senza dubbio necessario fare un compromesso tra la vecchia

teoria e la nuova, introducendo in questa la nozione di periodicità. Louis de Broglie

V.10 Effetto Doppler: II

L'effetto Doppler è già stato studiato nella sezione II.5.1 (pagina 32) in un caso particolare (direzione di emissione della radiazione elettromagnetica coincidente con quella del moto relativo di due *SRI*) nel contesto di esperimenti ideali condotti con lampi di luce di durata idealmente nulla.

Nelle pagine seguenti affronteremo lo studio dell'effetto Doppler in modo sistematico ignorando dapprima lo stato fisico della sorgente: daremo, in questo caso, sia una descrizione ondulatoria che corpuscolare. Terremo poi conto del processo di emissione della sorgente: la trattazione sarà necessariamente corpuscolare. Vedremo quindi che l'effetto è compiutamente descritto dalle equazioni di conservazione della dinamica relativistica.

V.10.1 Onde piane

Nella trattazione dei fenomeni elettromagnetici nel vuoto basata sul formalismo relativistico si mostra che l'insieme delle quattro grandezze (ω/c , k_1 , k_2 , k_3) costituisce un quadrivettore $\vec{\mathcal{K}}$, detto quadrivettore d'onda: le sue componenti si trasformano quindi, passando da un *SRI* ad un altro, come le coordinate (ct, x, y, z) del continuo spazio - temporale. Si consideri ora un'onda luminosa piana osservata nel sistema di riferimento K' e descritta dal quadrivettore $\vec{\mathcal{K}}'$. Si supponga, per semplicità, che la direzione di propagazione dell'onda giaccia nel piano (x', y'); sia θ' l'angolo che il vettore d'onda tridimensionale \vec{k}' forma con l'asse x'. Le componenti di $\vec{\mathcal{K}}'$ sono allora:

$$\mathcal{K}_{0}' = \frac{\omega'}{c}$$
$$\mathcal{K}_{1}' = \frac{\omega'}{c}\cos\theta'$$
$$\mathcal{K}_{2}' = \frac{\omega'}{c}\sin\theta'$$
$$\mathcal{K}_{3}' = 0$$

Si ha pertanto:

$$\mathcal{K}_0 = \Gamma(\mathcal{K}'_0 + B\mathcal{K}'_1) \tag{V.24}$$

$$\mathcal{K}_1 = \Gamma(\mathcal{K}'_1 + B\mathcal{K}'_0) \tag{V.25}$$

$$\mathcal{K}_2 = \mathcal{K}_2' \tag{V.26}$$

$$\mathcal{K}_3 = \mathcal{K}'_3 \tag{V.27}$$

Siccome $\mathcal{K}_3 = k_3 = 0$, anche nel sistema di riferimento *K* la direzione di propagazione dell'onda giace nel piano (*x*, *y*). Dalla (V.24) si ottiene:

$$\omega = \Gamma \omega' (1 + B \cos \theta') \tag{V.28}$$

e dalla (V.25), tenendo conto della (V.28):

$$\cos\theta = \frac{B + \cos\theta'}{1 + B\cos\theta'}$$

Da quest'ultima equazione è possibile dedurre (cambiando le grandezze accentate con quelle non accentate, e viceversa, e sostituendo -B a B) che:

$$\cos\theta' = \frac{\cos\theta - B}{1 - B\cos\theta} \tag{V.29}$$

La (V.28) diventa allora:

$$\omega = \omega' \frac{\sqrt{1 - B^2}}{1 - B\cos\theta} \tag{V.30}$$

Questa equazione descrive l'effetto Doppler nel caso di onde periodiche. Si noti che, prescindendo dalla pulsazione ω' , tutte le grandezze che vi compaiono sono relative all'osservatore *K*: il cosiddetto effetto Doppler trasversale corrisponde al caso in cui $\theta = \pi/2$.
Capitolo V. Onde e particelle

V.10.2 Fotoni

Si osservi che la derivazione svolta nella precedente sezione può essere applicata, con le opportune varianti, anche al caso dei fotoni trattati come particelle relativistiche cui si associa il quadrivettore energia - impulso $\vec{\mathcal{P}} = \hbar \vec{\mathcal{K}} = (E/c, \vec{p}) \text{ con } E = hv \text{ e } |\vec{p}| = hv/c$. Si vede dunque che, all'interno dell'approccio adottato, la descrizione della radiazione in termini di onde o di fotoni conduce allo stesso risultato: questo, peraltro, coincide con quello ottenuto mediante l'esperimento ideale con lampi di luce periodicamente intervallati. E' essenziale rendersi conto che i tre casi trattati hanno in comune il fatto che viene ignorato il processo di emissione da parte della sorgente.

V.10.3 Pressione esercitata da fotoni

Il disaccordo che emerge dalla contrapposizione delle due descrizioni [ondulatoria e corpuscolare], può essere evitato usando coerentemente la teoria che permette la trattazione più semplice del fenomeno studiato. Pertanto, di seguito, le leggi della radiazione termica verranno trattate sulla base dei quanti di luce senza alcuna reminiscenza della teoria ondulatoria: questa, in quel che segue, non deve esistere.

Robert Emden

Si consideri un fascio di quanti di luce di energia $\varepsilon = hv$ che si propagano lungo la direzione negativa dell'asse *x*. Sia *S* una superficie completamente assorbente perpendicolare all'asse delle *x*.¹¹ La variazione della sua quantità di moto *P_x* per unità di tempo, dovuta all'assorbimento dei fotoni, è data da:

$$\frac{dP_x}{dt} = -n\frac{hv}{c}cS = F_x$$

dove *n* è la densità dei fotoni e F_x è la forza che la radiazione esercita sulla superficie *S*. Siccome $F_x = p S$ dove *p* è la pressione esercitata dalla radiazione sulla superficie, l'equazione precedente si può scrivere sotto la forma:

$$p = -nhv$$

¹¹Questa trattazione è un'estensione di quella di: R. Emden, 'Über Lichtquanten', *Physi-kalische Zeitschrift* **22**, (1921), 513 - 517. Emden tratta solo il caso in cui il fascio di quanti di luce incide perpendicolarmente sulla superficie assorbente in una approssimazione non relativistica.

Si supponga ora che la superficie S si muova di moto rettilineo uniforme lungo la direzione positiva dell'asse x con velocità v. Allora:

$$p = nhv\left(-1 - \frac{v}{c}\right) \tag{V.31}$$

In un sistema di riferimento comovente con la superficie vale la relazione:

$$p' = -n'hv' \tag{V.32}$$

Ricordando le trasformazioni di Lorentz e la prima delle (II.42):

$$S = S'$$

$$F_x = F'_x$$
(V.33)

quindi:

Essendo:

$$p' = \frac{|F'_x|}{S'} = \frac{|F_x|}{S} = p$$
$$n' = n\sqrt{1 - \frac{\nu^2}{c^2}}$$

la (V.32) diventa:

$$p = -nh\nu'\sqrt{1 - \frac{\nu^2}{c^2}}$$

Infine, uguagliando i secondi membri della (V.31) e della (V.32), si ottiene:

$$v = v' \frac{\sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 + v/c}$$

Questa è la formula dell'effetto Doppler nel caso in cui i fotoni viaggino parallelamente alla direzione del moto relativo dei due osservatori.

Come si vedrà nella prossima sezione, l'effetto Doppler, dal punto di vista corpuscolare, è legato allo scambio di quantità di moto tra radiazione e materia. Pertanto, la trattazione di Emden, basata sulla pressione della radiazione, conduce al risultato corretto solo in caso di incidenza perpendicolare: solo in questo caso infatti, la pressione della radiazione tiene conto dell'intera quantità di moto dei fotoni.

Nel caso in cui il fascio di fotoni incida sulla superficie S formando un angolo θ con la direzione positiva dell'asse x (figura V.26), la variazione della

Capitolo V. Onde e particelle



Figura V.26. un fascio di fotoni incide sulla superficie completamente assorbente *S*; θ è l'angolo formato dalla direzione di propagazione dei fotoni con l'asse *x*; *v* è, in metri, la distanza percorsa dalla superficie *S* in un secondo.

quantità di moto della superficie *S* dovuta all'assorbimento dei fotoni è data da:

$$\frac{dP_x}{dt} = n\frac{hv}{c}S(c\cos\theta - v) = F_x$$

Nel sistema di riferimento comovente con la superficie si ha:

$$\frac{dP'_x}{dt'} = F'_x = n'\frac{hv'}{c}S'\cos\theta'$$

Per le (V.33) e ricordando la relazione tra i coseni degli angoli $\theta \in \theta'$ (V.29):

$$\cos\theta' = \frac{\cos\theta - B}{1 - B\cos\theta}$$

si ottiene:

$$v = v' \frac{\sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 - (v/c)\cos\theta}$$

Questa è l'equazione generale dell'effetto Doppler.

V.10.4 Fotoni emessi da atomi o da nuclei

 \dots sulla base data da Einstein alla teoria della radiazione, il quanto emesso hv porta con sé sempre - e in particolare in ogni sistema di riferimento - l'impulso lineare hv/c, il massimo che in linea di principio possa essere associato a questo ammontare di energia. Nel seguito dimostriamo che il "salto di velocità" prodotto in tal modo per la condizione delle frequenze di Bohr dà proprio lo spostamento Doppler, e con tutte le sottigliezze che sono richieste dalla teoria della relatività.

Erwin Schrödinger

Quando si prende in considerazione il processo di emissione della radiazione da parte della sorgente, non si può prescindere dal fatto che tale processo è discreto e direzionale. Si consideri l'emissione di un fotone da parte di un atomo *A* in moto rispetto al sistema di riferimento dell'apparato di misura (figura V.27).



Figura V.27. emissione di un fotone da parte dell'atomo *A* in moto. Il fotone è emesso lungo la direzione $A \rightarrow O$: *O* rappresenta la fenditura d'ingresso dello spettroscopio.

Siano:

- $\diamond E_1, E_2$ l'energia a riposo dell'atomo prima e dopo l'emissione;
- ♦ \vec{v}_1 , \vec{v}_2 la velocità dell'atomo prima e dopo l'emissione;
- $\diamond \theta_1, \theta_2$ l'angolo che la velocità dell'atomo forma con la direzione di propagazione del fotone prima e dopo l'emissione.

Si noti che le velocità, gli angoli e la direzione di propagazione del fotone sono valutati nel sistema di riferimento dell'apparato di misura e che la geometria del processo è planare (piano xy).¹²

In questa trattazione, non si dovrebbero usare termini e simboli tipici della descrizione ondulatoria. Tuttavia, ci atterremo alla consuetudine di parlare, a proposito dell'effetto Doppler, in termini di frequenze. Per trasformare le formule che seguono in una trattazione anche formalmente corpuscolare, si deve sostituire E_{ph} a hv e E_{ph}/c a hv/c.

La conservazione dell'energia richiede che:

$$h\nu = \gamma_1 E_1 - \gamma_2 E_2 \tag{V.34}$$

e quella della quantità di moto:

$$\gamma_1 \frac{E_1}{c^2} \nu_1 \cos \theta_1 = \gamma_2 \frac{E_2}{c^2} \nu_2 \cos \theta_2 + \frac{h\nu}{c}$$
(V.35)

$$\gamma_1 \frac{E_1}{c^2} \nu_1 \sin \theta_1 = \gamma_2 \frac{E_2}{c^2} \nu_2 \sin \theta_2 \tag{V.36}$$

dove, al solito, $\gamma_i = 1/\sqrt{1 - v_i^2/c^2}$, i = 1, 2. Dalla (V.34) e dalla (V.35) si ottiene:

$$\gamma_1 E_1 \left(1 - \frac{\nu_1}{c} \cos \theta_1 \right) = \gamma_2 E_2 \left(1 - \frac{\nu_2}{c} \cos \theta_2 \right) \tag{V.37}$$

Ponendo:

$$\varphi_i = \gamma_i \left(1 - \frac{\nu_i}{c} \cos \theta_i \right) \quad i = 1, 2 \tag{V.38}$$

la (V.37) diventa:

$$\varphi_1 E_1 = \varphi_2 E_2 \tag{V.39}$$

Inoltre, ponendo:

$$\psi_i = \gamma_i \frac{\nu_i \sin \theta_i}{c} \quad i = 1,2 \tag{V.40}$$

la (V.36), dopo aver moltiplicato entrambi i suoi membri per *c*, diventa:

$$\psi_1 E_1 = \psi_2 E_2 \tag{V.41}$$

¹²La trattazione che segue si basa sul lavoro di E. Schrödinger: 'Principio di Doppler e condizione delle frequenze di Bohr', (1922); in rete alll'indirizzo: http://matsci.unipv.it/persons/antoci/mq/Schroedinger22.pdf

Elevando al quadrato la (V.38) e la (V.40) e sommando successivamente membro a membro si ottiene:

$$\varphi_i^2 + \psi_i^2 = \gamma_i^2 \left(1 + \frac{\nu_i^2}{c^2} \cos^2 \theta_i - 2\frac{\nu_i}{c} \cos \theta_i + \frac{\nu_i^2}{c^2} \sin^2 \theta_i \right)$$

Questa equazione può essere riscritta così:

$$\varphi_i^2 + \psi_i^2 = \gamma_i \left[\gamma_i \left(1 - \frac{\nu_i}{c} \cos \theta_i \right) + \gamma_i \left(1 - \frac{\nu_i}{c} \cos \theta_i \right) \right] + \gamma_i^2 \left(\frac{\nu_i^2}{c^2} - 1 \right)$$

che, risolta per γ_i (tenendo conto della espressione di φ_i e di γ_i), dà:

$$\gamma_i = \frac{1 + \varphi_i^2 + \psi_i^2}{2\varphi_i} \quad i = 1, 2$$
(V.42)

L'equazione di conservazione dell'energia (V.34) si scrive allora, usando la (V.42), la (V.39) e la (V.41):

$$h\nu = \frac{1}{2} \left(\frac{E_1}{\varphi_1} - \frac{E_2}{\varphi_2} \right)$$

Questa equazione può anche essere scritta nella forma:

$$h\nu = \frac{1}{2}\frac{E_1^2 - E_2^2}{E_1\varphi_1} = \frac{1}{2}\frac{E_1^2 - E_2^2}{E_2\varphi_2}$$

od anche nella forma:

$$hv = \frac{1}{\sqrt{\varphi_1 \varphi_2}} \frac{E_1^2 - E_2^2}{2\sqrt{E_1 E_2}}$$
(V.43)

Se ora si pone:

$$v^* = \frac{E_1^2 - E_2^2}{2h\sqrt{E_1E_2}} \tag{V.44}$$

si ottiene infine, dalla (V.43):

$$v = v^* \frac{1}{\sqrt{\gamma_1 [1 - (v_1/c) \cos \theta_1] \times \gamma_2 [1 - (v_2/c) \cos \theta_2]}}$$
(V.45)

La (V.45) sembra indicare che la frequenza osservata dipende dalle velocità dell'atomo prima e dopo l'emissione. Ciò non è ragionevole perché, fissata la velocità iniziale dell'atomo, la sua velocità finale dipenderà soltanto dal processo di emissione del fotone e quindi dallo scambio di energia e quantità di moto tra atomo e fotone. Usando la (V.37), la (V.45) diventa:

$$v = \frac{v^*}{\sqrt{E_1/E_2}} \frac{\sqrt{1 - v_1^2/c^2}}{1 - (v_1/c)\cos\theta_1}$$

Quest'ultima, usando la (V.44) e ponendo $E_1 - E_2 = \Delta E$, si riduce a:

$$v = \frac{\Delta E}{h} \left(1 - \frac{\Delta E}{2E_1} \right) \frac{\sqrt{1 - v_1^2 / c^2}}{1 - (v_1 / c) \cos \theta_1}$$

Se ora si pone:

$$v_0 = \frac{\Delta E}{h} \left(1 - \frac{\Delta E}{2E_1} \right) \tag{V.46}$$

si ottiene:

$$v = v_0 \frac{\sqrt{1 - v_1^2/c^2}}{1 - (v_1/c)\cos\theta_1}$$
(V.47)

La (V.46) rappresenta la frequenza misurata da un osservatore rispetto a cui la sorgente è in quiete prima dell'emissione del fotone e stabilisce la relazione tra questa frequenza e la differenza di energia dei due livelli quantici tra i quali avviene la transizione atomica o nucleare: quando $\Delta E \ll E_1$, risulta $v_0 \approx \Delta E/h$.

Si confronti ora la (V.47) con la (V.30), qui riscritta in termini di frequenze:

$$v = v' \frac{\sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 - (v/c)\cos\theta}$$
(V.48)

Come si è visto, la (V.48), può essere ricavata considerando la propagazione di un'onda elettromagnetica piana o la propagazione di un fotone. In entrambi i casi si confrontano le frequenze misurate dai due osservatori in moto relativo prescindendo dalla sorgente. La trattazione alla Schrödinger descrive completamente il fenomeno perché tiene conto della sorgente.

> ⇒ Il termine $\Delta E^2/2E_1$ rappresenta l'energia di rinculo dell'atomo durante l'emissione; se si trascura il termine ΔE nel calcolo di E_1 , l'energia di rinculo è di $3.49 \times 10^{-9} eV$ per l'emissione da parte di un atomo di idrogeno di un fotone corrispondente alla riga a 486.133 *nm* e di $4.68 \times 10^{-2} eV$ per l'emissione di un fotone gamma di 129 *KeV* da parte di un nucleo di ¹⁹¹ *Ir*. Nel caso dell'atomo di idrogeno, l'energia di rinculo è trascurabile rispetto alla larghezza naturale della riga (sezione V.4, pagina 124): il

fotone emesso può quindi essere riassorbito da un altro atomo di idrogeno (risonanza), in quiete rispetto al primo (prima della sua emissione). Nel caso dell'¹⁹¹*Ir* invece, l'energia di rinculo è grande rispetto alla larghezza naturale della riga e, quindi, il fotone non può essere riassorbito da un altro nucleo di Iridio.

Questa trattazione si applica anche al caso dell'assorbimento. Le equazioni di partenza sono:

$$hv = \gamma_2 E_2 - \gamma_1 E_1$$

e:

$$\gamma_1 \frac{E_1}{c^2} v_1 \cos \theta_1 + \frac{hv}{c} = \gamma_2 \frac{E_2}{c^2} v_2 \cos \theta_2$$
$$\gamma_1 \frac{E_1}{c^2} v_1 \sin \theta_1 = \gamma_2 \frac{E_2}{c^2} v_2 \sin \theta_2$$

dove, al solito, $\gamma_i = 1/\sqrt{1 - v_i^2/c^2}$, i = 1, 2. La relazione finale è:

$$v = v_0 \frac{\sqrt{1 - v_1^2/c^2}}{1 - (v_1/c)\cos\theta_1}$$

dove, questa volta:

$$\nu_0 = \frac{\Delta E}{h} \left(1 + \frac{\Delta E}{2E_1} \right) \tag{V.49}$$

Nel caso dell'assorbimento hv_0 rappresenta l'energia che un fotone deve avere per essere assorbito da un atomo la cui velocità iniziale (prima dell'assorbimento) è nulla. Si noti infine che la grandezza E_1 ha valori diversi nel caso dell'emissione e dell'assorbimento. Nel caso dell'emissione, E_1 è l'energia a riposo dell'atomo eccitato; nel caso dell'assorbimento, E_1 è l'energia a riposo dell'atomo non eccitato.

Secondo la trattazione svolta, *l'effetto Doppler è una conseguenza della discretezza del processo di emissione e di assorbimento da parte di un atomo e delle leggi di conservazione della dinamica relativistica.* In particolare, nel processo di emissione, all'energia acquisita (persa) dal fotone - rispetto all'energia quantica ΔE - corrisponde un'eguale diminuzione (aumento) dell'energia cinetica dell'atomo; nel processo di assorbimento, l'atomo può assorbire un fotone con energia minore (maggiore) di quella corrispondente al salto quantico ΔE , purché esso perda (acquisti) una corrispondente quantità di energia cinetica. Nel caso in cui l'atomo emittente o assorbente si trovi in un campo gravitazionale di potenziale ϕ , le frequenze v_0 date dalla (V.46) e dalla (V.49) avranno l'espressione (si veda a pagina 58):

$$v_0 = \frac{\Delta E}{h} \left(1 \pm \frac{\Delta E}{2E_1} \right) \sqrt{1 + \frac{2\phi}{c^2}}$$

che, per campi gravitazionali deboli ($\phi \ll c^2$) assume la forma:

$$v_0 \approx \frac{\Delta E}{h} \left(1 \pm \frac{\Delta E}{2E_1} \right) \left(1 + \frac{\phi}{c^2} \right)$$

dove il segno (–) corrisponde all'emissione ed il segno (+) all'assorbimento. (Si ricordi che E_1 ha un valore diverso a seconda che si tratti di emissione o di assorbimento).

V.11 Allargamento Doppler delle righe

Il moto termico degli atomi provoca un allargamento delle righe emesse per effetto Doppler. Nel caso di un gas (o vapore), se la temperatura non è troppo elevata, si può considerare solo il termine dipendente da v/c; di conseguenza, la pulsazione della luce emessa da un atomo lungo la direzione zsarà data da (equazione V.47):

$$\omega = \omega_0 \left(1 + \frac{v_z}{c} \right)$$

dove ω_0 è la pulsazione della luce emessa dagli atomi per i quali v_z è nulla. Pertanto:

$$\nu_z = c \left(\frac{\omega - \omega_0}{\omega_0} \right)$$

Supponendo che la fenditura di ingresso dello spettroscopio selezioni solo la luce proveniente lungo la direzione z perpendicolare al suo piano, l'intensità della luce emessa è data da:

$$I(\omega) \propto \sqrt{\frac{1}{2\pi\sigma^2}} e^{-c^2/2\sigma^2}$$
(V.50)

dove $\sigma^2 = 2kT/M$ perché la distribuzione della componente *z* delle velocità degli atomi è data dalla (XIV.1) a pagina 394. La larghezza a metà altezza della gaussiana che compare nella (V.50) è:

$$\Delta\omega = 2\omega_0 \sqrt{\frac{2kT\ln 2}{Mc^2}}$$

⇒ Nel caso della riga a 706.722 *nm* dell'argon, si ha, a 300 K, $\Delta \omega = 5.23 \times 10^9 \ rad \ s^{-1}$. In generale, l'allargamento Doppler è più grande della larghezza naturale della riga.

V.12 La radiazione di corpo nero

Al contrario, io sospettai che la connessione fondamentale fosse la dipendenza dell'entropia dall'energia. Poiché il significato profondo del concetto di entropia non era ancora completamente compreso, nessuno fece molta attenzione al metodo da me adottato, e io potei sviluppare i miei calcoli con comodo, fino in fondo, senza timore di interferenze o competizioni.

Max Planck

Lo spazio delle fasi di un quanto di luce relativo ad un certo volume viene diviso in 'celle' di dimensione uguale a h^3 . Il numero delle possibili ripartizioni su queste celle dei quanti di luce di una radiazione definita macroscopicamente fornisce l'entropia e quindi tutte le proprietà termodinamiche della radiazione.

Satyendranath Bose

Ogni corpo può emettere o assorbire radiazione elettromagnetica. Il *potere emissivo* di un corpo è l'energia emessa dall'unità di superficie nell'unità di tempo per unità di frequenza; è una funzione della temperatura assoluta del corpo e della frequenza: e = e(v, T). Il *potere assorbente* è la frazione di radiazione elettromagnetica assorbita da un corpo (rapporto tra energia assorbita ed energia incidente): a = a(v, T). Ovviamente, $0 \le a \le 1$.

Ad una determinata temperatura e per una determinata lunghezza d'onda, il rapporto tra il potere emissivo e il potere assorbente è lo stesso per tutti i corpi. (Kirchhoff, 1860)

La legge di Kirchhoff è espressa dalla:

$$\frac{e(v,T)}{a(v,T)} = f(v,T) \tag{V.51}$$

f(v, T) è quindi una *funzione universale*, perché non dipende dalla natura del corpo.

Capitolo V. Onde e particelle

Corpo nero è quello che assorbe tutta la radiazione incidente, qualunque sia la sua lunghezza d'onda. Essendo uguale ad uno il potere assorbente del corpo nero, il suo potere emissivo coincide con la funzione universale definita dall'equazione (V.51). All'equilibrio termico, la radiazione contenuta in una cavità le cui pareti siano impermeabili alla radiazione è della stessa *qualità ed intensità* di quella di un corpo nero alla stessa temperatura (Kirchhoff, 1860). Questa proprietà, espressa all'interno della teoria di Maxwell, assume la forma:

$$u(v,T) = \frac{4}{c} e(v,T)$$

dove u(v, T) è la densità di energia (energia per unità di volume e di frequenza) all'interno della cavità isoterma. Questa conclusione contiene implicitamente l'idea che per realizzare in laboratorio un corpo nero si debba usare un corpo cavo isotermo con un piccolo foro: il fascio di radiazione uscente è un campione della radiazione di corpo nero.

E' possibile ricavare la funzione u(v, T) partendo dalla relazione (XII.29, pagina 374) che fornisce il numero dei *modi di vibrazione* di un'onda elettromagnetica all'interno di una cavità le cui pareti siano costituite da un conduttore: tuttavia, la formula che si ottiene, usando il teorema di equipartizione dell'energia, risulta in contrasto con le osservazioni sperimentali.

Il teorema della equipartizione dell'energia si ricava nel contesto della meccanica statistica classica: considerato un sistema fisico all'equilibrio termico, si deve associare ad ogni suo grado di libertà un'energia pari a kT. Più precisamente, esso prevede che si debba associare un'energia pari a (1/2)kT ad ogni termine quadratico della funzione hamiltoniana del sistema. Come esempio, si consideri un insieme di N particelle in moto armonico lungo la direzione x: esso possiede N gradi di libertà e quindi dobbiamo associare ad esso un'energia pari a NkT. Alternativamente, si consideri la sua funzione hamiltoniana:

$$H = \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{p_i^2}{2m_i} + \frac{k_i x_i^2}{2} \right)$$

Essa contiene 2*N* termini quadratici: quindi l'energia che si deve associare al sistema è 2N(1/2)kT = NkT. Per quanto riguarda il campo elettromagnetico si dimostra che la sua funzione hamiltoniana contiene due termini quadratici per ogni grado di libertà. Il teorema di equipartizione dell'energia si applica quindi anche al campo elettromagnetico.

Si ottiene infatti che:

$$u(v,T) = N(v)kT = \frac{8\pi v^2}{c^3} kT$$
 (V.52)

essendo kT l'energia media associata ad ogni 'modo di vibrazione' permesso. Questa formula, ricavata (fattore numerico a parte) da lord Rayleigh (1900), approssima l'espressione corretta:

$$u(v,T) = \frac{8\pi v^2}{c^3} \frac{hv}{e^{hv/kT} - 1}$$
(V.53)

solo per basse frequenze o temperature elevate (*h* è la costante di Planck).



Figura V.28. densità di energia (per unità di volume e di frequenza) all'interno di una cavità isoterma; equazione (V.53).

Il fatto che la (V.52) approssimi la relazione corretta solo per valori di v/T piccoli, suggerisce che il teorema di equipartizione dell'energia abbia un dominio di applicazione limitato e che tale dominio possa essere individuato mediante una condizione del tipo $E \ll kT$, dove E è un'energia la cui espressione dipende dal sistema fisico considerato. Per esempio, nel caso della radiazione di corpo nero, questa condizione assume la forma $hv \ll kT$; in quello dei calori specifici dei solidi, la forma $\Theta_D \ll T$ dove Θ_D è la temperatura di Debye (pagina 400).

La (V.53) è stata ricavata da Planck (1900).

La derivazione planckiana, come osservato da Einstein (1906), presentava un'inconsistenza logica. Mentre il termine

$$\frac{8\pi v^2}{c^3}$$

era stato ricavato supponendo, secondo la teoria maxwelliana, uno scambio continuo di energia tra oscillatori (costituiti da cariche elettriche in moto armonico) e radiazione elettromagnetica presente nella cavità, il termine

$$\frac{h\nu}{e^{h\nu/kT}-1}$$

era stato ottenuto supponendo, implicitamente, che l'energia degli oscillatori potesse assumere solo valori discreti pari a nhv con n intero: gli oscillatori, quindi, scambiano energia con la radiazione solo per quantità discrete.

Una derivazione rigorosa della (V.53) è possibile considerando la radiazione contenuta nella cavità come costituita da quanti di luce (fotoni) di energia E = hv e quantità di moto lineare p = hv/c (Bose, 1924). Il termine

$$\frac{8\pi v^2}{c^3}$$

si ricava con un procedimento formalmente simile a quello usato per le onde stazionarie nella cavità cubica (sezione XII.8, pagina 372); ma la fisica è diversa. Si considera un volume infinitesimo dello spazio esa - dimensionale (spazio delle fasi) le cui coordinate sono, oltre a quelle spaziali (x, x, z), le componenti delle quantità di moto dei fotoni (p_x, p_y, p_z):

$$(dxdydz)(dp_xdp_ydp_z) = dV4\pi p^2 dp$$

Usando la relazione p = hv/c, questa espressione assume la forma:

$$dV\frac{4\pi v^2}{c^3}h^3dv$$

Si suddivida questo volume in celle di volume h^3 : esso ne contiene un numero pari a

$$\frac{4\pi v^2}{c^3} dv dV$$

e, per unità di volume della cavità, un numero uguale a:

$$\frac{4\pi v^2}{c^3} dv$$

Il punto cruciale di questo calcolo è costituito dalla *assunzione* che lo spazio delle fasi debba essere suddiviso in celle di volume h^3 .

In queste celle dobbiamo 'collocare' i fotoni la cui energia è compresa tra hv e h(v + dv). E' necessaria, tuttavia, una correzione imposta dal fatto che lo stato dei fotoni non è univocamente determinato dallo loro energia e dalla loro quantità di moto lineare: essi posseggono anche una polarizzazione (circolare o lineare) che è specificata in funzione di due distinti stati di polarizzazione circolari o lineari (sezione X.3, pagina 308). In termini più diretti: due fotoni che abbiano la stessa energia e, quindi, la stessa quantità di moto, sono tra loro distinguibili in funzione del loro stato di polarizzazione. Siccome intendiamo considerare, ai fini della statistica che svilupperemo tra poco, i fotoni indistinguibili, possiamo farlo ignorando il loro stato di polarizzazione, purché moltiplichiamo, nel contempo, il numero delle celle per un fattore 2. Quindi, come nel caso ondulatorio discusso in precedenza, partiamo dall'espressione:

$$\frac{8\pi v^2}{c^3}$$

che ha comunque, nelle due derivazioni, significato diverso:

- numero dei modi di vibrazione permessi per unità di volume della cavità e per unità di frequenza (onde);
- numero delle celle di volume h³ dello spazio delle fasi per unità di volume della cavità e per unità di frequenza (fotoni).

Il problema si risolve calcolando il numero di fotoni P_v di energia hv da assegnare alle celle N_v . Poniamo dunque:

$$u(v,T) = P_v h v \tag{V.54}$$

Il numero di modi in cui P_v fotoni, indistinguibili, possono essere distribuiti tra N_v celle distinguibili è:

$$R(P_{\nu}, N_{\nu}) = \frac{(N_{\nu} + P_{\nu} - 1)!}{(N_{\nu} - 1)!P_{\nu}!}$$
(V.55)

Per effettuare il calcolo di *R* è comodo riferirsi alla figura V.29: le aste verticali svolgono il ruolo delle celle (si noti che il loro numero è uguale a quello delle celle diminuito di un'unità); le palline quello dei fotoni. La (V.55) si ricava effettuando le permutazioni di tutti i simboli (aste e palline) cioè le permutazioni degli elementi dell'insieme costituito dalle celle e dai fotoni; queste permutazioni sono ($N_v + P_v - 1$)!;

Capitolo V. Onde e particelle



questo numero deve essere diviso dal numero delle permutazioni delle aste (celle) ($N_v - 1$)! e da quello delle permutazioni delle palline (fotoni) P_v !, perché queste permutazioni corrispondono alla medesima distribuzione.

Si tratta di trovare l'espressione per ogni P_v sotto la condizione:

$$\sum_{P_{\nu}} P_{\nu} h \nu = E \tag{V.56}$$

che fissa l'energia della radiazione per unità di volume nella cavità in corrispondenza di una determinata temperatura *T*. Il numero di modi in cui l'energia *E* può essere distribuita tra le celle N_v è:

$$W = \prod_{P_{v}} R(P_{v}, N_{v}) = \prod_{P_{v}} \frac{(N_{v} + P_{v} - 1)!}{(N_{v} - 1)!P_{v}!}$$

L'entropia della radiazione per unità di volume è:

$$S = k l n W$$

dove k è la costante di Boltzmann. Dobbiamo pertanto di trovare il massimo dell'entropia sotto la condizione (V.56). Condizione necessaria affinché l'entropia abbia un estremo è che:

$$\frac{\partial \phi}{\partial P_{\nu}} = 0 \qquad \text{per ogni} P_{\nu} \tag{V.57}$$

dove, con il parametro λ da determinarsi:

$$\phi = S + \lambda \left(\sum_{P_{v}} P_{v} h v - E \right)$$

Supponendo che N_v e P_v siano numeri grandi rispetto all'unità, possiamo scrivere:

$$(N_{\nu} + P_{\nu} - 1)! \approx (N_{\nu} + P_{\nu})!, \qquad (N_{\nu} - 1)! \approx N_{\nu}!$$

e usare l'approssimazione:

$$lnN! \approx NlnN - N$$

La condizione (V.57) assume allora la forma:

$$k\ln\left(\frac{N_{\nu}}{P_{\nu}}+1\right) = -\lambda h\nu$$

cioè:

$$P_{\nu} = N_{\nu} \frac{1}{e^{-\lambda(h\nu)/k} - 1}$$

Siccome, usando la relazione

$$\left(\frac{\partial S}{\partial E}\right)_V = \frac{1}{T}$$

si ricava che il parametro λ è dato da

$$\lambda = -\frac{1}{T}$$

si ottiene infine:

$$P_{\nu} = N_{\nu} \frac{1}{e^{h\nu/kT} - 1}$$

Quindi, dalla (V.54):

$$u(v,T) = \frac{8\pi v^2}{c^3} \frac{hv}{e^{hv/kT} - 1}$$
(V.58)

Le curve sperimentali che meglio interpolano l'equazione (V.58) sono quelle della radiazione cosmica di fondo, che, come abbiamo visto (sezione II.10, pagina 62), corrisponde a quella emessa da un corpo nero alla temperatura di $2.725 \pm 0.002 K$.

V.13 Lo spettro della radiazione elettromagnetica

Lo spettro della radiazione elettromagnetica può essere suddiviso, per ragioni essenzialmente pratiche, in intervalli a seconda del tipo di sorgente o di rivelatore. Come si vede, questa suddivisione non obbedisce a criteri rigorosi. Per esempio, la luce UV, quella visibile ed il vicino infrarosso, possono avere le medesime sorgenti e gli stessi rivelatori. La distinzione, è, tuttavia, ragionevole per ragioni antropiche (occhio umano) e per le diverse proprietà delle radiazioni connesse alla loro interazione con la materia. Per quanto concerne le sorgenti, è noto che dal Cosmo provengono radiazioni di tutti i tipi; per i rivelatori, si noti l'ampio spettro di utilizzazione delle lastre fotografiche.

Capitolo V. Onde e particelle

Nome	e	Intervallo (m)	Sorgente	Rivelatore macroscopico
Raggi	Îγ	$\lambda < 10^{-11}$	Nuclei atomici	Camere a bolle, contatori di Geiger, lastre fotografiche
Raggi	X	$10^{-11} < \lambda < 10^{-9}$	Urto di elettroni veloci con atomi	Lastre fotografiche, materiali fluorescenti, camere di ionizzazione
Luce	UV	$10^{-9} < \lambda < 3.5 \times 10^{-7}$	Corpi incandescenti, lampade a scarica, scintille	Lastre fotografiche, materiali fluorescenti, fotomoltiplicatori
Luce visibi	le	$3.5 \times 10^{-7} < \lambda < 7.5 \times 10^{-7}$	Corpi incandescenti, lampade a scarica	Lastre fotografiche, fotomoltiplicatori, occhio umano
Infrar	OSSO	$3.5 \times 10^{-7} < \lambda < 10^{-3}$	Corpi caldi	Lastre fotografiche termocoppie, bolometri
Micro	oonde	$10^{-3} < \lambda < 10^{-1}$	Circuiti elettrici speciali (klystron, magnetron)	Diodi a stato solido
Onde	radio	$10^{-1} < \lambda < 10^4$	Circuiti oscillanti	Circuiti oscillanti

 Tabella V.2. i limiti degli intervalli sono solo indicativi; sono elencate solo alcune sorgenti ed alcuni rivelatori.

Capitolo VI

Campi statici o lentamente variabili

Se i campi elettrico e magnetico non dipendono dal tempo, le equazioni di Maxwell per il vuoto assumono la forma:

$$div\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$
$$rot\vec{E} = 0$$
$$div\vec{B} = 0$$
$$rot\vec{B} = \mu_0\vec{J}$$

I campi elettrico e magnetico sono dunque indipendenti l'uno dall'altro: il sistema delle quattro equazioni si scinde in due sistemi indipendenti di due equazioni che regolano, rispettivamente, l'elettrostatica e la magnetostatica.

VI.1 Elettrostatica

Ma se il campo elettromagnetico poteva esistere come un'onda indipendente dalla sorgente materiale, allora l'interazione elettrostatica non poteva essere più spiegata come un'azione a distanza.

Albert Einstein

Capitolo VI. Campi statici o lentamente variabili

I fenomeni elettrostatici nel vuoto sono descritti dalle equazioni:

$$div\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$
(VI.1)

$$rot\vec{E} = 0 \tag{VI.2}$$

Un campo vettoriale il cui rotore sia nullo, si dice *irrotazionale*. Condizione necessaria e sufficiente affinchè un campo vettoriale sia irrotazionale è che esso sia esprimibile come il gradiente di una funzione scalare, detta *potenziale* (scalare) del campo vettoriale. Nel caso elettrostatico si pone $\vec{E} = -grad\varphi e \varphi$ si chiama potenziale elettrostatico (o semplicemente potenziale). Si verifica che la condizione è sufficiente dimostrando, mediante semplice applicazione delle definizioni, che *rot grad* $\varphi \equiv 0$. Per dimostrare che la condizione è necessaria, si osservi che, per il teorema di Stokes:

$$\oint_{l} \vec{E} \cdot \vec{dl} = \int_{S} rot \vec{E} \cdot \hat{n} dS = 0$$

dove l è una linea chiusa e S una qualunque superficie che abbia la linea l come contorno.



Figura VI.1. la circuitazione di un campo irrotazionale da *B* ad *A* non dipende dal percorso.

Il fatto che la circuitazione

$$\oint_l \vec{E} \cdot \vec{d} l$$

del vettore \vec{E} lungo una linea chiusa sia nulla, implica che la sua circuitazione lungo una linea aperta che abbia i punti *A* e *B* come estremi dipende solo dagli estremi e non dalla linea che li congiunge. Infatti (figura VI.1) la circuitazione di \vec{E} è nulla sia lungo la linea chiusa l_1 che lungo l_2 . Allora:

$$\mathscr{C}_{AB} + \mathscr{C}_{BA}^{l_1} = \mathscr{C}_{AB} + \mathscr{C}_{BA}^{l_2} = 0$$

Quindi:

$$\mathscr{C}_{BA}^{l_1} = \mathscr{C}_{BA}^{l_2}$$

qualunque siano l_1 ed l_2 : la circuitazione da *B* ad *A* dipende solo dagli estremi. Esiste allora una funzione φ delle coordinate tale che, qualunque sia la linea *l* che congiunge i punti *A* e *B*:

$$\int_{A}^{B} \vec{E} \cdot \vec{d} \, l = -\int_{A}^{B} d\varphi = \varphi_{A} - \varphi_{B}$$

 $\Rightarrow \varphi_A - \varphi_B$ si chiama *differenza di potenziale* tra i due punti A e B.

Ciò implica che le funzioni integrande siano uguali, cioè che:

$$E_x = -\frac{\partial \varphi}{\partial x}$$
 $E_y = -\frac{\partial \varphi}{\partial y}$ $E_z = -\frac{\partial \varphi}{\partial z}$

o, con notazione equivalente:

$$\vec{E} = -grad\varphi$$

Si consideri ora l'integrale:

$$q\int_{A}^{B} \vec{E} \cdot \vec{d}l = -q\int_{A}^{B} \operatorname{grad} \varphi \cdot \vec{d}l = -q\int_{A}^{B} d\varphi = q(\varphi_{A} - \varphi_{B})$$

Esso rappresenta il lavoro compiuto dalle forze del campo elettrostatico quando la carica puntiforme *q* si sposta da *A* a *B*. L'espressione $q\varphi(\vec{r})$ rappresenta quindi l'energia potenziale della carica *q* posta nel punto \vec{r} : il lavoro compiuto dalle forze del campo quando la carica *q* si sposta da *A* a *B* è uguale alla differenza dell'energia potenziale della carica tra il punto iniziale e quello finale. Il campo elettrostatico è quindi *conservativo*.

Il potenziale elettrostatico è definito a meno di una costante: infatti se a φ si sostituisce $\varphi' = \varphi + C$ il campo \vec{E} rimane immutato perché grad C = 0. Pertanto il potenziale di un punto è sempre riferito rispetto a quello di un altro, assunto come riferimento. Quando la carica puntiforme q è unitaria e positiva, il numero che rappresenta il valore del potenziale nel punto P, espresso in *volt*, è uguale al numero, espresso in *joule*, che rappresenta il lavoro compiuto dalle forze del campo quando la carica si sposta da P al punto di riferimento.

Ponendo $\vec{E} = -grad \varphi$, l'equazione (VI.1) diventa:

$$\nabla^2 \varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \tag{VI.3}$$

Capitolo VI. Campi statici o lentamente variabili

dove:

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

è l'operatore laplaciano. La (VI.3) è l'equazione di Poisson. Quando $\rho = 0$, si ha:

$$\nabla^2 \varphi = 0 \tag{VI.4}$$

La (VI.4) è l'equazione di Laplace.

Si consideri ora un volume τ racchiuso da una superficie S. Si ha:

$$\int_{S} \vec{E} \cdot \hat{n} \, dS = \int_{\tau} di \, v \, \vec{E} \, d\tau = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_{\tau} \rho \, d\tau = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

dove è stato applicato il teorema della divergenza e dove Q rappresenta la carica totale racchiusa nel volume τ . L'uguaglianza tra il primo e l'ultimo membro della precedente equazione costituisce il *teorema di Gauss*: il flusso del campo elettrostatico attraverso una superficie chiusa è uguale alla carica contenuta nel volume racchiuso dalla superficie divisa per la costante dielettrica del vuoto.

VI.1.1 La legge di Coulomb

Nella sezione IV.3 (pagina 99) è già stata ricavata, come caso limite, l'espressione del campo elettrico dovuto ad una carica puntiforme in quiete. La stessa espressione sarà ricavata usando il teorema di Gauss. Si consideri una superficie sferica di raggio r con la carica puntiforme q al suo centro. Il campo elettrico generato dalla carica sulla superficie sferica non può avere componenti tangenti ad essa per ragioni di simmetria: è quindi radiale; inoltre, sempre per ragioni di simmetria, il suo modulo ha lo stesso valore in tutti i punti della superficie sferica. Il teorema di Gauss implica allora che:

$$E(r)\,4\pi r^2 = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

da cui:

$$E(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{r^2}$$

che è la legge di Coulomb.

Nel caso di più cariche puntiformi che generano il campo si applica la regola di sovrapposizione: il campo è allora dato dalla somma vettoriale dei campi prodotti dalle singole cariche e, analogamente, il potenziale elettrostatico è dato dalla somma algebrica dei potenziali dovuti alle singole cariche.

Campo elettrico di un disco carico. Si consideri una distribuzione di carica uniforme su una superficie circolare: sia σ la densità di carica del disco e si supponga sia positiva (figura VI.2).



Figura VI.2. per il calcolo del campo elettrico dovuto ad un disco di raggio R, uniformemente carico.

Si intende calcolare il valore del campo elettrico generato dal disco in un punto P del suo asse distante d dal suo centro. Si consideri la corona circolare compresa tra le circonferenze di raggio r e r + dr. Il campo elettrico dovuto ad essa è perpendicolare al disco, diretto come indicato in figura e il suo modulo vale:

$$dE = \frac{\sigma}{4\pi\varepsilon_0} \frac{2\pi r dr}{d^2 + r^2} \cos\alpha$$

Essendo $r = d \tan \alpha$ e $dr = d \cdot d\alpha / \cos^2 \alpha$, si ha:

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \int_0^\alpha \sin \alpha \, d\alpha = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} (1 - \cos \alpha) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \left(1 - \frac{d}{\sqrt{R^2 + d^2}} \right) \tag{VI.5}$$

Se $R \gg d$, vale l'approssimazione:

$$E \approx \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \left(1 - \frac{d}{R} \right)$$

Per $R \to \infty$ ($\alpha \to \pi/2$), il disco si trasforma in un piano indefinito e la (VI.5) diventa:

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

VI.1.2 Il dipolo elettrico elementare

Il *dipolo elettrico elementare* è costituito da due cariche elettriche *q* uguali in valore assoluto, ma di segno opposto, poste ad una distanza fissa *d* (figura VI.3). Come si vedrà più avanti, in natura, i dipoli elettrici elementari si presentano in alcune molecole o possono essere indotti nella materia mediante l'applicazione di campi elettrici esterni. Si inizia con il calcolo del potenziale elettrostatico prodotto da un dipolo elettrico elementare. Il potenziale nel punto P è dato da:



Figura VI.3. il dipolo elettrico elementare.

Questa espressione, per $r \gg d$, può essere così approssimata:

$$V_P \approx \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{d\cos\theta}{r^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\vec{p}\cdot\vec{r}}{r^3} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \vec{p}\cdot grad\frac{1}{r}$$
(VI.6)

dove $\vec{p} = |q| \vec{d}$ è il momento di dipolo elettrico del dipolo: \vec{d} è il vettore di modulo uguale alla distanza tra le due cariche la cui direzione è quella di un vettore spiccato dalla carica negativa verso quella positiva. Siccome il sistema fisico ha simmetria cilindrica con asse coincidente con la direzione del dipolo, è opportuno sviluppare il calcolo del campo elettrico usando le coordinate polari (r, θ, φ). Ricordando che le componenti dell'operatore gradiente in coordinate polari sono (equazione XV.11 a pagina 441):

$$(grad)_{r} = \frac{\partial}{\partial r}$$
$$(grad)_{\theta} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}$$
$$(grad)_{\varphi} = \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \varphi}$$

si ottiene:

$$E_r = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{2p\cos\theta}{r^3}$$
$$E_\theta = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{p\sin\theta}{r^3}$$
$$E_\varphi = 0$$

Si consideri ora un dipolo elettrico elementare, trattato come un corpo rigido dal punto di vista meccanico, immerso in un campo elettrico esterno (figura VI.4).



Figura VI.4. per il calcolo delle forze agenti su un dipolo posto in un campo elettrico esterno.

La componente F_x del risultante delle forze agenti sul dipolo sarà:

$$F_x = -qE_x(\vec{r}) + qE_x(\vec{r} + \vec{d}r)$$

= $-qE_x(\vec{r}) + qE_x(\vec{r}) + q(grad E_x \cdot \vec{d}r)$
= $-qE_x(\vec{r}) + qE_x(\vec{r}) + \vec{p} \cdot grad E_x$

dove \vec{r} è il vettore posizione della carica negativa e $\vec{r} + \vec{dr}$ quello della carica positiva (è stata assunta come infinitesima la distanza dr tra le due cariche). Siccome formule analoghe valgono per F_y e F_z , si avrà:

$$\vec{F} = -q\vec{E}(\vec{r}) + q\vec{E}(\vec{r}) + + (\vec{p} \cdot grad E_x)\hat{\imath} + (\vec{p} \cdot grad E_y)\hat{\jmath} + (\vec{p} \cdot grad E_z)\hat{k}$$
(VI.7)

Capitolo VI. Campi statici o lentamente variabili

Siccome il campo elettrico è conservativo, valgono le relazioni:

$$\frac{\partial E_z}{\partial y} = \frac{\partial E_y}{\partial z} \qquad \frac{\partial E_x}{\partial z} = \frac{\partial E_z}{\partial x} \qquad \frac{\partial E_y}{\partial x} = \frac{\partial E_x}{\partial y}$$

Pertanto, sviluppando i prodotti scalari della (VI.7), si ottiene:

$$\vec{F} = -q\vec{E}(\vec{r}) + q\vec{E}(\vec{r}) + grad(\vec{p}\cdot\vec{E})$$
(VI.8)

Le due forze $-q\vec{E}(\vec{r})$ e $q\vec{E}(\vec{r})$, a risultante nullo, danno origine ad una coppia di forze avente un momento $\vec{\Gamma} = \vec{p} \times \vec{E}$. L'effetto complessivo sarà dunque un orientamento del dipolo nella direzione del campo (per opera della coppia agente su di esso) ed un moto del dipolo dovuto alla forza risultante agente su di esso.

L'energia potenziale del dipolo è data da:

$$U = -qV(\vec{r}) + qV(\vec{r} + d\vec{r})$$

= $-qV(\vec{r}) + q\left[V(\vec{r}) + \frac{\partial V(\vec{r})}{\partial x}dx + \frac{\partial V(\vec{r})}{\partial y}dy + \frac{\partial V(\vec{r})}{\partial z}dz\right]$
= $-\vec{p}\cdot\vec{E}$ (VI.9)

Si noti come il risultante delle forze agenti sul dipolo, dato dalla (VI.8), sia esprimibile come il gradiente, cambiato di segno, dell'energia potenziale:

$$\vec{F} = -gradU$$

Si ricordi infine che la relazione dU = -dL, che lega la variazione di energia potenziale al lavoro compiuto dalle forze del campo, assume, nel caso generale, la forma:

$$dU = -\vec{\Gamma} \cdot \vec{d\theta} - \vec{F} \cdot \vec{dl}$$

dove $\vec{\Gamma}$ è il momento agente sul dipolo, \vec{F} la forza agente su di esso, $d\theta$ il vettore che individua la rotazione infinitesima del dipolo e dl il suo spostamento infinitesimo.

VI.1.3 Potenziale elettrostatico di una distribuzione di carica

Si consideri il potenziale dovuto ad una distribuzione di carica statica racchiusa in un volume τ_2 (figura VI.5):

$$V(\vec{r}_{1}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_{0}} \int_{\tau_{2}} \frac{\rho(\vec{r}_{2})}{r_{21}} d\tau_{2}$$



Figura VI.5. per il calcolo del potenziale dovuto ad una distribuzione di carica.

Se $r_2 \ll r_1$, se cioè la distribuzione di carica è sufficientemente lontana dal punto in cui si intende calcolare il potenziale, si può sviluppare in serie la funzione $1/r_{21}$ intorno al punto $r_2 = 0$. Fermandosi al primo termine dello sviluppo, si ottiene:

$$\frac{1}{r_{21}} \approx \frac{1}{r_1} + \left[\frac{\partial}{\partial x_2} \frac{1}{r_{21}}\right]_{r_2=0} x_2 + \left[\frac{\partial}{\partial y_2} \frac{1}{r_{21}}\right]_{r_2=0} y_2 + \left[\frac{\partial}{\partial z_2} \frac{1}{r_{21}}\right]_{r_2=0} z_2$$

Cioè:

$$\frac{1}{|r_{21}|} \approx \frac{1}{r_1} + \frac{x_1}{r_1^3} x_2 + \frac{y_1}{r_1^3} y_2 + \frac{z_1}{r_1^3} z_2$$

Infine:

$$\frac{1}{|r_{21}|} \approx \frac{1}{r_1} + \frac{\vec{r}_1 \cdot \vec{r}_2}{r_1^3}$$

Il potenziale nel punto \vec{r}_1 risulta allora:

$$V(\vec{r}_1) \approx \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q}{r_1} + \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}_1}{r_1^3}$$

dove è stato posto:

$$\vec{p} = \int_{\tau_2} \rho(\vec{r}_2) \, \vec{r}_2 \, d\tau_2$$
 (VI.10)

Quindi il potenziale elettrostatico di una distribuzione di carica delimitata da un volume finito in punti sufficientemente lontani dalla distribuzione stessa è dato, in prima approssimazione, dalla somma di due termini: uno coulombiano (di monopolo) e l'altro di dipolo, dove il dipolo della distribuzione di carica è dato dalla (VI.10). Tenendo conto anche del termine quadratico nello sviluppo in serie di $1/r_{21}$ si ottiene per il potenziale un termine aggiuntivo, detto di quadrupolo, che decresce come r_1^{-3} :

$$V_Q(\vec{r}_1) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{r_1^3} \int_{\tau_2} \rho(\vec{r}_2) \left[\frac{3}{2} (\vec{r}_2 \cdot \hat{r}_1)^2 - \frac{r_2^2}{2} \right] d\tau_2$$

dove, come al solito, $\hat{r}_1 \cdot r_1 = \vec{r}_1$.

Si noti come il termine di monopolo Q/r_1 sia nullo se la distribuzione di carica è complessivamente neutra. Tuttavia, anche quando Q = 0, i termini successivi dello sviluppo possono essere diversi da zero: dipende da come la carica, complessivamente neutra, è distribuita nel volume considerato. Per esempio, se la distribuzione di carica è dotata di centro di simmetria - per cui $\rho(\vec{r}_2) = \rho(-\vec{r}_2)$ - il suo momento di dipolo è nullo, mentre non lo è, in generale, il suo momento di quadrupolo.

VI.2 Isolanti

Gli isolanti sono materiali privi di cariche elettriche libere di muoversi: gli elettroni sono stabilmente legati agli atomi (si veda anche a pagina 404).



Figura VI.6. la molecola dell'acqua possiede un momento di dipolo elettrico permanente, perché i baricentri delle cariche positive e negative non coincidono.

In un atomo isolato, la distribuzione media della carica elettronica ha simmetria sferica: il suo momento di dipolo è quindi nullo. Esistono tuttavia molecole dotate di dipolo elettrico permanente: un esempio è costituito dalla molecola dell'acqua (figura VI.6).

VI.2.1 Isolanti in campi elettrici

E' possibile indurre un momento di dipolo elettrico in un sistema atomico o molecolare sottoponendolo a un campo elettrico. In figura VI.7 è schematizzato un atomo: la carica elettronica è descritta come una sfera omogenea non deformabile.

In un campo elettrico, il nucleo e la carica elettronica sono sottoposte a forze uguali e contrarie che tendono a separarli; tale separazione è tuttavia contrastata dall'attrazione coulombiana tra le due cariche atomiche. Il risultato



Figura VI.7. polarizzazione di un atomo. La nuvola elettronica è considerata uniforme, a simmetria sferica e indeformabile. A sinistra l'atomo in assenza di campo. A destra, in presenza del campo elettrico \vec{E}_l : nucleo positivo e baricentro della carica negativa sono spazialmente separati di una distanza *d*. Il dipolo indotto è uguale a *q d*.

sarà una deformazione dell'atomo con conseguente comparsa di un momento di dipolo elettrico di modulo qd dove d è la distanza di equilibrio tra il nucleo (puntiforme) ed il centro della sfera elettronica: si dice che l'atomo si trova in uno stato di polarizzazione e che questa polarizzazione è stata indotta per deformazione. Si suppone che il dipolo elettrico indotto per deformazione in un atomo (molecola) sia proporzionale al campo elettrico inducente:

$$\vec{p} = \alpha_d \vec{E}_l$$

dove α_d è la polarizzazbilità atomica e il suffisso *d* indica che si tratta di polarizzazione per deformazione. \vec{E}_l è il campo elettrico che agisce sull'atomo: il suffisso *l* indica che si tratta del *campo elettrico locale*. In un mezzo materiale esso è distinto dal campo elettrico macroscopico che compare nelle equazioni di Maxwell e in quelle derivate (sezione VI.2.4, pagina 191).

Si consideri ora un sistema fisico macroscopico, per esempio un *gas di molecole*, i cui costituenti microscopici posseggano un momento di dipolo permanente. Il momento di dipolo elettrico per unità di volume \vec{P} è così definito:

$$\vec{P} = \frac{\sum_i \vec{p}_i}{\Delta \tau}$$

dove \vec{p}_i è il momento di dipolo della molecola i - esima e la somma è effettuata su tutte le molecole contenute nel volume $\Delta \tau$; $\Delta \tau$ deve essere sufficientemente grande per contenere un numero significativo di molecole e sufficientemente piccolo da poter rendere la funzione \vec{P} sensibile ad eventuali variazioni spaziali. In assenza di un campo elettrico - a causa degli urti tra le molecole e tra le molecole e le pareti del recipiente - il valore medio del momento di dipolo per unità di volume del gas sarà nullo. Se si applica

Capitolo VI. Campi statici o lentamente variabili

un campo elettrico uniforme, esso agirà sulle molecole del gas in due modi. Innanzitutto il campo elettrico indurrà in ciascuna di esse un dipolo elettrico (per deformazione): tale dipolo indotto è, in genere, trascurabile rispetto a quello permanente delle molecole. In secondo luogo, il campo elettrico tenderà ad orientare i dipoli delle molecole lungo la propria direzione; tale processo di orientamento sarà tuttavia contrastato dai processi d'urto delle molecole. Il risultato complessivo sarà che l'isolante risulterà polarizzato: il suo stato di polarizzazione sarà completamente descritto dalla funzione $\vec{P}(x, x, z)$.

VI.2.2 Isolante polarizzato

Si consideri un isolante polarizzato: il momento di dipolo per unità di volume \vec{P} , detto anche *vettore polarizzazione elettrica*, sarà allora definito in ogni suo punto. Ci proponiamo di calcolare il potenziale elettrostatico in un punto *P* dovuto alla polarizzazione dell'isolante (figura VI.8).



Per la (VI.6), il potenziale nel punto *P* individuato dal vettore \vec{r}_1 sarà dato da:

$$V(\vec{r}_1) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_{\tau_2} \vec{P}(\vec{r}_2) \cdot \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3} d\tau_2$$

Ma:

$$\frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3} = -\frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3} = grad \frac{1}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|}$$

Quindi:

$$V(\vec{r}_1) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_{\tau_2} \vec{P}(\vec{r}_2) \cdot grad \frac{1}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|} d\tau_2$$

Usando l'identità:

$$div(f\vec{T}) = \vec{T} \cdot gradf + f div\vec{T}$$

si ottiene:

$$V(\vec{r}_{1}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_{0}} \left[\int_{\tau_{2}} di \, v \left(\vec{P} \cdot \frac{1}{|\vec{r}_{1} - \vec{r}_{2}|} \right) d\tau_{2} - \int_{\tau_{2}} \frac{di \, v \, \vec{P}}{|\vec{r}_{1} - \vec{r}_{2}|} \, d\tau_{2} \right]$$

e, usando il teorema della divergenza:

$$V(\vec{r}_1) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \left[\int_{S_2} \frac{\vec{P} \cdot \hat{n}}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|} dS_2 - \int_{\tau_2} \frac{di\nu \vec{P}}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|} d\tau_2 \right]$$

dove S_2 è la superficie che delimita l'isolante. Il potenziale elettrostatico dovuto ad un isolante polarizzato è quindi equivalente a quello dovuto ad una distribuzione di carica $\rho_p = - \operatorname{div} \vec{P}$ sul volume dell'isolante e ad una distribuzione di carica $\sigma_p = \vec{P} \cdot \hat{n}$ sulla sua superficie, dove \hat{n} è il versore normale uscente. Se l'isolante è omogeneo, la densità di carica ρ_p è nulla, perché $\operatorname{div} \vec{P} = 0$.

VI.2.3 Costante dielettrica

Si supponga che in un mezzo materiale siano contemporaneamente presenti cariche libere e cariche di polarizzazione. Dal punto di vista delle proprietà elettriche, il mezzo è completamente descritto dalle densità di carica libera ρ e di polarizzazione ρ_p poste nel vuoto. Si può allora usare la prima equazione di Maxwell per il vuoto che assume la forma:

$$div\vec{E} = \frac{\rho + \rho_p}{\varepsilon_0}$$

Essendo $\rho_p = -div \vec{P}$:

$$div\left(\varepsilon_{0}\vec{E}+\vec{P}\right)=\rho\tag{VI.11}$$

Il vettore $\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$ ha quindi come sorgenti le sole cariche libere:

$$div\vec{D} = \rho$$

Esso si chiama, per ragioni storiche, *vettore spostamento elettrico*. Tuttavia, l'introduzione di questo nuovo vettore non è utile se non si stabilisce una relazione tra $\vec{P} \in \vec{E}$. Si *assume* che sia:

$$\vec{P} = \varepsilon_0 \chi_e \vec{E} \tag{VI.12}$$

dove χ_e è la suscettività elettrica del materiale. La relazione (VI.12) vale solo quando i campi elettrici polarizzanti sono piccoli rispetto a quelli interni

Capitolo VI. Campi statici o lentamente variabili

agli atomi. Quando quest'ultima condizione non è verificata, il modulo del vettore polarizzazione dipende anche dalle potenze di *E* maggiori di uno. Sostituendo la (VI.12) nella (VI.11) e ponendo $1 + \chi = \varepsilon_r$, si ottiene:

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \vec{E} = \varepsilon \vec{E}$$

dove $\varepsilon = \varepsilon_0 \varepsilon_r$ si chiama costante dielettrica assoluta e ε_r è la costante dielettrica relativa.

Se il mezzo materiale è omogeneo e isotropo, χ_e è una costante. L'equazione (VI.11) diventa allora:

$$div \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon}$$
(VI.13)

La (VI.13) implica che in un mezzo materiale omogeneo e isotropo di costante dielettrica ε il teorema di Gauss assuma la forma:

$$\int_{S} \vec{E} \cdot \hat{n} \, dS = \frac{Q}{\varepsilon}$$

e che il campo elettrico dovuto ad una carica puntiforme q si scriva:

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon} \frac{\vec{r}}{r^3}$$

Ciò comporta che, rispetto al vuoto, l'intensità delle interazioni elettriche viene ridotta di un fattore ε_r .

I risultati sinora ottenuti sono validi per materiali omogenei e isotropi. Nel caso più generale di un mezzo anisotropo e non omogeneo, la relazione tra polarizzazione elettrica e campo elettrico si scrive:

$$P_i = \varepsilon_0 \sum_j \chi_{ij} E_j; \quad i = 1, 2, 3; \ j = 1, 2, 3$$
 (VI.14)

dove χ_{ij} è un tensore (di rango 2) simmetrico: è allora possibile individuare una terna di assi cartesiani ortogonali che diagonalizza il tensore in un punto prescelto dello spazio. Se le componenti del tensore non dipendono dalla posizione (materiale omogeneo) si può diagonalizzare il tensore in tutta la regione spaziale in cui è definito: la (VI.14) si riduce allora alle:

$$P_i = \varepsilon_0 \chi_i E_i; \quad i = 1, 2, 3$$

Il vettore polarizzazione \vec{P} non è quindi, in generale, diretto come il campo elettrico: esso lo è solo lungo tre direzioni privilegiate.

Si ricordi infine che le considerazioni svolte si riferiscono al caso statico. Nel caso di campi elettrici variabili nel tempo (per esempio quelli associati a onde elettromagnetiche) i fenomeni di polarizzazione dipendono dalla velocità di variazione del campo elettrico (dalla sua frequenza se esso è periodico). Per valutare qualitativamente i fenomeni coinvolti, si consideri un liquido polare, per esempio l'acqua. Sotto l'azione di un campo elettrico le molecole d'acqua tendono ad orientarsi in modo che il loro dipolo elettrico sia diretto come il campo elettrico. Tale processo di orientazione richiede un intervallo di tempo finito, dipendente dall'orientazione iniziale della molecola e dal suo momento d'inerzia. Se il periodo del campo elettrico agente è molto più piccolo del tempo mediamente necessario ad una molecola per orientarsi, è come se la molecola fosse sottoposta, per quanto concerne il processo di orientazione, ad un campo elettrico nullo. Tuttavia, il campo elettrico agisce sulle cariche della molecola, polarizzandole per deformazione. A basse frequenze è prevalente la polarizzazione per orientamento; a frequenze elevate è presente solo la polarizzazione per deformazione.

La costante dielettrica di un isolante può essere misurata come descritto nella sezione XII.6.3 (pagina 364).

VI.2.4 Campo elettrico locale

I campi elettrici che compaiono nelle formule relative ai mezzi materiali sono, se non indicato diversamente, campi elettrici medi, valutati cioè su distanze dello stesso ordine di grandezza di quelle necessarie alla definizione del vettore polarizzazione elettrica. Indicata con Δl questa distanza, deve essere: $E\Delta l = \Delta V$, dove ΔV è la differenza di potenziale ai capi di Δl .¹ Per calcolare il campo elettrico locale agente su di un atomo (o una molecola), si procede nel modo seguente.

La figura VI.9 rappresenta un condensatore carico tra le cui armature è posto un dielettrico omogeneo:² sono simbolicamente indicate le cariche libere sulle armature σ , le cariche di polarizzazione che si affacciano sulle armature σ_p , nonché il vettore polarizzazione \vec{P} . Intorno al punto O in cui intendiamo calcolare il campo elettrico è stata tracciata una sfera S di raggio r. Il campo *elettrico locale* in O è definito dall'equazione:

$$\vec{E}_l = \vec{E}_0 + \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3$$

dove:

¹Si è sinora indicato il potenziale scalare con il simbolo φ . D'ora innanzi indicheremo il potenziale elettrostatico con il simbolo tradizionale *V*.

²Si veda a pagina 351.

Capitolo VI. Campi statici o lentamente variabili



Figura VI.9. per il calcolo del campo elettrico locale. Si veda il testo.

- $\diamond \vec{E}_0$ è il campo dovuto alle cariche libere σ sulle armature;
- ♦ \vec{E}_1 è il campo dovuto alle cariche di polarizzazione σ_p che si affacciano sulle armature;
- ♦ \vec{E}_2 è il campo dovuto alle cariche di polarizzazione che si affacciano sulla superficie della sfera *S*;
- ♦ \vec{E}_3 è il campo dovuto agli atomi (molecole) contenuti nella sfera *S*, eccettuato l'atomo posto in *O*.

Si noti che il campo elettrico (medio) che compare nelle equazioni di Maxwell e in quelle derivate è dato da:

$$\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}_1$$

Nel caso in cui la disposizione degli atomi all'interno della sfera *S* abbia simmetria sferica (gas o liquido) o cubica (cristallo a simmetria cubica), il campo elettrico \vec{E}_3 risulta nullo.

La componente del campo elettrico \vec{E}_2 lungo la direzione di \vec{P} è data da (la componente perpendicolare è nulla per ragioni di simmetria):

$$E_{2}^{\parallel} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_{0}} \int_{0}^{\pi} \left[(-P\cos\theta 2\pi r^{2}\sin\theta d\theta) \frac{1}{r^{2}} (-\cos\theta) \right]$$
$$= \frac{P}{2\varepsilon_{0}} \int_{0}^{\pi} \sin\theta \cos^{2}\theta d\theta = \frac{P}{2\varepsilon_{0}} \left[-\frac{1}{3}\cos^{3}\theta \right] = \frac{P}{3\varepsilon_{0}}$$

dove $(-P\cos\theta)$ è la carica di polarizzazione che si affaccia sulla superficie *S*. Nel caso di simmetria sferica o cubica risulta pertanto:

$$\vec{E}_l = \vec{E} + \frac{\vec{P}}{3\varepsilon_0} \tag{VI.15}$$

dove \vec{E} è il campo elettrico macroscopico.

VI.2.5 Modello microscopico di un gas isolante

Sinora abbiamo studiato gli isolanti supponendo di conoscere la funzione $\vec{P}(x, y, z)$ che ne descrive lo stato di polarizzazione. Mostreremo ora come si possa ricavare l'espressione di \vec{P} nel caso di un gas costituito da molecole dipolari.

Si supponga che il campo elettrico locale \vec{E}_l , agente su ogni molecola, sia diretto come l'asse z e sia θ l'angolo formato dal dipolo di una molecola con la direzione del campo. Il numero di molecole per unità di volume il cui dipolo forma con la direzione del campo un angolo compreso tra $\theta = \theta + d\theta$ sarà dato da:

$$n(\theta)d\theta = Ae^{-U/kT}2\pi\sin\theta d\theta \qquad (VI.16)$$

dove *A* è una costante da determinarsi, *U* l'energia potenziale di una molecola nel campo elettrico, $2\pi \sin\theta d\theta$ l'angolo solido compreso tra $\theta \in \theta + d\theta$ (figura VI.10), *k* la costante di Boltzmann e *T* la temperatura assoluta.



Figura VI.10. l'angolo solido compreso tra le due superficî coniche è $d\Omega = 2\pi \sin\theta d\theta$.

Siccome $U = -pE_l \cos\theta$ (equazione VI.9, pagina 184), supponendo $pE_l \ll kT$ (cioè che l'energia d'interazione dipolo - campo elettrico sia trascurabile rispetto all'energia termica media traslazionale della molecola data da (3/2)kT), si ottiene:

$$n(\theta)d\theta \approx A2\pi\sin\theta d\theta \left(1 + \frac{pE_l}{kT}\cos\theta\right)$$

Capitolo VI. Campi statici o lentamente variabili

⇒ Nel caso del vapore d'acqua, il momento di dipolo di ogni molecola è pari a $p = 6.3 \times 10^{-30} Cm$: ponendo $E_l = 10^5 Vm^{-1}$ e T = 373 K, si ottiene che il rapporto pE_l/kT è dell'ordine di 10^{-4} .

Integrando su tutto l'angolo solido, cioè integrando l'equazione precedente tra 0 e π si ottiene che $A = N/4\pi$ dove N è il numero di molecole per unità di volume: l'integrazione si effettua ponendo cos $\theta = x$; di conseguenza sarà $-\sin\theta d\theta = dx$.

Il valore medio della componente del dipolo elettrico di una molecola lungo la direzione *z* sarà dato da (l'integrazione si effettua ponendo come in precedenza $\cos \theta = x$):

$$< p_z > \approx \frac{1}{N} \int_0^{\pi} n(\theta) p \cos \theta \, d\theta = p \frac{pE_l}{3kT} = \alpha_0 E_l$$

dove $\alpha_0 = p^2/3kT$. Il momento di dipolo elettrico medio per unità di volume dovuto ai dipoli permanenti delle molecole, ha quindi l'espressione:

$$P_z \approx Np \frac{pE_l}{3kT} \tag{VI.17}$$

Nel caso di un gas o vapore, il campo elettrico locale è legato al campo elettrico macroscopico dalla (VI.15). La (VI.17) assume pertanto la forma:

$$P_z = \frac{3\varepsilon_0 A}{3\varepsilon_0 - A} E$$

dove abbiamo posto $A = Np^2/3kT$. Siccome $A \ll 3\varepsilon_0$, si ottiene infine:

$$P_z \approx Np \frac{pE}{3kT}$$

dove E è il campo elettrico macroscopico.

⇒ Nel caso già considerato del vapore d'acqua a 373 K e alla pressione di una atmosfera, il valore di $A \rightleftharpoons \approx 5 \times 10^{-14} Fm^{-1}$ che va paragonato a $3\varepsilon_0 = 2.65 \times 10^{-11} Fm^{-1}$.

Per effettuare il calcolo non approssimato, si riprende la (VI.16) per ottenere, integrandola:

$$N = A \int_0^{\pi} e^{pE_l \cos\theta/kT} 2\pi \sin\theta d\theta$$

da cui:

$$A = \frac{N}{\int_0^{\pi} e^{pE_l \cos\theta/kT} 2\pi \sin\theta d\theta}$$

Pertanto:

$$< p_z >= \frac{\int_0^{\pi} p \cos\theta e^{pE_l \cos\theta/kT} 2\pi \sin\theta d\theta}{\int_0^{\pi} e^{pE_l \cos\theta/kT} 2\pi \sin\theta d\theta}$$

Ponendo:

$$y = \frac{pE_l}{kT} \qquad \cos\theta = x$$

l'espressione precedente diventa:

$$< p_z >= p \frac{\int_{-1}^{+1} e^{yx} x dx}{\int_{-1}^{+1} e^{yx} dx}$$

Calcolando gli integrali, si ottiene infine:

$$\langle p_z \rangle = p\left(\coth y - \frac{1}{y}\right) \qquad y = \frac{pE_l}{kT}$$

La funzione

$$L(y) = \left(\coth y - \frac{1}{y}\right) \tag{VI.18}$$

detta funzione di Langevin, è mostrata in figura VI.11.



Conduttori in equilibrio elettrico **VI.3**

Si definiscono conduttori quei materiali che posseggono cariche libere di muoversi sotto l'azione di campi elettrici. Una classe particolare di conduttori è costituita dai metalli in cui le cariche libere sono elettroni (si veda anche a pagina 404). Tipicamente, un metallo contiene circa 5×10^{22} elettroni
Capitolo VI. Campi statici o lentamente variabili

liberi per cm^3 . In condizioni di equilibrio termico la velocità media di questi elettroni è nulla. Il metallo è allora in equilibrio elettrico. Ciò implica che il campo elettrico al suo interno deve essere nullo: se non lo fosse, le cariche libere avrebbero velocità media diversa da zero. Se il campo elettrico è nullo in ogni punto del metallo, ne consegue che anche la sua divergenza è nulla: per la prima equazione di Maxwell la densità di carica volumica deve essere nulla. Ne segue allora che le cariche di un metallo elettricamente carico si distribuiscono sulla sua superficie esterna. Questa precisazione è resa necessaria per includere anche il caso di metalli cavi.



Figura VI.12. metallo cavo carico in equilibrio elettrico. Si veda il testo.

Si consideri infatti il metallo cavo della figura VI.12. Sia *S* una superficie che si estende dentro il corpo del metallo: il flusso del campo elettrico attraverso di essa è nullo, perché il campo elettrico è nullo in ogni suo punto. Per il teorema di Gauss, la carica totale contenuta al suo interno deve essere nulla. Siccome è sempre nulla la carica volumica, ci potrebbe essere solo una distribuzione di cariche globalmente nulla sulla superficie interna, per esempio, del tipo mostrato in figura. Si consideri allora una linea chiusa *l* che si sviluppi in parte nel corpo del metallo e che, nella cavità, coincida con una linea di campo: la circuitazione del campo elettrostatico lungo di essa è nulla. La circuitazione lungo il tratto di linea che si sviluppa nel vuoto sarebbe positiva se il senso di circuitazione andasse dalle cariche positive verso quelle negative: la circuitazione lungo la linea chiusa sarebbe allora diversa da zero, perché la circuitazione lungo il tratto interno al metallo è nulla. La conclusione è che non ci possono essere cariche distribuite sulla superficie interna del corpo cavo.

Si consideri ora un metallo carico in equilibrio elettrico. Si è visto che la carica deve essere distribuita sulla sua superficie esterna. Sia σ la densità di carica superficiale, variabile da punto a punto. Si afferma che il potenziale

elettrostatico V del metallo è lo stesso in ogni suo punto. Se non lo fosse, ci sarebbero delle zone del metallo in cui il campo elettrico è diverso da zero (perché in queste zone sarebbe diverso da zero grad V). Il valore di V può essere calcolato nel modo seguente (figura VI.13).



Figura VI.13. per il calcolo del potenziale di un conduttore carico.

Se P è un punto situato sulla superficie del conduttore, allora, assumendo come punto di riferimento del potenziale un punto situato all'infinito:

$$V(P) - V(\infty) = \int_P^\infty \vec{E}(\vec{r}_2) \cdot \vec{dl}$$

dove la linea di integrazione è arbitraria e dove:

$$\vec{E}(\vec{r}_2) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_S \frac{\sigma(\vec{r}_1) \, dS}{r_{12}^3} \, \vec{r}_{12}$$

Si osservi ora che, indicata con Q la carica totale del conduttore, si ha:

$$\sigma(\vec{r}_1) = Qf(\vec{r}_1)$$

per cui:

$$V(P) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \int_P^\infty \left(\int_S \frac{f(\vec{r}_1) \, dS}{r_{12}^3} \vec{r}_{12} \right) \cdot \vec{dl} \tag{VI.19}$$

dove si è posto $V(\infty) = 0$. Il valore dell'integrale che compare nella (VI.19) può dipendere solo dalla forma geometrica della superficie *S* e dalla funzione $f(\vec{r}_1)$, dipendente a sua volta dalla geometria della superficie *S*. Pertanto, l'equazione (VI.19) può essere scritta nella forma seguente:

$$V = \frac{Q}{C}$$
(VI.20)

Capitolo VI. Campi statici o lentamente variabili

dove *C* è chiamata *capacità* del conduttore e dipende solo dalla sua forma geometrica. L'equazione (VI.20) connette la capacità di un conduttore con il suo potenziale e la sua carica elettrica.

L'energia elettrostatica di un metallo è data dalla relazione:

$$U = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2}CV^2 = \frac{1}{2}QV$$
 (VI.21)

Infatti, se q è la carica di un metallo il cui potenziale è V, aumentando la sua carica di una quantità pari a dq, la sua energia elettrostatica varia di:

$$dU = Vdq = \frac{q}{C}dq$$

Ne segue che l'energia elettrostatica U corrispondente alla carica finale Q è data dalla (VI.21).



Figura VI.14. per il calcolo della componente tangenziale del campo elettrico all'esterno di un metallo. La freccia indica il senso lungo cui si calcola la circuitazione del campo elettrico. A rigore, il tratto interno al rettangolo, che rappresenta la superficie di separazione tra i due mezzi dovrebbe essere raffigurato, essendo infinitesimo, da un segmento rettilineo.

Si consideri ora un punto *P* esterno al metallo, ma infinitamente vicino alla sua superficie (figura VI.14) e una linea di circuitazione rettangolare passante per esso e avente due lati infinitesimi dl_1 paralleli alla superficie - uno interno e l'altro esterno - e due lati infinitesimi dl_2 ad essa perpendicolari. La circuitazione del campo elettrico lungo questa linea è data da:

$$E_{en}\frac{dl_2}{2} + E_{et}dl_1 - (E_{en} + dE_{en})\frac{dl_2}{2} = 0$$

perché il contributo alla circuitazione del tratto interno al metallo è zero (E = 0). I suffissi *e*, *t*, *n* denotano le componenti del campo esterne, interne, tangenti e normali, rispettivamente. Siccome il termine $dE_{en}dl_2/2$ è un infinitesimo di ordine superiore rispetto agli altri, ne segue che $E_{et} = 0$, cioè che la componente tangenziale del campo elettrico nel punto P è nulla, così come lo è all'interno del metallo. La componente normale del campo

elettrico si calcola considerando il vettore spostamento elettrico \vec{D} e applicando il teorema di Gauss ad una superficie cilindrica infinitesima con una base interna al metallo e l'altra esterna, parallele alla superficie. Si ottiene, utilizzando il fatto che il flusso attraverso la superficie laterale è nullo:

$$D_{en} = \sigma$$

e, di conseguenza:

$$E_n = \frac{\sigma}{\varepsilon}$$

Quindi: passando dall'interno all'esterno del metallo, la componente tangenziale del campo elettrico è rappresentata da una funzione continua ($E_{it} = E_{et} = 0$), mentre la componente normale è discontinua ($E_{en} - E_{in} = \sigma/\varepsilon$). Inoltre, le linee di campo all'esterno del metallo risultano perpendicolari alla sua superficie.

Sfera conduttrice carica. Come caso particolare, consideriamo una sfera metallica di raggio *R* dotata di carica *Q* positiva (figura VI.15).



Figura VI.15. campo elettrico prodotto da una sfera metallica carica.

Il campo elettrico in un punto P esterno alla sfera e distante r dal suo centro è radiale (per ragioni di simmetria) ed uscente (perché Q è positiva). Il suo modulo si calcola applicando il teorema di Gauss alla superficie sferica di raggio r (sulla quale il campo elettrico ha lo stesso modulo in tutti i punti). Risulta:

$$E(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q}{r^2}$$

Il campo elettrico, esternamente alla sfera, è quindi equivalente a quello dovuto ad una carica puntiforme di valore pari alla carica della sfera e collocata nel suo centro. Per calcolare il valore del potenziale della sfera, consideriamo un suo punto superficiale M ed il raggio r passante per M. La circuitazione del campo elettrico lungo r dal punto M all'infinito è data da:

$$V(M) - V(\infty) = V(M) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \int_R^\infty \frac{dr}{r^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q}{R}$$

Da questa equazione, ricordando che C = Q/V, si ricava che la capacità della sfera è:

 $C = 4\pi\varepsilon_0 R$

VI.4 Campi magnetici statici o lentamente variabili

Si riuniscono sotto la denominazione di 'magnetostatica' tutti i fenomeni magnetici dovuti a magneti permanenti o correnti elettriche continue o lentamente variabili.

Le equazioni che descrivono i campi magnetici statici sono:

$$div\vec{B} = 0 \tag{VI.22}$$

$$rot\vec{B} = \mu_0\vec{J} \tag{VI.23}$$

Dalla conoscenza di \vec{J} si risale a quella del campo magnetico nel modo seguente. Si ricava il valore del potenziale vettore nel punto $P(x_1, y_1, z_1)$ in cui si vuole calcolare il campo dall'equazione:

$$A_i(x_1, y_1, z_1, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{J_i(x_2, y_2, z_2, t)}{r_{21}} d\tau_2 \qquad i = 1, 2, 3$$
(VI.24)

approssimazione dell'equazione più generale (IV.24, pagina 94). Questa approssimazione, che trascura il termine di ritardo r_{21}/c , è valida per valori di r_{21} sufficientemente piccoli e per variazioni temporali delle correnti sufficientemente lente. Per esempio, se r_{21} è dell'ordine delle distanze tipiche di laboratorio (10 *m*), allora il termine di ritardo è $\approx 3.3 \times 10^{-8} s$ ed è quindi trascurabile se le correnti non variano in modo significativo in questo intervallo di tempo. Il campo magnetico si ottiene poi dalla relazione:

$$\vec{B} = rot\vec{A}$$

che soddisfa automaticamente la (VI.22) perché la divergenza di un rotore è sempre nulla. La componente B_x del campo è quindi:

$$B_x = \frac{\partial A_z}{\partial y_1} - \frac{\partial A_y}{\partial z_1}$$

= $\frac{\mu_0}{4\pi} \int \left[J_z \frac{\partial}{\partial y_1} \left(\frac{1}{r_{21}} \right) - J_y \frac{\partial}{\partial z_1} \left(\frac{1}{r_{21}} \right) \right] d\tau_2$
= $-\frac{\mu_0}{4\pi} \int \left[J_z \frac{y_1 - y_2}{r_{21}^3} - J_y \frac{z_1 - z_2}{r_{21}^3} \right] d\tau_2$

L'espressione tra parentesi quadre è la componente *x*, cambiata di segno del vettore:

$$\frac{J \times \vec{r}_{21}}{r_{21}^3}$$

Siccome espressioni analoghe valgono anche per le altre componenti di \vec{B} , si ottiene infine:

$$\vec{B}(x_1, y_1, z_1, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{J}(x_2, y_2, z_2, t) \times \vec{r}_{21}}{r_{21}^3} d\tau_2$$

Nel caso di circuiti filiformi:

$$\vec{J}d\tau_2 = JS\vec{dl}_2 = I\vec{dl}_2$$

dove *S* è la sezione del filo e il vettore dl_2 è diretto come J. Quindi:

$$\vec{B}(x_1, y_1, z_1, t) = I \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{dl}_2 \times \vec{r}_{21}}{r_{21}^3}$$
(VI.25)

La (VI.25) è nota con il nome di equazione di Biot - Savart.

E' possibile ottenere la (VI.25) anche partendo dall'equazione che fornisce il campo magnetico prodotto da una carica puntiforme in moto, nel caso in cui la velocità della carica sia trascurabile rispetto a quella della luce e le sue variazioni siano sufficientemente lente da poter trascurare gli effetti dell'accelerazione:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} q \frac{\vec{\nu} \times \vec{r}}{r^3} \tag{VI.26}$$

dove \vec{r} è il vettore spiccato dalla carica verso il punto in cui si vuole calcolare il campo magnetico. Questa è l'equazione (IV.48, pagina 104) in cui è stato sostituito il segno \approx con il segno di uguaglianza e le grandezze ritardate con quelle attuali. La sostituzione del segno \approx con quello di uguaglianza è giustificata dal fatto che le differenze tra le due predizioni teoriche (effettuate con le grandezze ritardate o con quelle attuali) non sono rilevabili sperimentalmente nell'ambito della magnetostatica.

Si consideri ora un circuito filiforme percorso dalla corrente *I*. In base alla (VI.26), un suo elemento infinitesimo $\vec{d}l$ produrrà un campo magnetico pari a:

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} n \, e \, S \, d \, l \, \frac{\vec{v}_d \times \vec{r}}{r^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{\vec{d} \, l \times \vec{r}}{r^3} \tag{VI.27}$$

dove: *S* è la sezione del filo, *n* il numero di elettroni per unità di volume, *e* il valore assoluto della loro carica, \vec{v}_d la loro velocità di deriva cambiata di

segno e il vettore \vec{dl} è diretto come la corrente. Integrando la (VI.27) sull'intero circuito si ottiene la (VI.25).

Nei casi concreti si sceglie di calcolare dapprima il potenziale vettore e poi il campo magnetico attraverso la relazione $\vec{B} = rot \vec{A}$, oppure di usare la (VI.27) per calcolare direttamente il campo magnetico secondo le caratteristiche del problema.

VI.4.1 Campo magnetico prodotto da un tratto di filo rettilineo

In riferimento alla figura VI.16, il campo elementare prodotto nel punto P dall'elemento infinitesimo di filo dz è dato da:

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{1}{r^2} \sin\theta dz$$

Il vettore $d\vec{B}$ è perpendicolare al piano del foglio ed entrante.



Figura VI.16. campo magnetico prodotto da un filo rettilineo percorso da corrente.

Siccome:

$$\sin\theta = \cos\alpha$$
$$r = \frac{d}{\cos\alpha}$$
$$dz = \frac{d}{\cos^2\alpha}d\alpha$$

ne segue che:

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I}{d} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \cos \alpha \, d\alpha = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I}{d} (\sin \alpha_2 - \sin \alpha_1)$$

Se la lunghezza del filo è infinita, o, con buona approssimazione, la distanza del punto *P* dal filo è piccola rispetto alla sua lunghezza, il campo magnetico assume il valore:

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi d}$$

Nel caso del filo indefinito, si perviene allo stesso risultato mediante le seguenti considerazioni. Per la (VI.27) la componente z del campo magnetico è nulla e il campo magnetico nel piano x y risulta tangente alla circonferenza di raggio d. Pertanto, usando il teorema di Stokes:

$$\oint_{l} \vec{B} \cdot \vec{d}l = \int_{S} rot \vec{B} \cdot \hat{n} \, dS$$

dove *S* è una qualunque superficie che abbia la circonferenza come contorno. Quindi:

$$B2\pi d = \mu_0 I$$

infine:

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi d}$$

VI.4.2 Campo magnetico di una spira circolare



Figura VI.17. campo magnetico di una spira circolare.

La spira circolare piana di raggio *R* della figura VI.17 è percorsa da una corrente *I*. Il campo magnetico prodotto dalla spira in un punto *P* del suo asse,

Capitolo VI. Campi statici o lentamente variabili

distante z dal piano della spira è diretto lungo il verso positivo dell'asse z. Per la (VI.27), la componente lungo l'asse z del campo magnetico prodotto da un elemento infinitesimo dl della spira in un punto del suo asse è data da:

$$dB_z = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{dl}{r^2} \sin \alpha$$

La componente parallela al piano della spira è invece annullata dal contributo dell'elemento di spira diametralmente opposto a quello considerato. Essendo:

$$r = \sqrt{R^2 + z^2}$$
$$\sin \alpha = \frac{R}{r}$$

si ottiene, integrando sull'intera spira:

$$B_z = \mu_0 \frac{IR^2}{2(R^2 + z^2)^{3/2}}$$
(VI.28)

Al centro della spira, il valore del campo magnetico è pari a:

$$B_z = \frac{\mu_0 I}{2R}$$

VI.4.3 Il momento di dipolo magnetico

Considerata la spira della sezione precedente, si definisce come *momento di dipolo magnetico* associato alla spira il vettore \vec{m} avente le seguenti caratteristiche (figura VI.18):

- direzione perpendicolare al piano della spira;
- verso individuato dalla regola della vite destrorsa;
- \diamond modulo dato da *m* = *IS*, dove *S* è l'area della spira.

Il campo magnetico prodotto da una spira circolare in un punto del suo asse (equazione VI.28) può essere espresso in funzione del momento di dipolo magnetico ad essa associato:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{2\pi (R^2 + z^2)^{3/2}} \,\vec{m}$$



Figura VI.18. momento di dipolo magnetico di una spira percorsa dalla corrente *I*.



Figura VI.19. la spira è percorsa dalla corrente *I*. Se le dimensioni lineari della spira sono piccole rispetto alla distanza del punto *P* dalla spira (vettore \vec{r}_1 spiccato da un generico punto *O* appartenente alla superficie della spira), il potenziale vettore in *P* dipende solo da \vec{r}_1 .

Più in generale, il potenziale vettore prodotto da una spira in un punto *P* sufficientemente lontano da essa può essere espresso in termini del momento di dipolo magnetico della spira (figura VI.19). Si ha:

$$\vec{A}(\vec{r}_1) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_{l_2} \frac{\vec{dl}_2}{r_{21}}$$
(VI.29)

Poiché $r_2 \ll r_1$:

$$\frac{1}{r_{21}} \approx \frac{1}{r_1 - \vec{r}_2 \cdot \hat{r}_1} \approx \frac{1}{r_1} \left(1 + \frac{\vec{r}_2 \cdot \hat{r}_1}{r_1} \right)$$

Quindi:

$$\vec{A}(\vec{r}_1) \approx \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_{l_2} \frac{d \hat{l}_2}{r_1} + \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_{l_2} \frac{\vec{r}_2 \cdot \hat{r}_1}{r_1^2} d \hat{l}_2$$

Il primo integrale è nullo, perché r_1 è costante e $\oint_{l_2} d\vec{l}_2$ è nullo. Per calcolare il secondo integrale, si procede nel seguente modo. Applicando il teorema di Stokes, si calcola la circuitazione lungo l_2 del vettore

$$\frac{\vec{r}_2 \cdot \hat{r}_1}{r_1^2} \vec{\alpha}$$

dove $\vec{\alpha}$ è un campo vettoriale arbitrario uniforme:

$$\oint_{l_2} \frac{\vec{r}_2 \cdot \hat{r}_1}{r_1^2} \vec{\alpha} \cdot d\vec{l}_2 = \int_S rot\left(\frac{\vec{r}_2 \cdot \hat{r}_1}{r_1^2} \vec{\alpha}\right) \cdot \hat{n} \, dS \tag{VI.30}$$

Poiché valgono le relazioni:

$$rot(\psi \vec{\alpha}) = \psi rot \vec{\alpha} - \vec{\alpha} \times grad\psi$$
$$rot \vec{\alpha} = 0$$
$$grad \frac{\vec{r}_2 \cdot \hat{r}_1}{r_1^2} = \frac{1}{r_1^2} \hat{r}_1$$

la (VI.30) diventa:

$$\oint_{l_2} \frac{\vec{r}_2 \cdot \hat{r}_1}{r_1^2} \vec{\alpha} \cdot d\vec{l}_2 = -\frac{1}{r_1^2} \int_{S} (\vec{\alpha} \times \hat{r}_1) \cdot \hat{n} \, dS = \frac{1}{r_1^2} \int_{S} (\hat{n} \, dS \times \hat{r}_1) \cdot \vec{\alpha}$$

quindi:

$$\vec{\alpha} \cdot \oint_{l_2} \frac{\vec{r}_2 \cdot \hat{r}_1}{r_1^2} \, d\vec{l}_2 = \frac{1}{r_1^2} \, \vec{\alpha} \cdot \int_S (\hat{n} \times \hat{r}_1) \, dS$$

Siccome questa equazione deve valere qualunque sia il vettore $\vec{\alpha}$, i due integrali devono essere uguali. La (VI.29) diventa quindi:

$$\vec{A}(\vec{r}_1) \approx \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{r_1^2} I\left(\hat{n} \times \frac{\vec{r}_1}{r_1}\right) \int_S dS = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{m} \times \vec{r}_1}{r_1^3}$$
(VI.31)

dove $\vec{m} = \hat{n}I \int_{S} dS$ è il momento magnetico della spira.

VI.4.4 Campo magnetico di un solenoide

Un solenoide rettilineo è costituito da un'elica cilindrica di filo conduttore. Per calcolare il valore del campo magnetico in un punto dell'asse del solenoide quando esso è percorso da una corrente *I*, si suppone innanzitutto di poter considerare ogni spira del solenoide come una spira circolare. Indicato con *N* il numero delle spire e con *l* la lunghezza del solenoide, si procede facendo riferimento alla figura VI.20. Il campo magnetico nel punto *P* dell'asse posto a distanza *z* dall'origine dovuto alle spire contenute nel tratto di solenoide compreso tra $\rho e \rho + d\rho$ è dato da:

$$\vec{dB} = n d\rho \left(\frac{\mu_0 I R^2}{2 [R^2 + (z - \rho)^2]^{3/2}} \right) \hat{k}$$



Figura VI.20. campo magnetico in un solenoide.

dove \hat{k} è il versore dell'asse *z*, *R* è il raggio di ciascuna spira e n = N/l è il numero delle spire per unità di lunghezza. Siccome:

$$z - \rho = \frac{R}{\tan\theta}$$

e, di conseguenza:

$$d\rho = \frac{Rd\theta}{\sin^2\theta}$$

si ottiene:

$$\vec{dB} = \frac{1}{2}n\mu_0 I\sin\theta \,d\theta \,\hat{k}$$

Il valore del campo \vec{B} nel punto *P* si ottiene integrando sulla lunghezza del solenoide e risulta dato da:

$$\vec{B} = \frac{1}{2}n\mu_0 I(\cos\theta_1 - \cos\theta_2)\,\hat{k}$$

Se la lunghezza del solenoide è molto maggiore del raggio delle spire $(l \gg R)$ e *P* è sufficientemente lontano dagli estremi del solenoide, allora $\theta_1 \rightarrow 0$ e $\theta_2 \rightarrow \pi$. Quindi:

$$\vec{B} \approx \mu_0 n I \hat{k} \tag{VI.32}$$

Capitolo VI. Campi statici o lentamente variabili

VI.5 Effetti magnetici sulle correnti

Si consideri un elemento infinitesimo dl di un filo percorso dalla corrente I e immerso in un campo magnetico \vec{B} . Su ciascun elettrone che si muove nel filo agisce una forza dovuta al campo magnetico data da:

$$\vec{F} = -e\vec{v}_d \times \vec{B}$$

dove e > 0 e \vec{v}_d è la velocità di deriva degli elettroni (pagina 273). La forza agente sull'elemento di filo dl è allora data da:

$$\vec{dF} = -n \, e \, \vec{v}_d \times \vec{BS} \, dl = \vec{J} \times \vec{BS} \, dl = I \, \vec{dl} \times \vec{B} \tag{VI.33}$$

dove *S* è la sezione del filo e dove è stato trasformato l'elemento dl in un vettore diretto come \vec{J} . La validità della precedente equazione si basa sull'assunzione che le forze agenti sugli elettroni si trasferiscano al materiale cui essi appartengono.

VI.5.1 Definizione dell'unità di corrente

Si considerino due fili rettilinei C_1 e C_2 paralleli, di lunghezza l e percorsi dalle correnti I_1 ed I_2 , rispettivamente (figura VI.21): si supponga che il verso delle due correnti sia lo stesso. Se la distanza d tra i due fili è sufficien-



Figura VI.21. per la definizione dell'unità di corrente.

temente piccola rispetto alla loro lunghezza, si possono considerare come due fili indefiniti. Applicando la formula (VI.33), si vede che la forza che ciascun filo esercita sull'altro giace nel loro piano, è attrattiva e perpendicolare ai fili. Il suo modulo è dato da:

$$F = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi d} I_2 l$$

Si dice che i due fili sono attraversati da una corrente di un *ampere* se, essendo posti alla distanza di un metro, la forza che ciascuno di essi esercita su un metro dell'altro filo è pari a $\mu_0/2\pi = 2 \cdot 10^{-7} N$.

VI.5.2 Circuito rigido

Se un circuito rigido di forma qualunque è posto in un campo magnetico \vec{B} , per la (VI.33), agisce su di esso un risultante \vec{F} dato da:

$$\vec{F} = I \oint_C \vec{d} \, l \times \vec{B} \tag{VI.34}$$

e un momento risultante $\vec{\Gamma}$ delle forze agenti sul circuito dato da:

$$\vec{\Gamma} = I \oint_C \vec{r} \times (\vec{d}\,l \times \vec{B})$$

dove \vec{r} è la distanza dell'elemento di circuito \vec{dl} , dal punto rispetto a cui si calcola il momento.

Se il campo magnetico è uniforme, il risultante \vec{F} è nullo.

VI.5.3 Spira rettangolare



Figura VI.22. spira rettangolare rigida in un campo magnetico costante ed uniforme. \vec{B} è scelto in modo che la sua proiezione sul piano della spira sia parallela al lato *AB*.

Il caso di una spira rettangolare rigida posta in un campo magnetico costante ed uniforme è rappresentato in figura VI.22. Sul lato *AB* della spira, il risultante delle forze esercitate dal campo magnetico è applicato nel punto mediano, è perpendicolare al piano individuato da *AB* e da \vec{B} ed il suo

Capitolo VI. Campi statici o lentamente variabili

modulo vale *IB b*. Una forza uguale e contraria agisce sul lato *CD*: il loro risultante è nullo ed esse, avendo la stessa retta di applicazione, non danno origine ad alcuna coppia. Le due forze che agiscono sul lato *AD* e *BC*, hanno lo stesso modulo *IB a* e verso opposto, ma, avendo rette di applicazione distinte, danno origine ad una coppia il cui momento ha modulo *IB a b* sin $\theta = mB \sin \theta$. Questa coppia fa ruotare la spira in senso antiorario intorno all'asse passante per il centro della spira e parallelo al lato *AD*: la spira, in condizioni di equilibrio, si disporrà quindi in un piano perpendicolare alla direzione del campo e avrà il suo momento magnetico parallelo a \vec{B} . In forma vettoriale, il momento della coppia agente sulla spira sarà dato da:

$$\vec{\Gamma} = \vec{m} \times \vec{B}$$

VI.5.4 Spira elementare



Figura VI.23. per il calcolo delle forze agenti su una spira elementare.

Si consideri una spira piana rigida, percorsa dalla corrente *I*, le cui dimensioni lineari siano trascurabili rispetto a distanze sulle quali il campo magnetico varia in modo significativo (figura VI.23). La forza agente sulla spira è data dalla (VI.34), che trascriviamo:

$$\vec{F} = I \oint_C \vec{d}\, l \times \vec{B}$$

Se la spira subisce uno spostamento arbitrario \vec{ds} , la sua nuova posizione sarà rappresentata dalla linea C'. Moltiplicando entrambi i membri per \vec{ds} , si ottiene:

$$\vec{F} \cdot \vec{ds} = I \oint_C \vec{ds} \cdot (\vec{dl} \times \vec{B}) = I \oint_C \vec{B} \cdot (\vec{ds} \times \vec{dl}) = -I \oint_C \vec{B} \cdot (\vec{dl} \times \vec{ds})$$

L'ultimo integrale rappresenta il flusso ϕ_L del vettore \vec{B} attraverso la superficie laterale *L* della figura. Siccome la superficie *S* della spira è molto piccola:

$$\vec{F} \cdot \vec{ds} = \phi_L = -IS\vec{B} \cdot \hat{n} + IS(\vec{B} + d\vec{B}) \cdot \hat{n} = \vec{m} \cdot d\vec{B}$$

dove $\vec{m} = IS \hat{n}$ è il momento di dipolo magnetico della spira. Ma:

$$\vec{m} \cdot d\vec{B} = \vec{m} \cdot d(B_x \hat{\imath} + B_y \hat{\jmath} + B_z \hat{k})$$

$$= \vec{m} \cdot [\hat{\imath} (grad B_x \cdot ds) + \hat{\jmath} (grad B_y \cdot ds) +$$

$$+ \hat{k} (grad B_z \cdot ds)]$$

$$= m_x \left(\frac{\partial B_x}{\partial x} dx + \frac{\partial B_x}{\partial y} dy + \frac{\partial B_x}{\partial z} dz \right) +$$

$$+ m_y \left(\frac{\partial B_y}{\partial x} dx + \frac{\partial B_y}{\partial y} dy + \frac{\partial B_x y}{\partial z} dz \right) +$$

$$+ m_x \left(\frac{\partial B_z}{\partial x} dx + \frac{\partial B_z}{\partial y} dy + \frac{\partial B_z}{\partial z} dz \right)$$

Siccome si suppone che la sorgente del campo magnetico \vec{B} sia al di fuori della regione spaziale in cui si muove la spira, il campo \vec{B} è irrotazionale in questa regione. Pertanto:

$$\frac{\partial B_z}{\partial y} = \frac{\partial B_y}{\partial z} \qquad \frac{\partial B_x}{\partial z} = \frac{\partial B_z}{\partial x} \qquad \frac{\partial B_y}{\partial x} = \frac{\partial B_x}{\partial y}$$

Quindi:

$$F_x dx + F_y dy + F_z dz =$$

$$= (\vec{m} \cdot \operatorname{grad} B_x) dx +$$

$$+ (\vec{m} \cdot \operatorname{grad} B_y) dy$$

$$+ (\vec{m} \cdot \operatorname{grad} B_z) dz$$

Questa equazione deve valere qualunque sia lo spostamento \vec{ds} . Ne segue che:

$$\dot{F} = (\vec{m} \cdot \operatorname{grad} B_x)\hat{\imath} + (\vec{m} \cdot \operatorname{grad} B_y)\hat{\jmath} + (\vec{m} \cdot \operatorname{grad} B_y)\hat{k}$$

che è analoga alla (VI.8). Procedendo come a pagina 184, si ottiene infine:

$$\vec{F} = \operatorname{grad}\left(\vec{m}\cdot\vec{B}\right) \tag{VI.35}$$

Il campo di forze agente sulla spira è quindi conservativo. La spira possiede pertanto un'energia potenziale data da:

$$U = -\vec{m} \cdot \vec{B}$$



Figura VI.24. per il calcolo del lavoro meccanico compiuto dal campo magnetico \vec{B} in corrispondenza di una rotazione $\hat{a}d\theta$ di una spira elementare con momento di dipolo magnetico \vec{m} .

L'energia potenziale dipende dalle coordinate x, y, z attraverso \vec{B} e dall'angolo θ tra i due vettori \vec{B} e \vec{m} . La dipendenza di U, attraverso \vec{B} , dalle coordinate regola il lavoro *meccanico* compiuto dal campo quando la spira subisce uno spostamento \vec{d} s; la dipendenza di U da θ regola il lavoro *meccanico* quando la spira subisce una rotazione intorno ad un asse perpendicolare al piano individuato da \vec{m} e \vec{B} . Il lavoro meccanico compiuto dalle forze del campo magnetico quando la spira subisce una rotazione elementare $\hat{a} d\theta$ è dato da (figura VI.24):

$$dL = \vec{\Gamma} \cdot \hat{a} \, d\theta = -\frac{\partial U}{\partial \theta} \, d\theta = -B \, m \sin \theta \, d\theta = (\vec{m} \times \vec{B}) \cdot \hat{a} \, d\theta$$

Pertanto:

$$\vec{\Gamma} = \vec{m} \times \vec{B} \tag{VI.36}$$

VI.6 Effetto Hall

Si consideri una lamina metallica, di spessore *s*, avente sezione rettangolare e percorsa da una corrente *I* lungo la direzione positiva dell'asse *y*. Sia essa immersa in un campo magnetico uniforme \vec{B} diretto lungo il verso negativo dell'asse *x* (figura VI.25). Sia \vec{v}_d la velocità di deriva (pagina 273) degli elettroni di conduzione (pagina 271): essa è diretta lungo il verso negativo dell'asse *y*. Sugli elettroni agisce la componente magnetica della forza di Lorentz, di modulo pari a $ev_d B$ e diretta lungo il verso positivo dell'asse *z*. L'effetto della forza di Lorentz è dunque quello di caricare negativamente la faccia superiore della lamina e positivamente la faccia opposta. Si stabilirà quindi una situazione stazionaria caratterizzata dal fatto che la componente magnetica della forza di Lorentz agente sugli elettroni sarà bilanciata

Giuliani Bonizzoni - Lineamenti di elettromagnetismo



Figura VI.25. effetto Hall. Una lamina metallica, la cui sezione ha lati *a*, *s*, è percorsa dalla corrente *I* nella direzione positiva dell'asse *y*. Essa è immersa nel campo magnetico uniforme \vec{B} diretto lungo la direzione negativa dell'asse *x*. \vec{v}_d è la velocità di deriva degli elettroni. Tra la faccia superiore e quella inferiore della lamina si stabilisce una differenza di potenziale con le polarità indicate.

dal campo elettrico trasversale E_H dovuto alla distribuzione superficiale di cariche. Quindi:

$$eE_H = ev_dB$$

Da cui:

$$\Delta V_H = \frac{IB}{sne} \tag{VI.37}$$

dove ΔV_H è la differenza di potenziale trasversale (detta di Hall),³ *s* lo spessore della lamina e *n* la concentrazione di elettroni. Si noti che la differenza di potenziale di Hall è inversamente proporzionale allo spessore *s* della lamina e alla concentrazione *n* degli elettroni di conduzione e che l'effetto Hall fa sì che gli elettroni continuino a scorrere lungo la direzione originaria (verso negativo dell'asse *y*).

⇒ Se nella formula (VI.37) si pone I = 1 A, B = 1 T, s = 0.1 mm, $n = 8.5 \times 10^{28} m^{-3}$ (concentrazione degli elettroni di conduzione nel rame), la differenza di potenziale di Hall risulta uguale a $\approx 7.34 \times 10^{-7} V$. Per ottenere differenze di potenziale di Hall più grandi, si usano semiconduttori in cui la concentrazione dei portatori di carica (elettroni o/e buche) è più piccola, di molti ordini di grandezza, rispetto a quella dei metalli.

³Questo fenomeno fu scoperto da Edwin Hall nel 1879.

Capitolo VI. Campi statici o lentamente variabili

L'effetto Hall è usato sia per determinare la concentrazione dei portatori di carica dei materiali conduttori, sia per misurare l'intensità del campo magnetico (sonda di Hall).

VI.6.1 Effetto Hall quantico

La resistenza di Hall R_H è definita dal rapporto tra la differenza di potenziale di Hall e la corrente che attraversa la lamina:

$$R_H = \frac{\Delta V_H}{I} = \frac{B}{nes}$$

In epoca recente si è scoperto che, operando con semiconduttori in cui gli elettroni sono confinati in uno strato bidimensionale, a temperature sufficientemente basse e campi magnetici sufficientemente elevati, la resistenza di Hall è quantizzata secondo la formula:⁴

$$R_H = \frac{h}{i e^2}$$

dove h è la costante di Planck, e la carica elettronica e i un numero intero. Si noti come la resistenza di Hall dipenda solo dal valore delle due costanti fondamentali e ed h. Una resistenza di Hall quantizzata è prevista ogni qual volta la densità superficiale n_s degli elettroni e il campo magnetico B hanno valori tali per cui il rapporto:

$$\frac{n_s h}{eB}$$

assume valori interi. Siccome il valore di R_H è determinabile con grande precisione, l'effetto Hall quantico può essere utilizzato per definire l'unità di resistenza standard.

⁴La scoperta è dovuta a Klaus von Klitzing.

Capitolo VII

Proprietà magnetiche

VII.1 Introduzione

Le proprietà magnetiche sono quelle che si osservano quando i materiali sono sottoposti all'azione di un campo magnetico. Tuttavia, esistono materiali che presentano proprietà magnetiche anche in assenza di campi magnetici.

Se si considerasse la struttura microscopica della materia dal punto di vista della fisica classica, si dovrebbe concludere che i materiali non possiedono proprietà magnetiche. Infatti, la fisica classica descrive la materia come un insieme di cariche in moto nel vuoto: non essendo in grado di fornire un modello accettabile di atomo, la fisica classica deve considerare tali cariche come interagenti ma non costituenti aggregati stabili.

Si consideri un sistema fisico costituito da un insieme di cariche e si supponga che tale sistema si trovi in equilibrio termico. L'immersione di tale sistema in un campo magnetico uniforme implica che su ciascuna delle cariche appartenenti al sistema agisca la componente magnetica della forza di Lorentz. Tale forza, tuttavia, non compie alcun lavoro sulle cariche: l'energia di queste, e quindi quella del sistema cui appartengono, non varia in seguito alla applicazione del campo magnetico. Ne segue che lo stato del sistema in presenza di campo magnetico è termodinamicamente indistinguibile da quello in assenza di campo: pertanto il sistema non può presentare proprietà legate all'applicazione di un campo magnetico esterno, cioè, non può presentare proprietà magnetiche.

Una descrizione adeguata delle proprietà magnetiche della materia richiede l'uso della fisica quantica. E' comunque possibile, sulla base della fisica classica, descrivere le proprietà magnetiche dei materiali. Infatti:

Capitolo VII. Proprietà magnetiche

- secondo l'elettromagnetismo di Maxwell e Lorentz, ogni campo magnetico è prodotto da correnti; si suppone allora che sorgenti delle proprietà magnetiche dei materiali siano correnti microscopiche descrivibili come microscopiche spire piane;¹
- ♦ le proprietà attive e passive di una corrente piana (spira) possono essere descritte in termini del suo momento di dipolo magnetico; le proprietà magnetiche dei materiali risulteranno allora interamente descritte da un vettore $\vec{M}(x, y, z)$, detto vettore magnetizzazione e avente le dimensioni di un momento di dipolo magnetico per unità di volume;
- ♦ si tratta pertanto di trovare una relazione tra le correnti microscopiche ipotizzate e \vec{M} , in modo tale da poter opportunamente modificare l'equazione di Maxwell relativa a $r \circ t \vec{B}$.

Secondo questo modello, il vettore magnetizzazione \vec{M} è quindi strettamente connesso a correnti chiuse. Secondo la fisica quantica, \vec{M} è invece il prodotto di momenti di dipolo magnetici elementari che non sono riconducibili a correnti: i momenti magnetici intrinseci o quelli orbitali degli elettroni, o - in certe situazioni - i momenti magnetici dei nuclei prodotti da quelli intrinseci dei protoni e dei neutroni.

VII.1.1 Micro - correnti e magnetizzazione

Il modello classico di un materiale magnetizzato ipotizza dunque che nel suo volume siano presenti correnti microscopiche, considerate come spire piane, descritte da un vettore \vec{J}_M avente le dimensioni di $[I l^{-2}]$.



Figura VII.1. microcorrenti ipotetiche in un materiale magnetizzato.

Queste correnti, sulla superficie, sono descritte da un vettore \vec{J}_S avente le dimensioni di $[I l^{-1}]$. In figura VII.1 è rappresentata una sezione di un materiale magnetizzato: se il materiale è omogeneo, le correnti delle spire mi-

 $^{^{1}}$ L'idea che le proprietà magnetiche fossero da attribuire a correnti microscopiche è dovuta ad Ampère (si veda a pagina 470).

croscopiche si elidono all'interno della sezione mentre permangono diverse da zero sulla superficie. Il potenziale vettore dovuto a queste distribuzioni di correnti è dato da (equazione VI.24 e figura VII.2):



Figura VII.2. per il calcolo del potenziale vettore dovuto ad una distribuzione di correnti \vec{J}_M sul volume τ_2 e \vec{J}_S sulla superficie S_2 .

Le spire elementari descritte da \vec{J}_M sono equivalenti ad una distribuzione di momenti di dipolo magnetici $\vec{M} d\tau$. Pertanto il potenziale vettore dovuto ad esse può essere espresso in funzione di \vec{M} mediante la (VI.31):

$$\vec{A}(\vec{r}_1) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{M}(\vec{r}_2) \times (\vec{r}_1 - \vec{r}_2)}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3} d\tau_2$$

Essendo:

$$\frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3} = -\frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^3} = grad\left(\frac{1}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|}\right)$$

l'equazione precedente diventa:

$$\vec{A}(\vec{r}_1) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \vec{M}(\vec{r}_2) \times grad\left(\frac{1}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|}\right) d\tau_2$$

Ricordando la relazione:

$$rot(f\vec{a}) = frot\vec{a} + gradf \times \vec{a}$$

equivalente alla:

$$\vec{a} \times grad f = frot \vec{a} - rot (f \vec{a})$$

si ottiene:

$$\vec{A}(\vec{r}_1) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{rot\,\vec{M}}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|} \, d\tau_2 - \frac{\mu_0}{4\pi} \int rot\left(\frac{\vec{M}}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|}\right) d\tau_2$$

Applicando il teorema di Stokes:

$$\vec{A}(\vec{r}_1) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{r \, ot \, \vec{M}}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|} \, d\tau_2 + \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{M} \times \hat{n}}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|} \, dS_2$$

dove \hat{n} è, al solito, il versore normale uscente della superficie S_2 . Dal confronto di questa equazione con la (VII.1) si conclude che:

$$\vec{J}_M = rot \vec{M}$$
 $\vec{J}_S = \vec{M} \times \hat{n}$ (VII.2)

VII.1.2 Proprietà magnetiche ed equazioni di Maxwell

Le proprietà magnetiche dei materiali sono quindi descritte dal momento di dipolo magnetico per unità di volume \vec{M} : se è nota la funzione $\vec{M}(x, y, z)$, sono note tutte le proprietà magnetiche del materiale. Si consideri l'equazione di Maxwell:

$$rot \vec{B} = \mu_0 \left(\vec{J} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right)$$

e la si riscriva per condizioni statiche $(\partial \vec{E} / \partial t = 0)$ inserendo il termine $\mu_0 \vec{J}_M$:

$$rot \vec{B} = \mu_0 \left(\vec{J} + \vec{J}_M \right) \tag{VII.3}$$

Il termine $\mu_0 \vec{J}_M$ rappresenta le proprietà magnetiche del materiale. La (VII.3) diventa allora, per la prima equazione delle (VII.2):

$$rot \vec{B} = \mu_0 \left(\vec{J} + rot \vec{M} \right)$$

cioè:

$$rot(\vec{B} - \mu_0 \vec{M}) = \mu_0 \vec{J}$$

Il vettore $\vec{B} - \mu_0 \vec{M}$ è \vec{B}_0 , cioè il campo magnetico che la distribuzione di correnti $\vec{J}(x, y, z)$ creerebbe nel vuoto. Se ora si assume che:

$$\vec{M} = \chi_m \frac{\vec{B}_0}{\mu_0}$$

dove χ_m è la suscettività magnetica del materiale, si ottiene:

$$\vec{B} = (1 + \chi_m)\vec{B}_0 = \mu_r\vec{B}_0$$

dove si è posto $\mu_r = 1 + \chi_m$; μ_r si chiama permeabilità magnetica relativa del materiale. χ_m e μ_r sono due grandezze fisiche adimensionali.

Posto:

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}_0}{\mu_0}$$

si osservi che il campo vettoriale \vec{H} soddisfa l'equazione:

 $rot \vec{H} = \vec{J}$

VII.1.3 Una classificazione fenomenologica

E' possibile classificare i materiali secondo le loro proprietà magnetiche mediante un semplice esperimento qualitativo. Si tratta di collocare sulla soglia di un solenoide rettilineo un piccolo campione del materiale in esame, avendo l'accortezza di collocarlo in una regione di campo magnetico disomogeneo. Si vedrebbe allora che alcuni materiali sono fortemente attratti all'interno del solenoide *(ferromagneti)*; altri solo debolmente attratti *(paramagneti)*; infine, altri ancora sono debolmente respinti *(diamagneti)*.



Figura VII.3. disposizione sperimentale per una classificazione fenomenologica delle proprietà magnetiche dei materiali.

Questi comportamenti possono essere descritti attribuendo ai campioni un momento di dipolo magnetico \vec{m} orientato nello stesso senso del campo nel caso dei ferromagneti e dei paramagneti e in senso opposto nel caso dei diamagneti. Assumendo che l'asse del solenoide sia parallelo all'asse x e che il campo magnetico sia diretto lungo il verso positivo dell'asse x (figura VII.3), si suppone di collocare i campioni sulla soglia A del solenoide. Sul campione agirà quindi una forza data da (equazione VI.35):

$$F_x = -\frac{dU}{dx} = m_x \frac{dB}{dx}$$

Siccome dB/dx > 0, la F_x sarà positiva se $m_x > 0$ (ferromagneti o paramagneti); negativa se $m_x \le 0$ (diamagneti). A risultati analoghi si perviene nel caso in cui i campioni vengano collocati sulla soglia *B* del solenoide: si tenga presente che, in questo caso, dB/dx < 0.

VII.2 Il modello di Bohr dell'atomo di idrogeno

Qualunque siano le modificazioni da apportare alle leggi del moto degli elettroni, sembra necessario introdurre nelle leggi in questione una quantità sconosciuta all'elettrodinamica classica, cioè la costante di Planck, o, come viene spesso chiamata, il quanto elementare di azione. Con l'introduzione di questa costante la questione della configurazione stabile degli elettroni negli atomi è essenzialmente mutata, in quantoché questa costante è di dimensioni e grandezza tali che essa, insieme alla massa ed alla carica delle particelle, può determinare una lunghezza [la dimensione lineare dell'atomo] dell'ordine di grandezza richiesto.

Niels Bohr

La descrizione delle proprietà magnetiche dei materiali basata sulla fisica classica è, necessariamente, una descrizione macroscopica in cui il ruolo fondamentale è svolto dal vettore magnetizzazione \vec{M} , momento di dipolo magnetico per unità di volume, legato alle ipotetiche correnti microscopiche dalla relazione $rot \vec{M} = \vec{J}_M$.

Per poter dare una descrizione delle proprietà magnetiche più dettagliata di quella fornita nelle sezioni precedenti e senza ricorrere alla fisica quantica, è necessario usare modelli microscopici *ibridi*: essi fondono alcune leggi classiche con leggi (o regole o ipotesi) tipiche della fisica quantica, incompatibili con la fisica classica. Questi modelli hanno svolto, nella storia della fisica, un ruolo fondamentale: si pensi, ad esempio, allo sviluppo dei modelli quantici di atomo a partire da quello di Bohr. Questi modelli, all'interno di un contesto che ne chiarisca caratteristiche e limiti, svolgono ancora una funzione didattica ed euristica.

L'atomo di idrogeno è costituito da un protone e da un elettrone: siano essi posti inizialmente dalla distanza r_i . Si intende descrivere il processo di 'cattura' dell'elettrone da parte del protone. Allo scopo, utilizzando la diversità tra le due masse, si ignora il moto del protone e ci si chiede quali possano essere le orbite possibili dell'elettrone nel campo di forza dovuto al protone. Siccome tale campo è centrale, attrattivo e dipendente da $1/r^2$, si sa che le soluzioni del problema sono quelle scoperte da Newton nel caso dell'attrazione gravitazionale. Le orbite possibili dell'elettrone saranno quindi (assumendo come nulla l'energia potenziale dell'elettrone a distanza infinita dal protone):

- ◊ un'iperbole se *E* > 0, dove *E* è l'energia totale dell'elettrone (cinetica + potenziale);
- ♦ una parabola se E = 0;
- ♦ un'ellissi se E < 0.

I tre casi corrispondono a condizioni iniziali diverse. Si supponga che inizialmente l'elettrone si trovi alla distanza r_i dal nucleo e sia V_i la sua energia potenziale (negativa). L'elettrone percorrerà una iperbole, una parabola o una ellissi a seconda che sia, rispettivamente, $T_i > |V_i|$, $T_i = |V_i|$ o $T_i < |V_i|$. Si osservi che, affinché l'elettrone percorra una di queste orbite, è necessario che esso abbia una componente non nulla della sua velocità iniziale in direzione perpendicolare alla retta congiungente l'elettrone con il protone.



Figura VII.4. diffusione di una particella α da parte di un nucleo avente carica *Ze*; ϕ è l'angolo di diffusione e *b* il parametro d'urto.

Nel caso di una particella in un campo di forza centrale repulsivo $\propto 1/r^2$, siccome l'energia totale $E \ge 0$, le orbite possibili si riducono a due: una parabola se E = 0, un'iperbole se E > 0. Una situazione di questo tipo si ha, per esempio, nel fenomeno della diffusione di particelle α (nuclei di elio) da parte di nuclei atomici sufficientemente pesanti da poter assumere che $M_{nucleo} \gg m_{\alpha}$. Questo tipo di descrizione è stato usato per la prima volta da Rutherford nel 1911 per spiegare i dati sperimentali relativi alla diffusione di parte di sottili strati metallici. In questo caso particolare, essendo sempre E > 0, le orbite sono iperboli. Indicato con ϕ l'angolo di diffusione e con *b* il *parametro d'urto* si ha che (figura VII.4):

$$\cot\frac{1}{2}\phi = \frac{m_{\alpha}v_0^2}{k}b, \qquad \cos k = \frac{Q_{nucleo}\,q_{\alpha}}{4\pi\varepsilon_0}$$

Capitolo VII. Proprietà magnetiche

dove v_0 è la velocità della particella α a grandi distanze dal nucleo diffusore, $Q_{nucleo} = Ze \in q_{\alpha} = 2e$.

L'analogia tra il caso gravitazionale e quello dell'atomo di idrogeno si ferma qui: c'è infatti una differenza fondamentale dovuta al fatto che l'elettrone, essendo soggetto ad un moto accelerato, emette radiazioni elettromagnetiche. Ciò significa che, in ogni istante, la derivata temporale dell'energia dell'elettrone è negativa, cioè l'elettrone non può collocarsi su alcuna delle orbite, chiuse od aperte, sopra considerate: ognuna di esse è infatti caratterizzata da un valore costante dell'energia dell'elettrone. E' per questa ragione che modelli atomici di questo tipo, apparsi all'inizio del '900, sono stati rapidamente abbandonati. Bohr ha potuto riprenderli in considerazione solo *assumendo* che esistano orbite ellittiche *stazionarie* dell'elettrone tali che, orbitando su di esse, l'elettrone *non* irraggia. Questa assunzione costituisce una consapevole violazione delle leggi dell'elettrodinamica: la convivenza di leggi classiche e di assunzioni incompatibili con queste, costituisce, peraltro, la caratteristica principale dei modelli *ibridi* alla Bohr.

L'ipotesi delle orbite stazionarie per l'elettrone, permette di applicare a queste le proprietà delle orbite ellittiche 'gravitazionali': l'energia dell'elettrone su una qualsiasi di queste orbite dipende solo dalla lunghezza dell'asse maggiore dell'ellisse. Ciò significa che esistono infinite orbite stazionarie corrispondenti allo stesso valore dell'energia dell'elettrone: se si è interessati solo all'energia dello stato elettronico, si può scegliere, tra queste, l'orbita circolare.

Si ricorda che un'ellisse è una conica con eccentricità $\epsilon < 1$. Una conica è definita come il luogo dei punti di un piano il cui rapporto tra la distanza da un punto fisso, *fuoco*, e quella da una retta fissa, *direttrice*, è costante. Detta *r* la distanza di un punto della conica dal fuoco e *d* la sua distanza dalla direttrice, la conica è definita dall'equazione:

$$\frac{r}{d} = \epsilon$$

dove $\epsilon = costante$ è l'eccentricità della conica. In un sistema di assi cartesiani ortogonali che abbia l'origine nel centro dell'ellisse, l'equazione di questa è:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

dove *a* è il semiasse maggiore e *b* quello minore. Vale la relazione:

$$\epsilon = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}$$

Le coordinate dei fuochi sono $(\pm a\epsilon, 0)$; le equazioni delle due direttrici sono $x = \pm a/\epsilon$.

Le orbite che hanno il medesimo asse maggiore differiscono, dal punto di vista fisico, perché hanno diverso momento angolare L legato all'eccentricità dell'orbita dalla relazione

$$L^{2} = cost(1 - \epsilon^{2}) = cost\frac{b^{2}}{a^{2}}$$

Pertanto, l'orbita cui corrisponde il momento angolare maggiore, è quella circolare ($\epsilon = 0$).

Si può ora procedere enunciando i postulati su cui si basa il modello di Bohr. *Assumeremo che le orbite siano circolari.*

- P1 Le orbite possibili sono determinate applicando le leggi della meccanica newtoniana e dell'elettromagnetismo;
- P2 le orbite permesse, *stazionarie*, sono determinate dalla seguente condizione: il momento angolare dell'elettrone è un multiplo intero, non nullo, di $\hbar = h/2\pi$, dove *h* è la costante di Planck;
- P3 il passaggio da un'orbita stazionaria di energia E_i ad un'altra di energia E_f , comporta l'emissione o l'assorbimento di un quanto di energia $hv = |E_i - E_f|$, dove v è la frequenza della radiazione emessa o assorbita, descritta in termini di onde.
 - ⇒ La limitazione delle orbite circolari è imposta dal fatto che la condizione di quantizzazione P2 vale solo per tali orbite.

Per determinare le orbite possibili, si potranno semplicemente utilizzare i risultati del caso gravitazionale e applicare ad essi la condizione di 'quantizzazione' *P2*. E' tuttavia possibile procedere *ab initio* nel modo seguente. Le orbite possibili sono determinate sulla base del postulato *P1*. Si scriverà pertanto, nell'approssimazione non relativistica:

$$F = m_e a$$

cioè:

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{r^2} = m_e\omega^2 r \tag{VII.4}$$

La (VII.4) si può anche scrivere così:

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{r} = m_e\omega^2 r^2 \tag{VII.5}$$

Quest'ultima equazione dice che l'energia cinetica dell'elettrone

$$T = (1/2) m_{\rho} \omega^2 r^2$$

è pari alla metà del valore assoluto della sua energia potenziale

$$U = -(1/4\pi\varepsilon_0)(e^2/r)$$

L'energia totale *E* dell'elettrone sarà allora:

$$E = T + U = -\frac{1}{8\pi\varepsilon_0} \frac{e^2}{r}$$

La (VII.5), riscritta in termini del momento angolare $l = m_e \omega r^2$ dell'elettrone, assume la forma:

$$\frac{l^2}{m_e r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} e^2$$

Questa equazione, insieme alla condizione di quantizzazione P2

$$l = m_e \omega r^2 = n\hbar$$
 n intero ≥ 1

fornisce i valori permessi dei raggi delle orbite:

$$r_n = n^2 \frac{4\pi\varepsilon_0}{e^2 m_e} \hbar^2$$

I raggi delle orbite permesse sono quindi dati da $r_n = n^2 r_0$, dove:

$$r_0 = \frac{4\pi\varepsilon_0\hbar^2}{m_e e^2} \approx 0.529 \times 10^{-10} m$$

è il raggio della prima orbita (detto raggio di Bohr), corrispondente al numero quantico n = 1. L'energia delle orbite permesse è quindi data da:

$$E_n = -\frac{1}{n^2} \left(\frac{1}{2} \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r_0} \right) = -\frac{1}{n^2} \frac{m_e e^4}{8h^2\varepsilon_0^2}$$
(VII.6)

La frequenza della radiazione emessa durante il passaggio dall'orbita n_i all'orbita n_f , con $n_i > n_f$, è allora data, secondo il postulato P3, da:

$$v = \frac{E_i - E_f}{h} = \frac{e^2}{2h} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r_0} \left(\frac{1}{n_f^2} - \frac{1}{n_i^2}\right)$$
(VII.7)

Questa è anche la frequenza della radiazione assorbita durante il passaggio inverso.

In spettroscopia, si rappresenta la transizione tra il livello n_i e il livello n_f mediante l'inverso della lunghezza d'onda della radiazione emessa. Pertanto, la (VII.7) assume la forma:

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{v}{c} = R_H \left(\frac{1}{n_f^2} - \frac{1}{n_i^2} \right)$$

dove $R_H = m_e e^4 / 8h^3 \varepsilon_0^2 c = 10973731.568549 \, m^{-1}$ è la costante di Rydberg.

- ⇒ Valori tipici, calcolati, degli stati elettronici nell'atomo di idrogeno:
 - ♦ energia dello stato fondamentale (n = 1): ≈ -13.61 eV; $(1 eV = 1.602 \times 10^{-19} J)$;
 - ♦ raggio della prima orbita (n = 1): $r_0 \approx 0.529 \times 10^{-10} m$;
 - ♦ velocità dell'elettrone sulla prima orbita (n = 1): $v \approx 1.1 \times 10^6 \, ms^{-1}$;
 - ♦ frequenza della radiazione emessa durante la transizione $n = 2 \rightarrow n = 1$: $v ≈ 2.47 × 10^{15} Hz$, che corrisponde alla lunghezza d'onda λ = c/v ≈ 121.4 nm.

L'energia dello stato fondamentale coincide con l'energia necessaria per separare l'elettrone dal protone (portare l'elettrone a distanza infinita dal protone ed in quiete rispetto ad esso). La velocità dell'elettrone sulla prima orbita è pari a circa quattro millesimi della velocità della luce. La lunghezza d'onda della radiazione emessa durante la transizione $n = 2 \rightarrow n = 1$ giace nel lontano ultravioletto.

Al momento della proposta del modello atomico di Bohr (1913) era nota solo la serie di righe detta di *Balmer*, corrispondente alle transizioni da livelli con $n \ge 3$ al livello n = 2.

La prima riga di questa serie cade a circa 656.3 nm e giace quindi nella regione rossa dello spettro visibile. Il modello teorico di Bohr prevede infinite altre serie; in particolare quella relativa alle transizioni dai livelli $n \ge 2$ al livello n = 1 e quella relativa alle transizioni dai livelli ≥ 4 al livello n = 3. Queste furono ben presto osservate nell'ultravioletto (Lyman) e nell'infrarosso (Paschen).

La trattazione dell'atomo di idrogeno con la meccanica quantica non relativistica conduce, per quanto concerne i livelli di energia permessi, ai medesimi risultati



Figura VII.5. la serie di Balmer. Le prime quattro righe, partendo da sinistra, sono la H_{α} (656.3 *nm*), H_{β} (486.1 *nm*), H_{γ} (434 *nm*) e H_{δ} (410.2 *nm*), rispettivamente; le lunghezze d'onda diminuiscono da sinistra verso destra. Figura tratta da: G. Herzberg, 'Über die Spektren des Wasserstoffs', *Annalen der Physik*, 84 (1927), 565 - 604.

ottenuti con il modello di Bohr. Nella descrizione quantica, tuttavia, scompare il concetto di orbita: la teoria individua solo la probabilità che l'elettrone si trovi in un volume infinitesimo $d\tau$. Questa probabilità è data da $\psi\psi^* d\tau$, dove ψ è la *funzione d'onda* che descrive lo stato in cui si trova l'elettrone: ψ è, in generale, una funzione complessa e ψ^* la sua complessa coniugata. Nello stato fondamentale, corrispondente al numero quantico n = 1, la funzione d'onda è reale ed ha simmetria sferica:

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{\pi a_0^3}} e^{-r/a_0}$$

dove a_0 coincide con il raggio della prima orbita di Bohr. La probabilità di trovare l'elettrone in una corona sferica di raggio r e spessore dr è allora data da:

$$P(r)4\pi r^2 dr = \frac{1}{\pi a_0^3} e^{-2r/a_0} 4\pi r^2 dr$$
(VII.8)

dove P(r) è la densità di probabilità (probabilità per unità di volume). La funzione $P(r)4\pi r^2$ è mostrata in figura VII.6: la probabilità di presenza dell'elettrone è massima per $r = a_0$.

La distanza media dell'elettrone dal protone è data da:

$$< r > = \int_0^\infty r \psi^2 4\pi r^2 dr = 1.5 a_0$$

Le concordanze tra modello di Bohr e trattazione quantica non relativistica riguardano quindi le energie permesse e l'uguaglianza tra il raggio della prima orbita di Bohr ed il valore di *r* per cui è massima la probabilità di presenza dell'elettrone. Per il resto, le due descrizioni differiscono profondamente. Nel modello di Bohr, il momento angolare dell'elettrone è, per ipotesi, posto uguale a *n*ħ con *n* intero maggiore od uguale ad 1 e coincidente con il numero quantico che compare nella formula (VII.6) dei livelli energetici. Nella meccanica quantica (prossima sezione) il momento angolare dell'elettrone può assumere i valori $\sqrt{l(l+1)}$ ħ con l = 0, 1, ..., n - 1: in particolare, il momento angolare dell'elettrone nello stato fondamentale è nullo.

Giuliani Bonizzoni - Lineamenti di elettromagnetismo



Figura VII.6. grafico della funzione $P(r) 4\pi r^2$ (equazione VII.8) per l'elettrone nello stato fondamentale dell'atomo di idrogeno. Le distanze *r* sono in unità *a*₀ (raggio della prima orbita di Bohr).

VII.3 Fisica quantica e livelli atomici

Lo studio dei livelli energetici degli elettroni in un atomo mediante la meccanica quantica conduce alla individuazione di una classe di atomi (o ioni) detti *idrogenoidi*: ad essa appartengono l'atomo di idrogeno e gli atomi o ioni in cui l'elettrone più 'esterno' si trova in un campo elettrico coulombiano prodotto dal nucleo e da tutti gli altri elettroni. Il potenziale coulombiano è del tipo:

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Z_{effettivo} e}{r}$$

All'elettrone più esterno di un atomo idrogenoide è associata una quaterna di numeri quantici: *n*, *l*, *m*, *s*.

- ◊ n è il numero quantico principale. Esso corrisponde all'unico numero quantico che appare nel modello di Bohr dell'atomo di idrogeno;
- ♦ *l* è il numero quantico azimutale e i suoi *n* valori possibili sono $0 \le l \le n-1$;
- *m* è il numero quantico magnetico ed i suoi 2*l* + 1 possibili valori sono −*l* ≤ *m* ≤ *l*;

Capitolo VII. Proprietà magnetiche

♦ infine, *s* è il numero quantico di spin ed i suoi possibili valori sono $\pm 1/2$.

Ad un elettrone in un atomo, in quanto 'rotante' intorno al nucleo, è associato un momento angolare e un momento di dipolo magnetico. Il momento angolare può assumere i valori $\sqrt{l(l+1)}\hbar$ e le sue componenti l_z lungo una direzione z qualsiasi possono assumere i valori $m\hbar$. Le componenti del momento magnetico lungo una direzione z qualsiasi sono invece date da:

$$\mu_z = -\frac{e}{2m_e}l_z = -\frac{e}{2m_e}m\hbar = -m\mu_B$$

dove $\mu_B = e\hbar/2m_e$ è il magnetone di Bohr uguale a $\approx 9.274 \times 10^{-24} JT^{-1}$. All'elettrone sono associati anche un momento angolare e un momento magnetico intrinseci. Il momento angolare intrinseco - *spin* - ha componenti, lungo una direzione qualsiasi, pari a $s_z = \pm \hbar/2$, mentre la relazione tra momento magnetico e momento angolare intrinseci è:

$$\mu_z = -g_e \frac{e}{2m_e} s_z = -\frac{g_e}{2} \hat{s}_z \mu_B$$

dove $g_e = 2.0023193043718$.

Nella teoria quantica dell'elettrone di Dirac, $g_e = 2$. L'elettrodinamica quantica prevede invece uno scarto dal valore 2 che differisce da quello sperimentale di una quantità dell'ordine di una parte su 10^{11} . Questo accordo è considerato come uno dei maggiori successi predittivi dell'elettrodinamica quantica.

I livelli di energia permessi dipendono, se si ignora l'interazione spin - orbita, solo dal numero quantico principale n. L'interazione spin - orbita, dovuta alla interazione tra il momento magnetico intrinseco e quello orbitale dell'elettrone, dà origine alla cosiddetta *struttura fine* dei livelli energetici. Questa interazione è caratterizzata da un nuovo numero quantico j i cui possibili valori sono:

$$\begin{cases} j = l - 1/2, l + 1/2, \quad l \neq 0; \\ j = 1/2, \quad l = 0. \end{cases}$$

Di conseguenza, il numero quantico magnetico può assumere i 2j + 1 valori:

$$-j, -j + 1, \dots j - 1, j$$

Negli atomi con più di un elettrone di valenza, la descrizione degli stati elettronici si basa sui seguenti numeri quantici, se l'accoppiamento tra momenti magnetici orbitali e di spin è di tipo *LS*, caratterizzato dall'accoppiamento di un momento magnetico di spin derivante dai singoli elettroni con il momento magnetico orbitale derivante da quelli orbitali dei medesimi elettroni:

- ♦ *n*, numero quantico principale;
- ♦ *S*, numero quantico di spin;
- ♦ L, numero quantico orbitale;
- ♦ *J*, numero quantico derivante dall'accoppiamento *LS*;
- $\diamond m_J$, numero quantico magnetico.

Il rapporto tra la componente del momento magnetico dell'atomo e la componente del momento angolare totale, lungo una direzione qualsiasi z, è data da:

$$M_z = -gJ_z\mu_B$$

dove

$$g = 1 + \frac{J(J+1) + S(S+1) - L(L+1)}{2J(J+1)}$$

è il fattore di Landé.

In generale, sono possibili solo le transizioni tra livelli energetici per cui:

$$\Delta L = \pm 1$$

$$\Delta J = 0, \pm 1; \qquad \text{escluso } 0 \rightarrow 0$$

Inoltre, di regola:

$$\Delta S = 0$$

Nella descrizione della meccanica quantica non trovano luogo né orbite elettroniche, né precessioni di tali orbite in un campo magnetico esterno: alla precessione del momento angolare intorno al campo magnetico (sezione VII.5.1, pagina 233), prevista dalla fisica classica, corrisponde, nella fisica quantica, la quantizzazione del momento angolare lungo una direzione qualsiasi e quindi lungo la direzione del campo magnetico applicato. Il livello energetico di un elettrone in un atomo è rappresentato mediante la notazione:

^{*a}Lettera*_{*b*} *a*, *b*numeri</sup>

dove a = 2S + 1, b = J e *Letter* a = S, P, D, F.... Le lettere usate corrispondono a: L = 0, 1, 2, 3, 4..., rispettivamente.

VII.4 Un dettaglio *fine*: la riga H_{α} dell'idrogeno

Quando nel 1901 fu assegnato il primo premio Nobel, i fisici conoscevano qualcosa di due oggetti che sono ora chiamati "particelle elementari": l'elettrone e il protone.^a Un diluvio di altre particelle "elementari" apparve dopo il 1930... Ho sentito che si dice che"lo scopritore di una nuova particella elementare veniva usualmente ricompensato con l'assegnazione del premio Nobel, ma una simile scoperta dovrebbe ora essere punita con una multa di 10.000\$". Per determinare sperimentalmente le proprietà delle particelle elementari è necessario sottoporle a forze esterne o permettere che interagiscano una con l'altra. L'atomo di idrogeno, che è l'unione delle prime particelle elementari conosciute, l'elettrone e il protone, è stato studiato per molti anni e il suo spettro ci ha insegnato molto intorno all'elettrone.

Willis Lamb jr.

Secondo il modello di Bohr, l'energia dell'elettrone dell'atomo di idrogeno dipende solo dal numero quantico principale n (equazione VII.6). Allo stesso risultato si perviene attraverso una trattazione quantica non relativistica. La fisica dell'atomo di idrogeno è, tuttavia, più complessa.

Secondo il modello di Bohr, la prima riga della serie di Balmer, nota in spettroscopia con il nome di riga H_{α} , dovrebbe cadere a $\lambda_t = 656.11 nm$; il dato sperimentale è invece di $\lambda_s = 656.279 > \lambda_t$ con una differenza di 0.269 *nm*, pari a circa 4.08 parti su 10⁴. Tenendo conto del fatto che la massa del protone non è infinita e introducendo quindi nelle formule la massa ridotta dell'elettrone

 $\mu = m_e m_p / (m_e + m_p)$

l'accordo tra previsione teorica e dato sperimentale dovrebbe migliorare. Si ottiene infatti una discrepanza di circa 2.91 parti su 10^4 ; in questo caso, tuttavia, la lunghezza d'onda teorica $\lambda_t = 656.47 nm$ risulta maggiore di quella

^{*a*}Il concetto di protone è di molto posteriore. Nota degli autori.

sperimentale, λ_s . Questa situazione suggerisce che il modello di Bohr non riesce a descrivere adeguatamente lo spettro dell'atomo di idrogeno. In effetti, già nel 1887, Michelson e Morley avevano individuato due componenti (*doppietto*) nella riga H_{α} . Né il modello di Bohr, né la trattazione quantica non relativistica dell'atomo di idrogeno prevedono questa struttura. In realtà, Sommerfeld aveva sviluppato nel 1916 un modello, basato su orbite ellittiche e sulla dinamica relativistica, secondo cui i livelli energetici dell'atomo di idrogeno gi idrogeno sono dati dall'equazione:

$$E \approx -\frac{1}{n^2} \frac{\mu e^4}{8h^2 \varepsilon_0^2} \left[1 + \frac{\alpha^2}{n} \left(\frac{1}{n_\theta} - \frac{3}{4n} \right) \right]$$
(VII.9)

dove n_{θ} è il numero quantico che quantizza il momento angolare dell'elettrone e μ la sua massa ridotta.

$$\alpha = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0\hbar c} \approx \frac{1}{137}$$

è la *costante di struttura fine*. Si noti che la costante α è adimensionale. La (VII.9) coincide con quella della teoria quantica e relativistica di Dirac (1928) che include anche gli effetti dello spin dell'elettrone:

$$E \approx -\frac{1}{n^2} \frac{\mu e^4}{8h^2 \varepsilon_0^2} \left[1 + \frac{\alpha^2}{n} \left(\frac{1}{j+1/2} - \frac{3}{4n} \right) \right]$$
(VII.10)

dove j = l + s. Nelle due formule compare il segno \approx invece di quello di uguaglianza perché le formule corrette sono state approssimate trascurando i termini contenenti potenze superiori di α . Le due formule coincidono, per quanto riguarda il valore di E_n perché sia n_θ che j + 1/2 possono assumere i valori interi compresi tra 1 ed n; tuttavia, la formula di Dirac prevede che i livelli energetici corrispondenti allo stesso valore di j, ma con l diverso, abbiano la stessa energia, siano cioè, come si dice, degeneri.

La medesima² capacità predittiva delle formule di Sommerfeld e Dirac richiede qualche ulteriore commento. La formula di Sommerfeld è ricavata usando la dinamica relativistica e condizioni di quantizzazione che generalizzano quella usata da Bohr. La dipendenza dell'energia dei livelli permessi dal numero quantico n_{θ} ($n_{\theta} = 1, 2...n$) è una conseguenza della trattazione relativistica. La formula di Dirac approssimata (VII.10) può essere ricavata anche aggiungendo ai valori permessi dell'energia - che si ottengono con la

²Se si trascura la ricordata degenerazione dei livelli presente nella formula di Dirac.
Capitolo VII. Proprietà magnetiche

trattazione quantica non relativistica (e che coincidono, come abbiamo visto, con quelli del modello di Bohr) - correzioni che tengano conto del fatto che:

- 1. la dinamica usata deve essere relativistica;
- c'è una interazione tra il momento magnetico intrinseco dell'elettrone e il suo momento magnetico orbitale (interazione *spin - orbita*); questa correzione è nulla per *l* = 0;
- 3. l'elettrone possiede uno spin; questa correzione è nulla per l > 0.

La correzione relativistica risulta uguale a:

$$-\frac{1}{n^2}\frac{\mu e^4}{8h^2\varepsilon_0^2}\left[\frac{\alpha^2}{n}\left(\frac{1}{l+1/2}-\frac{3}{4n}\right)\right]$$

con l = 0, 1...n - 1. La correzione relativistica quantica è quindi diversa da quella relativistica calcolata da Sommerfeld. Accade che, aggiungendo le altre correzioni, le predizioni della (VII.9) e della (VII.10) coincidono. Tuttavia, la formula di Sommerfeld, ovviamente, oscura i fenomeni fisici elencati ai punti 2 e 3.

Verso la fine degli anni trenta del secolo scorso, una serie di meticolose osservazioni hanno posto in evidenza piccole discrepanze tra le previsioni basate sulla (VII.10) e i dati sperimentali. Nel 1938, S. Pasternack aveva osservato che tali discrepanze scomparirebbero se i due livelli $2S_{1/2}$ e $2P_{1/2}$ - che hanno lo stesso valore di j (1/2) e diverso valore di l (0 ed 1, rispettivamente) - differissero in energia di un ammontare opportuno, essendo $2P_{1/2}$ il livello inferiore.³ Nel 1947, Lamb e Retherford, osservarono la transizione diretta tra lo stato $2P_{1/2}$ e lo stato $2S_{1/2}$, mostrando così che la loro energia è diversa. La frequenza corrispondente a questa transizione è di 1057.858 $Mhz \pm 2KHz$ (dato del 1982). La spiegazione teorica di quello che è comunemente chiamato *Lamb shift* è fornita dalla elettrodinamica quantica (che quantizza il campo elettromagnetico).

Si noti infine che, per completare la trattazione dell'atomo di idrogeno, si dovrebbe tenere conto anche dell'interazione tra il momento magnetico dell'elettrone (orbitale e di spin) e quello del protone. Questa interazione dà origine ad una struttura delle righe detta *iperfine*.

³Allo studio sperimentale di questo problema ha dato un contributo anche L. Giulotto.

Il lettore avrà trovato in questo riepilogo della struttura della riga H_{α} più di uno spunto per lo sviluppo di riflessioni epistemologiche; senza entrare nel merito, ci permettiamo di segnalarne alcuni:

- i criteri quantitativi che permettono di ritenere una predizione teorica in (buon) accordo con l'esperimento;
- la funzione di modelli o teorie che, da diversi punti di vista, violano regole metodologiche condivise;
- la funzione di innovazione svolta, storicamente, dalla (consapevole) violazione delle regole metodologiche condivise;
- la capacità predittiva di teorie considerate, a posteriori, sbagliate. La necessità, quindi, di criteri di valutazione delle teorie che non si basino esclusivamente sul (buon) accordo con l'esperimento e che richiedano, *necessariamente*, una prospettiva temporale adeguata.

VII.5 Modelli microscopici

VII.5.1 Un modello ibrido: elettrone su orbita circolare

Si consideri un elettrone che ruoti con velocità angolare costante ω su una circonferenza di raggio *r* in senso antiorario (figura VII.7).



Figura VII.7. un elettrone rotante su un'orbita circolare.

Classicamente, tale moto non sarebbe possibile perché l'elettrone, essendo accelerato, emetterebbe energia sotto forma di radiazione elettromagnetica: la sua velocità aumenterebbe e il raggio della sua orbita diminuirebbe progressivamente. Questo elettrone potrebbe però essere considerato come un elettrone ruotante su un'orbita 'stazionaria' in un modello atomico alla Bohr. L'elettrone rotante può essere descritto come una spira circolare percorsa da una corrente

$$I = ev = e\frac{v}{2\pi r}$$

dove v è la frequenza del moto circolare e v la velocità dell'elettrone.



Figura VII.8. precessione del momento magnetico \vec{m} associato al momento angolare \vec{J} in un campo magnetico \vec{B} .

All'elettrone si può pertanto associare un momento di dipolo magnetico il cui modulo è dato da

$$|\vec{m}| = \frac{evr}{2}$$

perpendicolare al piano del foglio ed entrante. Nell'approssimazione non relativistica ($v \ll c$), all'elettrone è inoltre associato un momento angolare

$$\vec{J} = \vec{r} \times m_e \vec{v}$$

perpendicolare al piano del foglio ed uscente. Vale pertanto la relazione:

$$\vec{m} = -\frac{e}{2m_e}\vec{J} \tag{VII.11}$$

Si supponga ora di immergere l'elettrone rotante in un campo magnetico uniforme e costante \vec{B} . Siccome è stato mostrato che l'elettrone rotante 'possiede' un momento di dipolo magnetico, si conclude che su tale momento di dipolo agisce una coppia il cui momento Γ è dato da (equazione VI.36):

$$\vec{\Gamma} = \vec{m} \times \vec{B}$$

Tuttavia, l'effetto della coppia agente sul dipolo magnetico dell'elettrone *non* è quello di orientare \vec{m} nella direzione di \vec{B} perché al momento di dipolo magnetico è associato un momento angolare, come mostrato dalla (VII.11). Si ha invece (figura VII.8):

$$\frac{d\dot{f}}{dt} = \vec{\Gamma} = \vec{m} \times \vec{B} = -\frac{e}{2m_e}\vec{J} \times \vec{B}$$
(VII.12)

Cioè la variazione per unità di tempo di \vec{J} è perpendicolare al piano individuato da \vec{J} e \vec{B} : l'estremo del vettore \vec{J} percorre una circonferenza di raggio $J\sin\theta$, dove θ è l'angolo tra \vec{J} e \vec{B} . Si dice che il vettore \vec{J} *precede* intorno a \vec{B} , mantenendo invariata la sua inclinazione rispetto a \vec{B} .

Grandezza fisica	Descrizione semiclassica	Descrizione quantica
$\vec{\mu}, \vec{L}$	$\vec{\mu} = -\frac{e}{2m}\vec{L}$	$\vec{\mu} = -\frac{e}{2m}\vec{L}$
$\vec{\mu}_s, \vec{S}$	nessuna	$\vec{\mu}_s = -g_e \mu_B \vec{S}$
$ec{\mu}$ in un campo magnetico B_z	precessione	μ_z quantizzata
Componente μ_z	qualsiasi	quantizzata
Componente media di $\vec{\mu} \perp$ a \vec{B}	zero	zero

Tabella VII.1. momenti magnetici (μ , μ_s) e meccanici (L, S) degli elettroni in un atomo.

Si ha:

$$dJ = J\sin\theta d\varphi$$

dove $d\varphi$ è l'angolo che sottende l'arco descritto dall'estremo di \vec{J} nell'intervallo di tempo dt. Se si pone $d\varphi = \omega_p dt$, allora ω_p rappresenta la velocità angolare di rotazione dell'estremo del vettore \vec{J} o, equivalentemente, la velocità angolare di *precessione*. Quindi:

$$\frac{dJ}{dt} = J\sin\theta\,\omega_p$$

Per la (VII.12):

$$J\sin\theta\omega_p = mB\sin\theta$$

per cui:

$$\omega_p = \frac{m}{J}B = \frac{eB}{2m_e}$$

 ω_p si chiama pulsazione di Larmor. Se si tiene conto della descrizione quantica degli atomi riassunta nella sezione VII.3 (pagina 227), è possibile riassumere le caratteristiche della descrizione semiclassica e quantica nella tabella VII.1.

VII.5.2 L'esperimento di Stern e Gerlach

Si può scegliere tra la concezione quantica e quella classica mediante un esperimento molto semplice. A questo scopo basta esaminare la deviazione che un fascio di atomi subisce in un appropriato campo magnetico non omogeneo.

Otto Stern

Si è visto che, per quanto concerne il comportamento di un momento di dipolo magnetico associato ad un momento angolare, la fisica classica e la fisica quantica forniscono descrizioni tra cui si possono stabilire corrispondenze significative. Rimane tuttavia una diversità di fondo: per la fisica classica, l'inclinazione del momento di dipolo magnetico rispetto al campo magnetico può essere qualsiasi; quindi, la sua componente lungo la direzione del campo magnetico può essere qualsiasi. Viceversa, secondo la fisica quantica, la componente del momento magnetico lungo la direzione del campo magnetico può assumere solo valori discreti.

Otto Stern, nel 1921, ideò un esperimento per discriminare tra le due possibilità: componente del momento magnetico variabile, lungo la direzione del campo, con continuità (ipotesi classica) o per incrementi discreti (ipotesi quantica).

Si supponga che un atomo, elettricamente neutro, dotato di un dipolo magnetico $\vec{\mu}$, venga lanciato con velocità v, lungo la direzione x, tra le espansioni di un magnete con campo magnetico diretto come l'asse z, disomogeneo in questa direzione, con dB/dz > 0 e indipendente da z. Sull'atomo agirà una forza:

$$F_z = \frac{\partial(\vec{\mu} \cdot \vec{B})}{\partial z} = \frac{\partial(\mu_z B)}{\partial z} = \mu_z \frac{dB}{dz}$$

Un magnete di questo tipo può essere realizzato con la forma indicata in figura VII.9.

Se l'asse delle *x* lungo il quale viene lanciato l'atomo giace sotto il profilo del cuneo, allora il moto dell'atomo all'interno del magnete sarà composto



Figura VII.9. forma del magnete usato da Stern e Gerlach: la lunghezza del magnete era di 3.5 *cm*. *S* è la lastra di vetro su cui si depositano gli atomi di argento.

da un moto rettilineo uniforme lungo l'asse x e da un moto uniformemente accelerato lungo l'asse z: la sua traiettoria sarà dunque una parabola rivolta verso il basso o verso l'alto a seconda del segno di μ_z .

Stern progettò di eseguire questo esperimento con atomi di argento, elettricamente neutri e dotati di momento magnetico $\vec{\mu}$. Egli suppose che, dal punto di vista quantico, le possibili componenti di $\vec{\mu}$ lungo la direzione del campo magnetico potessero essere solamente $\pm \mu$. Stern pensava di avere a che fare con un momento magnetico di tipo orbitale: lo spin dell'elettrone non era ancora apparso sulla scena. Oggi si sa che il momento magnetico degli elettroni dell'atomo di argento è proprio il momento magnetico intrinseco dell'elettrone di valenza (il cui momento magnetico di origine orbitale è nullo). Infatti, il momento angolare totale (orbitale e di spin) di tutti gli altri elettroni è nullo: nullo è, di conseguenza, anche il loro momento magnetico totale.

Lo schema della disposizione sperimentale ideata da Stern è mostrato nella figura VII.10.

F è un forno in cui è fatto evaporare l'argento: gli atomi escono da un foro praticato in una parete. Di fronte ad esso vengono posti, a distanza opportuna, due schermi dotati, il primo di un foro circolare, ed il secondo di una stretta fenditura disposta orizzontalmente: la loro funzione è quella di collimare il fascio di atomi. Questi attraversano poi un campo magnetico fortemente disomogeneo nella direzione z e, usciti dal magnete, incontrano una lastra di vetro su cui si depositano. Il dispositivo sperimentale è mantenuto

Capitolo VII. Proprietà magnetiche



Figura VII.10. schema dell'apparato sperimentale di Stern e Gerlach. Si veda il testo.

sotto vuoto.

In assenza di campo magnetico gli atomi di argento che attraversano i collimatori percorrono la distanza che li separa dalla lastra di vetro con moto rettilineo uniforme e si depositano su di essa formando un'immagine della fenditura. Accendendo il campo magnetico disomogeneo sono possibili, sulla base del modello descrittivo adottato, due alternative: un allargamento dell'immagine nelle due direzioni $\pm z$ se fosse valida l'ipotesi classica; una suddivisione dell'immagine in due se fosse valida l'ipotesi quantica. Stern e Gerlach osservarono la suddivisione dell'immagine in due e conclusero che era valida l'ipotesi quantica (figura VII.11).



Figura VII.11. immagini ottenute da Stern e Gerlach. A sinistra, l'immagine in assenza di campo magnetico; a destra con campo magnetico. In questa figura, l'asse *z* è orizzontale: dB/dz è massima al centro dell'immagine e tende ad annullarsi ai lati. Le dimensioni dell'immagine, che per essere osservata, deve essere ingrandita al microscopio, sono: lunghezza 1.1 *mm*; larghezza massima 0.2 *mm*. Figura estratta da: W. Gerlach, O. Stern, *Zeitschrift für Physik*, 9, (1922), 349 - 352, p. 350.

Si noti che, misurando dB/dz e la separazione tra i centri delle due immagini osservate, è possibile ricavare il valore di μ . La distanza percorsa da un

atomo lungo la direzione +z, pari quindi alla metà della distanza tra le due immagini osservate, è data da:

$$d = \frac{1}{2}at^{2} = \frac{1}{2M}\mu \frac{dB}{dz} \frac{l^{2}}{v^{2}}$$
(VII.13)

dove M è la massa degli atomi di argento, v la loro velocità e l la distanza percorsa lungo la direzione x all'interno del magnete. Per potere ricavare μ dalla (VII.13) è necessario conoscere v. Stern e Gerlach hanno assunto per v il valore quadratico medio della velocità degli atomi che, all'interno del forno, hanno una componente non nulla della velocità lungo la direzione positiva delle x. Risulta:

$$\nu = \sqrt{\frac{4kT}{M}}$$

dove k è la costante di Boltzmann e T la temperatura assoluta. Si noti che questa, essendo la velocità quadratica media, coincide praticamente con la velocità più probabile: ad essa debbono quindi corrispondere i centri delle due immagini osservate.

VII.5.3 Paramagnetismo: descrizione quantica

Si è visto che, in generale, è possibile associare agli atomi e alle molecole un momento di dipolo magnetico dovuto alle proprietà degli elettroni componenti gli atomi o le molecole; secondo la descrizione quantica, la componente di questo dipolo lungo la direzione di un campo magnetico esterno assume valori discreti.

Si supponga di avere un gas di atomi in equilibrio termico, ciascuno dotato di momento magnetico. Un esempio potrebbe essere costituito da vapori di argento in equilibrio termico. Come si è già visto, ogni atomo di argento possiede un momento di dipolo magnetico la cui componente lungo la direzione di un campo magnetico esterno è pari, in valore assoluto, a μ_e (momento magnetico intrinseco dell'elettrone). Adottando la descrizione quantica, si può scrivere, applicando la statistica di Boltzmann, che il momento di dipolo magnetico per unità di volume del vapore di argento posto in un campo magnetico \vec{B} , diretto lungo l'asse *z*, è dato da:

$$M_z = \mu_e (N_{\uparrow} - N_{\downarrow}) = N \mu_e \frac{e^{\mu_e B/kT} - e^{-\mu_e B/kT}}{e^{\mu_e B/kT} + e^{-\mu_e B/kT}}$$

In figura VII.12 è mostrata la funzione

$$F(T) = \frac{e^{\mu_e B/kT} - e^{-\mu_e B/kT}}{e^{\mu_e B/kT} + e^{-\mu_e B/kT}} = \tanh \frac{\mu_e B}{kT}$$



Figura VII.12. grafico della funzione $F(T) = \tanh(\mu_e B/kT)$ per tre valori del campo magnetico *B*. μ_e è il momento magnetico dell'elettrone.

per tre valori del campo magnetico. Se $\mu_e B \ll kT$, è possibile sviluppare in serie gli esponenziali, ottenendo:

$$M_z \approx N\mu_e \frac{\mu_e B}{kT}$$

Si noti come l'approssimazione adottata corrisponda al caso in cui l'energia di interazione magnetica di ogni atomo $\mu_e B$ sia trascurabile rispetto alla sua energia cinetica media (3/2)kT. Se fosse stata utilizzata la descrizione classica (tutte le orientazioni del momento di dipolo magnetico atomico possibili), si sarebbe ottenuto un valore di M_z ridotto di 1/3 (si veda la trattazione svolta per i dipoli elettrici alla sezione VI.2.5, pagina 193).

VII.5.4 Diamagnetismo: modello classico

Si consideri un elettrone in moto armonico semplice con pulsazione ω_0 e ampiezza *A*. Il suo moto può essere considerato come composto da due moti circolari, con velocità angolare ω_0 e raggio R = A/2, di senso opposto e disegnati in figura VII.13 come aventi centri diversi per comodità di visualizzazione. In assenza di campo magnetico, il momento di dipolo magnetico dell'elettrone è nullo, perché nullo è il risultante dei momenti magnetici associati ai due moti circolari. Infatti, alle orbite (*a*) e (*b*) è associata una corrente $I = ev_0 = e\omega_0/(2\pi)$ e quindi un momento di dipolo magnetico perpendicolare al piano del foglio, uscente (a) o entrante (b), e avente

Giuliani Bonizzoni - Lineamenti di elettromagnetismo



Figura VII.13. il moto armonico di un elettrone nel piano della figura può essere considerato come composto da un moto circolare orario (a) e da un moto circolare antiorario (b), *disegnati con centri diversi per comodità di visualizzazione.* \vec{B} è un campo magnetico statico perpendicolare al piano del foglio ed entrante.

modulo:

$$M = \frac{1}{2} e \omega_0 R^2$$

Se si suppone che le orbite della figura VII.13 siano immerse in un campo magnetico \vec{B} a loro perpendicolare ed entrante (rispetto al piano del foglio), l'elettrone sarà soggetto ad una forza radiale di modulo evB, centripeta (a) o centrifuga (b). La forza radiale centripeta o centrifuga si somma (a) o si sottrae (b) alla forza che, in assenza di campo magnetico, costringe l'elettrone a ruotare sull'orbita circolare. La forza derivante dal campo magnetico tende quindi a diminuire (a) o ad aumentare (b) il raggio dell'orbita: siccome il modulo della velocità dell'elettrone non varia (perché il campo magnetico non compie lavoro sull'elettrone), la velocità angolare dell'elettrone aumenterà (a) o diminuirà (b). Si può pertanto scrivere, in assenza di campo magnetico:

$$F_0 = m_e \omega_0^2 R$$

e, in presenza di campo:

$$F_0 \pm e \nu B = m_e \omega^2 R \tag{VII.14}$$

dove il segno (+) si riferisce al caso (a), il segno (–) al caso (b) e dove è stata trascurata la variazione del raggio dell'orbita.

La (VII.14) può essere scritta così:

$$(\omega^2 - \omega_0^2)m_e R = \pm evB$$

Cioè:

$$(\omega + \omega_0)(\omega - \omega_0)m_eR = \pm evB$$

Ponendo ora $\Delta \omega = \omega - \omega_0 e \omega + \omega_0 \approx 2\omega_0$, si ottiene:

$$\Delta \omega = \pm \frac{eB}{2m_e} \tag{VII.15}$$

A questa variazione di velocità angolare corrisponde una variazione di momento di dipolo magnetico pari a:

$$\Delta M = \pi R^2 \Delta I = \pi R^2 \frac{e}{2\pi} \Delta \omega = \pm \frac{e^2 R^2}{4m_e} B \qquad (\text{VII.16})$$

dove il segno (+) e (–) si riferiscono al caso (a) e (b), rispettivamente. La situazione è riassunta nella tabella VII.2.

В	orbita	corrente	Μ	$\Delta \mathbf{M}$
entrante	oraria (a)	antioraria (a)	uscente (a)	uscente (a)
entrante	antioraria (b)	oraria (b)	entrante (b)	uscente (b)

Tabella VII.2. relazione tra le grandezze del modello della figura VII.13.

Dalla tabella appare che il momento di dipolo magnetico indotto dal campo magnetico è diretto in senso ad esso opposto, sia per il moto circolare orario che antiorario. Possiamo pertanto concludere che il momento di dipolo magnetico indotto \vec{M}_d è dato da:

$$\vec{M}_d = -\frac{e^2 R^2}{2m_e} \vec{B}$$

Si noti come il momento indotto \vec{M}_d sia diretto in senso opposto al campo magnetico inducente: in ciò consiste il fenomeno del *diamagnetismo*. Se si considera un numero statisticamente significativo di elettroni in moto armonico isotropicamente orientati nello spazio e N rappresenta la loro densità, si ha:

$$< R^2 > = \frac{A^2}{4} < \sin^2 \theta > = \frac{A^2}{8}$$

dove θ è l'angolo formato dalla direzione di oscillazione dell'elettrone con la direzione del campo magnetico. Il momento di dipolo indotto per unità di volume risulta allora:

$$\vec{M} = -N \frac{e^2 A^2}{16m_e} \vec{B}$$

Se, invece di considerare gli elettroni inizialmente in moto armonico, li si considera in moto circolare uniforme, si deve ripercorrere la derivazione

svolta considerando che ai fini del risultato conta la proiezione dell'area dell'orbita elettronica su un piano perpendicolare al campo magnetico. Si ottiene allora:

$$\vec{M}_d = -N \frac{e^2 R^2}{4m_e} < \sin^2 \theta > \vec{B} = -N \frac{e^2 R^2}{8m_e} \vec{B}$$

dove R è il raggio dell'orbita elettronica. Si noti come quest'ultimo modello sia ibrido (pagina 220), perché presuppone che gli elettroni possano percorrere orbite circolari senza irraggiare energia; inoltre, in assenza di campo magnetico, i singoli elettroni possiedono un momento di dipolo magnetico permanente.

Secondo la meccanica quantica, nel caso di un elettrone la cui funzione d'onda abbia simmetria sferica, si ha:

$$\vec{M}_d = -\frac{e^2}{4m_e} < x^2 + y^2 > \vec{B} = -\frac{e^2}{6m_e} < r^2 > \vec{B}$$
(VII.17)

dove $\langle x^2 + y^2 \rangle$ è il valore medio delle coordinate dell'elettrone sul piano perpendicolare al campo magnetico e $\langle r^2 \rangle$ è il valore medio del quadrato della distanza dell'elettrone dal nucleo; siccome la funzione d'onda ha simmetria sferica: $\langle x^2 + y^2 \rangle = (2/3) \langle r^2 \rangle$. Si noti come il fenomeno del diamagnetismo non dipenda dalla temperatura.

⇒ La (VII.15) e la (VII.17) permettono di valutare gli ordini di grandezza del diamagnetismo rispetto a quello del paramagnetismo. Si è visto in precedenza che il momento di dipolo magnetico medio per unità di volume di un vapore di argento è dato da:

$$M \approx N \frac{\mu_e^2 B}{kT}$$

Questo momento magnetico per unità di volume corrisponde ad un contributo medio per atomo di circa $2 \times 10^{-26} JT^{-1}$ per un campo magnetico di un Tesla e a temperatura ambiente (300 *K*). Dalla (VII.17) si deduce invece che il contributo diamagnetico di un elettrone è di circa $4.7 \times 10^{-29} JT^{-1}$ per un campo magnetico di un Tesla ed assumendo $r = 10^{-10} m$.

VII.5.4.1 Effetto Zeeman

Nel 1896, Pieter Zeeman scoprì l'effetto che porta il suo nome (si veda a pagina 476). Esso consiste nella suddivisione di una riga emessa o assorbita da un atomo o una molecola in più righe in seguito all'applicazione

Capitolo VII. Proprietà magnetiche

di un campo magnetico. La trattazione teorica dell'effetto Zeeman richiede, naturalmente, la meccanica quantica. Tuttavia, nel 1897, Lorentz fornì una descrizione elettromagnetica di quello che si chiama *effetto Zeeman normale*.

Si supponga che l'emissione di radiazione elettromagnetica da parte della materia sia dovuta a cariche elettriche puntiformi in moto armonico e che tali cariche siano elettroni. Se la direzione di applicazione del campo magnetico è il verso positivo dell'asse z, si consideri il piano individuato dall'asse z e dalla direzione lungo cui oscilla l'elettrone; si scomponga quindi il moto dell'elettrone, di pulsazione ω_0 , in due moti armonici, uno lungo l'asse z, l'altro nel piano xy; si scomponga ancora il moto nel piano xy in due moti armonici lungo x e lungo y e, infine, questi ultimi in due moti circolari, come quelli rappresentati nella figura VII.13. Indichiamo con x^+ , x^- e con y^+ , y^- le componenti circolari dei due moti armonici lungo x ed y, rispettivamente, designando con il segno (+) e con il segno (-) i moti come quello della figura VII.13 (a) e VII.13 (b), rispettivamente. Secondo la (VII.15), il campo magnetico aumenterà la pulsazione dei moti (+) di un ammontare pari a $eB/2m_e$ e diminuirà quella dei moti (–) dello stesso ammontare. Si combinano ora i moti (+) ed i moti (-) tra di loro. Dal moto armonico originario abbiamo così ottenuto:

- \diamond un moto armonico diretto lungo *z* di pulsazione ω_0 ;
- ♦ un moto circolare destrorso, relativamente al verso positivo dell'asse *z*, nel piano *xy* con velocità angolare $\omega_0 + eB/2m_e$;
- ♦ un moto circolare sinistrorso, relativamente al verso positivo dell'asse *z*, nel piano *xy* con velocità angolare $\omega_0 - eB/2m_e$.

Se gli oscillatori che danno origine all'emissione di radiazione sono uniformemente orientati nello spazio, la radiazione emessa lungo la direzione ed il verso del campo magnetico darà dunque origine a (figura VII.14):

- ♦ nessuna riga alla pulsazione ω_0 , perché la componente dell'accelerazione dell'elettrone perpendicolare alla linea di vista dello spettroscopio è nulla (si tenga conto dei risultati di pagina 106);
- ♦ una riga in corrispondenza alla pulsazione $\omega_0 + eB/2m_e$ polarizzata in senso circolare destrorso;
- ♦ una riga in corrispondenza alla pulsazione $\omega_0 eB/2m_e$ polarizzata in senso circolare sinistrorso.



Figura VII.14. effetto Zeeman normale. Per 'osservazione perpendicolare' si intende l'osservazione della luce emessa in direzione perpendicolare a quella del campo magnetico; per 'osservazione parallela', l'osservazione della luce emessa lungo la direzione ed il verso del campo magnetico. Per i simboli rappresentanti la polarizzazione della luce, si veda il testo.

⇒ Per le definizioni delle proprietà di polarizzazione della radiazione elettromagnetica si veda a pagina 302.

Invece, la radiazione emessa lungo una direzione perpendicolare al campo magnetico darà origine a:

- ♦ una riga in corrispondenza alla pulsazione ω_0 , polarizzata linearmente e parallelamente alla direzione del campo magnetico;
- ♦ una riga in corrispondenza alla pulsazione $\omega_0 + eB/2m_e$, polarizzata linearmente e perpendicolarmente alla direzione del campo magnetico;
- ♦ una riga in corrispondenza alla pulsazione $\omega_0 eB/2m_e$, polarizzata linearmente e perpendicolarmente alla direzione del campo magnetico.

L'effetto Zeeman normale è quindi caratterizzato dal fatto che, osservando la radiazione emessa in direzione perpendicolare a quella del campo magnetico, si osservano tre righe. In realtà, la situazione più frequente è quella

Capitolo VII. Proprietà magnetiche

in cui le righe osservate sono in numero maggiore: questo caso è stato definito come *effetto Zeeman anomalo*. La meccanica quantica mostra che i casi in cui si osserva l'effetto Zeeman normale sono quelli in cui non interviene lo spin elettronico perché gli stati elettronici coinvolti nella transizione hanno il numero quantico S = 0 (si veda a pagina 229). E' questa la ragione per cui è possibile dare una descrizione elettromagnetica dell'effetto Zeeman normale. Nell'effetto Zeeman anomalo interviene invece lo spin dell'elettrone: non è possibile una descrizione elettromagnetica.

VII.5.5 Ferromagnetismo: descrizione fenomenologica

Si dicono ferromagneti quei materiali che possono avere un momento di dipolo magnetico anche in assenza di un campo magnetico esterno. Lo studio fenomenologico dei materiali ferromagnetici può essere fatto nel modo seguente. Un solenoide rettilineo viene riempito col materiale oggetto di studio: si misura il campo magnetico nelle immediate vicinanze del materiale ferromagnetico che si affaccia ad una soglia del solenoide in funzione della corrente che vi circola. Se il materiale è inizialmente smagnetizzato, la curva che si ottiene è simile a quella mostrata in figura VII.15.



Figura VII.15. tipica curva di isteresi magnetica.

Le proprietà magnetiche del materiale dipendono dalla sua storia: sottoponendo il materiale a successivi cicli di *isteresi*, le curve che si ottengono, pur simili, non si sovrappongono. La curva $A \rightarrow B$ si chiama curva di prima magnetizzazione. Nella parte finale di questa curva la crescita di \vec{B} in funzione di \vec{H} è lineare. Giunti in B, diminuendo la corrente che circola nel solenoide, si percorre il tratto di curva $B \rightarrow C$: il valore di \vec{M} corrispondente al valore \overline{AC} di \vec{B} si chiama *magnetizzazione residua*. Come mostrato in figura, per

annullare tale magnetizzazione è necessario invertire il senso della corrente circolante nel solenoide ed aumentarne il valore sino a portare la curva di magnetizzazione nel punto *D*. Il valore \overline{AD} di \vec{H} si chiama *campo smagnetizzante* (o forza coercitiva). Proseguendo nell'esperimento si completa la curva di isteresi attraverso i punti *EFGB*. Ripetendo il ciclo si otterrebbe una curva simile, ma non uguale.

La curva di isteresi caratterizza le proprietà fondamentali del ferromagnete: un valore elevato della magnetizzazione residua è richiesto per un buon magnete permanente; un suo valore trascurabile per le testine di registrazione; un alto valore della forza coercitiva è richiesto per le memorie magnetiche. Per i ferromagneti usati nei trasformatori si richiede che l'area racchiusa dalla curva di isteresi sia ridotta: essa infatti rappresenta il lavoro speso per compiere il ciclo di isteresi e l'energia corrispondente viene dissipata sotto forma di calore nel ferromagnete.

I ferromagneti, al di sopra di una temperatura critica T_C , detta *temperatura di Curie*, si comportano come paramagneti: la suscettività magnetica è inversamente proporzionale alla temperatura:

$$\chi = \frac{C}{T - T_C}$$

Al di sotto della temperatura di Curie, essi possono presentare una magnetizzazione permanente. La presenza o meno di una magnetizzazione permanente dipende da come il ferromagnete, una volta portato al di sopra della temperatura di Curie, viene raffreddato: se il processo di raffreddamento è sufficientemente veloce, si ottiene un ferromagnete senza magnetizzazione residua.

La meccanica quantica permette una descrizione delle proprietà ferromagnetiche attraverso l'ipotesi che l'energia di interazione tra due elettroni appartenenti a due atomi vicini sia descrivibile dall'equazione:

$$U = -2J\vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2$$

dove *J* è un integrale detto *di scambio* e \vec{S}_1 , \vec{S}_2 sono gli spin dei due elettroni. Affinché questa energia sia negativa con \vec{S}_1 e \vec{S}_2 paralleli, occorre che *J* sia positivo: nel caso dei ferromagneti *si assume* che sia *J* > 0. Il ferromagnetismo è quindi dovuto ai momenti magnetici intrinseci degli elettroni e al loro allineamento in una medesima direzione.

Questa descrizione è tuttavia incompleta. Se infatti, nella fase ferromagnetica, tutti i momenti magnetici intrinseci degli elettroni responsabili del

Capitolo VII. Proprietà magnetiche

ferromagnetismo fossero allineati lungo una medesima direzione non si otterrebbero le figure di isteresi descritte sopra. Per spiegare queste curve è necessario introdurre il concetto di dominio ferromagnetico. Un dominio è una regione del ferromagnete all'interno del quale i momenti magnetici intrinseci degli elettroni responsabili del ferromagnetismo sono tutti orientati nella medesima direzione. Un ferromagnete che, al di sotto della temperatura di Curie, non presenta magnetizzazione spontanea è allora caratterizzato dalla presenza di un numero statisticamente significativo di dominî tale che la magnetizzazione media sia nulla. Come già detto, questa situazione corrisponde al punto A della figura VII.15. Al crescere della corrente nel solenoide, avvengono due processi: i dominî già orientati lungo la direzione del campo magnetizzante \vec{H} crescono a spese degli altri; questi ultimi tendono inoltre ad orientarsi nella direzione del campo magnetizzante. Quando questi due processi si sono ultimati, il ferromagnete è costituito da un unico dominio in cui il vettore magnetizzazione \vec{M} è diretto come \vec{H} . Se si riprende la relazione tra \vec{B} e \vec{H} :

$$\vec{B} = \vec{B}_0 + \mu_0 \vec{M} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{M})$$

si vede che il processo di magnetizzazione è inizialmente descritto dal termine dominante $\vec{M} = \chi_m \vec{H}$, con χ_m che varia al variare di \vec{H} . Esaurito questo processo, \vec{B} cresce linearmente in funzione di \vec{H} .

Il più antico materiale magnetico conosciuto è la *ferrite*, la cui formula chimica è:

$FeO \cdot Fe_2O_3$

Il suo 'ordine ferromagnetico', che si stabilisce al di sotto di una temperatura critica detta di Néel, è particolare: ciò è dovuto al fatto che il reticolo della ferrite può essere suddiviso in due sotto - reticoli: l'uno degli ioni 'ferrosi', l'altro degli ioni 'ferrici'. L'interazione di scambio tra gli spin dei due tipi di ioni è tale per cui essi si dispongono antiparallelamente; d'altra parte, essendo differente il momento magnetico associato ai due tipi di ioni, ne risulta una magnetizzazione netta. La ferrite e le *ferriti* - in cui lo ione ferroso è sostituito da un altro ione bivalente - si dicono *ferrimagnetici*. La conducibilità elettrica delle ferriti è molto bassa: questa caratteristica, che riduce le correnti parassite generate per induzione elettromagnetica, ne favorisce l'uso tecnologico.

Ci sono infine materiali il cui ordine, al di sotto della temperatura di Néel, è *anti - ferromagnetico*. La struttura di questi materiali è dello

stesso tipo di quella dei ferrimagneti: tuttavia, in questo caso, il momento magnetico associato agli spin che si dispongono antiparallelamente è lo stesso; ne risulta una magnetizzazione nulla al di sotto della temperatura di Néel.

Capitolo VIII

Onde elettromagnetiche negli isolanti

VIII.1 Le equazioni di Maxwell negli isolanti

Le equazioni di Maxwell in un mezzo materiale omogeneo assumono la forma:

$$div\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon}$$

$$rot\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$$

$$div\vec{B} = 0$$

$$rot\vec{B} = \mu\left(\vec{J} + \varepsilon\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right)$$
(VIII.1)

dove $\mu = \mu_0 \mu_r$ e $\varepsilon = \varepsilon_0 \varepsilon_r$ sono, rispettivamente, la permeabilità magnetica e la costante dielettrica del materiale. Negli isolanti ($\vec{J} = 0$) non ferromagnetici le (VIII.1) assumono la forma, se si pone $\mu_r = 1$:

$$div \vec{E} = 0$$

$$rot \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$div \vec{B} = 0$$

$$rot \vec{B} = \mu_0 \varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

La soluzione di questo sistema di equazioni è, matematicamente, la stessa di quella ottenuta precedentemente per il vuoto (sezione IV.1.1, pagina 86). Il campo elettromagnetico si propaga nei mezzi isolanti, come nel vuoto, sotto forma di onde: la sua velocità di propagazione è però diversa. Vale infatti la relazione:

$$\nu = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu_0}} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\varepsilon_r\mu_0}} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_r}} = \frac{c}{n}$$

dove $n = \sqrt{\varepsilon_r}$ è l'*indice di rifrazione* del mezzo. Inoltre, il vettore di Poynting è dato dall'espressione, se $\mu_r = 1$:

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B}$$

VIII.2 Indice di rifrazione di un isolante

Nel cercare di trarre inferenze sul futuro dal passato, noi procediamo sempre in questo modo. Costruiamo delle immagini o simboli degli oggetti esterni; e diamo loro una forma tale che le necessarie conseguenze delle immagini nel pensiero sono sempre le necessarie conseguenze nella natura delle cose descritte...Le immagini di cui stiamo parlando sono le nostre concezioni delle cose. Esse sono in conformità con le cose stesse sotto un aspetto importante: perché soddisfano la condizione suesposta. Non è necessario, per i nostri fini, che esse siano in conformità con le cose sotto ogni altro aspetto qualsivoglia. Infatti, noi non sappiamo, né possiamo sapere in alcun modo,

se le nostre concezioni delle cose sono in conformità con esse sotto ogni altro che non sia questo unico fondamentale aspetto.

Heinrich Hertz

L'indice di rifrazione di un mezzo è quindi definito dalla relazione

 $n = \sqrt{\varepsilon_r}$

La costante dielettrica relativa ε_r è stata introdotta nella sezione VI.2.3 (pagina 189) in cui abbiamo studiato le proprietà *statiche* dei mezzi dielettrici. Siamo ora interessati al caso in cui un mezzo isolante è sottoposto all'azione di un campo elettromagnetico rapidamente variabile nel tempo,

quale è quello di un'onda elettromagnetica. La forza esercitata dal campo elettromagnetico dell'onda sulle cariche contenute nel mezzo è (forza di Lorentz):

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$$

dove q è il valore della carica e \vec{v} la sua velocità. Per procedere, è necessario definire un modello del mezzo isolante, per quanto concerne la sua risposta alle sollecitazioni del campo elettromagnetico dell'onda. Supporremo, innanzitutto, che il mezzo isolante sia un gas: in questo caso il campo elettrico agente su un atomo è il campo elettrico macroscopico (si veda la sezione VI.2.4 a pagina 191). Trascureremo, inoltre, il moto dei nuclei: terremo cioè conto solo del moto degli elettroni. Questa semplificazione è permessa dal rapporto tra la massa degli elettroni e quella dei nuclei. Trascureremo anche l'azione del campo magnetico: ricordando che B = E/c, questa semplificazione è possibile se $v \ll c$ e se il campo elettrico dell'onda non è troppo elevato. Supporremo infine che gli elettroni siano richiamati verso una posizione di equilibrio da una forza elastica. L'equazione di moto degli elettroni sarà dunque quella di un moto armonico forzato. Pertanto, supponendo che il campo elettrico dell'onda sia diretto lungo l'asse x e usando la notazione complessa per le funzioni sinusoidali:

$$\ddot{x} = -\frac{k}{m_e}x - \frac{eE_0}{m_e}e^{-i\omega x}$$

dove e è il valore assoluto della carica elettronica e m_e la massa dell'elettrone. Una soluzione particolare di questa equazione è:

$$x = -\frac{eE_0}{m_e} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2} e^{-i\omega t}$$

dove $\omega_0 = \sqrt{k/m_e}$ è la pulsazione propria degli elettroni (in assenza di campo elettromagnetico). Per $\omega \to \omega_0$, l'ampiezza *x* del moto tende all'infinito. Ciò è dovuto al fatto che non si è tenuto conto di alcun processo dissipativo. Introduciamo pertanto nell'equazione di moto un termine dissipativo proporzionale alla velocità degli elettroni (questa proporzionalità è assunta per semplicità). L'equazione di moto diventa allora:

$$\ddot{x} = -\omega_0^2 x - \gamma \dot{x} - \frac{eE_0}{m_e} e^{-i\omega t}$$
(VIII.2)

e una sua soluzione particolare:

$$x = -\frac{eE_0}{m_e} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega} e^{-i\omega t}$$

Si ricordi che la soluzione dell'equazione differenziale omogenea che si ricava dalla (VIII.2) decade esponenzialmente in funzione del tempo come $e^{-(\gamma/2)t}$. Questa equazione omogenea è identica a quella discussa a pagina 124 nello studio della larghezza naturale della riga emessa da un atomo.

Il momento di dipolo elettrico indotto per unità di volume P_x sarà allora:

$$P_x = -Nex = \frac{Ne^2 E_0}{m_e} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega} e^{-i\omega t}$$

dove N è il numero di elettroni per unità di volume.

⇒ Il numero *n* di atomi contenuti in un volume *V* di gas o vapore è dato da: **T** 7

$$n = \frac{pV}{kT}$$

dove p è la pressione, k la costante di Boltzmann e T la temperatura assoluta. Se $p = 1 atm = 1.01325 \times 10^5 Nm^{-2}$, T = 300 K e $V = 1 m^3$: -3

$$n = 2.45 \times 10^{25} m^{-3}$$

Se il gas è di argon, allora il numero di elettroni N contenuti in un metro cubo è $N = n \times 18 = 4.4 \times 10^{26} m^{-3}$.

Se (ipotesi soddisfatta per campi elettrici non troppo intensi):

$$P_x = \varepsilon_0 \chi E_x$$

si ottiene:

$$n^{2} = \varepsilon_{r} = 1 + \chi = 1 + \frac{Ne^{2}}{m_{e}\varepsilon_{0}} \frac{1}{\omega_{0}^{2} - \omega^{2} - i\gamma\omega}$$

quindi:

$$n^2 = 1 + \frac{Ne^2}{m_e\varepsilon_0} \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2\omega^2} + i\frac{Ne^2}{m_e\varepsilon_0} \frac{\gamma\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2\omega^2}$$

Ponendo l'indice di rifrazione complesso *n* uguale a $n_1 + i n_2$, valgono le relazioni:

$$n_1^2 - n_2^2 = \varepsilon_{r_1}$$

$$2n_1n_2 = \varepsilon_{r_2}$$

Giuliani Bonizzoni - Lineamenti di elettromagnetismo



Figura VIII.1. parte reale (*n*₁; equazione VIII.3) e immaginaria (*n*₂; equazione VIII.4) dell'indice di rifrazione di un isolante. Parametri: $\omega_0 = 2.6653 \times 10^{15} rad s^{-1}$; $N = 4.4 \times 10^{26} m^{-3}$; $\gamma = 0.5 \times 10^{14} rad s^{-1}$. La pulsazione ω_0 corrisponde alla riga a 706.722 *nm* dell'argon. Il valore di γ è stato scelto in modo da porre in evidenza l'asimmetria delle curve rispetto ad ω_0 . Si veda anche la figura VIII.2.

 $\cos \varepsilon_{r_1} + i \varepsilon_{r_2} = \varepsilon_r$. Risolvendo questo sistema di equazioni, si ottiene:

$$n_1 = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\sqrt{\varepsilon_{r_1}^2 + \varepsilon_{r_2}^2} + \varepsilon_{r_1}}$$
(VIII.3)

$$n_2 = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\sqrt{\varepsilon_{r_1}^2 + \varepsilon_{r_2}^2} - \varepsilon_{r_1}}$$
 (VIII.4)

Delle varie combinazioni possibili nell'espressione di $n = n_1 + i n_2$ useremo solo quella con $n_1 e n_2$ positivi. $n_1 < 0$ corrisponde ad un'onda con vettore d'onda diretto in senso opposto a quello del vettore d'onda derivante da $n_1 > 0$. $n_2 < 0$ conduce invece ad un'onda la cui ampiezza cresce esponenzialmente in funzione della distanza percorsa.

Pertanto, un'onda piana che si propaga in un mezzo di indice di rifrazione complesso $n = n_1 + i n_2$, è descritta dall'espressione:

$$Ae^{i(n_1\vec{k}_0\cdot\vec{r}-\omega t)}e^{-n_2\vec{k}_0\cdot\vec{r}}$$

Capitolo VIII. Onde elettromagnetiche negli isolanti



Figura VIII.2. dipendenza della parte immaginaria n_2 dell'indice di rifrazione (equazione VIII.4) dal fattore dissipativo (o di smorzamento) γ . Gli altri parametri sono gli stessi della figura VIII.1.

dove \vec{k}_0 è il vettore d'onda nel vuoto. La velocità di fase dell'onda $V = c/n_1$ dipende dalla parte reale n_1 dell'indice di rifrazione; l'ampiezza dell'onda decresce esponenzialmente secondo il fattore $e^{-n_2\vec{k}_0\cdot\vec{r}}$ dipendente dalla parte immaginaria n_2 . La dipendenza di n_1 dalla pulsazione dà luogo al fenomeno della *dispersione*: n_1 cresce lentamente in funzione di ω nella zona detta di *dispersione normale*; nelle vicinanze della pulsazione propria ω_0 , la dispersione si dice *anomala* (figura VIII.1). Per $\omega > \omega_0$, n_1 è minore di 1 e la velocità di fase dell'onda $V = c/n_1$ è maggiore di *c*. Ciò non implica alcuna violazione della relatività ristretta (si veda la sezione V.6 a pagina 130). n_2 è praticamente nullo ad eccezione dei dintorni della pulsazione propria ω_0 ; il fattore di smorzamento γ determina l'andamento di n_2 nei dintorni di ω_0 (figura VIII.2).

Il modello discusso può essere raffinato considerando più frequenze proprie di oscillazione ω_{0_k} (con i relativi coefficienti di smorzamento γ_k). Si ottiene così una descrizione simile a quella della fisica quantica, rappresentata dall'equazione:

$$n^{2} = 1 + \frac{Ne^{2}}{m\varepsilon_{0}} \sum_{k} \frac{f_{k}(\omega_{0_{k}}^{2} - \omega^{2})}{(\omega_{0_{k}}^{2} - \omega^{2})^{2} + \gamma_{k}^{2}\omega^{2}} + i \frac{f_{k}\gamma_{k}\omega}{(\omega_{0_{k}}^{2} - \omega^{2})^{2} + \gamma_{k}^{2}\omega^{2}}$$

in cui compaiono in aggiunta, rispetto all'equazione classica, i coefficienti adimensionali f_k tali che $\sum_k f_k = 1$.

VIII.2.1 Dispersione attraverso un prisma

Il fenomeno della dispersione è utilizzato in spettroscopia per separare le varie componenti della radiazione elettromagnetica. L'elemento dispersivo



Figura VIII.3. rifrazione di un'onda monocromatica attraverso un prisma. Si veda il testo.

è costituito da un prisma a base triangolare (figura VIII.3). Dal triangolo DEB si ricava che l'angolo di deviazione δ è dato da:

$$\delta = (\theta_i + \theta'_i) - (\theta_r + \theta'_r)$$

Essendo l'angolo $\hat{C} = \pi - \alpha$, dal triangolo *BCD* si ricava che:

$$\theta_r + \theta'_r = \alpha$$

Pertanto:

$$\delta = \theta_i + \theta'_i - \alpha$$

Applicando ripetutamente la legge di Snell (si veda la VIII.17 a pagina 262), si verifica che:

$$\delta = \theta_i - \alpha + \arcsin\left(\sin\alpha\sqrt{\frac{n_2^2}{n_1^2} - \sin^2\theta_i} - \cos\alpha\sin\theta_i\right)$$
(VIII.5)

dove n_1 e n_2 sono, rispettivamente, l'indice di rifrazione dell'aria e del prisma. La (VIII.5) mostra che l'angolo di deviazione δ dipende dal rapporto n_2/n_1 : per i prismi usuali, questo rapporto è una funzione crescente della frequenza della radiazione. Per esempio, nel caso della luce visibile e di un prisma trasparente, δ aumenta passando dal rosso al violetto.

Spettrometri. Gli spettrometri sono strumenti usati per studiare le proprietà della radiazione elettromagnetica o la sua interazione con la materia. Uno spettrometro è caratterizzato dall'elemento dispersivo e dal rivelatore: la loro scelta dipende, essenzialmente, dalla lunghezza d'onda della radiazione studiata o utilizzata. Gli elementi dispersivi maggiormente usati sono prismi o reticoli a riflessione (sezione V.8.4, pagina 145). Nell'intervallo della luce visibile e del primo ultravioletto, i rivelatori sono generalmente costituiti da fotomoltiplicatori (basati sull'effetto fotoelettrico; sezione IX.2, pagina 287); nel primo infrarosso da fotodiodi. Si veda la tabella V.2 (pagina 176) per un elenco di sorgenti e rivelatori di radiazione elettromagnetica. Tutti gli spettrometri sono dotati di una fenditura d'ingresso; quelli che non utilizzano lastre fotografiche come rivelatore, anche di una fenditura d'uscita.

VIII.3 Continuità dei campi tra due mezzi isolanti

Nella trattazione dei fenomeni di riflessione e rifrazione saranno usate le relazioni che legano le componenti dei campi elettrico e magnetico alla superficie di separazione tra due mezzi isolanti:

$$E_{t_1} = E_{t_2} \tag{VIII.6}$$

$$\frac{E_{n_1}}{E_{n_2}} = \frac{\varepsilon_{r_2}}{\varepsilon_{r_1}}$$
(VIII.7)

$$B_{n_1} = B_{n_2}$$
(VIII.8)

$$\frac{B_{t_1}}{B_{t_2}} = \frac{\mu_{r_1}}{\mu_{r_2}}$$
(VIII.9)

Per ricavare la (VIII.6) si procede, in riferimento alla figura VIII.4, scrivendo la circuitazione del campo elettrico lungo il rettangolo della figura, i cui lati di lunghezza infinitesima dl_t sono paralleli alla superficie di separazione dei due mezzi.

Calcolando la circuitazione in senso antiorario e assumendo come positive le componenti tangenziali dirette secondo \rightarrow e quelle normali dirette secondo \uparrow , si ottiene, trascurando gli infinitesimi del secondo ordine rispetto



Figura VIII.4. per il calcolo della circuitazione di un vettore lungo il rettangolo di lati $dl_n e dl_t$. 1 e 2 sono due mezzi materiali diversi e la linea spessa ne indica la superficie di separazione. A rigore, il tratto interno al rettangolo, che rappresenta la superficie di separazione tra i due mezzi dovrebbe essere raffigurato, essendo infinitesimo, da un segmento rettilineo.

a quelli del primo:

$$E_{t_2}dl_t + E_{n_2}\frac{dl_n}{2} + E_{n_1}\frac{dl_n}{2} - E_{t_1}dl_t - E_{n_2}\frac{dl_n}{2} - dE_{n_2}\frac{dl_n}{2} - E_{n_1}\frac{dl_n}{2} - E_{n_1}\frac{dl_n}{$$

Quindi, confrontando i due termini tra parentesi quadre e trascurando gli infinitesimi del secondo ordine rispetto a quelli del primo:

$$E_{t_2} = E_{t_1}$$

Si procede in modo analogo per ricavare la (VIII.9). Si osserva innanzitutto che, in un isolante :

$$rot \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

da cui, con un procedimento simile a quello seguito poc'anzi, si ottiene:

$$H_{t_2} = H_{t_1}$$

Quindi:

$$\frac{B_{t_1}}{B_{t_2}} = \frac{\mu_{r_1}}{\mu_{r_2}}$$

La (VIII.8) si ricava invece considerando un cubo infinitesimo, di cui due facce sono parallele alla superficie di separazione dei due mezzi. Si scrive che il flusso di \vec{B} uscente dal cubo è nullo perché $div\vec{B} = 0$. Si procede poi come sopra, trascurando gli infinitesimi del secondo ordine rispetto a quelli del primo. Infine la (VIII.7) si ottiene, seguendo la stessa procedura, perché, negli isolanti, $div\vec{D} = 0$.

VIII.4 Riflessione e rifrazione



Figura VIII.5. riflessione e rifrazione di un'onda piana. 1 e 2 sono due mezzi isolanti omogenei ed isotropi di indice di rifrazione $n_1 e n_2$, rispettivamente: la loro superficie di separazione è il piano *xy*. Le frecce indicano *solo* il verso dei tre vettori d'onda. $\theta_i, \theta_r, \theta_t$ sono, rispettivamente, l'angolo di incidenza, di riflessione e di rifrazione.

Si considerino due mezzi isolanti $\boxed{1}$ e $\boxed{2}$ separati da una superficie piana e siano $n_1 = \sqrt{\varepsilon_{r_1}}$ ed $n_2 = \sqrt{\varepsilon_{r_2}}$ i rispettivi indici di rifrazione; i due mezzi sono considerati *perfettamente* trasparenti (non assorbono energia dall'onda che li attraversa) e la loro permeabilità magnetica relativa è assunta uguale ad 1. Un'onda piana (fronte d'onda infinitamente esteso) sinusoidale (quindi monocromatica), di vettore d'onda \vec{k}_i , propagantesi nel mezzo $\boxed{1}$, incide sulla superficie di separazione (figura VIII.5). Si assume il piano di separazione tra i due mezzi come piano xy; si assume inoltre che il vettore d'onda \vec{k}_i e dalla normale alla superficie di separazione, è detto *piano di incidenza*.

Si osservi che l'ampiezza (per esempio, componente del campo elettrico o magnetico) di un'onda piana sinusoidale è rappresentata dall'espressione (figura VIII.6):

$$Ae^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)} = Ae^{i(k_xx+k_yy+k_zz-\omega t)}$$

Ne segue che, usando il suffisso i per l'onda incidente, il suffisso r per l'onda



Figura VIII.6. onda piana. F è il fronte d'onda; \vec{k} il vettore d'onda; \vec{r} è il vettore posizione di un punto qualsiasi del fronte d'onda.

riflessa e il suffisso t per l'onda trasmessa, avremo, per i campi elettrici:

$$E_i = E_{i_0} e^{i(k_i \cdot \vec{r} - \omega_i t)}$$
(VIII.10)

$$E_r = E_{r_0} e^{i(k_r \cdot \vec{r} - \omega_r t + \varphi_r)}$$
(VIII.11)

$$E_t = E_{t_0} e^{i(k_t \cdot \vec{r} - \omega_t t + \varphi_t)}$$
(VIII.12)

e relazioni analoghe per i campi magnetici. L'esistenza delle condizioni (VIII.6 - VIII.7) che devono essere soddisfatte per $z \rightarrow 0$, per qualunque istante di tempo *t* e per qualunque valore di *x* e di *y*, implica che la fase delle (VIII.10 - VIII.12) sia la stessa per z = 0. Pertanto:

$$\vec{k}_i \cdot \vec{r} - \omega_i t = \vec{k}_r \cdot \vec{r} - \omega_r t + \varphi_r = \vec{k}_t \cdot \vec{r} - \omega_t t + \varphi_t$$

Siccome questa equazione deve essere soddisfatta, per z = 0, per qualunque valore di *t*, *x* e *y*, deve essere:

$$\varphi_r(z=0) = \varphi_t(z=0) = 0$$
 (VIII.13)

$$\omega_i = \omega_r = \omega_t \tag{VIII.14}$$

$$k_{ix} = k_{rx} = k_{tx} (VIII.15)$$

$$k_{iy} = k_{ry} = k_{ty}$$
(VIII.16)

La pulsazione delle onde incidente, riflessa e trasmessa è quindi la stessa.

Avendo assunto k_i parallelo al piano yz, si avrà $k_{ix} = k_{rx} = k_{tx} = 0$: anche i vettori d'onda delle onde riflessa e trasmessa giacciono nel piano yz.

Dall'uguaglianza delle componenti *y* dei tre vettori d'onda, segue che la collocazione nei quadranti del piano *yz* dei vettori d'onda $\vec{k}_r \in \vec{k}_t$ dipende dalla collocazione di \vec{k}_i . Se \vec{k}_i è collocato come in figura VIII.5, il vettore d'onda dell'onda riflessa giace nel primo quadrante del piano *yz*, mentre quello dell'onda trasmessa giace nel quarto quadrante.

Dall'uguaglianza delle pulsazioni e delle componenti *y* dei tre vettori d'onda, usando la relazione che lega la lunghezza d'onda all'indice di rifrazione ($\lambda = \lambda_0/n$, dove λ_0 è la lunghezza d'onda nel vuoto), segue che:

$$n_1 \sin \theta_i = n_1 \sin \theta_r = n_2 \sin \theta_t$$

Questa uguaglianza mostra che:

- ♦ l'angolo di riflessione θ_r è uguale all'angolo di incidenza θ_i ;
- ♦ e che (*legge di Snell*)

$$\frac{\sin\theta_i}{\sin\theta_t} = \frac{n_2}{n_1} \tag{VIII.17}$$

VIII.4.1 Intensità dell'onda riflessa e trasmessa

Si considera dapprima un'onda incidente polarizzata linearmente perpendicolarmente al piano di incidenza; si tratterà poi il caso di un'onda incidente polarizzata linearmente nel piano di incidenza; infine, un'onda incidente generica sarà considerata come un'opportuna combinazione lineare di queste due onde. Un'onda elettromagnetica si dice linearmente polarizzata quando la direzione del suo campo elettrico (e, conseguentemente, quella del suo campo magnetico) è costante. Per convenzione, la direzione di polarizzazione dell'onda è quella del campo elettrico.

VIII.4.1.1 Polarizzazione perpendicolare

Si osservi che, nel mezzo $\boxed{1}$, il campo elettrico (magnetico) è la somma vettoriale dei campi elettrici (magnetici) incidente e riflesso. Il campo elettrico dell'onda incidente è, per assunzione, diretto come l'asse *x*. Il campo elettrico dell'onda riflessa avrà la stessa direzione: se così non fosse, il campo elettrico dell'onda riflessa, quindi anche il campo elettrico totale nel mezzo $\boxed{1}$, avrebbe una componente non nulla nel piano di incidenza (*yz*). Di conseguenza, per la continuità della componente tangenziale del campo elettrico, anche il campo elettrico dell'onda trasmessa avrebbe la stessa componente nel piano di incidenza e non risulterebbe quindi più perpendicolare alla direzione di propagazione dell'onda. Quindi, sia l'onda riflessa, sia l'onda trasmessa saranno polarizzate perpendicolarmente al piano di incidenza.

La continuità della componente tangenziale del campo elettrico (espressa dalla VIII.6) - tenendo conto del fatto che nel mezzo 1 i campi sono dati dalla sovrapposizione dei campi incidente e riflesso - implica che:

$$E_i + E_r = E_t$$

Nel piano *xy*, questa equazione assume la forma:

$$E_{i_0}e^{i(k_{i_y}y-\omega_t t)} + E_{r_0}e^{i(k_{r_y}y-\omega_r t+\varphi_r)} = E_{t_0}e^{i(k_{t_y}y-\omega_t t+\varphi_t)}$$

che deve valere per ogni valore di y e di t.

Per *y* = 0, siccome sulla superficie di separazione $\varphi_r = \varphi_t = 0$ (equazione VIII.13), si ottiene:

$$E_{i_0}e^{-i\omega_i t} + E_{r_0}e^{-i\omega_r t} = E_{t_0}e^{-i\omega_t t}$$
(VIII.18)

Dalla (VIII.18) e (VIII.14) segue che:

$$E_{i_0} + E_{r_0} = E_{t_0} \tag{VIII.19}$$

La (VIII.9) conduce invece alla:

$$B_{i_y} + B_{r_y} = B_{t_y} \tag{VIII.20}$$

che, mediante un procedimento analogo a quello sopra seguito per le componenti del campo elettrico, porta alla:

$$B_{i_0} + B_{r_0} = B_{t_0}$$

Essendo:

$$B_0 = \frac{k E_0}{\omega}$$

l'equazione (VIII.20) assume la forma:

$$-\cos\theta_{i}\frac{k_{i}E_{i_{0}}}{\omega} + \cos\theta_{i}\frac{k_{i}E_{r_{0}}}{\omega} = -\cos\theta_{t}\frac{k_{t}E_{t_{0}}}{\omega}$$

Cioè:

$$k_{i_z}(E_{i_0} - E_{r_0}) = k_{t_z} E_{t_0}$$
(VIII.21)

Le equazioni (VIII.19) e (VIII.21) costituiscono un sistema di due equazioni nelle due incognite E_{r_0} e E_{t_0} ; in esse E_{i_0} è noto. Le soluzioni di questo sistema sono:

$$E_{r_0} = \frac{k_{i_z} - k_{t_z}}{k_{i_z} + k_{t_z}} E_{i_0}$$
$$E_{t_0} = \frac{2k_{i_z}}{k_{i_z} + k_{t_z}} E_{i_0}$$

La prima di queste due equazioni, espressa in funzione degli angoli e degli indici di rifrazione, diventa:

$$E_{r_0} = \frac{n_1 \cos \theta_i - n_2 \cos \theta_t}{n_1 \cos \theta_i + n_2 \cos \theta_t} E_{i_0}$$

e la seconda:

$$E_{t_0} = \frac{2\cos\theta_i}{n_1\cos\theta_i + n_2\cos\theta_t} E_{i_0}$$

Utilizzando la legge di Snell $n_2 = n_1(\sin\theta_i / \sin\theta_t)$ e moltiplicando poi numeratore e denominatore per $\sin\theta_t$, si ottiene, infine:

$$E_{r_0}^{\perp} = -\frac{\sin(\theta_i - \theta_t)}{\sin(\theta_i + \theta_t)} E_{i_0}^{\perp}$$
(VIII.22)

dove il simbolo \perp ricorda che il campo elettrico è perpendicolare al piano di incidenza. Analogamente, per l'altra equazione, si ottiene:

$$E_{t_0}^{\perp} = \frac{2\cos\theta_i \sin\theta_t}{\sin(\theta_i + \theta_t)} E_{i_0}^{\perp}$$

Si noti che, per la (VIII.22), l'onda riflessa risulta sfasata di $-\pi$ rispetto a quella incidente, se $n_1 < n_2$. Se invece $n_1 > n_2$, lo sfasamento tra le due onde è nullo.

VIII.4.1.2 Polarizzazione parallela

In questo caso, il campo magnetico è perpendicolare al piano di incidenza. Con considerazioni analoghe a quelle sviluppate nel caso precedente, si dimostra che anche le onde riflessa e trasmessa sono polarizzate parallelamente al piano di incidenza. Si procede poi applicando l'equazione di continuità della componente tangenziale di \vec{B} (si ricordi che è stata assunta uguale ad 1 la permeabilità magnetica relativa dei due mezzi) e si scrive infine tale equazione in funzione dei campi elettrici. Sviluppando tutti i calcoli, si ottiene:

$$E_{r_0} = \frac{n_2^2 k_{i_z} - n_1^2 k_{t_z}}{n_2^2 k_{i_z} + n_1^2 k_{t_z}} E_{i_0}$$
$$E_{t_0} = \frac{2n_1 n_2 k_{i_z}}{n_2^2 k_{i_z} + n_1^2 k_{t_z}} E_{i_0}$$

In termini degli angoli di incidenza e trasmissione, queste equazioni assumono la forma:

$$E_{r_0}^{\parallel} = \frac{\sin\theta_i \cos\theta_i - \sin\theta_t \cos\theta_t}{\sin\theta_i \cos\theta_i + \sin\theta_t \cos\theta_t} E_{i_0}^{\parallel} = \frac{\tan(\theta_i - \theta_t)}{\tan(\theta_i + \theta_t)} E_{i_0}^{\parallel}$$
$$E_{t_0}^{\parallel} = \frac{2\sin\theta_t \cos\theta_i}{\sin(\theta_i + \theta_t)\cos(\theta_i - \theta_t)} E_{i_0}^{\parallel}$$

dove il simbolo || ricorda che il campo elettrico giace nel piano di incidenza.

VIII.4.1.3 Coefficienti di riflessione e trasmissione

I coefficienti di riflessione e trasmissione sono definiti in funzione della potenza *W* (dimensioni: [*energia*] $[t^{-1}]$) delle onde definita a sua volta come il prodotto della loro intensità (data dal vettore di Poynting e avente dimensioni [*energia*] $[l^{-2}][t^{-1}]$) per una superficie perpendicolare alla direzione di propagazione.



Figura VIII.7. per la definizione della potenza delle onde. Si veda il testo.

Le relazioni tra le superficî coinvolte nella definizione di potenza sono (figura VIII.7):

$$A_i = A_r$$
$$A_i = A\cos\theta_i$$
$$A_t = A\cos\theta_t$$

Dalle ultime due equazioni segue che:

$$\frac{A_t}{A_i} = \frac{\cos\theta_t}{\cos\theta_i}$$

I coefficienti di riflessione e trasmissione sono definiti come:

$$R = \frac{W_r}{W_i} = \frac{\langle S_r \rangle A_r}{\langle S_i \rangle A_i} = \frac{\langle S_r \rangle}{\langle S_i \rangle}$$
$$T = \frac{W_t}{W_i} = \frac{\langle S_t \rangle A_t}{\langle S_i \rangle A_i}$$

dove < S > è il valore medio - su un periodo - del modulo del vettore di Poynting \vec{S} .



Figura VIII.8. coefficienti di riflessione e trasmissione per luce polarizzata perpendicolarmente o parallelamente al piano di incidenza in funzione dell'angolo di incidenza θ_i . Il mezzo 1 è aria ($n_1 = 1.00029$); il mezzo 2 vetro ($n_2 = 1.5$).

Tenendo conto che, avendo assunto $\mu_r = 1$, si ha, se *n* è l'indice di rifrazione:

$$< S >= n \frac{E_0^2}{2} \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}$$

si ottiene:

$$R_{\perp} = \frac{\sin^2(\theta_i - \theta_t)}{\sin^2(\theta_i + \theta_t)}$$
$$T_{\perp} = \frac{\sin 2\theta_i \sin 2\theta_t}{\sin^2(\theta_i + \theta_t)}$$

e:

$$R_{\parallel} = \frac{\tan^{2}(\theta_{i} - \theta_{t})}{\tan^{2}(\theta_{i} + \theta_{t})}$$
$$T_{\parallel} = \frac{\sin 2\theta_{i} \sin 2\theta_{t}}{\sin^{2}(\theta_{i} + \theta_{t}) \cos^{2}(\theta_{i} - \theta_{t})}$$

In accordo con il principio di conservazione dell'energia, risulta (figura VIII.8):

$$R_{\perp} + T_{\perp} = 1$$
$$R_{\parallel} + T_{\parallel} = 1$$

VIII.4.1.4 Onda incidente non polarizzata

Un'onda piana non polarizzata può essere descritta come derivante dalla sovrapposizione, con ugual peso, di due onde piane polarizzate rispettivamente nel piano di incidenza e perpendicolarmente a tale piano e con fasi tra di loro indipendenti. Ne segue che il coefficiente di riflessione di un'onda non polarizzata è dato da:

$$R = \frac{1}{2}(R_{\perp} + R_{\parallel})$$

Si osservi che R_{\parallel} diventa nullo quando $\tan(\theta_i + \theta_t) = \infty$, quando cioè $\theta_i + \theta_t = \pi/2$. L'angolo di incidenza θ_B per il quale è soddisfatta questa relazione si chiama *angolo di Brewster*. Risulta:

$$\theta_B = \arctan \frac{n_2}{n_1}$$

In questo caso l'onda riflessa è completamente polarizzata perpendicolarmente al piano di incidenza.

Si ha inoltre che $R_{\perp} > R_{\parallel}$, per qualunque valore dell'angolo di incidenza. Ne segue che l'onda riflessa è sempre parzialmente polarizzata.

Questa proprietà viene, per esempio, utilizzata negli occhiali le cui 'lenti' sono costruite con materiale opportuno che trasmette solo luce polarizzata linearmente in una determinata direzione. In questi
Capitolo VIII. Onde elettromagnetiche negli isolanti



Figura VIII.9. illustrazione del funzionamento di un polarizzatore *P* con luce riflessa dalla superficie *S*.

occhiali, la direzione di polarizzazione permessa è disposta verticalmente (figura VIII.9): la componente riflessa polarizzata perpendicolarmente al piano di incidenza (perpendicolarmente al piano della figura) viene completamente assorbita dal polarizzatore *P*, mentre una frazione pari a $\cos^2 \theta$ dell'onda riflessa polarizzata parallelamente al piano di incidenza attraversa il polarizzatore (si veda a pagina 303). Il risultato è che parte della luce riflessa dalla superficie *S* viene assorbita dal polarizzatore.

VIII.5 Riflessione totale

Si consideri il caso in cui l'onda incidente passa da un mezzo 'più denso' a un mezzo 'meno denso', caso che si verifica quando $n_1 > n_2$: nella rifrazione, il vettore d'onda si allontana dalla normale al piano di incidenza. L'angolo di trasmissione raggiunge il valore $\pi/2$ quando l'angolo di incidenza assume un valore tale che:

$$\sin\theta_i = \frac{n_2}{n_1}$$

Al crescere dell'angolo di incidenza oltre questo valore, il seno dell'angolo di trasmissione diventerebbe maggiore di 1. Interpretiamo questo risultato dicendo che non c'è allora onda rifratta: l'onda incidente viene totalmente riflessa. Questo fenomeno sta alla base del funzionamento delle fibre ottiche.

Il fenomeno della riflessione totale richiede, tuttavia, una trattazione più sofisticata. Quando l'angolo di incidenza è superiore all'angolo limite, possiamo continuare ad attribuire significato alla formula:

$$\sin\theta_t = \frac{n_1}{n_2}\sin\theta_i$$

anche se essa implica sin $\theta_t > 1$. Allora, il coseno dell'angolo di trasmissione è immaginario:

$$\cos^2\theta_t = 1 - \sin^2\theta_t = 1 - a^2$$

dove $a = \sin \theta_t$ è maggiore di 1.



Figura VIII.10. alternanza di due mezzi con indice di rifrazione diversi, con $n_1 > n_2$. Se la separazione *AB* dei due mezzi densi è piccola rispetto alla lunghezza d'onda e un'onda incide dal mezzo n_1 al mezzo n_2 con un angolo superiore all'angolo limite, parte dell'onda attraversa lo strato *AB* e penetra nel secondo mezzo di indice n_1 . Affinché questo fenomeno si verifichi, è sufficiente che il secondo mezzo denso abbia indice di rifrazione maggiore di n_2 .

Si può quindi scrivere:

$$\cos\theta_t = \pm i\sqrt{a^2 - 1}$$

con a > 1. Ne segue che la componente lungo l'asse z del vettore d'onda dell'onda trasmessa sarà (figura VIII.5 a pagina 260):

$$k_{t_z} = \frac{2\pi}{\lambda} \cos\theta_t = \pm i \frac{2\pi}{\lambda} \sqrt{a^2 - 1}$$

L'ampiezza dell'onda nel secondo mezzo avrà dunque l'espressione:

$$Ae^{i(k_x x + k_y y + k_z z - \omega t)} = Ae^{\mp [(2\pi/\lambda)\sqrt{a^2 - 1}]z} Ae^{i(k_x x + k_y y - \omega t)}$$
(VIII.23)

Scartando la soluzione con il segno +, corrispondente ad un'onda la cui ampiezza tende all'infinito, l'ampiezza si attenua esponenzialmente e il fattore di attenuazione è:

$$\Lambda = \frac{\lambda}{2\pi\sqrt{a^2 - 1}}$$

Se, come si è supposto in precedenza (si veda a pagina 261), il vettore d'onda nel mezzo 1 giace nel piano *yz*, e quindi $k_{i_x} = 0$, anche il vettore d'onda nel mezzo 2 avrà $k_x = 0$. Pertanto la (VIII.23) si riduce alla:

$$Ae^{-[(2\pi/\lambda)\sqrt{a^2-1}]z}Ae^{i(k_yy-\omega t)}$$
(VIII.24)

L'onda rappresentata dalla (VIII.24) si propaga lungo la direzione *y* parallelamente alla superficie di separazione tra i due mezzi: la sua ampiezza diminuisce esponenzialmente in funzione della distanza dalla superficie di separazione. Essa è chiamata *onda evanescente*. Una trattazione completa mostrerebbe che, nel caso di onde piane infinitamente estese nello spazio e nel tempo e di superficie di separazione infinitamente estesa, non vi è trasmissione di energia nel mezzo meno denso: la riflessione è effettivamente totale.

Consideriamo tuttavia la situazione in cui alla superficie di separazione tra i due mezzi, viene avvicinato, dalla parte del mezzo meno denso (aria) un mezzo avente indice di rifrazione maggiore di quello dell'aria (figura VIII.10). Se l'ampiezza dello strato di aria tra i due mezzi 'densi' è dell'ordine della lunghezza d'onda dell'onda, parte dell'onda supera lo strato di aria e penetra nell'altro mezzo denso: l'entità del fenomeno e la ripartizione dell'energia tra onda riflessa e trasmessa dipende dall'ampiezza dello strato d'aria.

Questo fenomeno può facilmente essere osservato usando microonde, la cui lunghezza d'onda tipica è dell'ordine del centimetro. Con luce visibile, la separazione tra i due mezzi densi dovrebbe invece essere dell'ordine di qualche decimo di micron. Oggi questo fenomeno è utilizzato, con luce visibile, in microscopi di struttura simile a quella dei microscopi ad effetto tunnel o a forza atomica.¹

¹Si veda ad esempio: G. Binnig e H. Rohrer, 'Scanning tunneling microscopy - From birth to adolescence', alla pagina: http://www.nobel.se/physics/laureates/1986/binnig-lecture.html; si cerchi in rete 'evanescent wave spectroscopy'.

Capitolo IX

Onde elettromagnetiche nei metalli

IX.1 Conduzione elettrica nei metalli

I metalli sono caratterizzati dalla presenza di elettroni liberi di muoversi sotto l'azione di campi elettrici o magnetici. Un tipico metallo contiene circa $10^{22} \div 10^{23}$ elettroni liberi per ogni cm^3 . Il comportamento degli elettroni di conduzione di un metallo può essere descritto sulla base del seguente modello:

- \$ gli elettroni si muovono in tutte le direzioni con velocità uguali in modulo (questa assunzione, apparentemente assunta per esigenze di semplicità, porta a previsioni corrette per le ragioni illustrate a pagina 402);
- \$\overline\$ gli elettroni subiscono 'urti' provocati dalle oscillazioni degli ioni intorno alle loro posizioni reticolari;
- \$ gli urti sono isotropi (dopo l'urto, la direzione di moto dell'elettrone non dipende dalla direzione di moto prima dell'urto), quasi elastici (la frazione di energia persa da un elettrone in un urto è trascurabile) ed omogenei (avvengono con le stesse modalità in ogni punto del metallo).

Si osservi come il modello, che verrà sviluppato matematicamente, descrive solo le proprietà degli elettroni di conduzione; gli ioni del metallo intervengono solo in modo indiretto quali responsabili degli urti subiti dagli elettroni.

IX.1.1 Campi elettrici costanti

Sia N_0 il numero degli elettroni liberi del metallo e si supponga che ciascuno di essi subisca un urto all'istante t = 0. Se N è il numero di elettroni che al generico istante successivo t non hanno ancora subito il secondo urto, il numero di elettroni che subiranno il secondo urto nell'intervallo di tempo dt, compreso tra t e t + dt, è dato da:

$$dN = -\frac{1}{\tau}Ndt \tag{IX.1}$$

dove il parametro τ ha le dimensioni di un tempo. La (IX.1) si basa sull'ipotesi che il numero di elettroni che subiscono il secondo urto nell'intervallo di tempo dt è proporzionale ad N e a dt.

Il numero di elettroni *N* che al generico istante *t* non ha ancora subito il secondo urto si ottiene integrando la (IX.1):

$$N = N_0 e^{-t/\tau}$$

L'intervallo di tempo medio < t > tra il primo ed il secondo urto sarà dato da:

$$\langle t \rangle = \frac{1}{N_0} \int_0^\infty t \cdot \frac{1}{\tau} N dt$$

che, integrato per parti, dà:

$$< t > = \tau$$

Il parametro τ della (IX.1) è quindi l'intervallo di tempo medio tra due urti successivi.

⇒ In un metallo tipico, come il rame, si ha, a temperatura ambiente ($T = 300^{\circ}K$): $\tau \approx 2 \times 10^{-14} s$

La velocità media degli elettroni (mediata su tutti gli elettroni ad un certo istante, o su un intervallo di tempo sufficientemente lungo, rispetto a τ , per un singolo elettrone) sarà nulla.

L'applicazione di un campo elettrico \vec{E} costante accelera ogni elettrone tra un urto e l'altro e, di conseguenza, la componente della velocità di ogni elettrone nella direzione del campo varia di una quantità pari a $-(eE/m_e)t$ $(m_e$ è la massa dell'elettrone). Siccome si è supposto l'urto isotropo, la velocità acquisita nella direzione del campo viene mediata a zero dall'urto successivo - se la media è effettuata su tutti gli elettroni - o da un numero sufficientemente grande di urti, se la media è effettuata su un singolo elettrone.

Se si suppone che gli urti siano istantanei, la velocità media, nella direzione del campo, è quella acquisita tra due urti successivi ed è quindi data da:

$$v_d = \frac{1}{N_0} \int_0^\infty -\frac{eE}{m_e} t \frac{N}{\tau} dt$$

Integrando si ottiene, in forma vettoriale:

$$\vec{\nu}_d = -\frac{e\tau}{m_e}\vec{E} = -\mu_e\vec{E} \tag{IX.2}$$

 v_d si chiama *velocità di deriva* (drift velocity) e μ_e *mobilità* degli elettroni. Se N è la concentrazione degli elettroni di conduzione, il vettore densità di corrente è:

 $\vec{J} = N(-e)\vec{v}_d$

$$\vec{J} = \frac{Ne^2\tau}{m_e}\vec{E} = \sigma_0\vec{E}$$
(IX.3)

La grandezza

$$\sigma_0 = \frac{Ne^2\tau}{m_e}$$

si chiama *conducibilità elettrica* del metallo ed il suo inverso $\rho_0 = 1/\sigma_0$, *resistività elettrica*. La teoria delle bande dei solidi cristallini mostra che la massa dell'elettrone che compare nell'espressione della conducibilità deve essere sostituita dalla *massa effettiva* degli elettroni (pagina 403).

Materiale	Resistività (Ω m)
Argento	1.6×10^{-8}
Rame	1.7×10^{-8}
Oro	2.3×10^{-8}
Alluminio	2.5×10^{-8}
Silicio (puro)	2.5×10^{2}
Vetro	$pprox 10^{10}$
Ceramica	$pprox 10^{16}$

Tabella IX.1. resistività, a temperatura ambiente, di alcuni materiali.

La (IX.3), legge di Ohm in forma locale, mostra che la densità di corrente è proporzionale alla concentrazione degli elettroni di conduzione, all'intervallo di tempo medio tra due urti successivi, al campo elettrico applicato ed è inversamente proporzionale alla massa dell'elettrone.

La relazione tra i moduli di $\vec{E} \in \vec{J}$ è:

 $E = \rho_0 J$

oppure:

$$El = \frac{\rho_0 l}{S} JS$$

che, posto $R = \rho_0 l/S$, diventa:

$$\Delta V = RI \tag{IX.4}$$

dove $\Delta V = El$ rappresenta la differenza di potenziale ai capi del filo, *R* la sua resistenza e *I* la corrente che lo attraversa. La (IX.4) è la legge di Ohm in forma integrale. Quando la (IX.4) si può applicare ad un elemento di un circuito elettrico, si dice che tale elemento è *ohmico* o ha comportamento ohmico.

⇒ Se un filo di rame, avente una sezione $S = 1 mm^2$, è percorso da una corrente I = 1 A, la velocità di deriva degli elettroni è data da:

$$v_d = \frac{J}{Ne} = \frac{I}{S} \frac{1}{Ne} \approx 7.34 \times 10^{-5} \, m \, s^{-1}$$
 dove $n = 8.5 \times 10^{28} \, m^{-3}$.

Il lavoro compiuto nell'unità di tempo dal campo elettrico in un tratto di filo di resistenza R attraversato dalla corrente I è dato da:

$$W = \Delta V I = I^2 R \tag{IX.5}$$

Questa energia viene 'dissipata' nel filo sotto forma di calore. La (IX.5) è dovuta a Joule e la produzione di calore in un conduttore attraversato da corrente si chiama *effetto Joule*.

Nella trattazione svolta, abbiamo tenuto conto solo dei processi d'urto tra gli elettroni di conduzione e gli ioni del cristallo in moto intorno alle loro posizioni reticolari. Se si tiene conto anche della presenza di impurezze, la resistività dei metalli può essere espressa come somma di due termini:

$$\rho = \rho_L + \rho_i$$

 ρ_L , dovuta all'urto con gli ioni, è proporzionale a *T* a temperature sufficientemente alte - temperatura ambiente inclusa - e proporzionale a T^5 a temperature sufficientemente basse: la temperatura di riferimento che suddivide i due intervalli è la temperatura di Debye Θ_D ; ρ_i è invece il termine dovuto alle impurezze ed è indipendente dalla temperatura, se la concentrazione delle impurezze non è troppo elevata.

I processi d'urto sono quindi responsabili del fatto che la velocità degli elettroni di conduzione di un metallo, in presenza di un campo elettrico, non cresce indefinitamente, ma assume un valore finito costante: la velocità di deriva. L'equazione di moto di un elettrone di conduzione può allora essere scritta sotto la forma:

$$\ddot{x} = -\frac{eE_x}{m_e} - \frac{1}{\tau}\dot{x}$$

Il termine in \dot{x} rappresenta, dal punto di vista macroscopico, una forza di 'attrito' proporzionale alla velocità dell'elettrone e diretta in senso opposto. L'integrale generale di questa equazione differenziale è dato da:

$$\dot{x} = v_0 e^{-t/\tau} - \frac{eE_x}{m_e} \tau$$

In condizioni stazionarie, $t \gg \tau$, si ottiene nuovamente la (IX.2).



Figura IX.1. applicazione del teorema di Poynting ad un filo percorso dalla corrente *I*.

In figura IX.1, è mostrato un tratto di filo a sezione circolare, di raggio *R*, percorso dalla corrente *I*. In un punto della superficie del filo, il campo magnetico *B* prodotto dalla corrente *I* è dato da $B = \mu I/2\pi R$. Pertanto, in ogni punto della superficie del filo è definito il vettore di Poynting $S = EB/\mu = EI/2\pi R$. Il flusso - entrante - di *S* attraverso la superficie di un tratto di filo lungo *l* è quindi dato da:

$$\frac{IE}{2\pi R}2\pi Rl = IEl = I\Delta V = I^2 R$$

Cioè: l'energia dissipata nell'unità di tempo per effetto Joule nel tratto di filo di lunghezza l è uguale al flusso entrante del vettore di Poynting nel medesimo tratto

di filo. E' questo un caso in cui una predizione corretta *non* rappresenta quella che riteniamo essere la situazione reale: la pila, producendo un campo elettrico nel filo, accelera gli elettroni che cedono agli ioni, mediante urti, parte dell'energia acquisita. In altri termini: la descrizione del fenomeno mediante l'uso del vettore di Poynting non deve essere interpretato in termini realisti. Non era così alla fine dell'Ottocento. Scriveva, per esempio, John Poynting:

Sembra pertanto che nessuna parte dell'energia di una corrente viaggi lungo il filo, ma che essa provenga dal mezzo isolante che circonda il filo; che, appena essa penetra, incomincia ad essere trasformata in calore; che la quantità che attraversa strati successivi del filo diminuisca finché quando il centro, dove non c'è campo magnetico e pertanto passaggio di energia, viene raggiunto essa è stata tutta trasformata in calore. Una corrente di conduzione può allora essere considerata come costituita da questo flusso di energia con i suoi associati campi magnetici ed elettrici e la trasformazione dell'energia in calore nel conduttore.¹

E Galileo Ferraris:

Ora ecco la conseguenza a cui conduce questo teorema [di Poynting]. In un filo percorso da una corrente elettrica la forza elettrica è longitudinale mentre quella magnetica, perpendicolare al piano passante per l'asse, è tangenziale; il flusso dell'energia è adunque radiale e diretto verso l'interno. L'energia non fluisce nel filo longitudinalmente, ma entra dall'esterno normalmente alla superficie, ed entrata si trasforma in calore.²

IX.1.2 Campi elettrici sinusoidali: basse frequenze

Se il campo elettrico applicato è alternato:

$$E_x = E_{x_0} e^{-i\omega t}$$

l'equazione di moto degli elettroni diventa:

$$\ddot{x} = -\frac{eE_{x_0}}{m_e}e^{-i\omega t} - \frac{\dot{x}}{\tau}$$
(IX.6)

Questa equazione vale solo se il periodo T del campo elettrico è molto più grande di τ , intervallo di tempo medio tra due urti successivi. Deve quindi

¹J.H. Poynting, 'On the transfer of energy in the electromagnetic field', *Philosophical Transactions*, 174, (1884), 343 - 361, p. 351.

²G. Ferraris, 'Sulla trasmissione dell'energia elettrica', (1894), in *Opere di Galileo Ferraris*, vol. II, Hoepli, Milano, 1903, pp. 461 - 462.

essere:

$$v \ll \frac{1}{\tau}$$

⇒ Per il rame a temperatura ambiente, questa condizione implica che $v \ll 5 \times 10^{13} Hz$.

La (IX.6) può essere scritta come:

$$\frac{d\dot{x}}{dt} + \frac{1}{\tau}\dot{x} = -\frac{eE_{x_0}}{m_e}e^{-i\omega t}$$
(IX.7)

La corrispondente equazione omogenea è:

$$\frac{d\dot{x}}{dt} = -\frac{1}{\tau}\dot{x}$$

Che, risolta mediante separazione delle variabili, dà:

$$\dot{x} = Ce^{-t/\tau}$$

Cercando una soluzione particolare della (IX.7) del tipo

$$\dot{x} = Ae^{-i\omega t}$$

si ottiene che:

$$A = -\frac{e\tau}{m_e} E_{x_0} \frac{1 + i\omega\tau}{1 + \omega^2\tau^2}$$

Pertanto, la soluzione generale della (IX.7) è:

$$\dot{x} = Ce^{-t/\tau} - \frac{e\tau}{m_e} \frac{1 + i\omega\tau}{1 + \omega^2 \tau^2} E_{x_0} e^{-i\omega t}$$

Si ha quindi, per valori di $t \gg \tau$:

$$\dot{x} = -\frac{e\tau}{m_e} \frac{1 + i\omega\tau}{1 + \omega^2\tau^2} E_{x_0} e^{-i\omega\tau}$$

e:

$$J_{x} = -Ne\dot{x} = \frac{Ne^{2}\tau}{m_{e}} \frac{1+i\omega\tau}{1+\omega^{2}\tau^{2}} E_{x_{0}}e^{-i\omega\tau} = \sigma_{0}\frac{1+i\omega\tau}{1+\omega^{2}\tau^{2}} E_{x_{0}}e^{-i\omega\tau}$$

con

$$\sigma_0 = \frac{Ne^2\tau}{m_e}$$

La conducibilità è quindi data da:

$$\sigma = \sigma_0 \frac{1 + i\omega\tau}{1 + \omega^2 \tau^2} \tag{IX.8}$$

Per $\omega \ll 1/\tau$, la parte reale della conducibilità coincide praticamente con σ_0 .

⇒ La condizione $\omega \ll 1/\tau$ è più restrittiva di quella stabilita in precedenza sulla frequenza: essa infatti richiede, per il rame a temperatura ambiente, che $\nu \ll 7.96 \times 10^{12}$ Hz.

IX.1.3 Dipolo oscillante

A partire da pagina 105 abbiamo studiato il fenomeno della produzione di onde elettromagnetiche da parte di una carica puntiforme in moto; l'equazione (IV.50, pagina 107) fornisce la potenza irradiata da una carica puntiforme in moto armonico nel caso in cui l'elongazione massima della carica sia piccola rispetto alla distanza alla quale si misura l'energia in arrivo e la velocità media della carica sia piccola rispetto a *c*. Riscriviamo pertanto la (IV.50), ponendo in essa $ex_0 = p_0$:

$$\langle P \rangle = \frac{p_0^2 \omega^4}{12\pi\varepsilon_0 c^3}$$
 (IX.9)

Questa equazione si applica anche al caso di dipoli macroscopici. Per vedere come, si consideri un elemento di filo conduttore di lunghezza l, in cui gli elettroni siano sottoposti ad un moto armonico:

$$x = x_0 \cos \omega t$$

Abbiamo visto che questa condizione è verificata se la frequenza del campo elettrico applicato è sufficientemente bassa. Nel filo viene indotto un momento di dipolo elettrico per unità di volume dato da (N è il numero di elettroni liberi per unità di volume):

$$P = -Nex_0 \cos \omega t$$

che è legato alla densità di corrente J dalla relazione:

$$J = -Ne\dot{x} = \frac{dP}{dt} = Ne\omega x_0 \sin \omega t$$

L'elemento di filo si comporta quindi come un dipolo 'oscillante' il cui valore massimo è dato da:

$$p_0 = Nex_0 Sl = \frac{I_0}{\omega}l$$

dove *S* è la sezione del filo ed I_0 il valore massimo della corrente che percorre il filo. Ponendo $p_0 = I_0 l/\omega$ nella (IX.9), si ottiene:

$$< P >= \frac{I_0^2 l^2 \omega^4}{12\pi\varepsilon_0 c^3} = \frac{1}{2} \left(\frac{\omega^2 l^2}{6\pi\varepsilon_0 c^3} \right) I_0^2 = \frac{1}{2} R_{rad} I_0^2$$

dove:

$$R_{rad} = \frac{\omega^2 l^2}{6\pi\varepsilon_0 c^3} = \frac{2\pi}{3\varepsilon_0 c} \frac{l^2}{\lambda^2} \approx 789 \frac{l^2}{\lambda^2} \Omega \qquad (IX.10)$$

 R_{rad} si chiama *resistenza di radiazione*; λ è la lunghezza d'onda della radiazione emessa. La validità della (IX.10) è sottoposta alle condizioni:

$$v \ll \frac{1}{2\pi\tau}$$
$$v \ll \frac{c}{l} \Rightarrow \lambda \gg l$$

Siccome, per la validità della (IX.10), deve essere $l \ll \lambda$, la resistenza di radiazione risulta, in generale, piccola rispetto a quella ohmica del filo. Di conseguenza, la potenza irraggiata dal filo è piccola rispetto a quella dissipata nel filo per effetto Joule.

> ⇒ Per un filo di rame ($\rho = 1.7 \times 10^{-8}$) lungo 1 *m* e avente una sezione di 1 *mm*²:

$$R_{ohm} = \rho \frac{\iota}{S} = 1.7 \times 10^{-2} \,\Omega$$

a temperatura ambiente.

E' quindi necessario usare 'fili' (antenne) per i quali $l \sim \lambda$: tuttavia, in questo caso, la (IX.10) non è più valida. L'antenna viene allora trattata come una serie di dipoli, ciascuno leggermente sfasato rispetto ai dipoli contigui. Un'antenna a mezz'onda è costituita da un filo verticale, con gli estremi liberi. In questa antenna, si ha un nodo di corrente agli estremi, perché ivi la velocità delle cariche è nulla; si ha invece un ventre di corrente nel suo punto di mezzo. Queste condizioni impongono che:

$$l = n \frac{\lambda}{2} \implies \lambda = \frac{2l}{n} \quad n \text{ intero}$$

Se $l = \lambda/2$, l'antenna lavora a mezz'onda e la (IX.10) è sostituita dalla:

$$R_{rad} = \frac{2.44}{4\pi\varepsilon_0 c} \approx 73\,\Omega$$

Se l'estremo inferiore di un'antenna lineare verticale è messo a terra, si ha, in quell'estremo, un nodo di potenziale e, quindi, un ventre di corrente; all'altro estremo, come nel caso precedente, si ha un nodo di corrente. Queste condizioni impongono che:

$$l = n \frac{\lambda}{4} \implies \lambda = \frac{4l}{n} \quad n \text{ intero}$$

Si ottiene così un'antenna a quarto d'onda. Le antenne sono poste in funzione, accoppiandole, per mutua induzione, ad un circuito che oscilla alla frequenza opportuna.

In ricezione le antenne a filo verticale si comportano come in emissione. Esse sono accoppiate, mediante mutua induzione, al circuito di rivelazione. In ricezione sono anche usate antenne che sfruttano il fenomeno di induzione elettromagnetica: esse



Figura IX.2. schema del rivelatore usato da Hertz. Si veda il testo.

sono costituite da diverse spire di filo. Questo tipo di antenna rappresenta un'evoluzione del rivelatore usato da Hertz durante i suoi esperimenti sulla propagazione di onde elettromagnetiche. Questo era costituito da un anello di rame interrotto in un punto (figura IX.2): la distanza tra i due punti $A \in B$ era regolabile mediante una vite micrometrica. In presenza di un campo magnetico variabile perpendicolare al piano dell'anello, viene indotta nell'anello una f em che è in grado, regolando la distanza tra $A \in B$, di far scoccare e mantenere una scintilla.

IX.1.4 Onde nei metalli: basse frequenze

La trattazione svolta nella sezione IX.1.2 (pagina 276) può essere sviluppata anche in termini della costante dielettrica del metallo.

Nel metallo appare un momento di dipolo elettrico per unità di volume dato da:

$$P_x = -Nex = \frac{Ne^2\tau}{m_e} \frac{1}{\omega} \frac{-\omega\tau + i}{1 + \omega^2\tau^2} E_{x_0} e^{-i\omega\tau}$$

Ricordando che:

 $P_x = \varepsilon_0 \chi_e E_x; \qquad \varepsilon_r = 1 + \chi_e$

e ponendo:

$$\sigma_0 = \frac{Ne^2\tau}{m_e}; \qquad \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0} = \omega_0$$

si ottiene:

$$\varepsilon_r = n^2 = 1 + \frac{\omega_0}{\omega} \frac{-\omega\tau + i}{1 + \omega^2 \tau^2}$$

Per $\omega \tau \ll 1$, questa equazione assume la forma:

$$n^2 = \varepsilon_r = 1 + i\frac{\omega_0}{\omega} \tag{IX.11}$$

Posto:

$$n = n_1 + i n_2$$

si ha, nell'approssimazione in cui vale la (IX.11):

$$\pm n_1 \approx \sqrt{\frac{\omega_0}{2\omega}}; \qquad n_2 \pm \approx \sqrt{\frac{\omega_0}{2\omega}}$$
(IX.12)

Si consideri ora un'onda elettromagnetica piana che incide perpendicolarmente, lungo la direzione positiva dell'asse z, sulla superficie del metallo e si supponga che essa sia polarizzata lungo la direzione x. Nel vuoto (aria) essa è descritta dall'espressione:

$$E_{x_0}e^{(k_0z-\omega t)}$$

e, nel metallo, dall'espressione:

 $E_{x_0}e^{(k_0nz-\omega t)}$

con $n = n_1 + i n_2$ dato dalla (IX.11). Tra le combinazioni possibili di n_1 e n_2 implicite nelle (IX.12), scegliamo quella con n_1 e n_2 entrambi positivi.

La soluzione con n_1 negativo è scartata perché, diversamente da quanto assunto, corrisponde ad un'onda che si propaga nella direzione negativa dell'asse z; la soluzione con n_2 negativo è scartata perché corrisponde ad un'onda la cui ampiezza cresce esponenzialmente all'interno del metallo.

Avremo quindi nel metallo:

$$E_{x_0}e^{(k_0n_1z-\omega t)}e^{-k_0n_2z}$$

cioè un'onda che si propaga con velocità $v = c/n_1$ e la cui ampiezza decresce esponenzialmente in funzione di *z*. La lunghezza

$$\delta = \frac{1}{k_0 n_2} = \sqrt{\frac{2\varepsilon_0 c^2}{\sigma_0 \omega}} = \sqrt{\frac{2\rho_0}{\mu_0 \omega}}$$

controlla, con $\rho_0 = 1/\sigma_0$, il decremento esponenziale dell'ampiezza del campo elettrico.

⇒ Per una radiazione di lunghezza d'onda, nel vuoto, $\lambda_0 = 3 cm$ (regione delle microonde), la profondità di penetrazione nel rame risulta:

$$\delta = \sqrt{\frac{\rho\lambda_0}{\pi\mu_0 c}} = 6.56 \times 10^{-3} \, cm$$

La distribuzione di energia dell'onda incidente tra onda riflessa e trasmessa si calcola nel modo seguente. Vale, innanzitutto, l'equazione:

$$\frac{E_{i_0}^2}{\mu_0 c} = \frac{E_{r_0}^2}{\mu_0 c} + \frac{E_{t_0}^2}{\mu_0 c} n_1$$

che traduce in termini matematici la conservazione dell'energia. L'energia che incide sulla superficie unitaria del metallo in un secondo (mediata su di un periodo) deve essere uguale alla somma di quella riflessa e di quella trasmessa. Inoltre, alla superficie di separazione vale la relazione:

$$E_{i_0} + E_{r_0} = E_{t_0}$$

per la continuità della componente tangenziale del campo elettrico. Combinando le due equazioni, si ottiene:

$$E_{t_0}^2(n_1+1) = 2E_{t_0}E_{i_0}$$

che, essendo $n_1 \gg 1$, può essere scritta come:

$$E_{t_0}^2 n_1 = 2E_{t_0}E_{i_0}$$

Infine, se $E_{t_0} \neq 0$:

$$E_{t_0} = 2\frac{E_{i_0}}{n_1}$$

Il rapporto fra l'intensità trasmessa e quella incidente è quindi:

$$\frac{I_t}{I_i} = \frac{4}{n_1} \approx 0$$

e quella tra intensità riflessa e intensità incidente:

$$\frac{I_r}{I_i} = \left(1 - \frac{4}{n_1}\right) \approx I_i$$

L'onda viene quindi quasi integralmente riflessa.

⇒ Nel rame, per un'onda di lunghezza d'onda nel vuoto di 3*cm*, risulta dalla (IX.12): $n_1 = 7.27 \times 10^3$. Ne segue che l'intensità trasmessa è pari a circa 5.5×10^{-4} di quella incidente. Si noti infine che la frazione di energia trasmessa varia come l'inverso della radice quadrata della lunghezza d'onda nel vuoto.

L'onda riflessa risulta inoltre sfasata di $-\pi$ rispetto a quella incidente perché:

$$E_{r_0} \approx -E_{i_0}$$

Si pongano ora a confronto le equazioni che forniscono la conducibilità (IX.8) e la costante dielettrica relativa (IX.11) del metallo. Coefficienti moltiplicativi e additivi a parte, la conducibilità e la costante dielettrica relativa si scambiano la parte reale con quella immaginaria. Questa proprietà formale corrisponde al fatto che la parte reale di σ e la parte immaginaria di ε controllano l'assorbimento di energia da parte del metallo, mentre la parte reale di ε controlla la velocità di propagazione delle onde.

E' inoltre istruttivo riflettere sulle analogie e differenze tra il modello usato per i metalli e quello usato per gli isolanti. Le caratteristiche dei due modelli sono evidenti nelle rispettive equazioni di moto per gli elettroni: la (VIII.2) a pagina 253 per gli isolanti e la (IX.6) a pagina 276 per i metalli. Quella per gli isolanti contiene in più un termine di tipo elastico $-(\gamma/k)x =$ $-\omega_0^2 x$ per tenere conto del fatto che gli elettroni degli atomi dell'isolante sono legati ad essi: questo legame è descritto, secondo la fisica classica, da una forza di tipo elastico che conduce ad una frequenza propria di oscillazione dell'elettrone. Nel metallo, nell'approssimazione di "basse" frequenze, questo termine è assente: l'elettrone è libero (se si prescinde dai processi d'urto). Nei due modelli, il termine dissipativo ha origine fisiche diverse: negli isolanti esso è giustificato dal fatto che, siccome l'elettrone, in assenza di campo elettromagnetico, si muove di moto armonico con pulsazione ω_0 , esso perde energia per irraggiamento; nei metalli, il termine dissipativo trae origine dai processi d'urto.

E' possibile pervenire ai risultati qui ottenuti per la costante dielettrica dei metalli partendo dalle equazioni di Maxwell per il vuoto e ponendo in esse $\vec{J} = \sigma_0 \vec{E}$. Tale posizione è giustificata se il periodo dell'onda incidente è molto più grande dell'intervallo di tempo medio tra due urti successivi per gli elettroni del metallo. Lasciando al lettore l'eventuale sviluppo dei calcoli, osserviamo soltanto che questo approccio è, dal punto di vista della comprensione dei meccanismi in gioco, meno trasparente di quello basato sul modello qui usato.

IX.1.5 Onde nei metalli: alte frequenze

Se il periodo T dell'onda incidente è molto più piccolo dell'intervallo di tempo medio τ tra due urti successivi degli elettroni di conduzione nel metallo, è necessario impostare di nuovo il problema, ricorrendo ad un model-

lo di conduttore *ideale* in cui il libero cammino medio degli elettroni è infinito: ciò implica l'eliminazione del termine di 'attrito' $-\gamma \dot{x}$ dall'equazione di moto degli elettroni (IX.6). Supponendo, al solito, che l'onda incida perpendicolarmente sul conduttore e sia polarizzata linearmente lungo l'asse *x*, si può porre:

$$E_x = E_{0_x} \cos \omega t$$

L'equazione di moto di un elettrone di conduzione sarà allora:

$$m_e \frac{dx^2}{dt^2} = -eE_{0_x} \cos \omega t$$

che, integrata, dà:

$$x = \frac{eE_x}{m_e\omega^2}$$

Se, al solito, si trascura lo spostamento degli ioni positivi, il momento di dipolo elettrico per unità di volume sarà:

$$P_x = -Nex = -\frac{Ne^2}{m_e\omega^2}E_x$$

N è la concentrazione degli elettroni. Ricordando che (si veda a pagina 189):

$$\vec{P} = \varepsilon_0 \chi \vec{E}$$

 $\varepsilon_r = 1 + \chi$
 $n^2 = \varepsilon_r$

si ottiene:

$$n^2 = 1 - \frac{Ne^2}{\varepsilon_0 m_e} \frac{1}{\omega^2}$$

Se:

$$\omega > \sqrt{\frac{Ne^2}{\varepsilon_0 m_e}} = \omega_p \tag{IX.13}$$

l'indice di rifrazione è un numero reale minore di 1: l'onda si propaga nel conduttore con una velocità di fase v = c/n superiore a c.³ A frequenze sufficientemente elevate, i conduttori diventano quindi trasparenti alle onde elettromagnetiche.

³ Ciò non implica alcuna violazione della relatività perché la propagazione dell'energia non è associata alla velocità di fase. Si veda la sezione V.6 (pagina 130).

IX.1.6 Oscillazioni di plasma

La pulsazione ω_p definita nella (IX.13) si chiama *pulsazione di plasma*. Per comprenderne il significato fisico, si consideri la situazione illustrata nella figura IX.3.



Figura IX.3. semplice modello per illustrare le oscillazioni di plasma. Si veda il testo.

Gli elettroni, inizialmente contenuti tra a e b, si trovino collocati, in seguito a qualche perturbazione, tra a' e b'. Se N_0 è la concentrazione iniziale degli elettroni, la loro concentrazione N dopo lo spostamento s, funzione di x, sarà:

$$N = N_0 \frac{\Delta x}{\Delta x + \Delta s} = \frac{N_0}{1 + \Delta s / \Delta x}$$

Questa equazione può essere approssimata, se la variazione di densità è piccola, da:

$$N = N_0 \left(1 - \frac{\Delta s}{\Delta x} \right)$$

Siccome la densità degli ioni positivi N_0 non varia, la densità di carica sarà:

$$\rho = -(N - N_0)e = N_0 e \frac{ds}{dx}$$

con e > 0 (abbiamo sostituito gli incrementi infinitesimi a quelli finiti). Dall'equazione di Maxwell:

$$div\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

segue che:

$$\frac{dE_x}{dx} = \frac{N_0 e}{\varepsilon_0} \frac{ds}{dx}$$

dove si è tenuto conto del carattere unidimensionale del problema. Integrando si ottiene:

$$E_x = \frac{N_0 e}{\varepsilon_0} s + C$$

dove la costante *C* è nulla perché $E_x = 0$ quando s = 0. Pertanto su un elettrone si esercita la forza:

$$F_x = -\frac{N_0 e^2}{\varepsilon_0} s$$

che è proporzionale allo spostamento *s* e diretta in senso opposto. Il moto degli elettroni sarà quindi armonico con una pulsazione ω_p , data da:

$$\omega_p^2 = \frac{N_0 e^2}{\varepsilon_0 m_e}$$

che coincide con quella definita nella (IX.13).

<i>n</i> ₀	$10^{28} m^{-3}$	$10^{24} m^{-3}$	$10^{20} m^{-3}$	$10^{16} m^{-3}$
ω _p	5.64×10^{15} (<i>rad</i> s ⁻¹)	5.64×10^{13} (<i>rad</i> s ⁻¹)	5.64×10^{11} (rad s ⁻¹)	5.64×10^9 (<i>rad</i> s ⁻¹)
λ_p	3340 Å	33.4 <i>µ</i>	0.33 <i>cm</i>	33 <i>cm</i>

Tabella IX.2. pulsazione di plasma in funzione della densità elettronica; λ_p è la lunghezza d'onda, nel vuoto, corrispondente a ω_p .

Le oscillazioni di plasma possono essere prodotte facendo riflettere elettroni da un sottile strato conduttore o facendo passare elettroni attraverso un sottile strato conduttore. Le oscillazioni di plasma sono quantizzate: l'energia delle oscillazioni è un multiplo intero di $\hbar \omega_p$. L'energia degli elettroni riflessi o trasmessi è quindi diminuita di quantità pari a $n\hbar \omega_p$ (*n* intero) rispetto a quella degli elettroni incidenti. Il passaggio o la riflessione di un elettrone provoca una variazione della densità elettronica del conduttore che si propaga come un'onda: essa è longitudinale perché la direzione di propagazione è la stessa dello spostamento *s* del nostro semplice modello.

Il termine 'plasma' per indicare un aggregato neutro di particelle elettricamente cariche fu inizialmente proposto da Irving Langmuir (1881-1957) negli anni venti del secolo scorso. Langmuir stava studiando dispositivi basati su gas ionizzati e l'idea di chiamarli 'plasmi' gli fu suggerita dall'analogia con il plasma sanguigno. La fisica del 'plasma' si è successivamente sviluppata in molte direzioni: nello studio delle proprietà della ionosfera, scoperta nel 1924 da Edward Victor Appleton; nel cosmo si trovano 'plasmi' di vario tipo; le tecniche miranti alla fusione nucleare si basano sull'uso di plasmi ad altissima temperatura 'confinati' mediante campi magnetici. Sulla base della trattazione svolta, si comprende come la ionosfera rifletta onde elettromagnetiche con lunghezza d'onda sufficientemente grande e sia invece trasparente per le onde di frequenza superiore a quella di plasma.

IX.2 Effetto fotoelettrico

L'interazione della radiazione elettromagnetica con i conduttori può essere descritta anche usando la descrizione quantica: l'assorbimento della radiazione può avvenire solo quando l'energia dei fotoni incidenti corrisponde ad una transizione tra due stati elettronici permessi. In questi processi, oltre all'energia, debbono essere conservati anche la quantità di moto ed il momento angolare.

> ⇒ La quantità di moto di un fotone appartenente allo spettro visibile, è trascurabile rispetto a quella di un elettrone di conduzione di un metallo. Per esempio, se $E_f = 3 eV$ (corrispondente a $\lambda \approx 413 nm$), la quantità di moto del fotone è $p_{ph} = E_f/c \approx$ $1.6 \times 10^{-27} Ns$. Ad un elettrone di conduzione di un metallo, la cui energia sia intorno a quella del livello di Fermi, è associato un vettore d'onda k_F il cui ordine di grandezza è $10^{10} m^{-1}$ (pagina 405); ne segue che la quantità di moto dell'elettrone (nell'approssimazione dell'elettrone libero, in cui si trascura il potenziale cristallino) è data da $p_e = \hbar k_F \approx 1 \times 10^{-24} Ns$.

Sono possibili tre tipi di transizione:

- a. da un livello (occupato) della banda di conduzione (pagina 404) a un livello (vuoto) della medesima banda;
- b. da un livello (occupato) di una banda interna a un livello (vuoto) della banda di conduzione;
- c. da un livello occupato di una banda a un livello del 'vuoto'.

Il caso (c) corrisponde all'estrazione di un elettrone dal metallo. Quando questa interessa la banda di conduzione, si parla di effetto fotoelettrico; quando la banda coinvolta è più interna, si parla di fotoemissione. Il bilancio energetico dell'effetto fotoelettrico (o della fotoemissione) è:

$$E_{cin} = E_{ph} - \phi \tag{IX.14}$$

dove E_{cin} è l'energia cinetica dell'elettrone emesso e ϕ la cosiddetta *funzione lavoro*.

i

L'effetto fotoelettrico fu scoperto da Hertz nel 1887, nel corso degli esperimenti relativi alla propagazione delle onde elettromagnetiche; l'equazione (IX.14) fu proposta da Einstein nel 1905; la prima verifica sperimentale della (IX.14) fu di Millikan (1916).

IX.3 Effetto Compton

L'autore ha recentemente proposto una teoria della diffusione dei raggi X basata sul postulato che ogni quanto di raggi X è diffuso da un singolo elettrone. Il rinculo di questo elettrone, dovuto alla variazione della quantità di moto del quanto quando la sua direzione cambia, riduce l'energia e quindi anche la frequenza del quanto di radiazione. Arthur Holly Compton

Se la quantità di moto del fotone incidente è molto grande rispetto a quella degli elettroni di conduzione del metallo, si può verificare un processo di *diffusione* del fotone da parte dell'elettrone. Il fenomeno è descritto mediante le equazioni relativistiche di conservazione dell'energia e della quantità di moto in un processo d'urto, supponendo l'elettrone inizialmente in quiete.

⇒ I fotoni *X* corrispondenti alla riga K_{α} ($\lambda = 0.0709 nm$) emessa dal Molibdeno posseggono una quantità di moto pari a ≈ $9.35 \times 10^{-24} Ns$: essa è quindi di un ordine di grandezza superiore a quella degli elettroni di conduzione di un metallo. H. A. Compton usò i raggi *X* della riga K_{α} del Molibdeno per studiare la diffusione dei raggi *X* con incremento della loro lunghezza d'onda (effetto Compton).

La conservazione dell'energia richiede che:

$$hv_i + m_e c^2 = hv_f + \sqrt{p_e^2 c^2 + m_e^2 c^4}$$
 (IX.15)

dove si è usata la relazione (II.46, pagina 52) per l'energia dell'elettrone diffuso. La conservazione della quantità di moto si scrive:

$$\vec{p}_e = \vec{p}_i - \vec{p}_f \tag{IX.16}$$

dove con $\vec{p}_i \in \vec{p}_f$ si è indicata la quantità di moto del fotone prima e dopo l'urto, rispettivamente. Elevando al quadrato la (IX.16) e moltiplicando



Figura IX.4. effetto Compton. Un fotone (con quantità di moto \vec{p}_i) urta un elettrone in quiete rappresentato in figura da una pallina nera; la pallina grigia rappresenta l'elettrone ad un istante successivo all'urto; $\vec{p}_e \in \vec{p}_f$ rappresentano, rispettivamente, le quantità di moto dell'elettrone e del fotone dopo l'urto.

entrambi i membri per c^2 , si ottiene:

$$(p_e c)^2 = (hv_i)^2 + (hv_f)^2 - 2h^2 v_i v_f \cos\theta$$

Elevando al quadrato la (IX.15) si ottiene invece:

$$(p_e c)^2 = (hv_i)^2 + (hv_f)^2 - 2h^2 v_i v_f + 2m_e c^2 (hv_i - hv_f)$$

e, uguagliando i secondi membri di queste equazioni:

$$(1 - \cos\theta) = \frac{m_e c}{h} \left(\frac{c}{v_f} - \frac{c}{v_i} \right)$$

che, espressa in termini delle lunghezze d'onda, dà:

$$\lambda_f - \lambda_i = \Delta \lambda = \frac{h}{m_e c} (1 - \cos \theta)$$

 $\Delta\lambda$ non dipende dalla lunghezza d'onda della radiazione incidente, ma solo dall'angolo θ di diffusione del fotone. La grandezza

$$\lambda_C = \frac{h}{m_e c} = 2.426 \times 10^{-12} \, m$$

si chiama lunghezza d'onda di Compton.

Si noti come la trattazione dell'effetto Compton rappresenti un caso di mescolanza di linguaggi corpuscolari e ondulatori. La derivazione matematica è basata su una descrizione corpuscolare (che riflette, ragionevolmente, la sottostante realtà fisica); il linguaggio descrittivo usato - simboli e parole - è invece costituito da una mescolanza di termini corpuscolari e ondulatori. Come abbiamo già osservato a pagina 164, basta porre $E_{i,f} = hv_{i,f}$ e $p_{i,f} = hv_{i,f}/c$ per ottenere una trattazione anche formalmente corpuscolare.

Capitolo X

Luce polarizzata

Ho riflettuto sulla possibilità di dare una spiegazione imperfetta della proprietà della luce che costituisce la polarizzazione, senza allontanarmi dalla genuina descrizione ondulatoria. E' un principio di questa teoria che tutte le onde, come le onde sonore, si propagano in un mezzo omogeneo come superficî sferiche concentriche: esse consistono semplicemente nei moti avanti - indietro delle particelle [del mezzo] nella direzione del raggio [delle superficî sferiche], accompagnate dalle contemporanee condensazioni e rarefazioni [del mezzo]. Tuttavia, in questa teoria, è possibile concepire una vibrazione trasversale, che si propaga nella direzione del raggio e con la stessa velocità: il moto delle particelle avvenendo in una certa direzione costante rispetto al raggio; questa è la polarizzazione.

Thomas Young

X.1 Onde piane polarizzate

Si ricordi che un'onda piana si dice polarizzata linearmente quando la direzione del suo campo elettrico è costante: l'onda si dice allora polarizzata lungo questa direzione.

Considerando onde elettromagnetiche piane sinusoidali, mostreremo che qualunque tipo di polarizzazione può essere ottenuta sovrapponendo due onde polarizzate linearmente lungo due direzioni fra di loro perpendicolari x e y.

Capitolo X. Luce polarizzata

Siano

$$E_x = E_{0x} \sin \omega t \tag{X.1}$$

$$E_y = E_{0y}\sin(\omega t + \varphi) \tag{X.2}$$

i campi elettrici di due onde piane polarizzate linearmente, rispettivamente lungo l'asse *x* e l'asse *y*, che si propagano lungo la direzione dell'asse *z*: φ è la loro differenza di fase.

Elevando al quadrato la (X.2), sostituendo al posto di sin ωt il suo valore ricavato dalla (X.1) e, dopo avere raccolto E_x^2/E_{0x}^2 , dividendo per sin $\varphi \cos \varphi$,¹ si può scrivere:

$$\frac{E_y^2}{E_{0y}^2 \sin\varphi\cos\varphi} = \frac{E_x^2}{E_{0x}^2} \left(\frac{1}{\tan\varphi} - \tan\varphi\right) + \tan\varphi + 2\frac{E_x}{E_{0x}}\cos\omega t$$

Utilizzando la relazione

$$\cos\omega t = \frac{E_y}{E_{0y}\sin\varphi} - \frac{E_x}{E_{0x}\tan\varphi}$$

e raccogliendo $-E_x^2/E_{0x}^2$, si ottiene:

$$\frac{E_y^2}{E_{0y}^2\sin\varphi\cos\varphi} + \frac{E_x^2}{E_{0x}^2}\left(\frac{1}{\tan\varphi} + \tan\varphi\right) - \frac{2E_xE_y}{E_{0x}E_{0y}\sin\varphi} - \tan\varphi = 0$$

Infine, moltiplicando per $\sin \varphi \cos \varphi$:

$$\frac{E_y^2}{E_{0y}^2} + \frac{E_x^2}{E_{0x}^2} - \frac{2E_x E_y}{E_{0x} E_{0y}} \cos\varphi - \sin^2\varphi = 0$$
(X.3)

Questa è l'equazione di una conica. Siccome essa è confinata in una regione rettangolare con i lati paralleli agli assi coordinati e di lunghezza $2E_{0x}$ e $2E_{0y}$, la conica è un'ellisse: siccome, in generale, il coefficiente del termine in $E_x E_y$ è diverso da zero, i suoi assi non coincidono con gli assi x e y (figura X.1). E' possibile individuare una nuova coppia di assi coordinati x', y'rispetto ai quali l'equazione dell'ellisse assume la forma:

$$\frac{E_{x'}^2}{a^2} + \frac{E_{y'}^2}{b^2} = 1$$

Giuliani Bonizzoni - Lineamenti di elettromagnetismo



Figura X.1. composizione di due campi elettrici perpendicolari e sinusoidali. Nel caso più generale, il vettore campo elettrico risultante ruota nel piano *xy*: il suo vertice descrive un'ellisse, i cui assi non coincidono con gli assi coordinati.

Valgono le relazioni:

$$a^{2} = E_{0x}^{2}\cos^{2}\theta + E_{0y}^{2}\sin^{2}\theta + 2E_{0x}E_{0y}\cos\theta\sin\theta\cos\varphi$$
$$b^{2} = E_{0x}^{2}\sin^{2}\theta + E_{0y}^{2}\cos^{2}\theta - 2E_{0x}E_{0y}\cos\theta\sin\theta\cos\varphi$$
$$\tan 2\theta = \frac{2E_{0x}E_{0y}}{E_{0x}^{2} - E_{0y}^{2}}\cos\varphi$$

dove θ è l'angolo compreso tra gli assi x e x'. Queste equazioni mostrano che si può avere una polarizzazione ellittica anche nel caso in cui $E_{0x} = E_{0y}$. Casi particolari:

a) Per
$$\varphi \rightarrow 0$$

$$\frac{E_y^2}{E_{0y}^2} + \frac{E_x^2}{E_{0x}^2} - \frac{2E_x E_y}{E_{0x} E_{0y}} = 0$$

cioè:

$$\left(\frac{E_y}{E_{0y}} - \frac{E_x}{E_{0x}}\right)^2 = 0$$

quindi:

$$E_y = \frac{E_{0y}}{E_{0x}} E_x$$

¹Questa divisione è possibile solo se $\varphi \neq 0$ e $\varphi \neq \pi/2$.

che è l'equazione di una retta. L'onda risultante è quindi polarizzata linearmente lungo la direzione di questa retta.

b) Invece per $\varphi \rightarrow \pm \pi/2$ la (X.3) diventa:

$$\frac{E_y^2}{E_{0y}^2} + \frac{E_x^2}{E_{0x}^2} = 1$$

che rappresenta un'ellisse i cui assi coincidono con gli assi coordinati: quando $E_{0x} = E_{0y}$ l'ellisse si riduce ad una circonferenza. L'onda risultante è polarizzata ellitticamente o circolarmente: il vettore campo elettrico ruota nel piano *xy* in senso orario o antiorario a seconda che sia $\varphi \rightarrow \pi/2$ o $\varphi \rightarrow -\pi/2$.

Si noti che i casi particolari considerati si possono trattare partendo direttamente dalle equazioni (X.1) e (X.2) ed ottenendo rigorosamente gli stessi risultati per $\varphi = 0$ e $\varphi = \pm \pi/2$.

X.2 Materiali otticamente anisotropi

In questa sezione si prenderanno in considerazione materiali isolanti omogenei e anisotropi per i quali si assumerà uguale ad uno la permeabilità magnetica relativa ($\mu_r = 1$). L'anisotropia di questi materiali è legata alla suscettività dielettrica χ e alla costante dielettrica relativa $\varepsilon_r = 1 + \chi$. Per questi materiali vale la relazione:

$$P_i = \varepsilon_0 \sum_j \chi_{ij} E_j$$
 $i = 1, 2, 3;$ $j = 1, 2, 3$ (X.4)

dove χ_{ij} è un tensore (di rango 2) simmetrico ($\chi_{ij} = \chi_{ji}$). Essendo il materiale omogeneo, è possibile individuare tre assi cartesiani ortogonali rispetto ai quali le componenti non diagonali del tensore sono nulle (*assi principali*). La (X.4) diventa allora:

$$P_i = \varepsilon_0 \chi_{ii} E_i \qquad i = 1, 2, 3$$

Pertanto, se il campo elettrico è diretto lungo un asse principale, i vettori polarizzazione \vec{P} e spostamento \vec{D} sono diretti come il campo elettrico. D'ora innanzi, la terna degli assi *x*, *y*, *z* verrà assunta coincidente con gli assi principali del cristallo.

Un'onda piana sinusoidale che si propaga nel mezzo è rappresentata dalla formula:

$$Ae^{i\omega[(n/c)\hat{s}\cdot\vec{r}-t]} \tag{X.5}$$

dove $A \ge l'$ ampiezza, n l'indice di rifrazione del mezzo, \hat{s} il versore del vettore d'onda $\vec{k} = (2\pi/\lambda)\hat{s}$ ed \vec{r} il vettore che individua un punto generico del piano dell'onda; $v_s = c/n = v\lambda_0/n = v\lambda = \omega/k$ è la velocità di propagazione del fronte dell'onda (λ_0 è la lunghezza d'onda nel vuoto). Nella trattazione che segue, l'indice di rifrazione e (quindi) la velocità di fase sono le grandezze che devono essere determinate sulla base della conoscenza della costante dielettrica relativa lungo i tre assi principali.

X.2.1 Dalle equazioni di Maxwell

Le equazioni di Maxwell relative ai rotori dei campi, scritte per un mezzo isolante ($\vec{J} = 0$) e con $\mu_r = 1$, sono:

$$rot \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$
$$rot \vec{B} = \varepsilon \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

Se il campo elettromagnetico è espresso dalla (X.5), l'operatore $\partial/\partial x$ è equivalente alla moltiplicazione per $i\omega ns_x/c$ e l'operatore rot è equivalente a $(i\omega n/c)\hat{s}\times$. Allora:

$$\frac{n}{c}\hat{s}\times\vec{E} = \vec{B} \tag{X.6}$$

$$\frac{n}{c}\hat{s}\times\vec{B} = -\mu_0\vec{D} \tag{X.7}$$

La (X.6) e la (X.7) indicano che (si veda figura X.2):

- ♦ \vec{B} è perpendicolare a \hat{s} , \vec{E} e \vec{D} : questi tre vettori giacciono quindi nello stesso piano;
- ♦ \vec{D} è perpendicolare ad \hat{s} .

Poiché \vec{E} e \vec{D} non sono, in generale, paralleli, ne segue che il vettore di Poynting (si ricordi che $\mu_r = 1$)

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B} \tag{X.8}$$

non è, in generale, diretto come \hat{s} . Indicato con \hat{t} il versore del vettore di Poynting, osserviamo che la terna vettoriale $\vec{B}, \vec{D}, \hat{s}$ e la terna $\vec{B}, \vec{E}, \hat{t}$ sono

Capitolo X. Luce polarizzata



Figura X.2. disposizione dei vettori del campo elettromagnetico di un'onda piana in un mezzo isolante anisotropo con $\mu_r = 1$. Il versore \hat{s} indica la direzione di propagazione del fronte d'onda piano; il versore del vettore di Poynting \hat{t} indica invece la direzione di propagazione dell'energia. L'angolo α tra i due versori è quello tra i due vettori $\vec{E} \in \vec{D}$: esso è nullo solo lungo un'asse principale.

composte da vettori mutuamente perpendicolari che hanno in comune \vec{B} e che sono ruotate di un angolo α l'una rispetto all'altra. Quindi, la direzione di propagazione dell'energia, rappresentata dal vettore di Poynting, è *diversa* da quella della normale ŝ al fronte d'onda, definita dalla (X.5). L'energia si propaga con una velocità, v_t , diversa da quella, $v_s = c/n$, del fronte d'onda: v_t è data dal rapporto tra il modulo del vettore di Poynting e la densità di energia del campo elettromagnetico che, nel caso di un mezzo materiale, è data da $u = \vec{E} \cdot \vec{D}$. Pertanto:

$$v_t = \frac{1}{\mu_0} \frac{EB}{ED\cos\alpha}$$

dove α è l'angolo tra i due vettori \vec{E} e \vec{D} . Da cui, essendo $v_s = c/n$,

$$v_t = \frac{v_s}{\cos \alpha}$$

Alla velocità di propagazione v_t dell'energia corrisponde un indice di rifrazione

$$n_t = \frac{c}{v_t} = n \cos \alpha$$

che si chiama indice dell'energia o indice del raggio.

Le equazioni ricavate in questa sezione derivano direttamente dalle equazioni di Maxwell per i mezzi materiali isolanti con $\mu_r = 1$ e non dipendono quindi da altre proprietà specifiche dei mezzi.

X.2.2 Il ruolo dell'anisotropia

Usando la (X.6) e la (X.7) si ottiene per \vec{D} la seguente espressione:

$$\vec{D} = -\varepsilon_0 n^2 \hat{s} \times (\hat{s} \times \vec{E}) = \varepsilon_0 n^2 [\vec{E} - \hat{s}(\hat{s} \cdot \vec{E})] \tag{X.9}$$

dove, nell'ultimo passaggio, si è utilizzata la relazione vettoriale:

$$\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B}(\vec{A} \cdot \vec{C}) - \vec{C}(\vec{A} \cdot \vec{B})$$

La (X.9) può anche essere scritta così:

$$\vec{D} = \varepsilon_0 n^2 \vec{E}_{\parallel}$$

dove è stata indicata con \vec{E}_{\parallel} la proiezione vettoriale di \vec{E} lungo \vec{D} . Proiettando la (X.9) sull'asse x_i e ponendo $D_i = \varepsilon_i E_i$, si ottiene:

$$E_i = \frac{n^2 s_i(\hat{s} \cdot \vec{E})}{n^2 - \varepsilon_{ri}} \quad i = x, y, z \tag{X.10}$$

Moltiplicando entrambi i membri per s_i e sommando sulle tre coordinate:

$$\hat{s} \cdot \vec{E} = \hat{s} \cdot \vec{E} \sum_{i} \frac{n^2 s_i^2}{n^2 - \varepsilon_{ri}}$$

Pertanto:

$$\sum_{i} \frac{n^2 s_i^2}{n^2 - \varepsilon_{ri}} = 1$$

cioè:

$$\frac{s_x^2}{n^2 - \varepsilon_{rx}} + \frac{s_y^2}{n^2 - \varepsilon_{ry}} + \frac{s_z^2}{n^2 - \varepsilon_{rz}} = \frac{1}{n^2}$$
(X.11)

Questa equazione può essere espressa in forma diversa. Si moltiplicano entrambi i membri per n^2 ; dall'equazione così ottenuta si sottrae membro a membro l'equazione

$$s_x^2 + s_y^2 + s_z^2 = 1$$

si moltiplicano infine entrambi i membri dell'equazione risultante per $-n^2$. Si ottiene:

$$\frac{s_x^2}{1/n^2 - 1/\varepsilon_{rx}} + \frac{s_y^2}{1/n^2 - 1/\varepsilon_{ry}} + \frac{s_z^2}{1/n^2 - 1/\varepsilon_{rz}} = 0$$
(X.12)

Capitolo X. Luce polarizzata

Si definiscono tre velocità nel modo seguente:

$$v_{sx} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_{rx}}}$$
 $v_{sy} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_{ry}}}$ $v_{sz} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_{rz}}}$

Si noti che queste velocità *non* sono le componenti della velocità di fase. La (X.12) assume allora la forma:

$$\frac{s_x^2}{\nu_s^2 - \nu_{sx}^2} + \frac{s_y^2}{\nu_s^2 - \nu_{sy}^2} + \frac{s_z^2}{\nu_s^2 - \nu_{sz}^2} = 0$$
(X.13)

Le equazioni (X.11, X.12 e X.13) sono forme equivalenti dell'*equazione di Fresnel.* Sono equazioni di secondo grado in n^2 : le due soluzioni $\pm n_1 e \pm n_2$ sono gli indici di rifrazione per la propagazione dell'onda nel mezzo. Un indice di rifrazione negativo descrive un'onda che si propaga lungo la direzione $-\hat{s}$. Sostituendo, per esempio, n_1 nelle (X.10), si ottiene un sistema di tre equazioni nelle tre incognite E_x , $E_y e E_z$. Le sue soluzioni danno il valore di \vec{E} e, attraverso la (X.6) e la (X.7), quello di \vec{B} e \vec{D} . La (X.10) mostra che, per valori reali di n_1^2 , il rapporto fra le componenti del campo elettrico è un numero reale. Ciò implica che le tre componenti sono in fase e la loro somma è un vettore la cui direzione è costante: l'onda è polarizzata linearmente. Analoghe considerazioni valgono per n_2 . L'equazione di Fresnel mostra quindi che, scelta una direzione di propagazione \hat{s} , si possono propagare nel mezzo due onde piane *indipendenti*: ognuna di esse è polarizzata linearmente e la loro propagazione è controllata da un indice di rifrazione diverso (in generale) per le due onde.

Si osservi che, dato \hat{s} , cioè la normale al fronte d'onda, è possibile ricavare \hat{t} , cioè il versore di propagazione dell'energia. Risulta:

$$t_{i} = \frac{s_{i}}{v_{t}v_{s}} \left(v_{s}^{2} + \frac{g^{2}}{v_{s}^{2} - v_{si}^{2}} \right) \quad i = x, y, z$$

dove

$$g^2 = v_s^2 (v_t^2 - v_s^2)$$

X.2.3 Ellissoide degli indici

La densità di energia elettromagnetica in un mezzo è data dall'espressione:

$$u = \vec{E} \cdot \vec{D}$$

Essendo:

$$\vec{E} = \sum_{i} \frac{D_{i}}{\varepsilon_{i}} \,\hat{\imath} \quad i = x, \, y, \, z \tag{X.14}$$

 $u = \sum_{i} \frac{D_i^2}{\varepsilon_i}$

si ottiene:

Cioè:

$$\sum_{i} \frac{D_i^2}{u\varepsilon_i} = 1 \tag{X.15}$$

Si ponga:

$$x = \frac{D_x}{\sqrt{\varepsilon_0 u}}, y = \frac{D_y}{\sqrt{\varepsilon_0 u}}, z = \frac{D_z}{\sqrt{\varepsilon_0 u}}$$

si noti che x, y, z sono grandezze adimensionali. La (X.15) diventa allora:

$$\frac{x^2}{n_x^2} + \frac{y^2}{n_y^2} + \frac{z^2}{n_z^2} = 1$$
(X.16)

dove $n_i = \sqrt{\varepsilon_{r_i}}$ (i = x, y, z). Questa è l'equazione di un ellissoide, detto ellissoide degli indici.² Nell'appendice X.2.6 si dimostra che la seguente procedura equivale alla soluzione dell'equazione di Fresnel. Dato il versore \hat{s} , si considera il piano ad esso perpendicolare passante per il centro dell'ellissoide degli indici. La sua intersezione con l'ellissoide è un'ellisse: i suoi semiassi individuano le due direzioni di 'vibrazione' del vettore \vec{D} relativo a due onde *indipendenti* polarizzate linearmente lungo direzioni *ortogonali*; la lunghezza dei semiassi fornisce i relativi indici di rifrazione. La direzione di 'vibrazione' di \vec{E} di una delle due onde *indipendenti* è individuata nel seguente modo (si veda la figura X.2): \vec{E} giace nel piano individuato da $\hat{s} \in \vec{D}$ e forma con quest'ultimo vettore un angolo α determinato dalla (X.14). Infine, la direzione di propagazione dell'energia viene individuata ricordando che \hat{t} giace nello stesso piano di \hat{s} , \vec{D} ed \vec{E} ed è perpendicolare a quest'ultimo secondo la (X.8).

Nei casi più semplici l'ellissoide degli indici è un ellissoide di rotazione (due degli indici sono uguali); l'ellissoide si riduce ad una sfera nel caso del materiale isotropo. Esempi di cristalli isotropi sono il sale da cucina (NaCl) e il diamante (carbonio cristallizzato nel sistema cubico a facce centrate). I cristalli per i quali l'ellissoide degli indici è di rotazione si chiamano *uniassici*: esempi sono la calcite ($CaCO_3$; detta anche spato d'Islanda) e il quarzo (SiO_2). L'asse di rotazione che caratterizzano i cristalli uniassici si chiamano

²Esso è anche noto con i nomi di: indice delle normali (all'onda); ellissoide reciproco.

'ordinario' e 'straordinario': quest'ultimo è quello relativo all'asse ottico; il primo è quello relativo agli altri due assi. I loro valori per la calcite sono:

$$n_s = 1.4864$$

 $n_o = 1.6585$

Per i cristalli uniassici, l'ellisse di intersezione tra il piano ortogonale a \hat{s} e l'ellissoide degli indici ha le seguenti caratteristiche: la lunghezza di uno dei due semiassi è sempre uguale a n_o ; la lunghezza dell'altro varia tra n_o e n_s . Se la direzione di \hat{s} coincide con quella dell'asse ottico, i due indici che caratterizzano la propagazione delle due onde indipendenti nel mezzo coincidono con n_o .

X.2.4 Uso di materiali otticamente anisotropi



Figura X.3. lamina di cristallo uniassico tagliata parallelamente all'asse ottico, coincidente con l'asse *x*. θ è l'angolo formato dal vettore campo elettrico della luce con l'asse ottico della lamina; nel caso descritto nella figura, esso è positivo.

I materiali otticamente anisotropi sono utilizzati per ottenere fasci di luce variamente polarizzati.

Si consideri una lamina di cristallo uniassico tagliato in modo che l'asse ottico sia parallelo ad uno dei suoi lati (nella figura X.3 l'asse ottico è diretto lungo l'asse x).

Un'onda piana sinusoidale di pulsazione ω linearmente polarizzata incide perpendicolarmente sulla lamina. Sia θ l'angolo formato dal vettore campo elettrico dell'onda con l'asse ottico. L'onda incidente può essere descritta come risultante dalla sovrapposizione di due onde piane polarizzate linearmente lungo x e y, il cui campo elettrico ha ampiezza $E_0 \cos \theta e E_0 \sin \theta$, rispettivamente: per queste due onde, $\vec{E} e \vec{D}$ hanno la stessa direzione e

Polarizzazione		Polarizzazione	
incidente	θ_i	uscente	
Nessuna		Nessuna	
Rettilinea	$0 < \theta_i < \pi/2 \ (\theta_i \neq \pi/4)$	Ellittica D	
Rettilinea	$0 < \theta_i < -\pi/2 \ (\theta_i \neq -\pi/4)$	Ellittica S	
Rettilinea	$0, \pi/2$	Rettilinea, $\theta_u = 0, \pi/2$	
Rettilinea	$\pi/4$	Circolare D	
Rettilinea	$-\pi/4$	Circolare S	
Circolare D		Rettilinea con $\theta_u = \pi/4$	
Circolare S		Rettilinea con $\theta_u = -\pi/4$	

Lamina a quarto d'onda

Tabella X.1. effetto di una lamina a quarto d'onda di calcite ($n_0 > n_s$) sulla polarizzazione della luce incidente. $\theta_{i,u}$ è l'angolo formato dal vettore campo elettrico con l'asse ottico della lamina (figura X.3).

la direzione di propagazione dell'energia e del fronte d'onda coincidono con quella dell'asse z (si veda la figura X.2). Sulla superficie anteriore della lamina si ha, essendo z = 0:

$$E_x = E_0 \cos\theta \cos(2\pi v t)$$
$$E_y = E_0 \sin\theta \cos(2\pi v t)$$

Sulla superficie posteriore, si avrà:

$$E_x = E_0 \cos\theta \cos 2\pi \left(v t - \frac{d}{\lambda_0} n_s \right)$$
(X.17)

$$E_y = E_0 \sin\theta \cos 2\pi \left(v t - \frac{d}{\lambda_0} n_o \right)$$
(X.18)

dove *d* è lo spessore della lamina e λ_0 la lunghezza d'onda nel vuoto. Sulla superficie posteriore della lamina la differenza di fase tra l'onda 'straordinaria' descritta dalla (X.17) e l'onda 'ordinaria' descritta dalla (X.18) è:

$$\varphi_s - \varphi_o = 2\pi \frac{d}{\lambda_0} (n_o - n_s)$$

Se tale differenza di fase è un multiplo dispari di $\pi/2$ l'onda uscente dalla lamina sarà, in generale, polarizzata ellitticamente in senso destrorso se, come per lo spato d'Islanda, $n_o > n_s$; per $\theta = \pi/4$, la polarizzazione dell'onda uscente sarà circolare destrorsa.

Polarizzazione		Polarizzazione	
incidente	θ_i	uscente	θ_u
Nessuna		Nessuna	
Rettilinea	$0 < \theta_i < \pi/2$	Rettilinea	$\theta_u = -\theta_i$
Rettilinea	$0, \pi/2$	Rettilinea	$0, \pi/2$
Circolare D		Circolare S	
Circolare S		Circolare D	

Lamina a mezz'onda

Tabella X.2. effetto di una lamina a mezz'onda sulla polarizzazione della luce incidente. $\theta_{i,u}$ è l'angolo formato dal vettore campo elettrico della luce con l'asse ottico della lamina (figura X.3).

In questo manuale usiamo la definizione 'naturale' di polarizzazione circolare destra e sinistra: in un'onda polarizzata in senso circolare destrorso la direzione di propagazione e il senso di rotazione del campo elettrico sono collegati come la direzione di avanzamento e di rotazione di una vite destrorsa; la polarizzazione circolare sinistrorsa è definita analogamente con riferimento ad una vite sinistrorsa. In letteratura è diffusa anche la convenzione che scambia tra di loro le due polarizzazioni. Questa convenzione si basa su un osservatore che guarda verso la sorgente della luce: se vede il vettore campo elettrico ruotare in senso antiorario, la polarizzazione è sinistrorsa; destrorsa nell'altro caso.

Una lamina che produce questo tipo di polarizzazione si chiama lamina a quarto d'onda perché il suo spessore è proporzionale a $\lambda_0/4$. Una lamina di calcite ($n_o > n_s$) a quarto d'onda introduce un ritardo pari a un multiplo dispari di $\pi/2$ nella fase dell'onda ordinaria rispetto a quella dell'onda straordinaria. Se la luce entrante nella lamina di calcite a quarto d'onda è polarizzata circolarmente, all'uscita essa sarà polarizzata linearmente. La tabella X.1 riassume le proprietà di una lamina di calcite a quarto d'onda.

Una lamina che provoca uno sfasamento pari ad un multiplo dispari di π si dice *a mezz'onda*, perché il suo spessore è proporzionale a $\lambda_0/2$. L'effetto di una lamina a mezz'onda è riassunto nella tabella X.2.

Si consideri ora il caso in cui la direzione di incidenza della luce sulla lamina della figura X.3 non è ortogonale alla lamina. In questo caso, le due onde vengono *rifratte* in modo diverso: in una descrizione in termini di 'raggi', i due raggi ordinario e straordinario sono spazialmente separati dalla diversa rifrazione subita nel mezzo. Questo fenomeno è detto *birifrangenza* e viene

utilizzato nel prisma di Nicol per ottenere luce polarizzata linearmente.

Il prisma di Nicol è costituito da due pezzi di calcite di forma opportuna incollate tra di loro con una resina detta *balsamo del Canada* il cui indice di rifrazione n = 1.55 è intermedio tra quello straordinario (1.4864) e ordinario (1.6585) della calcite. Si tratta di fare incidere la luce sul prisma in modo tale che il raggio straordinario - passando dalla calcite al balsamo - venga totalmente riflesso e poi assorbito da una parete del prisma opportunamente annerita: solo il raggio ordinario attraversa l'intero prisma fornendo quindi luce polarizzata linearmente.

E' possibile produrre materiali otticamente anisotropi usando materiale plastico. Un tipo di questi materiali, detto *polaroid*, è in grado di trasmettere circa l'80% di uno dei due raggi polarizzati linearmente che esso produce e solo l'1% dell'altro. Il polaroid è un materiale di basso costo e viene normalmente usato per produrre luce polarizzata linearmente in una percentuale di 80/81 × 100 = 98.8%. Materiali di questo tipo, che assorbono in modo diverso luce diversamente polarizzata, sono detti *dicroici*.



Figura X.4. il campo elettrico \vec{E} dell'onda incidente perpendicolarmente al piano *xy* e polarizzata linearmente, forma l'angolo θ con la direzione *x* privilegiata del polarizzatore lineare.

Si consideri un fascio di luce linearmente polarizzata che incide perpendicolarmente su un polarizzatore lineare: sia θ l'angolo formato dal vettore campo elettrico della luce con la direzione privilegiata del polarizzatore (figura X.4). L'onda incidente può essere considerata come risultante dalla sovrapposizione di due onde polarizzate linearmente lungo la direzione privilegiata del polarizzatore e lungo la direzione perpendicolare: solo l'onda polarizzata lungo la direzione privilegiata attraversa il polarizzatore; l'altra è completamente assorbita (polarizzatore ideale). Ne segue che l'intensità della luce che ha attraversato il polarizzatore è:

$$I = I_0 \cos^2 \theta \tag{X.19}$$
dove I_0 è l'intensità dell'onda prima del polarizzatore. Si perviene alla (X.19) osservando che il campo elettrico dell'onda polarizzata lungo la direzione privilegiata è dato da $E_x = E_0 \cos\theta$ e quindi la sua intensità è proporzionale a $E_0^2 \cos^2\theta$: da cui la (X.19) che è detta legge di Malus.

L'intensità di un'onda non polarizzata viene dimezzata da un polaroid ideale. Un'onda non polarizzata è caratterizzata dal fatto che in un intervallo di tempo Δt sufficientemente grande rispetto al suo periodo e sufficientemente piccolo rispetto alla durata della misura, l'angolo θ assume, in modo casuale, tutti i valori possibili e la componente temporale della fase dell'onda varia di conseguenza. Ne segue che:

$$< E_{0x}^2 > = < E_0^2 \cos^2 \theta > = \frac{E_0^2}{2}$$

Il polaroid lascia passare metà dell'intensità della luce incidente, qualunque sia l'orientazione del polaroid nel piano xy.

X.2.5 Misura della polarizzazione della luce

Supponiamo che un fascio di luce incida perpendicolarmente su un polaroid. Se facciamo ruotare il polaroid attraverso un angolo di 2π ed osserviamo l'intensità della luce all'uscita del polaroid, si potranno verificare tre situazioni (indicheremo con *N* la luce 'naturale', cioè non polarizzata; con *L* quella polarizzata linearmente; con *C* quella polarizzata circolarmente; con *E* quella polarizzata ellitticamente):

- 1. *L'intensità trasmessa varia passando attraverso due massimi e due minimi nulli*:³ la luce incidente è polarizzata linearmente (*L*).
- 2. *L'intensità trasmessa non cambia ruotando il polaroid*: la luce incidente non è polarizzata (*N*); oppure la sua polarizzazione è circolare (*C*); oppure essa è in parte non polarizzata e in parte polarizzata circolarmente (*N* + *C*). Per distinguere tra queste possibilità bisogna far passare la luce prima attraverso una lamina a quarto d'onda e, successivamente, attraverso un polaroid: se la luce incidente non è polarizzata (*N*), essa sarà non polarizzata anche dopo la lamina e, ruotando il polaroid finale, l'intensità della luce uscente rimarrà costante. Se la luce incidente è polarizzata circolarmente (*C*), essa uscirà dalla lamina polarizzata linearmente lungo una delle due direzioni perpendicolari che formano con l'asse ottico della lamina un angolo di $\pm \pi/4$, a

³I due minimi sono nulli solo se il polaroid è ideale.

seconda che la polarizzazione sia destrorsa o sinistrorsa (si veda la tabella X.1): l'intensità della luce uscente dal polaroid finale presenterà due massimi e due minimi nulli. Nell'ultimo caso (N + C), l'intensità della luce uscente presenta, quando il polaroid ruota, due minimi non nulli.

3. L'intensità trasmessa varia passando attraverso due massimi e due minimi non nulli: la luce incidente è polarizzata ellitticamente (E); oppure la luce incidente è parzialmente polarizzata linearmente (N + L); oppure la luce incidente è in parte polarizzata linearmente e in parte ellitticamente (L + E) o è parzialmente polarizzata ellitticamente (N + E). Per distinguere tra queste possibilità è necessario interporre tra la sorgente della luce ed il polaroid una lamina a quarto d'onda il cui asse ottico sia diretto parallelamente o perpendicolarmente alla direzione dell'asse del polaroid quando esso è orientato per trasmettere l'intensità minima. Se, ruotando il polaroid: a) l'intensità passa per un minimo nullo, allora la luce è polarizzata ellitticamente (E); b) l'intensità passa per un minimo non nullo in corrispondenza dell'orientamento iniziale del polaroid, allora la luce è parzialmente polarizzata linearmente (N + L); c) l'intensità passa per un minimo non nullo in corrispondenza di un orientamento del polaroid obliquo rispetto al suo orientamento iniziale, allora la luce è parzialmente polarizzata ellitticamente (N + E) o polarizzata in parte ellitticamente e in parte linearmente (E + L).

X.2.6 Appendice

Si vuole dimostrare che il metodo dell'ellissoide degli indici, illustrato nella sezione X.2.3 (pagina 298), è equivalente alla soluzione dell'equazione di Fresnel della sezione X.2.2 (pagina 297).

Si consideri un'onda piana che si propaga nel cristallo lungo la direzione individuata dal versore \hat{s} . Sia π un piano perpendicolare a \hat{s} , passante per l'origine degli assi (centro dell'ellissoide degli indici); la sua intersezione con l'ellissoide degli indici sarà un'ellisse. L'equazione del piano π è:

$$\vec{r} \cdot \hat{s} = x s_x + y s_y + z s_z = 0$$
 (X.20)

Dove \vec{r} è il vettore posizione di un qualsiasi punto del piano π . Si osserva che i semiassi principali dell'ellisse, r_M e r_m , sono il massimo e il minimo della funzione

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

sottoposta alle condizioni:

- ♦ il punto $P(\vec{r})$ deve appartenere al piano π , cioè deve valere la (X.20);
- ♦ il punto $P(\vec{r})$ deve appartenere all'ellissoide, cioè deve valere la (X.16).

Per trovare r_M e r_m si utilizza il metodo dei moltiplicatori di Lagrange. I due valori cercati sono il massimo e il minimo della funzione:

$$F(x, y, z, \lambda_1, \lambda_2) = x^2 + y^2 + z^2 + \lambda_1 (xs_x + ys_y + zs_z) + \lambda_2 \left(\frac{x^2}{n_x^2} + \frac{y^2}{n_y^2} + \frac{z^2}{n_z^2} - 1 \right)$$

sotto le condizioni:

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda_1} = \frac{\partial F}{\partial \lambda_2} = 0$$

che traducono le (\diamond). Le condizioni di massimo o di minimo della funzione *F* sono:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial z} = 0 \tag{X.21}$$

Si eseguiranno i calcoli solo per la prima delle (X.21); essendo le altre formalmente identiche, si scriveranno per esse solo i risultati.

$$\partial F/\partial x = x + \frac{\lambda_1}{2}s_x + \frac{\lambda_2}{n_x^2}x = 0 \tag{X.22}$$

Moltiplicando per *x*:

$$x^{2} + \frac{\lambda_{1}}{2}xs_{x} + \frac{\lambda_{2}}{n_{x}^{2}}x^{2} = 0$$
 (X.23)

Procedendo analogamente per le altre (X.21) si ottengono le equazioni:

$$y^{2} + \frac{\lambda_{1}}{2}ys_{y} + \frac{\lambda_{2}}{n_{y}^{2}}y^{2} = 0$$
(X.24)
$$z^{2} + \frac{\lambda_{1}}{2}zs_{z} + \frac{\lambda_{2}}{n_{z}^{2}}z^{2} = 0$$

Sommando le (X.24) con la (X.23) si ottiene:

$$x^{2} + y^{2} + z^{2} + \frac{\lambda_{1}}{2}(xs_{x} + ys_{y} + zs_{z}) + \lambda_{2}\left(\frac{x^{2}}{n_{x}^{2}} + \frac{y^{2}}{n_{y}^{2}} + \frac{z^{2}}{n_{z}^{2}}\right) = 0$$
(X.25)

Ricordando che:

$$x^{2} + y^{2} + z^{2} = r^{2}$$

$$xs_{x} + ys_{y} + zs_{z} = 0$$

$$\frac{x^{2}}{n_{x}^{2}} + \frac{y^{2}}{n_{y}^{2}} + \frac{z^{2}}{n_{z}^{2}} = 1$$

la (X.25) si può scrivere:

$$r^2 + \lambda_2 = 0 \tag{X.26}$$

Se invece si moltiplica la (X.22) per s_x si otti
ene:

$$s_x x + \frac{\lambda_1}{2} s_x^2 + \frac{\lambda_2}{n_x^2} s_x x = 0$$
 (X.27)

e procedendo analogamente per le relazioni relative ad *y* e *z*:

$$s_{y}y + \frac{\lambda_{1}}{2}s_{y}^{2} + \frac{\lambda_{2}}{n_{y}^{2}}s_{y}y = 0$$
(X.28)
$$s_{z}z + \frac{\lambda_{1}}{2}s_{z}^{2} + \frac{\lambda_{2}}{n_{z}^{2}}s_{z}z = 0$$

Sommando membro a membro la (X.27) e le (X.28):

$$s_{x}x + s_{y}y + s_{z}z + \lambda_{2}\left(\frac{s_{x}x}{n_{x}^{2}} + \frac{s_{y}y}{n_{y}^{2}} + \frac{s_{z}z}{n_{z}^{2}}\right) + \frac{\lambda_{1}}{2}\left(s_{x}^{2} + s_{y}^{2} + s_{z}^{2}\right) = 0$$
(X.29)

Ricordando che:

$$s_x x + s_y y + s_z z = 0$$
$$s_x^2 + s_y^2 + s_z^2 = 1$$

la (X.29) diventa:

$$\lambda_2 \left(\frac{s_x x}{n_x^2} + \frac{s_y y}{n_y^2} + \frac{s_z z}{n_z^2} \right) + \frac{\lambda_1}{2} = 0$$
 (X.30)

Ora si devono usare la (X.26) e la (X.30) per eliminare λ_1 e λ_2 da (X.22) e dalle corrispondenti equazioni relative a *y* e *z*. Si ottiene:

$$\begin{aligned} x\left(1-\frac{r^{2}}{n_{x}^{2}}\right)+s_{x}xr^{2}\left(\frac{s_{x}x}{n_{x}^{2}}+\frac{s_{y}y}{n_{y}^{2}}+\frac{s_{z}z}{n_{z}^{2}}\right) &= 0\\ y\left(1-\frac{r^{2}}{n_{y}^{2}}\right)+s_{y}yr^{2}\left(\frac{s_{x}x}{n_{x}^{2}}+\frac{s_{y}y}{n_{y}^{2}}+\frac{s_{z}z}{n_{z}^{2}}\right) &= 0\\ z\left(1-\frac{r^{2}}{n_{z}^{2}}\right)+s_{z}zr^{2}\left(\frac{s_{x}x}{n_{x}^{2}}+\frac{s_{y}y}{n_{y}^{2}}+\frac{s_{z}z}{n_{z}^{2}}\right) &= 0 \end{aligned}$$
(X.31)

Ponendo:

$$r^{2} = n^{2}$$

$$\frac{x}{n_{x}^{2}} = \frac{E_{x}\sqrt{\varepsilon_{0}}}{\vec{E}\cdot\vec{D}}$$

$$\frac{y}{n_{y}^{2}} = \frac{E_{y}\sqrt{\varepsilon_{0}}}{\vec{E}\cdot\vec{D}}$$

$$\frac{z}{n_{z}^{2}} = \frac{E_{z}\sqrt{\varepsilon_{0}}}{\vec{E}\cdot\vec{D}}$$

e sommando membro a membro le (X.31), si ottiene:

$$\vec{D} = \varepsilon_0 n^2 \left[\vec{E} - \hat{s} \left(\hat{s} \cdot \vec{E} \right) \right]$$

che è identica all'equazione di Fresnel (X.9). Si è così dimostrato che i valori r_M e r_m coincidono con i valori n_1 ed n_2 , soluzioni dell'equazione di Fresnel.

X.3 Stati di polarizzazione dei fotoni

Le proprietà di polarizzazione della luce sono state finora discusse nell'ambito della descrizione ondulatoria. Essendo la luce costituita da fotoni, questi devono possedere proprietà connesse alla polarizzazione delle onde.

Il concetto di fotone emerge rigorosamente solo dalla trattazione del campo elettromagnetico con i metodi dell'elettrodinamica quantica. Nel seguito, tratteremo le proprietà di polarizzazione dei fotoni usando alcuni formalismi quantici introdotti però sulla base di analogie con la descrizione elettromagnetica.

I fotoni possono avere un momento angolare intrinseco o di 'spin' diretto lungo la direzione di propagazione del fotone o in direzione opposta; in termini di componente: $s_z = \pm \hbar$ se il verso positivo dell'asse *z* è quello della direzione di propagazione del fotone.

D'ora innanzi, indicheremo il momento angolare intrinseco dei fotoni con il termine di *spin* per distinguerlo dal momento angolare *orbitale* (sezione X.4, pagina 313). I fotoni con spin diretto nella direzione della loro propagazione, si dicono polarizzati circolarmente in senso destrorso, $|R\rangle$; quelli con lo spin diretto in senso opposto alla loro direzione di propagazione si dicono polarizzati circolarmente in senso sinistrorso, $|L\rangle$.

In molti testi la definizione di polarizzazione destrorsa e sinistrorsa è scambiata; si veda a pagina 302.

Se un fotone è polarizzato $|R\rangle$, non è polarizzato $|L\rangle$; e viceversa: i due stati di polarizzazione si escludono reciprocamente. In meccanica quantica si dice che i due stati sono *ortogonali*. Analogamente, si escludono reciprocamente i due stati di polarizzazione $|x\rangle e |y\rangle$, dove $|x\rangle e |y\rangle$ denotano due stati di polarizzazione rettilinea lungo due direzioni perpendicolari. Dal punto di vista operativo, se un fotone ha attraversato un polaroid la cui direzione privilegiata è parallela all'asse x o y, il fotone, dopo il polaroid, è polarizzato $|x\rangle o |y\rangle$, rispettivamente; un fotone $|x\rangle o |y\rangle$, che, come vedremo tra poco, è descritto da una combinazione lineare di stati $|R\rangle$ e $|L\rangle$, *non* possiede momento angolare.

La descrizione quantica dello spin di un fotone utilizza il formalismo tipico della descrizione di un sistema fisico che può presentarsi in due stati reciprocamente escludentesi (stati ortogonali). Scriveremo le formule quantiche basandoci sull'analogia con la polarizzazione di un'onda elettromagnetica, sottolineando tuttavia che queste formule possono, naturalmente, essere scritte partendo dai postulati della meccanica quantica.

Nel seguito, la direzione di propagazione del fotone è la direzione positiva dell'asse *z* e il sistema di assi cartesiani ortogonali è, al solito, destrorso. Indichiamo con |x > e|y > gli stati di polarizzazione rettilinea di un fotone lungo le due direzioni perpendicolari *x*, *y* coincidenti con i rispettivi assi e con |R > e|L > i due stati di polarizzazione circolare. Possiamo allora Capitolo X. Luce polarizzata

scrivere:

$$|R> = \frac{1}{\sqrt{2}}(|x>-i|y>)$$

$$|L> = \frac{1}{\sqrt{2}}(|x>+i|y>)$$
(X.32)

dove $\pm i$ introduce i necessari sfasamenti tra le due polarizzazioni rettilinee. Le equazioni precedenti non sono state rigorosamente scritte per analogia: abbiamo infatti introdotto il fattore $1/\sqrt{2}$ perché, come si vedrà più avanti, la somma dei quadrati dei coefficienti delle combinazioni lineari (X.32) deve essere uguale ad 1.

Esempio dell'uso dell'analogia: un'onda polarizzata circolarmente in senso destrorso è data dalla sovrapposizione di un'onda polarizzata linearmente lungo x e da un'onda polarizzata lungo y e in ritardo di fase di $\pi/2$.

Sommando e sottraendo membro a membro le due equazioni precedenti, si ottiene:

$$|x > = \frac{1}{\sqrt{2}}(|R > + |L >)$$

 $|y > = i\frac{1}{\sqrt{2}}(|R > - |L >)$

(X.33)

Le (X.33) descrivono lo stato di polarizzazione rettilinea del fotone lungo *x* e *y*, rispettivamente, in funzione degli stati di polarizzazione circolare.

Si osservi come lo stato di polarizzazione di un fotone sia descritto mediante un formalismo che utilizza anche fattori di fase, similmente a quanto abbiamo già visto a proposito dei fenomeni di interferenza descritti in termini corpuscolari (sezione V.8.6, pagina 150).

X.3.1 Fotoni, polaroid e lamine

Supponiamo che un fascio di fotoni polarizzati circolarmente in senso destrorso incida su un polaroid ideale la cui direzione privilegiata coincide con l'asse x: indicheremo tale polaroid come "polaroid x". La polarizzazione di un fotone incidente è descritto dalla:

$$|R\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|x\rangle - i|y\rangle)$$
 (X.34)

La (X.34) è letta in meccanica quantica nel modo seguente:

- ♦ Lo stato di polarizzazione circolare destrorsa di un fotone è rappresentabile come un'*opportuna* combinazione di due stati di polarizzazione lineare lungo due direzioni perpendicolari. Il termine *opportuna* si riferisce al fatto che nella (X.34) deve essere inserito il fattore di fase –*i*, nonché il fattore di *normalizzazione* $1/\sqrt{2}$.
- ♦ La probabilità che un fotone | R > attraversi un polaroid x è data dal quadrato del coefficiente di | x > nella (X.34). Essa è quindi uguale ad 1/2.

Ne segue che ogni fotone $|R\rangle$ ha probabilità 1/2 di attraversare un polaroid x; pertanto, l'intensità del fascio di fotoni polarizzati $|R\rangle$ è dimezzata dal polaroid x. Questa predizione coincide con quella della descrizione elettromagnetica. Infatti, l'intensità di un'onda piana polarizzata circolarmente in senso destrorso è proporzionale a $2E_0^2$, dove E_0 è il valore massimo del campo elettrico delle due onde polarizzate linearmente che 'la compongono'. Di queste due onde, solo quella polarizzata lungo l'asse x, la cui intensità è proporzionale a E_0^2 , attraversa il polaroid x, mentre l'altra viene completamente assorbita: l'intensità trasmessa è quindi metà di quella incidente.

Come abbiamo già osservato in precedenza a proposito dei fenomeni di interferenza, anche la descrizione elettromagnetica è in grado di predire la sorte di un singolo fotone: è sufficiente introdurre l'ipotesi aggiuntiva secondo cui la probabilità che un fotone attraversi il polaroid x è data da

$$p = \frac{E_0^2}{2E_0^2} = \frac{1}{2}$$

Considerazioni analoghe valgono anche per un fascio di fotoni |L>.

Se il fascio di fotoni incidente sul polaroid x è polarizzato linearmente lungo una direzione che forma l'angolo θ con la direzione privilegiata del polaroid, lo stato del fotone prima del polaroid è descritto dalla:

$$|x'\rangle = |x\rangle \cos\theta + |y\rangle \sin\theta$$

Pertanto, la probabilità che il fotone attraversi il polaroid *x* è uguale a $\cos^2 \theta$. L'intensità del fascio sarà quindi ridotta dal polaroid dello stesso fattore. Si ritrova così la legge di Malus (pagina 303).

Consideriamo ora un fascio di fotoni polarizzato linearmente che incide perpendicolarmente su una lamina a quarto d'onda di calcite: sia θ l'angolo che la direzione di polarizzazione del fotone forma con l'asse ottico della lamina (figura X.5).

Capitolo X. Luce polarizzata



Figura X.5. un fotone polarizzato linearmente e descritto da $|x'_i\rangle$ incide perpendicolarmente su di una lamina di calcite a quarto d'onda. Nella figura $\theta > 0$.

Indicando con $|x'_i|$ > lo stato di polarizzazione di un fotone incidente, si avrà:

$$|x_i'\rangle = |x\rangle \cos\theta + |y\rangle \sin\theta$$

Usando le (X.33), e tenendo conto che la lamina di calcite a quarto d'onda introduce un ritardo di fase di $\pi/2$ nello stato | *y* >, si ottiene per lo stato del fotone uscente:

$$|x'_{u}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|R\rangle(\cos\theta + \sin\theta) + \frac{1}{\sqrt{2}}|L\rangle(\cos\theta - \sin\theta)$$

Questa equazione mostra che il fotone uscente sarà |R > 0|L > con le seguenti probabilità:

$$P(|R\rangle) = \frac{1}{2} + \sin\theta\cos\theta$$
$$P(|L\rangle) = \frac{1}{2} - \sin\theta\cos\theta$$

che dipendono dall'angolo θ . Per $\theta = \pi/4$ il fotone ha probabilità 1 di essere $|R\rangle$; viceversa, per $\theta = -\pi/4$, il fotone ha probabilità 1 di essere $|L\rangle$. L'onda uscente (costituita da un numero statisticamente significativo di fotoni) sarà quindi, in generale, polarizzata ellitticamente in senso destrorso o sinistrorso a seconda che $P(|R\rangle) > P(|L\rangle)$ o viceversa. Per $\theta = \pi/4$ la polarizzazione dell'onda sarà circolare destrorsa; per $\theta = -\pi/4$ la polarizzazione dell'onda sarà circolare sinistrorsa. Si ritrovano così i risultati della tabella X.1 (pagina 301). Un altro esempio di correlazione tra la polarizzazione delle onde e quella dei fotoni è costituito dalla sovrapposizione di due fasci di luce coerenti, uno polarizzato circolarmente in senso destrorso, l'altro in senso sinistrorso e propagantesi nella stessa direzione: mentre lo stato di polarizzazione dei fotoni è $|R\rangle$ o $|L\rangle$, l'onda è polarizzata linearmente.

X.4 Luce e momento angolare

Nelle due sezioni precedenti abbiamo correlato le *proprietà di polarizzazione* della luce descritta come un'*onda elettromagnetica* allo *spin* dei *fotoni*. Lo spin dei fotoni è una proprietà descritta dalla meccanica quantica. Abbiamo quindi posto in relazione due descrizioni completamente differenti: la teoria elettromagnetica (del continuo) di Maxwell e quella quantica (del discreto).

Va tuttavia ricordato che la teoria di Maxwell prevede che ad un'onda elettromagnetica sia associato, oltre ad una quantità di moto, anche un momento angolare: il suo valore dipende dalla distribuzione spaziale della quantità di moto associata all'onda. Infatti, è definito dall'equazione (IV.32, pagina 99) che trascriviamo:

$$\vec{J} = \vec{r} \times \vec{g} = \varepsilon_0 [\vec{r} \times (\vec{E} \times \vec{B})]$$

dove \vec{g} è la quantità di moto per unità di volume. Nel caso di un'onda piana, \vec{J} è sempre nullo, per ragioni di simmetria: il generico contributo $\vec{r} \times \vec{g}$ è annullato dal contributo $-\vec{r} \times \vec{g}$.

Recenti trattazioni teoriche e indagini sperimentali hanno mostrato che, in particolari fasci di luce laser, è possibile separare il contributo al momento angolare della luce derivante dallo spin dei fotoni e dalla distribuzione spaziale dell'energia e della fase dell'onda; quest'ultimo è chiamato *momento angolare orbitale* e i suoi valori possibili 'per fotone' sono multipli interi di \hbar .⁴

X.4.1 Momento angolare della luce: esperimenti

L'analogia tra luce polarizzata circolarmente e il modello meccanico [discusso] suggerisce che una simile relazione tra la coppia e l'energia possa valere per un fascio di questa luce che incida perpendicolarmente su una superficie assorbente.

Se le cose stanno così, un fascio di lunghezza d'onda λ contenente l'energia E per unità di volume trasferirà un momento angolare $E\lambda/2\pi$ per secondo e per unità di superficie...ma... la mia esperienza attuale sulle forze della luce non mi dà molte speranze di poter rivelare l'effetto, se esso ha il valore suggerito dal modello meccanico.

John Henry Poynting

⁴Si veda, ad esempio: Autori varî, *Journal of Optics B: Quantum and Semiclassical Optics*, 4 (2002), S1 - S89.

Il primo esperimento che ha posto in evidenza lo spin dei fotoni, connesso alla polarizzazione dell'onda, è stato condotto da Richard Beth nel 1936 (figura X.6). 5



Figura X.6. schema dell'esperimento di Beth. Le frecce verticali indicano la direzione di moto dei fotoni; queste, insieme a quelle circolari, ne individuano lo stato di polarizzazione circolare. Si veda il testo.

M è una lamina a mezz'onda di calcite sospesa mediante una fibra di quarzo al punto P. La fibra di quarzo passa attraverso un foro posto al centro della lamina fissa a quarto d'onda di calcite Q, la cui superficie superiore è resa riflettente da uno strato di argento. Un fascio di luce polarizzata circo-larmente in senso destrorso attraversa, dal basso verso l'alto (parte sinistra della figura), la lamina M e la lamina Q ed è da questa riflesso verso il basso.

La sorgente usata da Beth era una lampada ad incandescenza; la luce era polarizzata linearmente con un nicol e poi polarizzata circolarmente con una lamina a quarto d'onda. Diversamente da come assunto qui (per ragioni di uniformità con gli esempi trattati in precedenza), le lamine a quarto d'onda usate da Beth erano di quarzo (per cui $n_s > n_o$).

Attraversando la lamina a mezz'onda *M*, la luce si trasforma da circolare destrorsa (*D*) a circolare sinistrorsa (*S*) (tabella X.2): i fotoni incidenti cedono

⁵R.E. Beth, 'Mechanical Detection and Measurement of the Angular Momentum of Light', *Physical Review*, 50, (1936), 115 - 125.

il loro momento angolare intrinseco destrorso e ne acquisiscono uno sinistrorso; la lamina *M* acquisisce quindi un momento angolare destrorso pari a $2\hbar$ per ogni fotone che l'attraversa. Attraversando la lamina *Q* dal basso verso l'alto, la luce si trasforma da (*S*) in linearmente polarizzata (tabella X.1); la riflessione sullo strato di argento della lamina *Q* introduce uno sfasamento di $-\pi$; riattraversando la lamina *Q* dall'alto verso il basso, la luce si trasforma da linearmente polarizzata in circolare sinistrorsa (*S*). Infine, riattraversando la lamina *M*, la luce si trasforma da (*S*) in (*D*), cedendo alla lamina un momento angolare pari a $2\hbar$ per ogni fotone: la rotazione della lamina ha lo stesso verso di quella acquisita per effetto del fascio ascendente. Il fascio di luce è periodicamente interrotto in modo tale che gli impulsi rotatori trasferiti alla lamina *M* siano in risonanza con il periodo di oscillazione naturale del sistema. Le oscillazioni del sistema sono osservate mediante un fascio luminoso riflesso dallo specchio indicato con *s* nella figura.

La progettazione e l'esecuzione dell'esperimento deve tener conto della piccolezza del momento angolare del fotone ($\hbar = 1.05 \times 10^{-34} Nms$) e degli effetti spuri dovuti al fatto che il fascio di luce non è esattamente perpendicolare alla lamina M.

In anni recenti, raffinate tecniche sperimentali hanno permesso di studiare il trasferimento del momento angolare da fasci di luce laser a particelle di dimensioni micrometriche. Si è così potuto dimostrare che lo spin dei fotoni pone in rotazione le particelle intorno al loro asse, mentre il momento angolare orbitale pone in rotazione le particelle rispetto all'asse di simmetria del fascio.⁶

Si ritorni alla citazione posta all'inizio: se si pone E = nhv (n è la densità dei fotoni), si ottiene che il momento angolare trasferito dal fascio di luce alla superficie totalmente assorbente è uguale a $n\hbar$. Per una recente trattazione di questi temi, basata sull'elettromagnetismo classico, si può vedere: S.M. Barnett, 'Optical angular - momentum flux', *Journal of Optics B: Quantum and Semiclassical Optics*, 4, (2002), S7 - S16.

⁶Si veda, ad esempio:

http://www.physics.gla.ac.uk/Optics/projects/orbitalAngularMomentum

Capitolo XI

Induzione elettromagnetica

Mi sono quasi interamente limitato alla trattazione matematica dell'argomento; ma vorrei raccomandare allo studente, dopo che ha appreso, sperimentalmente se possibile, quali sono i fenomeni osservabili, di leggere attentamente le Ricerche sperimentali di elettricità di Faraday. Egli vi troverà un resoconto fedele di alcune delle più grandi scoperte e ricerche elettriche, condotte in ordine e successione tali che ben difficilmente potrebbero essere migliorate se i risultati fossero noti in anticipo, e descritte nel linguaggio di un uomo che ha dedicato la più grande attenzione ai metodi per descrivere accuratamente le procedure scientifiche ed i loro risultati.

James Clerk Maxwell

XI.1 Introduzione

I fenomeni di induzione elettromagnetica furono scoperti e studiati sperimentalmente da Michael Faraday a partire dal 1831. I suoi principali esperimenti possono essere descritti nel modo seguente.

Si consideri la disposizione sperimentale rappresentata nella figura XI.1. Se il magnete è in moto di avvicinamento rispetto al circuito C l'ago dell'amperometro A, a zero centrale, segna il passaggio di una corrente deviando, per esempio, verso destra (a). Allontanando invece il magnete dal circuito, l'ago del galvanometro devia verso sinistra, indicando che il circuito è percorso da una corrente in senso inverso rispetto al caso precedente (b). Ripetendo l'esperimento con l'altro polo del magnete rivolto verso il circuito, il senso della corrente indotta si inverte in ciascuno dei due casi (c Capitolo XI. Induzione elettromagnetica



Figura XI.1. *C* è un filo conduttore, *A* un amperometro a zero centrale e *N*, *S* indicano i poli di un magnete.

e *d*). Analoghi risultati si ottengono avvicinando il circuito al magnete o allontanandolo da esso.

Questo esperimento può essere ripetuto, con gli stessi risultati, sostituendo al magnete un circuito C_2 percorso da una corrente continua.

Un terzo tipo di esperimenti può essere condotto con due circuiti C_1 e C_2 in quiete relativa. In questo caso il circuito C_1 è percorso da una corrente solo quando c'è una variazione della corrente che circola in C_2 : per esempio quando il circuito C_2 viene aperto o chiuso.

Un'altra fondamentale serie di esperimenti fu condotta da Faraday con un disco metallico posto in rotazione tra i poli di un magnete (figura XI.2) o con un disco metallico ed un magnete cilindrico (figura XI.3).

Un filo conduttore connette il centro del disco con un punto della sua circonferenza. Gli esperimenti di Faraday con il disco sono discussi in dettaglio nella sezione XI.3.3 (pagina 331).

Giuliani Bonizzoni - Lineamenti di elettromagnetismo



Figura XI.2. il disco metallico *D* ruota nel campo magnetico prodotto dal magnete *M*.



Figura XI.3. il disco metallico *D* ruota nel campo magnetico prodotto dal magnete *M*.

XI.2 La legge generale dell'induzione

Quando una concezione si diffonde all'interno di un collettivo di pensiero e lo permea abbastanza fortemente, fino a penetrare nella vita quotidiana e nelle locuzioni linguistiche, quando diventa un modo di vedere nel senso letterale del termine, una contraddizione sembra impensabile e inimmaginabile.

Ludvik Fleck

Si consideri l'espressione della forza di Lorentz:

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$$

Il lavoro compiuto da questa forza su una carica unitaria positiva che per-

corra una linea chiusa è dato da:

$$\mathcal{E} = \oint_{l} \left(\vec{E} + \vec{v}_{carica} \times \vec{B} \right) \cdot \vec{d}l = \oint_{l} \vec{E} \cdot \vec{d}l + \oint_{l} \left(\vec{v}_{carica} \times \vec{B} \right) \cdot \vec{d}l$$
(XI.1)

dove, per ragioni che diverranno chiare in seguito, si è posto in evidenza che la velocità che compare nella (XI.1) è quella della carica. Nell'ambito della teoria di Maxwell - Lorentz, questo integrale si presenta come la *naturale* definizione di *forza elettromotrice*: $fem = \mathcal{E}$. Nel vuoto, il secondo termine che compare al secondo membro della (XI.1) è nullo perché $dl = \vec{v}_{carica} dt$. Più avanti si vedrà come questo termine possa essere diverso da zero in un conduttore.

Ricordando che:

$$\vec{E} = -grad \varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

la (XI.1) diventa:

$$\mathscr{E} = -\oint_{l} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \cdot \vec{d}l + \oint_{l} (\vec{v}_{carica} \times \vec{B}) \cdot \vec{d}l \qquad (XI.2)$$

perché:

$$\oint_l \operatorname{grad} \varphi \cdot \vec{dl} = 0$$

La (XI.2) è la legge generale dell'induzione elettromagnetica. Essa mostra che:

♦ la *f em* indotta può essere espressa come la circuitazione del *campo elettrico indotto*, \vec{E}_i :

$$\vec{E}_i = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \vec{v}_{carica} \times \vec{B}$$

la *f em* indotta è data dalla somma di due termini: il primo derivante dalla variazione temporale del potenziale vettore (e del campo magnetico); il secondo derivante dalla componente magnetica della forza di Lorentz.

Quando il campo magnetico non dipende dal tempo, la *fem* indotta si riduce a:

$$\mathscr{E} = \oint_{l} (\vec{v}_{carica} \times \vec{B}) \cdot \vec{d}l \qquad (XI.3)$$

perché:

$$\oint_{l} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \cdot \vec{d}l = \int_{S} rot \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \cdot \hat{n} \, dS = \int_{S} \frac{\partial rot \vec{A}}{\partial t} \cdot \hat{n} \, dS =$$
$$= \int_{S} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot \hat{n} \, dS = 0$$

Ritornando all'equazione generale dell'induzione (XI.2), si osservi che:

$$\vec{v}_{carica} = \vec{v}_{linea} + \vec{v}_d$$

dove \vec{v}_{linea} è la velocità dell'elemento di circuito che contiene la carica e \vec{v}_d è la velocità di deriva della carica.

Essendo $v_{linea} \ll c$ e $v_{carica} \ll c$, possiamo usare la legge di composizione delle velocità di Galileo.

Nel caso di fili, \vec{v}_d è parallela all'elemento di linea $\vec{d}l$; ne segue che la legge generale dell'induzione assume la forma:

$$\mathcal{E} = -\oint_{l} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \cdot \vec{dl} + \oint_{l} (\vec{v}_{linea} \times \vec{B}) \cdot \vec{dl}$$
(XI.4)

L'equazione generale dell'induzione può anche essere scritta in un'altra forma. Ripartendo dalla (XI.1), si inizia con il calcolo dell'integrale (figura XI.4):

$$\oint_{l} \vec{E} \cdot \vec{d}l = \int_{S} rot \vec{E} \cdot \hat{n} \, dS = -\int_{S} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot \hat{n} \, dS \tag{XI.5}$$

dove è stata utilizzata l'equazione di Maxwell (III.3, pagina 78) relativa al rotore del campo elettrico.

Se la superficie *S* non varia in funzione di t – se cioè la linea l non varia in funzione di t – si ottiene:

$$\oint_{l} \vec{E} \cdot \vec{d}l = -\frac{d}{dt} \int_{S} \vec{B} \cdot \hat{n} \, dS = -\frac{d\Phi(\vec{B})}{dt} \tag{XI.6}$$

Quando la linea *l* varia in funzione del tempo, il passaggio dalla (XI.5) alla (XI.6) non può essere compiuto; in questo caso si ha (sezione XI.2.1, pagina 323):

$$\int_{S} \frac{\partial B}{\partial t} \cdot \hat{n} \, dS = \frac{d}{dt} \int_{S} \vec{B} \cdot \hat{n} \, dS + \oint_{l} (\vec{v}_{linea} \times \vec{B}) \cdot \vec{dl} \tag{XI.7}$$

Capitolo XI. Induzione elettromagnetica



Figura XI.4. per la derivazione della legge dell'induzione elettromagnetica in funzione del campo magnetico.

dove \vec{v}_{linea} è la velocità dell'elemento di linea $\vec{d}l$. Pertanto, nel caso generale, la (XI.6) deve essere sostituita dalla:

$$\oint_{l} \vec{E} \cdot \vec{d}l = -\frac{d}{dt} \int_{S} \vec{B} \cdot \hat{n} \, dS - \oint_{l} (\vec{v}_{linea} \times \vec{B}) \cdot \vec{d}l$$

In conclusione:

$$\mathscr{E} = \left[-\frac{d}{dt} \int_{S} \vec{B} \cdot \hat{n} \, dS - \oint_{l} (\vec{v}_{linea} \times \vec{B}) \cdot \vec{dl} \right] + + \oint_{l} (\vec{v}_{carica} \times \vec{B}) \cdot \vec{dl}$$
(XI.8)

Questa equazione è equivalente alla (XI.2), che trascriviamo qui per comodità:

$$\mathcal{E} = -\oint_{l} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \cdot \vec{dl} + \oint_{l} (\vec{v}_{carica} \times \vec{B}) \cdot \vec{dl}$$
(XI.9)

I due termini della (XI.8), posti tra parentesi quadra per sottolinearne la comune origine matematica e fisica, sono equivalenti al primo termine della (XI.9): la loro somma è nulla quando $\partial \vec{B} / \partial t = 0$; l'ultimo termine di entrambe le equazioni deriva dalla componente magnetica della forza di Lorentz.

Nel caso di *circuiti filiformi*, il contributo della velocità di deriva alla forza elettromotrice indotta è nullo; pertanto, la (XI.8) si riduce alla:

$$\mathscr{E} = -\frac{d}{dt} \int_{S} \vec{B} \cdot \hat{n} \, dS = -\frac{d\Phi(B)}{dt} \tag{XI.10}$$

che è la cosiddetta *legge del flusso*. Essa predice correttamente la forza elettromotrice indotta, ma ne oscura l'origine fisica che è invece trasparente nella (XI.9): in questi casi, la legge del flusso costituisce una comoda *regola di calcolo*.

La (XI.10) è valida anche quando, pur non essendo i circuiti filiformi, essi sono in quiete; essa è valida anche nel vuoto.

XI.2.1 Derivazione dell'equazione (XI.7)

In riferimento alla figura XI.5, si consideri, all'istante t - dt, la superficie S_1 (con la linea l_1 come contorno) e si supponga che ogni elemento dS_1 infinitesimo di essa si sposti con velocità $\vec{v}(x, y, z)$: all'istante t la superficie si sarà trasformata in S_2 (con la linea l_2 come contorno).



Figura XI.5. per il calcolo del flusso di un vettore attraverso una superficie mobile. La superficie S_2 ha una forma diversa da quella della superficie S_1 per porre in evidenza il fatto che il vettore velocità \vec{v} può variare da punto a punto sulla superficie S_1 . La normale \hat{n} alle superficî è assunta entrante per S_1 ed uscente per S_2 (in modo tale che la componente normale di \vec{G} non cambi segno passando da S_1 ad S_2).

Si vuole calcolare, per un qualsiasi vettore \vec{G} , la variazione temporale del suo flusso ϕ attraverso la superficie *S* che coincide con *S*₁ all'istante *t* – *dt* e con *S*₂ all'istante *t*. Per definizione si ha:

$$d\Phi = \int_{S_2} G_n(t) \, dS_2 - \int_{S_1} G_n(t - dt) \, dS_1$$

Applicando il teorema della divergenza – all'istante t – al volume delimitato dalle superficî S_1 e S_2 e da quella descritta nello spostamento dalla linea l_1 , si ottiene:

$$\int_{S_2} G_n(t) \, dS_2 + dt \oint_{I_1} \vec{G} \cdot (\vec{d} \, l \times \vec{v}) - \int_{S_1} G_n(t) \, dS_1 = dt \int_{S_1} v_n \, di \, v \, \vec{G} \, dS_1$$
(XI.11)

(si noti che $dl \times v dt$ rappresenta, vettorialmente, l'elemento di superficie laterale e $v_n dt dS_1$ l'elemento di volume). D'altra parte si ha:

$$\int_{S_1} G_n(t - dt) \, dS_1 = \int_{S_1} G_n(t) \, dS_1 - dt \int_{S_1} \frac{\partial G_n(t)}{\partial t} \, dS_1 \tag{XI.12}$$

Aggiungendo

$$dt \int_{S_1} (\partial G_n(t)/\partial t) \, dS_1$$

ad entrambi i membri della (XI.11), si ottiene, tenendo conto della (XI.12):

$$\frac{d\Phi}{dt} = \int_{S_1} \frac{\partial G_n(t)}{\partial t} \, dS_1 + \int_{S_1} v_n \, di \, v \, \vec{G} \, dS_1 - \oint_{l_1} \vec{G} \cdot (\vec{dl} \times \vec{v})$$

Questa equazione, applicata al vettore campo magnetico \vec{B} , dà (ricordando le proprietà del prodotto vettoriale misto e che $div\vec{B} = 0$):

$$\int_{S_1} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot \hat{n} \, dS_1 = \frac{d\Phi(\vec{B})}{dt} + \oint_{l_1} (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot \vec{d}l$$

Pertanto, nel caso in cui la linea lungo la quale si calcola la circuitazione si muova, si ottiene, invece della (XI.6):

$$\oint_{l} \vec{E} \cdot \vec{dl} = -\frac{d\Phi(\vec{B})}{dt} - \oint_{l} (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot \vec{dl}$$

XI.2.2 $\vec{A} \circ \vec{B}$?

Si riprendano in considerazione le equazioni (XI.9) e (XI.8). Esse sono, dal punto di vista predittivo, equivalenti; tuttavia è preferibile l'equazione espressa in termini del potenziale vettore. Infatti essa esprime la forza elettromotrice indotta come integrale di linea del campo elettromotore indotto

$$\vec{E}_i = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \vec{v}_{carica} \times \vec{B}$$

dove il campo elettromotore è un campo 'buono' nel senso che il suo valore in un punto generico P dipende solo da grandezze definite in quel punto: il potenziale vettore, la velocità della carica ed il campo magnetico. Nell'equazione (XI.8), invece, il campo magnetico - nel primo integrale - si comporta come un campo 'anomalo', in quanto connette 'ciò che accade' sulla superficie S - peraltro arbitraria purché la linea l sia il suo contorno - a 'ciò che accade' sulla linea l: il campo magnetico 'agisce' quindi 'a distanza' e con velocità di propagazione infinita, violando così una caratteristica essenziale del concetto di campo.

La questione può essere considerata anche dal seguente punto di vista: l'equazione (XI.9), contenente il potenziale vettore, fornisce una descrizione *causale*: il campo elettromotore produce la *f em* che, a sua volta, produce la corrente. L'equazione (XI.8) invece, non permette una descrizione causale per due motivi: a) gli eventi che dovrebbero costituire la causa della *f em*, cioè i valori di \vec{B} sulla superficie *S*, non sono univocamente definiti, perché non è univocamente definita la superficie *S*; b) il campo \vec{B} dovrebbe agire 'a distanza' con velocità di propagazione infinita.

XI.3 Studio di casi particolari

Nella discussione di alcuni casi particolari di applicazione dell'equazione generale dell'induzione elettromagnetica sceglieremo, di solito, il sistema di riferimento *inerziale* più opportuno per descrivere i fenomeni: quello del laboratorio.

XI.3.1 Barra metallica in moto



Figura XI.6. la barra *A* si muove con velocità costante \vec{v} nel campo magnetico uniforme \vec{B} perpendicolare al piano del foglio ed entrante.

Si consideri la figura XI.6. Sul telaio *T* scorre, con velocità costante \vec{v} e mantenendo il contatto con il telaio, la barra *A* di lunghezza *a*. Telaio e barra - costituiti dello stesso materiale metallico e aventi la stessa sezione - sono immersi in un campo magnetico \vec{B} uniforme e costante, perpendicolare al piano della figura ed entrante. Secondo la (XI.9), la forza elettromotrice nel circuito *C* costituito dalla barra e dalla parte del telaio alla sinistra di esso – calcolata in senso antiorario – è data da:

$$\mathscr{E} = \oint_{l} \left(\vec{v}_{carica} \times \vec{B} \right) \cdot \vec{d} \, l$$

perché il primo termine della (XI.9) è nullo, essendo \vec{A} costante. La velocità della carica è data da:

$$\vec{v}_{carica} = \vec{v}_{linea} + \vec{v}_d$$

dove \vec{v}_d è la velocità di deriva della carica. Si ha pertanto:

$$\mathcal{E} = \oint_{l} (\vec{v}_{linea} \times \vec{B}) \cdot \vec{dl} + \oint_{l} (\vec{v}_{d} \times \vec{B}) \cdot \vec{dl} = vBa$$

dove v è la velocità della barra; il secondo integrale è nullo perché la velocità di deriva è diretta come \vec{dl} (per effetto Hall; sezione VI.6, pagina 212). Questa forza elettromotrice è localizzata nella barra, perché dovuta alla velocità delle cariche contenute in essa.

La questione della localizzazione della forza elettromotrice è stata lungamente discussa. Si è anche negato che la questione abbia senso alcuno. Essa ha invece un preciso significato operativo: il tratto del circuito in cui è localizzata la forza elettromotrice è quello in cui la corrente entra dal punto a potenziale inferiore ed esce dal punto a potenziale superiore. Nel caso in discussione, questo tratto è costituito dalla barra in moto; in qualunque tratto del telaio, la corrente entra dal punto a potenziale superiore ed esce dal punto a potenziale inferiore.

In ogni punto della barra esiste quindi un campo elettrico *indotto* $E_i = vB$ diretto da *M* verso *N*. Nel circuito circola una corrente (equazione XII.1, pagina 346):

$$I = \frac{\mathscr{E}}{R} = \frac{\nu B a S}{\rho l}$$

dove *l* è la lunghezza dell'intero circuito, *S* la sua sezione e ρ la resistività del materiale. Il modulo del vettore densità di corrente sarà allora dato da:

$$J = \frac{vBa}{\rho l}$$

Il campo elettrico effettivo - avente lo stesso valore in ogni punto del circuito - è dato da:

$$E_e = vB\frac{a}{l}$$

Questo è l'unico campo elettrico presente nella parte di telaio a sinistra della barra. Nella barra esso è il risultante del campo elettrico indotto $E_i = vB$ e di un campo elettrico E^* ad esso opposto il cui modulo è tale che:

$$E_e = E_i - E^*$$

Per comprendere quale sia l'origine del campo E^* , si consideri la barra in moto, ma *staccata* dal telaio. Il campo elettrico indotto tende a spostare gli elettroni verso la base della barra (verso il punto M). Tuttavia, appena tale processo inizia, la parte inferiore della barra M si carica negativamente e la parte superiore N positivamente. Si genera quindi tra N ed M un campo elettrico E^* diretto da N a M (verso il basso) che contrasta l'azione del campo indotto. Si raggiunge così una situazione stazionaria caratterizzata dal fatto che la superficie N della barra è carica positivamente e quella M negativamente: all'interno della barra il campo elettrico è nullo perché il campo E^* bilancia esattamente il campo indotto E_i . Se ora la barra viene posta in contatto con il telaio mentre continua a muoversi con velocità uniforme, si stabilisce, dopo un fenomeno transiente, una nuova condizione stazionaria: nel circuito scorre una corrente costante ed il campo elettrico E^* è diminuito perché, grazie al moto degli elettroni, la carica statica in N e M è diminuita.

Si ha pertanto:

$$E^* = vB\left(1 - \frac{a}{l}\right)$$

Quindi il campo elettrico $E_c \cos^2 definito$:

$$E_c = \begin{cases} E_e & neltelaio \\ E^* & nellabarra \end{cases}$$

è un campo elettrico conservativo perché la sua circuitazione lungo tutto il circuito è nulla (tabella XI.1).

Campo elettrico	Simbolo	Modulo	Direzione
Indotto	E_i	νB	1
Effettivo	Ee	vBa/l	1
	E^*	vB(1-a/l)	↓
Conservativo	$E_c = E^*$	vB(1-a/l)	Ļ

Tabella XI.1. campi elettrici all'interno della barra in moto.

La *differenza di potenziale* $V_N - V_M$, tra i due punti $N \in M$, è, per definizione, il lavoro compiuto dal campo elettrico *conservativo* sulla carica unitaria positiva, quando essa si sposta dal punto N al punto M lungo il telaio o la barra. Nel nostro caso abbiamo (figura XI.6):

$$V_N - V_M = E_e(l-a) = \nu B a \left(1 - \frac{a}{l}\right)$$

se calcolata lungo il telaio, e:

$$V_N - V_M = E^* a = \nu B a \left(1 - \frac{a}{l} \right)$$

se calcolata lungo la barra. Quindi:

$$V_N - V_M = \mathscr{E}\left(1 - \frac{a}{l}\right) = \mathscr{E} - \frac{a}{l}IR = \mathscr{E} - Ir$$

dove si è indicato con r la resistenza della barra. Si osservi inoltre che vale la relazione:

$$V_N - V_M = IR_T$$

dove R_T è la resistenza del telaio. Abbiamo così ritrovato la legge di Ohm (equazione XII.2, pagina 346). Si noti che la barra in moto nel campo magnetico *non si comporta come un conduttore ohmico*. Infatti, la differenza di potenziale tra i suoi estremi vale $\mathcal{E} - Ir$ mentre il prodotto della corrente che l'attraversa per la sua resistenza vale Ir.

Il caso discusso richiede ulteriori riflessioni. Siccome nella barra circola una corrente diretta dal punto M al punto N, la velocità delle cariche positive contenute nella barra (cui convenzionalmente si attribuisce il flusso di corrente) ha due componenti: la componente v della barra e la componente v_d diretta da M verso N. La forza di Lorentz dovuta al campo magnetico e agente sulle cariche positive della barra ha quindi una componente qvBdiretta da M verso N e una componente qv_dB diretta in senso opposto al moto della barra. Quest'ultima componente, tuttavia, viene esattamente bilanciata, in condizioni stazionarie, dal campo elettrico di Hall che si stabilisce tra le due pareti della barra perpendicolari al suo moto (sezione VI.6, pagina 212). Quindi, in condizioni stazionarie, l'unica componente effettiva della forza di Lorentz derivante dal campo magnetico è quella diretta da Mverso N il cui modulo è qvB. E' questa la ragione per cui nell'espressione della forza elettromotrice del circuito compare solo la velocità v della barra.

Il lavoro compiuto dalla forza elettromotrice del circuito nell'unità di tempo è dato da:

$$W(\mathscr{E}) = \mathscr{E}I = \frac{\mathscr{E}^2}{R}$$

Questo lavoro viene dissipato sotto forma di calore, perché le condizioni del circuito sono stazionarie; l'energia viene fornita dalla forza necessaria per mantenere la barra in moto rettilineo uniforme. Questa forza è uguale e contraria a quella che il campo magnetico esercita sulla barra in quanto

percorsa dalla corrente *I* e il suo modulo è dato da (equazione VI.33, pagina 208):

$$F = IBa = \frac{vBa}{R} \cdot Ba$$

e la potenza necessaria per mantenere la barra in moto da:

$$W(F) = F \cdot \nu = \frac{\mathscr{E}^2}{R}$$

Questa potenza coincide con la potenza $W(\mathscr{E})$ dissipata nel circuito.

Le considerazioni di bilancio energetico svolte mostrano che il dispositivo studiato converte l'energia meccanica, necessaria per mantenere la barra in moto, in energia elettrica; questa, a sua volta, viene convertita per effetto Joule in calore. Il campo magnetico svolge, in questo processo, un ruolo di intermediario permettendo la trasformazione dell'energia meccanica in energia elettrica.



Figura XI.7. descrizione del fenomeno secondo il sistema di riferimento K' solidale con la barra. Le grandezze accentate si riferiscono a K'; quelle non accentate al sistema di riferimento del laboratorio.

Per concludere l'argomento, è interessante vedere come un osservatore K', comovente con la barra, descrive i fenomeni osservati: in ogni punto della barra - per la terza equazione delle (III.7, pagina 79) - c'è un campo elettrico dato da $E' = \Gamma v B$ (dove B è il campo magnetico misurato nel sistema di riferimento del laboratorio e $\Gamma = 1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$ è il solito fattore relativistico) diretto lungo il verso positivo dell'asse z' (figura XI.7). Nell'approssimazione $v \ll c$, risulta $E' \approx vB$; inoltre tutte le altre grandezze fisiche in gioco hanno (approssimativamente) lo stesso valore nei due sistemi di riferimento. Ne

Capitolo XI. Induzione elettromagnetica

segue che i due sistemi di riferimento predicono gli stessi risultati per quanto concerne la misura delle grandezze fisiche coinvolte. In particolare i due osservatori concordano che la sede della *f em* indotta è la barra. Si noti che si potrebbe erroneamente pensare che *K'* attribuisca una *f em* al braccio di telaio parallelo alla barra. Così non è. Infatti: in ogni punto del telaio, che è visto da *K'* scorrere con velocità $-\vec{v}$, si sommano, elidendosi, due campi: quello derivante dalla terza equazione delle (III.7), pari a ΓBv , e quello derivante dalla componente magnetica della forza di Lorentz, pari a ΓBv e diretto in senso opposto.

Queste considerazioni suggeriscono di affrontare la questione della scelta del sistema di riferimento inerziale per la descrizione dei fenomeni elettromagnetici. La descrizione dei fenomeni osservati da parte di un osservatore comovente con la barra mostra che tale osservatore deve sapere qual'è la sorgente del campo magnetico. Infatti, vale la regola secondo cui il sistema inerziale da cui partire è quello in cui il magnete è in quiete. Se l'osservatore solidale con la barra non segue questa regola e si basa semplicemente sul fatto che egli misura un campo magnetico, la sua descrizione del fenomeno è quella secondo cui nel braccio di telaio parallelo alla barra si desta una fem dovuta alla componente magnetica della forza di Lorentz: descrizione evidentemente errata. La sua descrizione corretta deriva invece, come mostrato sopra, dal riconoscimento che la sorgente del campo magnetico è il magnete in quiete rispetto al telaio. Si noti infine che nei casi in cui un magnete cilindrico ruota intorno al proprio asse, il sistema di riferimento di partenza è quello inerziale (del laboratorio) in cui l'asse del magnete è in quiete (sezione XI.3.3, pagina 331).

XI.3.2 Circuiti in corrente continua

Le considerazioni svolte a proposito del circuito costituito dal telaio e dalla barra in moto valgono anche per un circuito costituito da una pila e da un conduttore. In quest'ultimo caso la forza elettromotrice è prodotta dalla pila. Vale quindi la tabella di corrispondenze XI.2. Un'ultima osservazione. Se i terminali di un voltmetro sono posti tra i punti N e M del circuito telaio - barra (o del circuito equivalente in cui la barra è stata sostituita da una pila), il voltmetro misura la differenza di potenziale $V_N - V_M$; è quindi sensibile al campo elettrico conservativo e non al campo elettrico effettivo. Se il voltmetro usa un galvanometro, esso misura la corrente che lo attraversa e questa è prodotta dal campo elettrico effettivo (e conservativo) esistente all'interno della bobina del galvanometro quando essa è percorsa dalla corrente misurata. Se il voltmetro (in questo caso, elettrometro) usato si basa

Barra in moto	Pila
Telaio	Resistenza esterna
Campo elettrico indotto E_i	Campo elettromotore E_m
E^*	E^*
Campo elettrico effettivo E_e	Campo elettrico effettivo E_e

Tabella XI.2. corrispondenze tra il caso telaio conduttore - barra e il circuito pila - conduttore.

sulla carica di un condensatore le cui armature sono poste in contatto con i punti $N \in M$, esso è sensibile al campo conservativo esistente all'interno della barra (della pila), perché questo campo è il prodotto del doppio strato di cariche che si forma tra N ed M.

XI.3.3 Il disco di Faraday: I

... un disco di rame fu incollato sulla cima di un magnete cilindrico e isolato da esso con un foglio di carta; il magnete ed il disco vennero ruotati insieme, e collettori (connessi al galvanometro) vennero posti in contatto con la circonferenza ed il centro del disco di rame. L'ago del galvanometro si mosse come nel caso precedente [in cui era in rotazione solo il disco], e la direzione di moto era la stessa di quella che si sarebbe osservata se solo il [disco di] rame fosse stato posto in rotazione, e il magnete fosse stato tenuto in quiete. Non c'era alcuna apparente differenza nell'entità della deflessione [dell'ago]. Quindi, la rotazione del magnete non produce alcuna differenza nei risultati; perché un magnete rotante o in quiete non produce alcun effetto sul [disco di] rame in moto.

Michael Faraday

Nella figura XI.8 è rappresentato il caso ideale del 'disco di Faraday': un disco metallico, di raggio R, ruota con velocità angolare ω costante intorno al suo asse nel senso indicato in figura; il disco è immerso in un campo magnetico costante ed uniforme \vec{B} , perpendicolare al piano del disco; gli estremi $C \in D$ del telaio sono in contatto con il centro del disco e con un punto della sua circonferenza, rispettivamente.

Nel sistema di riferimento del laboratorio, si considera la linea chiusa e



Figura XI.8. disco di Faraday. Un disco metallico ruota intorno al proprio asse con velocità angolare costante ω in un campo magnetico \vec{B} uniforme, perpendicolare al piano del disco; la freccia sul telaio indica il senso di percorrenza della linea chiusa scelto per il calcolo della forza elettromotrice.

in quiete costituita dal telaio e dal raggio 'fisso' *CD* del disco e si analizzano i contributi dei termini che appaiono nel secondo membro della (XI.9). Il primo termine è nullo (perché \vec{A} non dipende dal tempo), mentre il secondo termine fornisce un contributo alla forza elettromotrice – calcolata nel senso indicato in figura – dato da:

$$\mathscr{E} = \int_0^R \omega r B dr = \frac{1}{2} \omega B R^2 \tag{XI.13}$$

dove si è trascurato il contributo della velocità di deriva. Nel circuito *ABCD* circola quindi una corrente diretta nello stesso senso lungo il quale è stata calcolata la forza elettromotrice.

Gli esperimenti effettuati da Faraday con il disco sono stati di vario tipo: i loro risultati sono riassunti nella tabella XI.3.

Cosa	Moto relativo	Moto relativo	Corrente
si muove?	disco - magnete	disco - laboratorio	indotta
Disco	Sì	Sì	Sì
Magnete	Sì	No	No
Disco e magnete	No	Sì	Sì

Tabella XI.3. esperimenti di Faraday con il disco.

Quindi: il circuito è percorso da corrente se ruota il disco o il magnete insieme al disco; viceversa, non viene indotta alcuna corrente se ruota solo il magnete. Questi risultati sono descritti dalla legge generale dell'induzione.

E' interessante vedere come Faraday ha spiegato i suoi esperimenti. Faraday riteneva che il magnete creasse "*linee di forza magnetica*" reali e che

queste rimanessero ferme quando il magnete ruota: la corrente viene indotta solo quando c'è moto relativo tra disco e linee di forza. Si noti come il sistema di riferimento inerziale del laboratorio rispetto al quale la legge generale dell'induzione descrive gli esperimenti di Faraday sia solidale con le linee di forza ipotizzate da Faraday.



Figura XI.9. disco di Faraday. *M* è un magnete cilindrico rotante in senso antiorario; il disco è collocato sotto il magnete. Si veda il testo.

Vediamo ora come un sistema di riferimento istantaneamente inerziale posto sul magnete in rotazione spiega l'assenza di corrente nel disco quando questo è fermo. Nella figura XI.9, il magnete cilindrico M (di cui in figura è mostrata una sezione) sta ruotando in senso antiorario; il disco è collocato sotto il magnete e il campo magnetico è perpendicolare al piano della pagina ed uscente (equiverso all'asse z). Sia P un punto del magnete che, all'istante considerato, è dotato di velocità \vec{v} rispetto al sistema di riferimento K del laboratorio; un sistema di riferimento K', istantaneamente inerziale, posto in P con gli assi paralleli ed equiversi rispetto a quelli del laboratorio, vedrà il punto sottostante P_d del disco muoversi con velocità v nella direzione negativa dell'asse x'. Secondo K', su una carica puntiforme positiva unitaria posta in P_d , agirà una forza ΓvB diretta lungo l'asse y', derivante dalla componente magnetica della forza di Lorentz, ed una forza $-\Gamma vB$, derivante dalla trasformazione relativistica dei campi espressa dalle equazioni (III.7): la forza risultante sarà quindi nulla. Lo stesso tipo di ragionamento può essere applicato a tutti i punti del raggio del disco cui appartiene il punto P_d .

Per chiarire ulteriormente la fisica di questi fenomeni, si consideri la disposizione sperimentale rappresentata nella figura XI.10. Nell'asta *AB* viene indotta una *f em* pari a $(1/2)\omega BR^2$ (equazione XI.13), dove *R* è la lunghezza

Capitolo XI. Induzione elettromagnetica



Figura XI.10. l'asta metallica *AB*, imperniata in *A*, ruota strisciando sull'anello conduttore *N* in un campo magnetico \vec{B} perpendicolare al piano della figura ed uscente; il circuito è chiuso attraverso il conduttore fisso *CDA*.



Figura XI.11. *C* è un cilindro costituito da un magnete conduttore con la magnetizzazione *M* diretta nel senso indicato in figura. *C* ruota nel senso indicato. *AB* è un circuito conduttore con due contatti striscianti sul cilindro. Il circuito è percorso dalla corrente *I*.

dell'asta e, quindi, il circuito è percorso da una corrente *i* nel senso indicato. Se invece dell'asta viene fatto ruotare il magnete cilindrico posto al di sotto dell'apparato, nessuna fem è indotta nell'asta, come implicano i risultati ottenuti da Faraday nel caso del disco.

Si consideri infine la disposizione sperimentale mostrata in figura XI.11. Essa può essere considerata una variante del disco di Faraday in cui disco conduttore e magnete coincidono. La descrizione teorica è la stessa di quella del disco di Faraday.

Quando si dice che linee di forza attraversano una spira conduttrice, si deve pensare che ciò è prodotto dalla traslazione di un magnete. Una mera rotazione di un magnete intorno al proprio asse non produce alcun effetto induttivo su circuiti esterni ad esso; perché le condizioni descritte sopra non sono soddisfatte. Il sistema di forze intorno al magnete non deve essere considerato come necessariamente rotante con il magnete, non più di quanto i raggi emessi dal Sole siano considerati ruotare con esso. Il magnete può persino, in certi casi, essere considerato in rotazione tra le sue stesse forze, producendo un effetto elettrico pieno, rilevabile con un galvanometro.

Michael Faraday

XI.3.4 Il disco di Corbino

Nel 1911 Corbino studiò il caso di un disco conduttore con un foro circolare al suo centro (figura XI.12). Corbino usava dischi di bismuto che è un semi metallo. Nei semi - metalli la conduzione elettrica, a qualsiasi temperatura, è dovuta sia ad elettroni che a buche (si veda la voce *semiconduttori* a pagina 406). Noi studieremo il caso semplice di un disco metallico in cui la conduzione è dovuta solo agli elettroni. La circonferenza interna ed esterna



Figura XI.12. disco di Corbino costituito da un disco conduttore con al centro un foro di raggio r_1 , non mostrato in figura. La circonferenza interna ed esterna (di raggio r_2) del disco sono rese equipotenziali da uno strato di materiale ad alta conducibilità.

del disco, di raggio r_1 e r_2 rispettivamente, sono in contatto con elettrodi circolari di alta conducibilità che rendono tali circonferenze, con buona approssimazione, equipotenziali. Se una differenza di potenziale è applicata tra la circonferenza interna e quella esterna del disco (in quiete), questo è

Capitolo XI. Induzione elettromagnetica

percorso da una corrente radiale. Se il disco viene ora immerso in un campo magnetico costante, uniforme e perpendicolare al piano del disco, il disco viene percorso anche da una corrente circolare.

La resistenza radiale e circolare del disco si calcolano nel modo seguente. Si considera una corona circolare di raggio r e ampiezza dr. La resistenza radiale di questa corona è data da:

$$dR_{radiale} = \rho \frac{dr}{2\pi rs}$$

dove ρ è la resistività e *s* lo spessore del disco; e la sua resistenza circolare $R_{circolare}$ da:

$$\frac{1}{R_{circolare}} = \frac{1}{\rho} \frac{sdr}{2\pi r}$$

Pertanto la resistenza radiale e circolare del disco sono date da:

$$R_{radiale} = \frac{\rho}{2\pi s} \ln \frac{r_2}{r_1}$$
$$R_{circolare} = \frac{\rho^2}{s^2} \frac{1}{R_{radiale}}$$

Indicata con $I_{radiale}$ la corrente radiale, la densità radiale di corrente J(r) sarà:

$$J(r) = \frac{I_{radiale}}{2\pi rs}$$

e la velocità di deriva radiale:

$$v(r)_d = \frac{I_{radiale}}{2\pi r sne}$$

dove n è la concentrazione degli elettroni ed e la loro carica in valore assoluto.

Applicando l'equazione (XI.3, pagina 320), in cui la velocità della carica è la velocità di deriva radiale, si ottiene che la fem indotta lungo una circonferenza di raggio r è data da:

$$\mathscr{E}_{circolare} = \oint_{0}^{2\pi r} (\vec{v}(r)_d \times \vec{B}) \cdot \vec{dr} = \frac{I_{radiale}B}{sne}$$

La corrente circolare $dI(r)_{circolare}$ che scorre in una corona di raggio r e sezione $s \cdot dr$ sarà:

$$dI_{circolare} = \frac{\mathscr{E}_{circolare} \, sdr}{\rho \, 2\pi r} = \frac{\mu B}{2\pi} I_{radiale} \frac{dr}{r}$$

e la corrente circolare totale:

$$I_{circolare} = \frac{\mu B}{2\pi} I_{radiale} \ln \frac{r_2}{r_1}$$

dove $\mu = 1/\rho n e$ è la mobilità degli elettroni. La potenza dissipata nel disco è:

$$W = (I^{2}R)_{radiale} + (I^{2}R)_{circolare} = I^{2}_{radiale}R_{radiale}(1 + \mu^{2}B^{2})$$

= $\mathscr{E}_{radiale}I_{radiale}$

dove $\mathscr{E}_{radiale} = I_{radiale} R_{radiale} (1 + \mu^2 B^2)$. Questa equazione mostra che il fenomeno può essere descritto in termini di un incremento della resistenza radiale di un fattore uguale a $(1 + \mu^2 B^2)$: questo effetto è chiamato *magnetoresistenza*. La *f em* circolare indotta è distribuita omogeneamente lungo ogni circonferenza: ogni corona circolare di sezione $s \cdot dr$ agisce come una pila che produce corrente sulla propria resistenza; pertanto la differenza di potenziale tra due punti qualsiasi di una circonferenza è nulla. Quindi ogni circonferenza è una linea equipotenziale.

L'applicazione della legge generale dell'induzione elettromagnetica al disco di Corbino è interessante perché:

- ♦ mostra come la velocità di deriva degli elettroni contribuisce alla *f em* indotta;
- fornisce una teoria macroscopica del disco di Corbino, cioè una teoria che non deve tenere conto di processi microscopici come il moto degli elettroni e i loro urti.

XI.3.5 Il disco di Faraday: II

La discussione del disco di Corbino aiuta a comprendere meglio la fisica del disco di Faraday. Si consideri un disco di Faraday in cui la simmetria circolare è conservata: come mostrato nella sezione precedente, la condizione stazionaria è caratterizzata dal flusso di una corrente radiale e di una corrente circolare. La potenza meccanica necessaria per mantenere il disco in rotazione a velocità angolare costante è uguale al lavoro per unità di tempo compiuto dal campo magnetico sulle correnti radiali (essendo nullo il lavoro sulle correnti circolari). Si avrà pertanto:

$$W = \int_{r_1}^{r_2} (I_{radiale} dr) B \frac{\omega r dt}{dt}$$

= $I_{radiale} \int_{r_1}^{r_2} B \omega r dr$
= $I_{radiale} \frac{1}{2} \omega B (r_2^2 - r_1^2) = I_{radiale} \mathscr{E}_{radiale}$

Il termine

$$\mathscr{E}_{radiale} = \frac{1}{2}\omega B (r_2^2 - r_1^2)$$

rappresenta la *fem* radiale dovuta al moto del disco: questa *fem* è la sorgente delle correnti indotte, radiale e circolare.

Pertanto, la fisica del disco di Faraday a simmetria circolare può essere così riassunta:

- a) la sorgente delle correnti indotte radiale e circolare è la *f em* indotta dovuta *solo* al moto del disco;
- b) il prodotto primario della *f em* indotta è la corrente radiale;
- c) la velocità di deriva della corrente radiale produce a sua volta una *fem* circolare che dà origine alla corrente circolare.

XI.3.6 Alternatore

Si consideri la disposizione sperimentale della figura XI.13: la spira piana S ruota in senso antiorario con velocità angolare costante ω intorno al suo asse ab in un campo magnetico costante ed uniforme \vec{B} , perpendicolare al piano del foglio ed entrante.

Anche in questo caso il primo termine della (XI.9) è nullo e il contributo alla forza elettromotrice – calcolata nel senso indicato nella figura – deriva soltanto dal secondo termine contenente la componente magnetica della forza di Lorentz. Si ha pertanto:

$$\mathscr{E} = BS\omega\sin(\omega t + \varphi_0)$$

dove *S* è l'area della spira, *t* la variabile tempo e φ_0 l'angolo che la normale alla spira forma con il campo magnetico all'istante *t* = 0. Nella spira circolerà dunque una corrente *I* = \mathcal{E}/R (*R* è la resistenza della spira) variabile sinusoidalmente nel tempo.



Figura XI.13. la spira piana rigida *S* ruota con velocità angolare costante ω nel campo magnetico \vec{B} , uniforme, perpendicolare al piano del foglio ed entrante.

Il caso della spira piana rotante in un campo magnetico uniforme e costante illustra come il fenomeno dell'induzione elettromagnetica viene usato per la produzione di energia elettrica: l'energia meccanica necessaria per far funzionare gli alternatori può essere quella eolica, quella idrica o quella del vapore ad alta temperatura ottenuto bruciando prodotti petroliferi o provocando, nei reattori, una fissione nucleare controllata.

XI.4 Faraday e l'induzione



Figura XI.14. un filo metallico, perpendicolare al piano del foglio, si muove con velocità \vec{v} in un campo magnetico uniforme di cui sono disegnate le linee di forza. La linea tratteggiata orizzontale indica la direzione perpendicolare alle linee di forza e θ è l'angolo tra il vettore velocità e la direzione delle linee di forza.
Capitolo XI. Induzione elettromagnetica

La spiegazione dei risultati sperimentali ottenuti con il disco usando il concetto di linee di forza magnetiche (considerate come reali) può essere estesa a tutti i fenomeni di induzione. In particolare, Faraday spiegava la corrente indotta in un circuito (indotto) dalla chiusura di un altro circuito (inducente) affermando che le linee di forza magnetiche generate dalla corrente inducente si propagano verso l'esterno intersecando così il circuito indotto; il fenomeno simmetrico si verifica quando il circuito inducente viene aperto.

La teoria di Faraday è una teoria di campo: essa connette causalmente grandezze fisiche definite nello stesso punto. Per illustrarne l'efficacia, consideriamo un filo metallico rigido che si muove con velocità costante in un campo magnetico uniforme (figura XI.14): il filo è perpendicolare al piano del foglio. Il campo elettrico indotto sarà proporzionale alle linee di forza intersecate in un secondo lungo la direzione perpendicolare alle linee:

$$E_i \propto v \sin \theta$$

dove θ è l'angolo formato dal vettore velocità del filo con le linee di forza. Indicando con *B* il parametro di proporzionalità:

$$E_i = Bv\sin\theta$$

Sperimentalmente si verifica che:

$$\vec{E}_i = \vec{v} \times \vec{B}$$

Si osservi come questa sia l'espressione della componente magnetica della forza di Lorentz sulla carica unitaria positiva. Infine se il filo è inclinato rispetto alla normale uscente dal foglio, si ha:

$$\vec{E}_i = \left[\vec{v} \times \vec{B} \cdot \frac{\vec{a}}{a}\right] \frac{\vec{a}}{a}$$

dove \vec{a} è il vettore associato al filo di modulo uguale alla sua lunghezza, avente la stessa direzione del filo e verso arbitrario.

Queste considerazioni mostrano che il secondo termine della (XI.9) traduce in termini matematici la fisica delle linee di forza reali di Faraday nel caso di conduttori in moto in un campo magnetico.

XI.5 Maxwell e l'induzione

Maxwell ricava nel suo trattato quelle che chiama 'leggi generali del campo elettrico indotto'.

La deduzione di Maxwell è diversa dalla nostra che si basa sull'espressione della forza di Lorentz (che contiene il termine $\vec{v} \times \vec{B}$); per Maxwell, il termine $\vec{v} \times \vec{B}$ è uno dei risultati della deduzione.

Queste equazioni, espresse in notazione moderna, coincidono con la (XI.2), purché si sostituisca in essa la velocità della carica con la velocità dell'elemento di linea che contiene la carica (e si aggiunga il termine $-grad\varphi$, il cui contributo alla forza elettromotrice è nullo):

$$\vec{E}_{i} = \vec{v}_{linea} \times \vec{B} - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - grad\varphi \qquad (XI.14)$$

Maxwell commenta:

L'intensità elettromotrice [campo elettrico indotto], data dall'equazione (XI.14), dipende da tre circostanze. La prima di queste è il moto della particella attraverso il campo magnetico. La parte della forza dipendente da questo moto è espressa dal primo termine al secondo membro dell'equazione. Esso dipende dalla [componente della] velocità della particella perpendicolare alle linee di induzione magnetica. [...] Il secondo termine nell'equazione (XI.14) dipende dalla variazione temporale del campo magnetico. Questa può essere dovuta o alla variazione temporale della corrente elettrica nel circuito primario,¹ o al moto del circuito primario. [...] L'ultimo termine è dovuto alla variazione della funzione φ nelle differenti parti del campo.²

Maxwell non possedeva un modello di corrente (si veda a pagina 81): nella sua trattazione formale compare infatti solo la velocità dell'elemento infinitesimo di circuito. L'attribuzione alla 'particella' della velocità che compare nella (XI.14) è quindi impropria.³

XI.6 Einstein e l'induzione

Nell'introduzione dell'articolo del 1905 che ha dato origine alla teoria della relatività, Einstein scrive:

E' noto che l'elettrodinamica di Maxwell - come la si interpreta attualmente - nella sua applicazione ai corpi in movimento porta a delle

¹Maxwell sta studiando un sistema in cui la sorgente del campo magnetico è costituita da un circuito, detto primario, percorso da corrente e il circuito indotto è in moto.

²J.C. Maxwell, *A treatise on electricity and magnetism*, terza edizione, vol. II, Dover Publications, 1954, pp. 240 - 241.

³Una discussione approfondita di questi temi si trova in: G. Giuliani, 'Induzione elettromagnetica: fisica e *flashbacks*'; consultabile alla pagina: http://fisicavolta.unipv.it/percorsi/emi.asp

Capitolo XI. Induzione elettromagnetica

asimmetrie, che non paiono essere inerenti ai fenomeni. Si pensi per esempio all'interazione elettromagnetica tra un magnete e un conduttore. I fenomeni osservabili in questo caso dipendono soltanto dal moto relativo del conduttore e del magnete, mentre secondo l'interpretazione consueta i due casi, a seconda che l'uno o l'altro di questi corpi sia quello in moto, vanno tenuti rigorosamente distinti. Se infatti il magnete è in moto e il conduttore è a riposo, nei dintorni del magnete esiste un campo elettrico con un certo valore dell'energia, che genera una corrente nei posti dove si trovano parti del conduttore. Ma se il magnete è in quiete e si muove il conduttore, nei dintorni del magnete non esiste alcun campo elettrico, e si ha invece nel conduttore una forza elettromotrice, alla quale non corrisponde nessuna energia, ma che - a parità di moto relativo nei due casi considerati - dà luogo a correnti elettriche della stessa intensità e dello stesso andamento di quelle alle quali dà luogo nel primo caso la forza elettrica.⁴

Nella parte del lavoro dedicata all'elettrodinamica, Einstein osserva infine:

E' inoltre chiaro che l'asimmetria menzionata nell'Introduzione riguardo alla trattazione della corrente generata mediante il moto relativo di un magnete e di un conduttore sparisce. Anche le questioni relative alla "sede" della forza elettromotrice elettrodinamica (macchine unipolari) sono infondate.⁵

Alla luce della trattazione svolta dei fenomeni di induzione, nonché dei richiami ai lavori di Faraday e Maxwell, si può osservare quanto segue:

- 1. correttamente Einstein sottolinea alla fine che, usando le trasformazioni relativistiche dei campi, ogni asimmetria scompare;
- 2. la questione della 'sede' della forza elettromotrice ha rilevanza sperimentale, come mostrato a pagina 326.

Mostriamo ora come si tratta il caso del moto relativo *traslazionale* tra circuito e magnete. Consideriamo un circuito filiforme rigido ed un magnete in moto relativo uniforme. Assumiamo, al solito, che i due sistemi di riferimento associati al circuito ed al magnete abbiano gli assi paralleli ed equiversi e che il moto relativo avvenga lungo la direzione dell'asse *x* comune. Nel sistema di riferimento del magnete, che vede il circuito muoversi con

⁴A. Einstein, 'L'elettrodinamica dei corpi in movimento', trad. it. di S. Antoci, alla pagina: http://matsci.unipv.it/persons/antoci/re/einstein05.pdf, p.1.

⁵Ivi, p. 13.

velocità V_{CM} lungo il proprio asse x, la fem indotta è data dall'equazione:

$$fem = \oint_{l} \vec{E} \cdot \vec{dl} + \oint_{l} (\vec{V}_{CM} \times \vec{B}) \cdot \vec{dl} =$$
$$= -\oint_{l} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \cdot \vec{dl} + \oint_{l} (\vec{V}_{CM} \times \vec{B}) \cdot \vec{dl}$$

Abbiamo applicato l'equazione generale dell'induzione (XI.4), valida nel caso di circuiti filiformi. Siccome il campo magnetico generato dal magnete non dipende dal tempo, l'equazione precedente assume la forma semplice:

$$fem = \oint_{l} (\vec{V}_{CM} \times \vec{B}) \cdot \vec{d}l$$

che, essendo $\vec{V}_{CM} \times \vec{B}$ perpendicolare all'asse *x*, diventa:

$$fem = \oint_{l} \left[(\vec{V}_{CM} \times \vec{B})_{y} dy + (\vec{V}_{CM} \times \vec{B})_{z} dz \right]$$
(XI.15)

Nel sistema di riferimento del circuito, si ha invece:

$$fem' = \oint_{l'} \vec{E}' \cdot \vec{d}\,l' + \oint_{l'} (\vec{V}_{CC} \times \vec{B}') \cdot \vec{d}\,l'$$

dove con $\vec{V}_{CC} = 0$ è stata indicata la velocità del circuito rispetto a se stesso. Quindi:

$$fem' = \oint_{l'} \left(E'_{x}dx' + E'_{y}dy' + E'_{z}dz' \right)$$

Essendo, per le equazione di trasformazione dei campi (III.7):

$$\begin{array}{lll} E'_x &=& E'_x = 0 \\ E'_y &=& \Gamma(\vec{V}_{CM} \times \vec{B})_y \\ E'_z &=& \Gamma(\vec{V}_{CM} \times \vec{B})_z \end{array}$$

e, per le trasformazioni di Lorentz:

$$dy' = dy$$
$$dz' = dz$$

si ottiene:

$$fem' = \Gamma \oint_{l} \left[(\vec{V}_{CM} \times \vec{B})_{y} dy + (\vec{V}_{CM} \times \vec{B})_{z} dz \right]$$

Capitolo XI. Induzione elettromagnetica

che coincide, a parte il fattore Γ , con la (XI.15). Non c'è quindi alcuna asimmetria considerando in moto, alternativamente, il circuito o il magnete. Le asimmetrie di cui parlava Einstein erano dovute a non corrette applicazioni della teoria di Maxwell: in particolare, non venivano usate, perché non ancora note, le equazioni di trasformazione dei campi (III.7).⁶

⁶Una dettagliata ricostruzione storica si può trovare in: A. Miller, *Albert Einstein special theory of relativity*, Addison-Wesley, (1981), pp. 145 - 164.

Capitolo XII

La fisica dei circuiti

XII.1 Introduzione

o, equivalentemente:

La trattazione dei fenomeni elettromagnetici riguardanti i circuiti è svolta, salvo casi esplicitamente dichiarati, sotto l'ipotesi che siano soddisfatte due condizioni:

⇒ le dimensioni lineari del circuito l siano sufficientemente piccole; ciò significa che deve essere:

$$\frac{l}{c} \ll T$$
$$v \ll \frac{c}{l}$$

dove T è il periodo delle grandezze sinusoidali del circuito o l'intervallo di tempo in cui le grandezze del circuito variano in modo significativo. Questa condizione permette di assumere, per esempio, che il valore della corrente nel circuito sia lo stesso in ogni suo punto.

⇒ la potenza irraggiata dal circuito sia trascurabile rispetto a quella dissipata in esso per effetto Joule. Abbiamo visto come il moto armonico di una carica elettrica possa essere considerato il fenomeno tipico che sta alla base della produzione di onde elettromagnetiche (pagina 105) e che il moto di un elettrone in un conduttore sotto l'azione di un campo elettrico alternato è un moto armonico (sezione IX.1.2, pagina 276). Ne segue che, in questa situazione, l'elettrone irraggia energia secondo la (IV.50, pagina 107). Pertanto, in un circuito costituito da una sorgente di *fem* alternata e da un conduttore metallico di resistenza R_{ohm} , la potenza efficace P_e fornita dalla sorgente è esprimibile come:

$$P_e = \frac{I_0^2}{2} (R_{ohm} + R_{rad})$$

Capitolo XII. La fisica dei circuiti

dove R_{rad} si chiama *resistenza di radiazione* e I_0 è il valore massimo della corrente. Pertanto, salvo quando diversamente dichiarato, si suppone che sia

 $R_{rad} \ll R_{ohm}$

Si veda anche la sezione IX.1.3 a pagina 278.

XII.2 Circuiti in corrente continua

Le leggi che regolano il funzionamento dei circuiti in corrente continua sono state trovate sperimentalmente da Ohm negli anni venti dell'Ottocento. Si consideri un circuito costituito da una pila e un resistore. Se \mathcal{E} è la forza elettromotrice della pila, $R \in r$ le resistenze del resistore e della pila (resistenza interna), $A \in B$ i terminali della pila e I la corrente che circola nel circuito, allora, dopo il transiente susseguente la chiusura del circuito (sezione XII.4, pagina 348):

$$\mathscr{E} = I(R+r) \tag{XII.1}$$

$$V_A - V_B = IR \tag{XII.2}$$

La (XII.2) è nota come legge di Ohm: nella sezione IX.1.1 (pagina 272) essa è derivata sulla base di un modello della conduzione elettrica nei metalli. La (XII.1) non ha una denominazione di uso comune: potremmo chiamarla 'legge di Ohm del circuito'.

Applicando la legge di Ohm a due resistenze R_1 e R_2 poste in serie (figura XII.1, a) si verifica che la resistenza equivalente R è data da:

$$R = R_1 + R_2$$

Se le resistenze sono invece poste in parallelo (figura XII.1, b):

$$R = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

XII.3 Il coefficiente di autoinduzione

Se un circuito elettrico filiforme in quiete è percorso da una corrente *variabile i*, in esso viene indotta una forza elettromotrice data da (equazione XI.2):

$$\mathscr{E} = -\oint \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \cdot \vec{d}l$$



Figura XII.1. resistenze in serie (a) e in parallelo (b).

dove la circuitazione è calcolata secondo il verso in cui circola la corrente *i*. Essendo il circuito in quiete, l'equazione precedente diventa, con le notazioni usuali:

$$\mathcal{E} = -\frac{d}{dt} \oint \vec{A} \cdot \vec{dl} = -\frac{d}{dt} \int_{S} \vec{B} \cdot \hat{n} dS = -\frac{d\phi}{dt}$$
(XII.3)

dove la superficie S è una qualunque superficie che abbia il circuito filiforme come contorno. Poiché il campo magnetico B in un punto qualunque è proporzionale alla corrente i, si può porre:

$$\phi = \oint \vec{A} \cdot \vec{dl} = \int_{S} \vec{B} \cdot \hat{n} dS = Li$$

dove *L* è, per definizione, il *coefficiente di autoinduzione* o induttanza del circuito. La (XII.3) diventa allora:

$$\mathcal{E} = -L\frac{di}{dt} \tag{XII.4}$$

La *f em* autoindotta si oppone dunque alle variazioni di corrente nel circuito. Ogni circuito possiede un coefficiente di induzione diverso da zero.

⇒ Il coefficiente di autoinduzione *L* di un circuito può essere aumentato inserendo nel circuito un solenoide (sezione VI.4.4, pagina 206) e, in questo caso, *L* coincide praticamente con l'induttanza del solenoide, data da $\mu_0\mu_r n^2(Sl)$ (*n* numero di spire per unità di lunghezza; *S* area di ciascuna spira; *l* lunghezza del solenoide). Per ricavare l'espressione dell'induttanza di un solenoide è sufficiente scrivere l'equazione $\phi = Li$ usando l'espressione (VI.32, pagina 207) per il campo magnetico all'interno del solenoide. Se N = 100, l = 10 cm e $S = 3 cm^2$, si ottiene per *L* il valore di ≈ 3.77×10^{-5} H se si pone $\mu_r = 1$.

Capitolo XII. La fisica dei circuiti



Figura XII.2. circuito equivalente di un circuito in corrente continua; la resistenza *R* include anche quella interna della pila.

XII.4 Chiusura e apertura di un circuito

Si consideri un circuito costituito da una pila e da un resistore: il suo circuito equivalente, in cui la resistenza *R* include anche quella interna della pila, è mostrato in figura XII.2. In ogni istante successivo alla chiusura del circuito, l'equazione che lo descrive è:

$$\mathscr{E} = Ri + L\frac{di}{dt}$$

che, integrata, dà:

$$i = \frac{\mathscr{E}}{R}(1 - e^{-(R/L)t}) = I(1 - e^{-(R/L)t})$$

dove abbiamo indicato con I la corrente \mathscr{E}/R che attraversa il circuito in condizioni stazionarie. L'andamento della corrente, dopo la chiusura del circuito, è mostrato in figura XII.3.

L'energia erogata dalla pila nell'intervallo di tempo dt è data da:

$$\mathcal{E}idt = Ri^2 dt + Lidi$$

Integrando tra gli istanti t = 0 e $t = \infty$, si ottiene, per l'energia U fornita dalla pila:

$$U = \int_0^\infty R i^2 dt + \frac{1}{2} L I^2$$

Questa equazione mostra che parte dell'energia fornita dalla pila viene dissipata dalla resistenza per effetto Joule; la frazione di energia rappresentata da $(1/2)LI^2$ viene rimessa in gioco al momento dell'apertura del circuito.

Giuliani Bonizzoni - Lineamenti di elettromagnetismo



Figura XII.3. andamento della corrente *i* dopo la chiusura del circuito della figura XII.2. Parametri: $\mathcal{E} = 6V$; $R = 10^4 \Omega$; $L = 10^{-2} H$.

Infatti, in ogni istante successivo all'apertura del circuito, l'equazione che lo rappresenta è:

$$Ri + L\frac{di}{dt} = 0 \tag{XII.5}$$

che, integrata dà:

$$i = \frac{\mathscr{E}}{R} e^{-(R/L)t}$$
(XII.6)

Naturalmente, la corrente data dalla (XII.6) può circolare solo se il circuito è chiuso: il circuito è infatti chiuso attraverso una scarica elettrica che si produce tra i due punti in cui il circuito è stato interrotto. Moltiplicando entrambi i membri della (XII.5) per *i d t* ed integrando, come in precedenza, tra t = 0 e $t = \infty$, si ottiene che:

$$\int_0^\infty Ri^2 dt = \frac{1}{2}LI^2$$

cioè che l'energia dissipata per effetto Joule durante l'apertura del circuito è uguale a $(1/2)LI^2$.

L'energia $(1/2)LI^2$ è associata al campo magnetico prodotto dalla corrente *I*.

Nel caso di un solenoide toroidale, il campo magnetico è diverso da zero solo al suo interno. Quindi l'energia associata al campo magnetico è data da

$$U_m = \frac{1}{2\mu} B^2 lS$$

dove *l* è la lunghezza del solenoide ed *S* l'area delle sue *N* spire. Essendo: $B = \frac{\mu N I}{l}$

e:

$$L = \frac{\mu N^2 S}{l}$$

segue che:

$$U_m = \frac{1}{2}LI^2$$

XII.5 Il condensatore

Quando usiamo i termini di carica e scarica della bottiglia [condensatore], è in conformità all'usanza, e per mancanza di altri [termini] più adatti. Poiché siamo dell'opinione che in realtà non ci sia più fuoco elettrico nella bottiglia dopo quella che è chiamata la sua carica, rispetto a prima; né [che ce ne sia] di meno dopo la sua scarica... Benjamin Franklin

Un *condensatore piano* (figura XII.4) è costituito da due piastre conduttrici uguali, piane, parallele, mantenute a distanza fissa *d*.



Figura XII.4. il condensatore piano. *A* e *B* sono le due armature; \vec{E} è il campo elettrico e \vec{P} la polarizzazione elettrica quando lo spazio tra le armature è riempito da un isolante.

Inizialmente la teoria del condensatore sarà sviluppata supponendo che tra le sue piastre (armature) ci sia il vuoto. Se queste vengono collegate ai poli di una pila, si caricano, l'una positivamente e l'altra negativamente: le cariche si distribuiscono sulle superficî affacciate delle due armature. Si supponga

che le armature, dopo la carica, siano state separate dai poli della pila. Per calcolare il valore del campo elettrico tra le armature, si può procedere nel seguente modo. Se le dimensioni lineari delle armature sono grandi rispetto alla loro distanza, si possono considerare le armature come due piani indefiniti carichi (pagina 181): il campo elettrico sarà allora perpendicolare alle armature, diretto da quella positiva verso quella negativa e il suo modulo sarà, per la regola di sovrapposizione:

$$E_0 = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} + \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

Il campo elettrico ha dunque lo stesso valore in qualunque punto tra le armature (purché sufficientemente lontano dai bordi delle armature). La differenza di potenziale tra le armature è quindi data da:

$$\Delta V_0 = V_{0A} - V_{0B} = E_0 d = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} d$$

dove è stato inserito il suffisso 0 per ricordare che le relative grandezze si riferiscono al caso in cui tra le armature ci sia il vuoto. Si definisce come *capacità* del condensatore il rapporto tra la carica (in valore assoluto) di una delle sue armature e la differenza di potenziale tra di esse:

$$C_0 = \frac{Q}{\Delta V_0}$$

Pertanto:

$$C_0 = \varepsilon_0 \frac{S}{d}$$

dove S è l'area della superficie delle armature e dove al simbolo della capacità è stato associato il suffisso 0 perché esso si riferisce al caso in cui tra le armature c'è il vuoto.

Si riempia ora lo spazio tra le due armature con un isolante (dielettrico) omogeneo: questa operazione lascerà invariata la carica delle armature, perché separate dai poli della pila. L'isolante si polarizzerà: il suo momento di dipolo elettrico per unità di volume \vec{P} è un vettore perpendicolare alle armature e diretto da quella positiva a quella negativa. Sulle superficî dell'isolante affacciate alle armature compariranno delle cariche di polarizzazione (negative di fronte all'armatura carica positivamente e viceversa) il cui valore è dato da:

$$\sigma_p = P_n$$

dove P_n indica la componente normale del vettore polarizzazione \vec{P} uscente rispetto all'isolante. Il campo elettrico tra le armature sarà dato da:

$$E = \frac{\sigma_0 - \sigma_p}{\varepsilon_0} \tag{XII.7}$$

Ricordando che $P = \varepsilon_0 \chi_e E$, la (XII.7) diventa:

$$E = \frac{E_0}{\varepsilon_r}$$

con $\varepsilon_r = 1 + \chi_e$. La differenza di potenziale fra le armature sarà:

$$\Delta V = \frac{\Delta V_0}{\varepsilon_r}$$

e la capacità del condensatore:

$$C = \frac{Q}{\Delta V} = \frac{Q_0}{\Delta V_0} \varepsilon_r = C_0 \varepsilon_r$$

L'inserimento del dielettrico ha quindi provocato l'aumento della capacità del condensatore di un fattore ε_r .

Si lascia al lettore l'esame del caso in cui si proceda all'inserimento dell'isolante lasciando il condensatore collegato alla pila: la grandezza conservata è la differenza di potenziale tra le armature; il campo elettrico tra le armature rimane quindi invariato; la carica delle armature aumenta di un fattore ε_r e dello stesso fattore aumenta la capacità del condensatore.

Si è così mostrato che l'espressione più generale della capacità di un condensatore piano è data da:

$$C = \varepsilon_0 \varepsilon_r \frac{S}{d}$$

a b Figura XII.5. condensatori in serie (a) e i parallelo (b).

E' immediato il calcolo della capacità equivalente di due condensatori in serie (figura XII.5, a) o in parallelo (figura XII.5, b). Per i condensatori in serie si ha:

$$C = \frac{C_1 + C_2}{C_1 C_2}$$

perché la carica è la grandezza comune ai due condensatori. Per i condensatori in parallelo invece:

$$C = C_1 + C_2$$

perché la grandezza comune è la differenza di potenziale tra le armature.

XII.5.1 Carica di un condensatore

Il circuito di carica di un condensatore è schematizzato in figura XII.6: la resistenza R rappresenta l'intera resistenza del circuito, comprensiva della resistenza interna della pila di forza elettromotrice f.



Figura XII.6. circuito equivalente di carica di un condensatore, quando si possa trascurare il coefficiente di autoinduzione del circuito; la resistenza *R* include anche quella interna della pila.

L'equazione del circuito è, quando si possa trascurare il coefficiente di autoinduzione del circuito:

$$f = iR + \frac{q}{C} \tag{XII.8}$$

dove *q* ed *i* sono, rispettivamente, la carica del condensatore e la corrente al generico istante *t* del processo di carica. Siccome i = dq/dt, l'equazione (XII.8) diventa:

$$f = R\frac{dq}{dt} + \frac{q}{C}$$

L'integrale di questa equazione differenziale è:

$$q = Ae^{-t/RC} + fC$$

Capitolo XII. La fisica dei circuiti



Figura XII.7. carica di un condensatore, quando si possa trascurare il coefficiente di autoinduzione del circuito. Parametri usati: f = 6V; $C = 10^{-9} F$; $R = 10^3 \Omega$.

dove la costante di integrazione *A* è calcolata sulla base delle condizioni iniziali per cui all'istante t = 0 la carica è nulla. Ne segue che A = -fC. Si ottiene:

$$q = fC \left(1 - e^{-t/RC}\right)$$
$$i = \frac{dq}{dt} = \frac{f}{R} e^{-t/RC}$$
(XII.9)

e:

Il prodotto RC, che ha le dimensioni di un tempo, caratterizza il circuito di carica e fornisce una misura della rapidità della carica. Si noti che la carica del condensatore cresce esponenzialmente verso il valore di saturazione fC, mentre la corrente di carica decresce esponenzialmente verso lo zero partendo dal valore massimo f/R.

L'energia E fornita dalla pila durante l'intervallo di tempo dt è data da:

$$f \, i \, dt = R \, i^2 dt + \frac{q}{C} \, i \, dt$$

che diventa, essendo i = dq/dt:

$$fidt = Ri^2 dt + \frac{q}{C} dq$$

Integrando tra t = 0 e $t = \infty$:

$$E = \int_0^\infty R i^2 dt + \int_0^\infty \frac{q}{C} dq$$

Il primo integrale rappresenta l'energia dissipata durante la carica per effetto Joule; il secondo l'energia 'posseduta' dal condensatore carico. Quest'ultimo termine si calcola immediatamente e vale:

$$U = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2}Cf^2 = \frac{1}{2}QV$$

dove è stata indicata con Q la carica finale del condensatore. Anche il termine dell'energia dissipata per effetto Joule si calcola immediatamente usando la (XII.9) e risulta uguale alla energia finale del condensatore: si noti come l'energia dissipata per effetto Joule non dipenda dalla resistenza del circuito. Si noti infine come l'energia 'posseduta' dal condensatore si possa calcolare anche sulla base dell'espressione generale che fornisce la densità di energia del campo elettromagnetico. Si ha infatti, ricordando che E = f/d e che, in questo caso, B = 0:

$$U = \frac{\varepsilon}{2}E^2Sd = \frac{1}{2}Cf^2$$

XII.5.2 Scarica di un condensatore

Si supponga che un condensatore carico venga scaricato su una resistenza *R*. L'equazione del circuito è, in questo caso, se si può trascurare il coefficiente di autoinduzione del circuito:

$$V = iR$$

che, essendo V = q/C e i = -dq/dt, diventa:

$$\frac{dq}{q} = -\frac{1}{RC} dt$$

che, integrata, fornisce, con l'uso della condizione iniziale q = Q per t = 0:

$$q = Qe^{-t/RC}$$

Durante la scarica, viene dissipata per effetto Joule tutta l'energia 'posseduta' dal condensatore.

Nelle condizioni reali, la scarica di un condensatore avviene in un circuito che, oltre a possedere una resistenza *R*, possiede anche un coefficiente di autoinduzione *L*. L'equazione del circuito è pertanto:

$$L\frac{di}{dt} + iR - \frac{q}{C} = 0$$

Capitolo XII. La fisica dei circuiti



Figura XII.8. scarica di un condensatore, se si trascura il coefficiente di autoinduzione del circuito. I parametri usati sono quelli della figura XII.7.

che, essendo

$$i = -\frac{dq}{dt}$$

assume la forma:

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{dq}{dt} + \frac{1}{LC}q = 0$$

La forma della soluzione di questa equazione differenziale dipende dal valore dell'espressione:

$$D = \frac{R^2}{L^2} - \frac{4}{LC}$$

Si danno tre casi:

$$\left\{ \begin{array}{ll} 1. & D > 0; \\ 2. & D = 0; \\ 3. & D < 0. \end{array} \right.$$

Nel primo e nel secondo caso, le soluzioni portano a $q \Rightarrow 0$ per $t \Rightarrow \infty$. Nel terzo caso la soluzione è oscillante e tale che $q \Rightarrow 0$ per $t \Rightarrow \infty$:

$$q = fCe^{-(R/2L)t}\cos\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{4}{LC} - \frac{R^2}{L^2}}\right)t$$

dove f è la fem della pila con cui il condensatore è stato caricato (figura XII.9).

Giuliani Bonizzoni - Lineamenti di elettromagnetismo



Figura XII.9. scarica di un condensatore nel caso in cui si tenga conto del coefficiente di autoinduzione del circuito e sia $R < 2\sqrt{L/C}$. I parametri usati sono quelli della figura XII.7. Si è posto inoltre: $L = 10^{-2} H$. Per confronto, è stata riprodotto anche il grafico della figura XII.8 (curva punteggiata).

Anche la carica di un condensatore è un processo più complesso di quello descritto dalla figura XII.7, quando si tenga conto del coefficiente di autoinduzione del circuito. In questo caso (figura XII.10), l'equazione del circuito è:

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{dq}{dt} + \frac{1}{LC}q = f$$

La sua soluzione, dipende, come nel caso della scarica, dal valore di *D*. Se $D \ge 0$, $q \Rightarrow fC$ per $t \Rightarrow \infty$. Se D < 0, cioè se $R < 2\sqrt{L/C}$, allora:

$$q = fC\left[1 - e^{-(R/2L)t}\cos\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{4}{LC} - \frac{R^2}{L^2}}\right)t\right]$$

XII.5.3 La "corrente di spostamento"

Si consideri l'equazione di Maxwell per un mezzo materiale:

$$rot \vec{B} = \mu_0 \mu_r \left(\vec{J} + \varepsilon_0 \varepsilon_r \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right)$$
(XII.10)



Figura XII.10. carica di un condensatore (linea piena) quando si tenga conto del coefficiente di autoinduzione del circuito e sia $R < 2\sqrt{L/C}$. I parametri usati sono quelli della figura XII.9. La curva punteggiata è quella della figura XII.8.

Essa indica che le sorgenti del campo magnetico non sono solo le correnti, ma anche le variazioni temporali del campo elettrico. Il termine:

$$\vec{J}_s = \varepsilon_0 \varepsilon_r \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \tag{XII.11}$$

ha le dimensioni di una densità di corrente e prende il nome di densità di corrente di "spostamento". Tale denominazione, che risale a Maxwell, può essere fuorviante, perché a \vec{J}_s , quando tra le armature c'è il vuoto, non è associata alcuna corrente, nel senso usualmente attribuito a questo termine (flusso di cariche libere). Per chiarire questo punto, riscriviamo la (XII.11) nel modo seguente:

$$\vec{J}_s = \varepsilon_0 \varepsilon_r \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{P}}{\partial t}$$
(XII.12)

Tra le armature del condensatore si ha:

$$\vec{J}_s = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \frac{1}{S} \frac{dq}{dt} \hat{e} = \frac{i}{S} \hat{e}$$

dove si è usata la relazione D = q/S e \hat{e} è un versore diretto come \vec{D} . Il vettore densità di corrente di spostamento è dunque diretto come \vec{D} . Si può

descrivere questa situazione dicendo che "il condensatore è attraversato da una corrente di spostamento che ha lo stesso valore e lo stesso senso di circolazione della corrente di conduzione che percorre il circuito". Naturalmente, questa asserzione non va intesa in modo realistico: quando tra le armature c'è il vuoto, il condensatore non è attraversato da alcunché. Infine, si osservi che, se la corrente di spostamento è espressa dall'ultimo membro della (XII.12), appare come la somma di due termini: il primo, presente anche nel vuoto ($\varepsilon_0 \partial \vec{E} / \partial t$); il secondo, ($\partial \vec{P} / \partial t$), legato alla variazione temporale del vettore polarizzazione elettrica. A quest'ultimo, diverso da zero solo nei materiali, è associato il moto locale delle cariche che dà origine alla polarizzazione del materiale.

La corrente di spostamento tra le armature del condensatore genera, come indicato dalla (XII.10), un campo magnetico che può essere facilmente calcolato partendo appunto dalla (XII.10) e sapendo che la corrente di conduzione è nulla tra le armature.

Pluralitas non est ponenda sine necessitate: questa asserzione è nota come il 'rasoio di Occam' (William Ockham, 1285 - 1347/49) e suggerisce di non usare entità non necessarie nella descrizione o spiegazione dei fenomeni. Nella formulazione di Hertz, questo principio metodologico assume una forma più precisa:

"Mi sono inoltre sforzato di limitare il più possibile quelle concezioni che sono introdotte arbitrariamente da noi, e ammettere solo quegli elementi che non possono essere rimossi o cambiati senza alterare contemporaneamente possibili risultati sperimentali".¹

I fenomeni elettromagnetici nel vuoto possono essere compiutamente descritti senza l'uso del termine "corrente di spostamento". Tuttavia, il suo uso *consapevole* non dovrebbe creare problemi di sorta.

XII.6 Circuiti in corrente alternata

Nella figura XII.11 è descritto un condensatore quale elemento di un circuito: la freccia indica il senso di percorrenza della corrente di conduzione (o, se si vuole, quello della corrente di spostamento all'interno del condensatore). Si supponga che sia:

 $V = V_0 \sin \omega t$

¹ H. Hertz, *Electric waves*, Dover Publications, (1962), p. 28. Ristampa della prima edizione inglese del 1893.



Figura XII.11. condensatore in un circuito a corrente alternata. Il segno + indica che la differenza di potenziale *V* deve essere considerata come $V_A - V_B$.

dove si è indicata con *V* la differenza di potenziale tra le armature *A* e *B* del condensatore. Essendo:

$$I = \frac{dq}{dt} = C\frac{dV}{dt}$$

si ha:

$$I = \omega C V_0 \cos \omega t = I_0 \sin \left(\omega t + \frac{\pi}{2} \right)$$
(XII.13)

dove si è posto $\omega CV_0 = I_0$. La (XII.13) mostra che, in un condensatore, la corrente è in "anticipo di fase" di $\pi/2$ rispetto alla differenza di potenziale ai capi del condensatore. In figura XII.12 è mostrata la relazione tra tensione e corrente in un condensatore, assumendo uguale a zero la fase della corrente.



Figura XII.12. relazione di fase tra tensione e corrente in un condensatore. La fase della corrente è assunta uguale a zero.

Se ora si pone:

$$X_0 = \frac{V_0}{I_0}$$

ne segue che $X_0 = 1/C\omega$; X_0 si chiama reattanza del condensatore. Come si è visto, la reattanza introduce una differenza di fase tra tensione e corrente: è pertanto opportuno descrivere queste proprietà del condensatore usando la notazione complessa. Posto:

$$V = V_0 e^{i\omega t}$$

segue che:

$$I = i\omega C V_0 e^{i\omega t} = \omega C V_0 e^{i\omega t} e^{i\pi/2} = \omega C V_0 e^{i(\omega t + \pi/2)}$$

da cui:

$$X_C = \frac{V}{I} = \frac{1}{i\omega C} = -\frac{i}{\omega C}$$

$$\xrightarrow{A \quad V^+}_{I} \xrightarrow{B}$$

Figura XII.13. induttanza in un circuito a corrente alternata; il segno + indica, come al solito, che la differenza di potenziale deve essere intesa come $V = V_A - V_B$.

La relazione corrente - tensione per un'induttanza *ideale* (cioè priva di resistenza) posta in un circuito percorso da corrente alternata (figura XII.13) si ricava dall'equazione:

$$V = L \frac{dI}{dt}$$



Figura XII.14. relazione di fase tra corrente e tensione in un'induttanza. Si è assunta uguale a zero la fase della corrente.

ottenuta considerando che:

- ♦ l'induttanza è sede di una *f em* data dalla (XII.4);
- ◊ l'induttanza si comporta come una sorgente di *fem* che si oppone alle variazioni di corrente;
- ◊ essendo nulla la sua resistenza, la differenza di potenziale ai suoi capi coincide con la *f em* autoindotta.

Ponendo $I = I_0 e^{i\omega t}$, si ottiene:

$$V = i L I_0 \omega e^{i\omega t} = L I_0 \omega e^{i(\omega t + \pi/2)}$$

Quindi la tensione ai capi di una induttanza è in anticipo di fase di $\pi/2$ rispetto alla corrente che l'attraversa (figura XII.14). La reattanza dell'induttanza è data da:

$$X_L = iL\omega$$

XII.6.1 Legge del circuito in corrente alternata

Dato un circuito in corrente alternata, se f è la forza elettromotrice della sorgente, l'equazione del circuito è, nell'approssimazione in cui si può trascurare l'irraggiamento di energia:

$$f = IZ$$

dove Z è, in generale, un numero complesso e si chiama *impedenza* del circuito. La grandezza:

$$Y = \frac{1}{Z}$$

è l'ammettenza del circuito. Si ha:

$$Z = R + X$$

dove R rappresenta la parte puramente resistiva e X quella reattiva dell'impedenza: se diverso da zero, X è un numero immaginario. Se si usano funzioni reali, posto

$$f = f_0 \cos \omega t$$

la corrente è data da:

$$I = I_0 \cos(\omega t + \varphi) \qquad \text{con } I_0 = \frac{f_0}{Z_0}$$

La potenza media fornita dalla sorgente, che, nell'approssimazione adottata, è interamente dissipata per effetto Joule, è data da:

$$\langle P \rangle = \langle f_I \rangle = \langle f_0 I_0 \cos \omega t \cos(\omega t + \varphi) \rangle = \frac{f_0 I_0}{2}$$

dove si sono usate le relazioni:

 $\cos(\omega t + \varphi) = \cos \omega t \cos \varphi + \sin \omega t \sin \varphi$

e:

$$<\cos^2\omega t>=rac{1}{2}$$

XII.6.2 Il circuito LC

Un condensatore è caricato e, dopo la separazione dalla pila, le sue armature sono collegate mediante un filo di resistenza nulla. Il circuito equivalente, che tiene conto del coefficiente di autoinduzione, è mostrato in figura XII.15.



Figura XII.15. circuito LC.

L'equazione del circuito si ottiene scrivendo che la differenza di potenziale tra i due punti $A \in B$ è:

$$\frac{q}{C} = L\frac{dI}{dt}$$

che, essendo I = -dq/dt, diventa:

$$\frac{d^2q}{dt^2} = -\frac{1}{LC}q \qquad (XII.14)$$

La (XII.14) è identica all'equazione di moto di una particella di massa m sottoposta ad una forza elastica -kx:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x$$

la cui soluzione è:

$$x = x_0 \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

 $\cos \omega_0 = \sqrt{k/m}$. Ne segue che la soluzione della (XII.14) è:

$$q = q_0 \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

con $\omega_0 = \sqrt{1/LC}$; ω_0 è la *pulsazione di risonanza* del circuito. Se l'istante t = 0 corrisponde a quello in cui le armature del condensatore sono poste in contatto, allora $\varphi = 0$. Pertanto:

$$q = q_0 \cos(\omega_0 t)$$

$$I = -\frac{dq}{dt} = q_0 \omega_0 \cos\left(\omega_0 t - \frac{\pi}{2}\right)$$

La corrente è quindi in ritardo di fase di $\pi/2$ rispetto alla carica del condensatore. L'energia del circuito, inizialmente uguale all'energia elettrostatica del condensatore $q_0^2/2C$, si trasforma progressivamente in energia magnetica; quando, dopo un quarto di periodo, il condensatore è scarico, la corrente è massima e l'energia è interamente magnetica $Lq_0^2\omega_0^2/2 = q_0^2/2C$; durante il successivo quarto di periodo la corrente diminuisce e il condensatore si carica scambiando, rispetto all'inizio, il segno della carica delle armature; e così via.

Il fatto che il coefficiente di autoinduzione è diverso da zero per ogni circuito, è connesso alla conservazione dell'energia. Nel caso ideale qui considerato, se fosse L = 0, il condensatore, scaricandosi su una resistenza nulla, perderebbe la sua energia iniziale senza che questa compaia sotto altra forma.

XII.6.3 Misura della costante dielettrica relativa

Questa misura puè essere realizzata mediante un circuito *LC* in cui il condensatore *C* della figura XII.15 è sostituito da due condensatori in parallelo $C_v \in C_s$: C_v è un condensatore a capacità variabile calibrato; C_s è un condensatore tra le cui armature può essere posto l'isolante di cui si intende misurare ε_r . La pulsazione di risonanza del circuito sarà:

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L(C_v + C_s)}}$$

Misurando la frequenza di risonanza - mantenuta costante mediante variazione di C_v - quando tra le armature di C_s c'è il vuoto (aria) e quando tra di esse è posto l'isolante, si ricava ε_r dal rapporto tra la capacità di C_s con l'isolante e quella con il vuoto tra le armature. Il valore di ε_r così misurato coincide con quello statico (ottenuto applicando al condensatore una differenza di potenziale continua) solo per frequenze sufficientemente basse.

XII.6.4 Il circuito *RLC* in serie



Figura XII.16. circuito *RLC* in serie alimentato da una sorgente di *fem* alternata.

Si consideri un circuito costituito da un condensatore, un'induttanza ed una resistenza posti in serie ed alimentati da una sorgente di *fem* alternata (figura XII.16). L'equazione del circuito è:

$$f = V_R + V_L + V_C \tag{XII.15}$$

Conoscendo la relazione tra corrente e tensione per ciascuno degli elementi del circuito, è immediato risolvere la (XII.15) usando i fasori. Infatti, assunta nulla la fase della corrente *I* (figura XII.17), la differenza di potenziale V_R ha la stessa fase di *I*, V_L è in anticipo di fase di $\pi/2$, mentre V_C è in ritardo di fase di $\pi/2$.



Figura XII.17. il circuito *RLC* della figura XII.16 descritto con i vettori rotanti (fasori). Si veda il testo.

La somma vettoriale delle tre differenze di potenziale deve essere uguale al vettore *f*. Supponendo che $|V_L| > |V_C|$, si ha:

$$I^{2}\left[R^{2} + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^{2}\right] = f^{2}$$

da cui, ponendo |IZ| = |f|,

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}$$
(XII.16)

L'angolo φ tra la differenza di potenziale f e la corrente I è dato da:

$$\varphi = \arctan \frac{L\omega - 1/C\omega}{R}$$
(XII.17)

Nel caso in cui sia $|V_C| > |V_L|$, si ottiene:

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{C\omega} - L\omega\right)^2}$$
(XII.18)

e:

$$\varphi = -\arctan\frac{1/C\omega - L\omega}{R}$$
(XII.19)

Le (XII.16 - XII.17) e le (XII.18 - XII.19) mostrano che il modulo |Z| dell'impedenza del circuito dipende dalla pulsazione ω e che esso è minimo quando $L\omega = 1/C\omega$. In questo caso si dice che si ha *risonanza*: l'impedenza è puramente resistiva (|Z| = R) e corrente e differenza di potenziale sono in fase.

XII.7 Condensatori e induttanze ad alte frequenze

La trattazione del comportamento di condensatori e induttanze in circuiti in corrente alternata svolta nelle sezioni XII.6 e XII.3 è valida solo per frequenze non troppo elevate. Per comprendere perché e per individuarne i limiti di validità è necessario riprendere in esame la fisica del condensatore e dell'induttanza.

Si consideri un condensatore piano con armature circolari, costituite da un conduttore ideale, con il vuoto fra di esse; alle armature è applicata una differenza di potenziale alternata:

$$V = V_0 e^{i\omega t}$$

Tra le armature ci sarà - in prima approssimazione - un campo elettrico *uniforme* E_1 dato da:

$$E_1 = \frac{V_0}{d} e^{i\omega t} = E_0 e^{i\omega t}$$

se *d* è la distanza tra le armature. Ad una distanza *r* dall'asse del condensatore ci sarà - per la quarta equazione di Maxwell (III.5, pagina 78) - un campo magnetico B_1 dato da:

$$B_1 = \frac{1}{2\pi r} \int_0^r \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial E_1}{\partial t} 2\pi r' dr' = \frac{1}{2c^2} i\omega r E_0 e^{i\omega t}$$

Nella figura XII.18 il campo magnetico B_1 è nullo sull'asse di simmetria del sistema, individuato da *AB*; perpendicolare al piano della figura ed uscente sul lato *CD*, distante *r* dall'asse di simmetria. Questo campo magnetico dipendente dal tempo produrrà, a sua volta, un campo elettrico E_2 secondo l'equazione di Maxwell (III.3, pagina 78). Per calcolare il valore di questo campo, conviene considerarne la circuitazione lungo la linea *ABCDA* (figura XII.18).



Figura XII.18. tra le armature circolari $P \in P'$ di un condensatore piano è applicata la differenza di potenziale $V_0 e^{i\omega t}$. Questa produce, in prima approssimazione, un campo elettrico E_1 che produce, a sua volta il campo magnetico B_1 . Questo produce un campo elettrico E_2 ; e così via. Il campo magnetico B_1 sulla linea CD è perpendicolare al piano della figura ed uscente. La linea ABCDA serve per il calcolo della circuitazione del campo elettrico E_2 : AB giace sull'asse di simmetria del sistema e la freccia indica il senso di percorrenza della linea di integrazione. Si veda il testo.

Si ha (equazione XI.10, pagina 322):

$$-E_2 l = -\frac{d\Phi(B_1)}{dt} = -\frac{d}{dt} \int_0^r \left(\frac{1}{2c^2} i\omega r' E_0 e^{i\omega t}\right) l \, dr'$$

dove l è la lunghezza del lato CD; il contributo alla circuitazione del lato AB è nullo, perché è nulla la correzione al campo elettrico su questo lato.

Capitolo XII. La fisica dei circuiti

Pertanto:

$$E_2 = -\frac{\omega^2 r^2}{4c^2} E_0 e^{i\omega t}$$

Dunque, in seconda approssimazione, il campo elettrico tra le armature dipende dalla distanza dall'asse di simmetria:

$$E = E_1 + E_2 = E_0 e^{i\omega t} \left(1 - \frac{\omega^2 r^2}{4c^2} \right)$$
(XII.20)

Siccome E_2 produrrà, a sua volta, un campo magnetico B_2 e questo ancora un campo elettrico E_3 e così via, si ottiene infine che il campo elettrico tra le armature del condensatore è dato da:

$$E = E_0 e^{i\omega t} \left[1 - \frac{1}{(1!)^2} \left(\frac{\omega r}{2c} \right)^2 + \frac{1}{(2!)^2} \left(\frac{\omega r}{2c} \right)^4 - \frac{1}{(3!)^2} \left(\frac{\omega r}{2c} \right)^6 + \cdots \right]$$
(XII.21)



Figura XII.19. funzione di Bessel $J_0(\omega r/c)$ (XII.22) per r = 5 mm.

La serie infinita che compare tra parentesi quadre nella (XII.21), può essere scritta sotto la forma:

$$J_0(x) = \left[1 - \frac{1}{(1!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^2 + \frac{1}{(2!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^4 - \frac{1}{(3!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^6 + \cdots\right]$$

= $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(n!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n}$ (XII.22)

con $x = \omega r / c$. La funzione $J_0(x)$ è nota come funzione di Bessel di ordine zero. Pertanto, il campo elettrico tra le armature del condensatore può essere sinteticamente scritto come:

$$E = E_0 e^{i\omega t} J_0\left(\frac{\omega r}{c}\right) \tag{XII.23}$$

La funzione $J_0(\omega r/c)$ è mostrata in figura XII.19, in funzione di ω per il valore di r = 5 mm, nonché in figura XII.20 in funzione di r per $\omega = 5 \times 10^{10}$.



Figura XII.20. funzione di Bessel $J_0(\omega r/c)$ (XII.22) per $\omega = 5 \times 10^{10} rad s^{-1}$.

Abbiamo così visto che il condensatore è un sistema fisico più complicato di quanto si possa a prima vista supporre. Per cercare di comprendere i fenomeni fisici descritti dalla (XII.21), consideriamo dapprima solo i primi due termini, consideriamo cioè il campo elettrico dato dalla (XII.20). Questo campo elettrico dà origine ad una densità di corrente di spostamento:

$$J_s = i\omega\varepsilon_0 E_0 e^{i\omega t} \left(1 - \frac{\omega^2 r^2}{4c^2}\right) = J_C + J_L \tag{XII.24}$$

La densità di corrente J_C è in anticipo di fase di $\pi/2$ rispetto alla differenza di potenziale tra le armature; J_L è in ritardo di fase di $\pi/2$. La relazione tra V e J_L è dunque quella tipica di un'induttanza. Siccome l'espressione corretta del campo elettrico (XII.21) è costituita dalla somma di termini positivi e negativi ognuno dei quali dà origine ad una corrente di spostamento di

Capitolo XII. La fisica dei circuiti

tipo capacitivo o induttivo, rispettivamente, il circuito equivalente sarà costituito da una capacità e da un'induttanza in parallelo: il condensatore si è trasformato in un circuito risonante. La capacità, derivante da (infinite) capacità in parallelo sarà maggiore di quella corrispondente ad $\omega = 0$; l'induttanza, essendo a sua volta costituita da (infinite) induttanze in parallelo sarà minore di quella derivante dal primo termine induttivo della (XII.24).

> ⇒ Si faccia riferimento alla figura XII.19: il campo elettrico, ad una distanza di 5 mm dall'asse di simmetria del condensatore diventa nullo in corrispondenza della frequenza $v_a = 2.29 \times 10^{10}$ Hz. E' ragionevole assumere questa frequenza come una frequenza limite, che caratterizza il comportamento *anomalo* del condensatore. All'inizio della sezione XII.1 (pagina 345), abbiamo visto che le dimensioni lineari di un circuito individuano una frequenza limite v_l , che, per l = r = 5 mm, è uguale a 5.99 × 10^{10} Hz. v_e e v_l sono, non casualmente, dello stesso ordine di grandezza: per frequenze dell'ordine di v_a , il campo elettrico all'interno del condensatore non è più uniforme (dipende da *r*); per frequenze dell'ordine di $v_l \approx v_a$ ci dobbiamo infatti aspettare che la grandezza fisica significativa del condensatore, il campo elettrico, dipenda da *r*.

Il problema può essere affrontato da un altro punto di vista. Tra le armature del condensatore il campo elettrico è descritto dall'equazione:

$$\nabla^2 E - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = 0 \tag{XII.25}$$

All'interno del condensatore *E* è perpendicolare alle armature e può dipendere solo, per quanto riguarda la variazione spaziale, dalla distanza *r* dall'asse di simmetria del condensatore. Poiché il sistema ha simmetria cilindrica, scriviamo la (XII.25) usando coordinate cilindriche r, φ, z assumendo l'asse del sistema, individuato da *AB* (figura XII.18), come asse *z*. Siccome, in coordinate cilindriche:

$$\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

e poiché *E* non dipende da φ e da *z*, la (XII.25) diventa:

$$\frac{\partial^2 E}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial E}{\partial r} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = 0$$

Se poniamo:

$$E = E_0 f(r) e^{i\omega t}$$
(XII.26)

l'equazione precedente assume la forma:

$$\frac{\partial^2 f(r)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial f(r)}{\partial r} + f(r) \frac{\omega^2}{c^2} = 0$$

Infine, ponendo

$$x = \frac{\omega r}{c}$$

si ottiene:

$$\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2} + \frac{1}{x} \frac{\partial f(x)}{\partial x} + f(x) = 0$$

La soluzione di questa equazione è la funzione di Bessel di ordine zero $J_0(x)$. Pertanto, il campo (XII.26) diventa:

$$E = E_0 e^{i\omega t} J_0\left(\frac{\omega r}{c}\right)$$

che coincide con la (XII.23).

La soluzione (XII.26) dell'equazione delle onde (XII.25) rappresenta un'onda stazionaria il cui fronte d'onda è una superficie cilindrica. Questo risultato suggerisce il seguente esperimento ideale. Si faccia di nuovo riferimento alla figura XII.19: il campo elettrico, ad una distanza di 5 mm dall'asse di simmetria del condensatore, diventa nullo in corrispondenza della frequenza $v_a = 2.29 \times 10^{10} Hz$. Supponiamo ora che il campo elettrico tra le armature abbia proprio questa frequenza. Se inseriamo nel condensatore una superficie cilindrica costituita da un conduttore ideale, di spessore tendente a zero, di raggio uguale a 5 *mm* e di altezza tale da entrare in contatto con le armature del condensatore, nulla cambia al suo interno, perché per r = 5 mm il campo elettrico è nullo; se eliminiamo la parte delle armature esterna alla superficie cilindrica, il campo elettromagnetico all'interno della stessa superficie non viene alterato; infine, se separiamo le armature dalla sorgente che fornisce la differenza di potenziale, non si verifica alcuna variazione all'interno della cavità delimitata dalla superficie cilindrica e dalla parte di armature rimasta. Abbiamo costruito una cavità risonante.

La trattazione, basata sull'equazione (XII.25), si applica anche al caso di un solenoide. Il campo magnetico all'interno di un solenoide rettilineo nelle cui spire scorra la corrente

$$I = I_0 e^{i\omega t}$$

è descritto dall'equazione:

$$\nabla^2 B - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 B}{\partial t^2} = 0$$

Procedendo come nel caso del condensatore si ottiene, analogamente alla (XII.23):

$$B = B_0 e^{i\omega t} J_0 \left(\frac{\omega r}{c}\right)$$

XII.8 Cavità risonanti

Si consideri, per semplicità, un cubo di lato *L* le cui pareti siano conduttori ideali.

La conducibilità statica σ_0 di un conduttore ideale è, per definizione, infinita. La relazione $\vec{J} = \sigma_0 \vec{E}$ implica che sia $\vec{E}_{statico} = 0$ all'interno del conduttore ideale: se $\sigma_0 \rightarrow \infty$, la densità di corrente rimane finita solo se $\vec{E} \rightarrow 0$. Nella sezione IX.1.4 (pagina 280) abbiamo visto che la profondità di penetrazione in un conduttore di un'onda elettromagnetica di pulsazione ω inferiore alla frequenza di plasma è data da:

$$\delta = \sqrt{\frac{2\varepsilon_0 c^2}{\sigma_0 \omega}}$$

Quindi, per $\omega \neq 0$, i campi elettrici e magnetici non penetrano all'interno di un conduttore ideale, perché $\delta = 0$. Il caso statico può, peraltro, essere visto come il caso limite per $\omega \to 0$, purché il prodotto $\sigma_0 \omega \to \infty$ per $\omega \to 0$. Ritroviamo così che $\vec{E}_{statico} = 0$ all'interno di un conduttore ideale, ma anche che $\vec{B}_{statico} = 0$.

Ci proponiamo di stabilire a quali condizioni si possono instaurare, all'interno della cavità, onde elettromagnetiche *stazionarie*.

Onde stazionarie. Si consideri il caso semplice di un'onda piana sinusoidale progressiva, cioè propagantesi lungo la direzione positiva dell'asse z (la sua natura fisica è irrilevante) la cui ampiezza sia data da $f = f_0 \sin(\omega t - kz)$. Supponiamo che le condizioni fisiche al contorno siano tali che ad una distanza L dall'origine l'onda venga riflessa senza cambiamento di fase. Allora in ogni punto $0 \le z \le L$ qualunque, l'ampiezza risultante sarà:

$$f = f_0 \sin(\omega t - kz) + f_0 \sin[\omega t - k(L + (L - z))]$$

Ponendo L - z = d e t' = t - L/V, questa equazione assume la forma:

$$f = f_0 \sin \frac{2\pi}{T} \left(t' + \frac{d}{V} \right) + f_0 \sin \frac{2\pi}{T} \left(t' - \frac{d}{V} \right)$$

dove T è il periodo dell'onda. L'ampiezza in ogni punto individuato da d appare quindi come la sovrapposizione di un'onda progressiva e di un'onda regressiva, in concordanza con la soluzione generale dell'equazione delle onde. Usando la relazione:

$$\sin p + \sin q = 2\sin \frac{p+q}{2}\cos \frac{p-q}{2}$$

si ottiene infine:

$$f = 2f_0 \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{L}{\lambda}\right) \cos \frac{2\pi d}{\lambda}$$
(XII.27)

Se le condizioni al contorno sono tali per cui l'onda riflessa subisce uno sfasamento di π durante la riflessione, allora:

$$f = f_0 \sin \frac{2\pi}{T} \left(t' + \frac{d}{V} \right) - f_0 \sin \frac{2\pi}{T} \left(t' - \frac{d}{V} \right)$$
$$= 2f_0 \cos 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{L}{\lambda} \right) \sin \frac{2\pi d}{\lambda}$$
(XII.28)

Le onde descritte dalla (XII.27) o dalla (XII.28), si dicono *stazionarie*. L'ampiezza è data, in funzione della distanza *d*, da una funzione sinusoidale, ma essa non si propaga: è solo moltiplicata per un fattore dipendente dal tempo, uguale per tutti i valori di *d*; quindi, tutti i punti 'vibrano' con la stessa fase.

Un'onda piana con vettore d'onda \vec{k} che forma gli angoli α , $\beta \in \gamma$ con gli assi paralleli ai lati del cubo può essere considerata come composta da tre onde piane che si propagano lungo gli assi con vettori d'onda:

$$k_x = k \cos \alpha$$

$$k_y = k \cos \beta$$

$$k_z = k \cos \gamma$$

con:

$$k^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2$$

Consideriamo la componente propagantesi lungo l'asse x: il suo campo elettrico giace nel piano yz e sarà dato dalla somma di due vettori diretti l'uno lungo y e l'altro lungo z. Quello diretto lungo l'asse y, avrà un'espressione del tipo

$$2E_{0_y}\cos 2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{L}{\lambda_x}\right)\sin k_x d$$

perché la riflessione avviene con cambiamento di fase di π (equazione XII.28). Siccome le condizioni al contorno impongono che la componente del campo elettrico tangente alle pareti sia nulla, occorre che sia:

$$k_x = n_x \frac{\pi}{L}$$
 n_x intero

Relazioni analoghe valgono per $k_y e k_z$. Le condizioni al contorno impongono dunque che solo alcuni valori discreti di \vec{k} sono permessi: quelli individuati dai vertici dei cubi elementari che, nello spazio dei vettori \vec{k} , hanno lato π/L e sono disposti l'uno accanto all'altro, nelle tre direzioni. Ad ogni valore permesso di \vec{k} è quindi associato un volume dello spazio k pari a π^3/V dove V è il volume della cavità. Se indichiamo con $N_V(k)$ il numero dei valori di k permessi compresi tra k e k + dk, abbiamo:

$$N_V(k)dk = \frac{1}{8} \frac{4\pi k^2 dk}{\pi^3 / V}$$

Questa relazione, espressa in funzione della frequenza v, si scrive:

$$N_V(v)dv = V\frac{4\pi v^2}{c^3}dv$$

In realtà, il valore di $N_V(v)$ dato da questa relazione deve essere moltiplicato per un fattore 2 per tenere conto della polarizzazione delle onde: infatti un generico stato di polarizzazione è descritto dalla sovrapposizione di due onde polarizzate linearmente lungo due direzioni perpendicolari. Quindi, indicando con N(v) il numero dei valori di v permessi per unità di frequenza e per unità di volume della cavità:

$$N(\nu) = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} \tag{XII.29}$$

Questa equazione, ricavata nel caso in cui la cavità sia cubica, vale qualunque sia la sua forma.



Figura XII.21. corpo conduttore cavo risonante. Il filo f è percorso da una corrente la cui frequenza coincide con una delle frequenze permesse dalla configurazione geometrica della cavità.

La trattazione svolta è valida solo nel caso in cui le pareti della cavità siano costituite da un conduttore ideale. Nei casi concreti, le onde contenute nella cavità penetrano un poco nelle pareti generandovi correnti che dissipano

energia sotto forma di calore (sezione IX.1.4, pagina 280): se non sostenuta da una sorgente, la radiazione elettromagnetica contenuta nella cavità si spegne. Le sorgenti in grado di sostenere la radiazione all'interno della cavità sono di due tipi: sorgenti artificiali (circuiti elettrici) e la sorgente 'naturale' costituita dalle pareti della cavità la cui temperatura sia diversa da quella dello zero assoluto. Nella figura XII.21 è mostrato come si possa alimentare una cavità con un circuito elettrico esterno la cui frequenza coincida con una delle frequenze permesse dalla configurazione geometrica della cavità. La sorgente 'naturale', mantenuta a temperatura costante, dà origine, all'interno della cavità alla radiazione cosiddetta di 'corpo nero' (sezione V.12, pagina 169).

XII.9 Onde guidate

Si consideri una cavità costituita da un *conduttore ideale* a sezione rettangolare (figura XII.22): per le ragioni che vedremo, essa si chiama *guida d'onda*. Assumiamo una terna di assi cartesiani ortogonali con l'asse z disposto



Figura XII.22. guida d'onda a sezione rettangolare.

secondo la lunghezza della *guida d'onda*. Ci chiediamo quali siano le condizioni che permettono ad un'onda polarizzata linearmente di propagarsi lungo la direzione positiva dell'asse *z* all'interno della guida d'onda. Supponiamo che il campo elettrico dell'onda sia diretto lungo l'asse *y*. All'interno delle pareti della guida, il campo elettrico è nullo. Pertanto:

$$E_{\nu}(0) = E_{\nu}(a) = 0$$
 (XII.30)

per la continuità della componente tangenziale del campo. Intendiamo verificare se una funzione del tipo:

$$E_{\gamma} = E_0 \sin(k_x x) e^{i(\omega t - k_z z)}$$
(XII.31)
soddisfa l'equazione delle onde:

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} = 0$$

Osserviamo innanzitutto che la condizione (XII.30) impone che:

$$k_x = n \frac{\pi}{a}$$
 $n \text{ intero } \ge 1$

Sostituendo la (XII.31) nell'equazione delle onde, si vede che essa è soddisfatta se:

$$k_x^2 E_y + k_z^2 E_y - \frac{\omega^2}{c^2} E_y = 0$$

cioè, con $E_y \neq 0$, se:

$$k_x^2 + k_z^2 - \frac{\omega^2}{c^2} = 0$$

da cui, infine:

$$k_z = \pm \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - n^2 \frac{\pi^2}{a^2}} \qquad n \text{ intero } \ge 1$$
 (XII.32)

Se l'espressione sotto radice è positiva, i due valori di k_z corrispondono ad onde che si propagano lungo la direzione positiva dell'asse z ($k_z > 0$) o lungo la sua direzione negativa ($k_z < 0$). Le lunghezze d'onda λ_g , corrispondenti ad una pulsazione ω , all'interno della guida sono maggiori di quella nel vuoto λ_0 . Infatti, riscrivendo la (XII.32) in termini di lunghezze d'onda si ottiene:

$$\lambda_g = \frac{\lambda_0}{\sqrt{1 - n^2 (\lambda_0/2a)^2}} \qquad n \text{ intero } \ge 1$$

Le soluzioni corrispondenti a diversi valori di n si chiamano *modi*. Consideriamo quello corrispondente a n = 0. La (XII.32) assume in questo caso la forma:

$$k_z = \pm \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\pi^2}{a^2}}$$

Se

$$\omega < \frac{\pi c}{a}$$

 k_z risulta uguale a $\pm i k'$ con

$$k' = \sqrt{\frac{\pi^2}{a^2} - \frac{\omega^2}{c^2}} > 0$$

Il campo elettrico E_{γ} assume quindi l'espressione:

$$E_{v} = E_{0} \sin k_{x} x e^{\pm k' z} e^{i\omega t}$$

dove solo la soluzione con il segno (–) ha significato fisico. L'ampiezza dell'onda corrispondente decade quindi esponenzialmente all'interno della guida e la pulsazione $\omega_c = \pi c/a$ diviene una pulsazione di taglio: onde con pulsazioni minori di ω_c non si propagano all'interno della guida. Per n > 1 la pulsazione di taglio diventa $\omega_c = n\pi c/a$.

Se avessimo considerato un'onda polarizzata lungo la direzione *x*, avremmo trovato, al posto della condizione (XII.32):

$$k_z = \pm \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - m^2 \frac{\pi^2}{b^2}} \qquad m \text{ intero } \ge 1$$
 (XII.33)

Una polarizzazione lineare giacente nel piano xy può sempre essere espressa come combinazione lineare di una polarizzazione lungo x e di una polarizzazione lungo y; se il campo elettrico non ha componente lungo z il modo corrispondente si dice di tipo TE che sta per *trasversale elettrico*. Modi che hanno una componente del campo elettrico lungo la direzione di propagazione hanno il corrispondente campo magnetico nel piano xy: sono modi TM, cioè *trasversali magnetici*.

⇒ Una tipica frequenza di taglio si calcola ponendo n = 1 e, per esempio, $a = 10 \, cm$. Ne segue che

$$v_c = \frac{\omega_c}{2\pi} = \frac{c}{2a} = 1.49 \times 10^9 \, Hz$$

Siccome la frequenza della luce visibile è dell'ordine di 10^{14} Hz, si comprende come noi possiamo vedere guardando attraverso un tubo metallico.

XII.10 Linee di trasmissione

Si considerino due piastre conduttrici parallele: sia w la loro larghezza, d la loro distanza e il mezzo materiale tra le piastre abbia costante dielettrica ε e permeabilità magnetica μ (figura XII.23). Supponiamo che tra le piastre ci sia un campo elettromagnetico: se le piastre sono conduttori ideali, al loro interno il campo elettrico \vec{E} ed il campo magnetico \vec{B} sono nulli. Ne consegue che:

◊ la componente tangenziale del campo elettrico tra le piastre è nulla;

Capitolo XII. La fisica dei circuiti



Figura XII.23. $P_1 \in P_2$ sono due piastre idealmente conduttrici parallele; si suppone che tra di esse ci sia un campo elettromagnetico di cui si intendono determinare le caratteristiche.

◊ la componente normale del campo magnetico tra le piastre è nulla.

Per le proprietà di simmetria del sistema, il campo elettrico e magnetico tra le piastre possono dipendere solo dalla variabile *z*. Abbiamo cioè:

$$\vec{E} = E_x \hat{\imath}$$
$$\vec{B} = B_y \hat{\jmath}$$

Le equazioni di Maxwell relative al rotore di \vec{E} e di \vec{B} conducono pertanto alle equazioni, valide tra le piastre:

$$\frac{\partial E_x}{\partial z} = -\mu \frac{\partial H_y}{\partial t}$$
$$\frac{\partial H_y}{\partial z} = -\varepsilon \frac{\partial E_x}{\partial t}$$

Combinando queste due equazioni si ottiene:

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} - \varepsilon \mu \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} = 0$$
 (XII.34)

$$\frac{\partial^2 H_y}{\partial z^2} - \varepsilon \mu \frac{\partial^2 H_y}{\partial t^2} = 0$$
 (XII.35)

Cioè i campi \vec{E} e \vec{H} soddisfano, come ci saremmo dovuti aspettare sulla base delle proprietà di simmetria del sistema, l'equazione delle onde piane.

La (XII.34) può anche essere scritta in funzione della differenza di potenziale *V* tra due punti delle due piastre aventi la stessa coordinata *z*:

$$V(z,t) = E_x(z,t) d$$

La (XII.34) assume allora la forma:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial z^2} - \varepsilon \mu \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = 0$$
 (XII.36)

Supponiamo ora che le piastre siano percorse da una corrente *I* lungo la direzione *z* della figura XII.23: per esempio, lungo la direzione positiva dell'asse *z* per la piastra superiore e lungo la direzione opposta per quella inferiore. Per descrivere il circuito costituito dalle due piastre associamo un coefficiente di autoinduzione Ldz ad ogni elemento dz di ciascuna piastra e una capacità Cdz a due elementi dz corrispondenti delle due piastre. Valgono le equazioni:

$$\frac{\partial V}{\partial z} = -L\frac{\partial I}{\partial t}$$
(XII.37)
$$\frac{\partial I}{\partial z} = -C\frac{\partial V}{\partial t}$$
(XII.38)

La (XII.37) vale solo se le piastre sono conduttori ideali; diversamente, bisogna tenere conto della loro resistenza scrivendo:

$$\frac{\partial V}{\partial z} = -RI - L\frac{\partial I}{\partial t}$$

dove R è la resistenza per unità di lunghezza della piastra. Analogamente, la (XII.38) vale solo se il dielettrico tra le piastre è un isolante perfetto; diversamente:

$$\frac{\partial I}{\partial z} = -C\frac{\partial V}{\partial t} - VY_g$$

dove Y_g è l'ammettenza per unità di lunghezza lungo la direzione z del dielettrico. Sia la resistenza del conduttore che la non perfetta natura dell'isolante introducono fenomeni dissipativi nella linea.

Derivando la (XII.37) rispetto a *z* e la (XII.38) rispetto a *t* e combinandole, si ottiene:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial z^2} - LC \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = 0$$
 (XII.39)

e, confrontando questa equazione con la (XII.36):

$$LC = \varepsilon \mu$$

Derivando la (XII.37) rispetto a *t* e la (XII.38) rispetto a *z* e combinandole:

$$\frac{\partial^2 I}{\partial z^2} - LC \frac{\partial^2 I}{\partial t^2} = 0$$
 (XII.40)

La (XII.39) e la (XII.40) mostrano che il potenziale e la corrente si propagano nelle piastre come onde con velocità

$$v = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$$

uguale alla velocità con cui i campi si propagano tra le piastre lungo z.

Si può verificare che le equazioni (XII.37) e (XII.38) descrivono il comportamento di linee di trasmissione costituite da conduttori perfetti qualunque sia la loro forma, purché la loro sezione non varî in funzione di *z*: sono note come *equazioni dei telegrafisti*. La soluzione generale della (XII.39) è del tipo:

$$V(z, t) = V_{+}(z - vt) + V_{-}(z + vt)$$

e la soluzione della (XII.40) del tipo:

$$I(z, t) = I_{+}(z - vt) + I_{-}(z + vt)$$

Le funzioni con il suffisso (+) rappresentano onde progressive; quelle con il suffisso (–) onde regressive. Sostituendo nella (XII.37) le soluzioni progressive si ottiene:

$$V_{+} = Z_0 I_{+}$$

e sostituendo le soluzioni regressive:

$$V_- = -Z_0 I_-$$

dove

$$Z_0 = \sqrt{\frac{L}{C}}$$

è nota come impedenza caratteristica della linea di trasmissione.

⇒ Nel caso in cui la linea sia costituita da un cavo coassiale, la sua impedenza caratteristica è facilmente calcolabile. La capacità di un condensatore cilindrico è data da:

$$C = \frac{2\pi\varepsilon l}{ln(r_2/r_1)}$$

dove r_1 e r_2 sono i raggi dei conduttori interno ed esterno, rispettivamente ed *l* la lunghezza del cilindro. L'induttanza è invece data da:

$$L = \frac{\mu l}{2\pi} ln \frac{r_2}{r_1}$$

Per calcolare la capacità si calcola dapprima il campo elettrico ad una distanza r' dall'asse del sistema con $r_1 < r' < r_2$, usando il teorema di Gauss; si calcola poi la differenza di potenziale V tra le due armature e, infine, C come rapporto Q/V. Il calcolo dell'induttanza passa invece attraverso quello dell'energia magnetica U_m nello spazio compreso tra le due armature dovuta, per esempio, ad una corrente I che attraversa il conduttore interno. Si pone poi $U_m = (1/2)LI^2$: da qui si ricava L. L'impedenza caratteristica risulta quindi uguale a:

$$Z_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} ln \frac{r_2}{r_1}$$

Nel caso in cui tra i due conduttori del cavo ci sia il vuoto, il fattore che moltiplica il logaritmo è uguale a

$$\frac{1}{2\pi\varepsilon_0 c}\approx 59.96\,\Omega$$

Supponiamo ora che la linea, costituita da due fili paralleli, abbia una sorgente a z = 0 e un resistore di resistenza R_L che collega i due fili a z = l. Per z = l si ha, usando le relazioni sopra ricavate tra $V_{+,-}$ e $I_{+,-}$:

$$V(l, t) = V_{+}(l - vt) + V_{-}(l + vt) = I(l, t)R_{L} = \frac{R_{L}}{Z_{0}}[V_{+}(l - vt) - V_{-}(l + vt)]$$

Da questa equazione, si ricava il coefficiente di riflessione Γ_L :

$$\Gamma_L = \frac{V_-(l+vt)}{V_+(l-vt)} = \frac{R_L - Z_0}{R_L + Z_0}$$

Per quanto riguarda i possibili valori di Γ_L , si presentano tre casi particolari:

- 1. se $R_L = Z_0$, $\Gamma_L = 0$: non c'è onda riflessa e la linea si dice adattata;
- 2. se $R_L = 0$, $\Gamma_L = -1$: l'onda riflessa, per z = l, è uguale a quella incidente cambiata di segno;
- 3. se $R_L = \infty$, $\Gamma_L = 1$: l'onda riflessa, per z = l, è uguale all'onda incidente.

XII.11 Il trasformatore

Quindi io, avendo a mia disposizione nella Esposizione un impianto di generatori secondarii fatto nelle condizioni di un vero impianto industriale, e quale difficilmente si potrebbe riprodurre in un laboratorio scientifico, aveva il dovere di servirmene per fare esperienze, le quali potessero apportare nella soluzione delle questioni dibattute un qualche contributo...Il confronto tra le mie misure e quelle già da altri eseguite...riuscì, come speravo, istruttivo. Ma dalla discussione dei risultati ricavai più di quello che dapprima aveva sperato e cercato. Tale discussione, infatti, mi condusse ad uno studio teorico dei fenomeni che avvengono nel generatore secondario, studio teorico, che, controllato coll'esperienza, venne a rischiarare, in modo superiore alle mie previsioni, la questione.

Galileo Ferraris

Il trasformatore svolge un ruolo fondamentale nella distribuzione e nell'uso dell'energia elettrica, in quanto permette di ottenere, partendo da una differenza di potenziale alternata disponibile, una differenza di potenziale alternata adeguata alle esigenze locali. La teoria del trasformatore che segue, è, essenzialmente, quella sviluppata nel 1885 da Galileo Ferraris.

Si considerino due solenoidi di uguale lunghezza 1 e 2 avvolti intorno al medesimo nucleo ferromagnetico avente forma cilindrica e siano N_1 e N_2 il numero delle loro spire. Si supponga che il solenoide 1 sia alimentato da una sorgente di forza elettromotrice alternata di pulsazione ω ; il solenoide 2 sia invece semplicemente collegato ad una resistenza. I due circuiti così configurati si chiamano *primario* e *secondario*, rispettivamente. Se R_1 ed R_2 sono le resistenze del circuito primario e secondario, le equazioni che descrivono i due circuiti sono:

$$\mathcal{E} - \frac{d\Phi_1}{dt} = I_1 R_1$$
$$- \frac{d\Phi_2}{dt} = I_2 R_2$$

dove Φ_1 e Φ_2 sono i flussi concatenati con i due solenoidi. Ricordando le espressioni del campo magnetico e del coefficiente di autoinduzione di un

solenoide:

$$B = \frac{\mu NI}{l}$$
$$L = \frac{\mu N^2 S}{l}$$

dove N è il numero delle spire, l la lunghezza e S l'area delle spire del solenoide, si ottiene:

$$\mathcal{E} - L_1 \frac{dI_1}{dt} - M \frac{dI_2}{dt} = I_1 R_1$$
$$-L_2 \frac{dI_2}{dt} - M \frac{dI_1}{dt} = I_2 R_2$$

con $M = \sqrt{L_1 L_2}$. Se si pone:

$$\mathscr{E} = \mathscr{E}_0 e^{i\omega t}$$

le correnti avranno l'espressione:

$$I_{1} = I_{1}^{0} e^{i (\omega t + \phi_{1})}$$
$$I_{2} = I_{2}^{0} e^{i (\omega t + \phi_{2})}$$

e le equazioni dei circuiti diventano:

$$\mathcal{E} - i\omega L_1 I_1 - i\omega M I_2 = I_1 R_1$$
$$-i\omega L_2 I_2 - i\omega M I_1 = I_2 R_2$$

Questo è un sistema di due equazioni nelle due incognite I_1 e I_2 . Pertanto:

$$I_1 = \frac{R_2 + i\omega L_2}{(R_1 + i\omega L_1)(R_2 + i\omega L_2) + \omega^2 M^2} \mathcal{E}$$
$$I_2 = -\frac{i\omega M}{(R_1 + i\omega L_1)(R_2 + i\omega L_2) + \omega^2 M^2} \mathcal{E}$$

Se $R_1 \ll \omega L_1,$ le correnti assumono la semplice espressione:

$$I_1 \approx \frac{\omega L_2 - iR_2}{\omega L_1 R_2} \mathscr{E}$$
$$I_2 \approx - \frac{M}{L_1 R_2} \mathscr{E} = -\frac{N_2}{N_1} \frac{\mathscr{E}}{R_2}$$

Si osservi che I_1 è in ritardo di fase, rispetto a \mathcal{E} , di un angolo Φ_1 la cui tangente è $-R_2/\omega L_2$, mentre I_2 è in opposizione di fase rispetto a \mathcal{E} . Si ha inoltre, indicata con V_2 la differenza di potenziale ai capi di R_2 :

$$\frac{V_2}{\mathscr{E}} = -\frac{N_2}{N_1}$$

Infine, tra le due correnti, vale la relazione:

$$\frac{I_2}{I_1} = -i\frac{\omega M}{R_2 + i\omega L_2} = -\frac{\omega M(\omega L_2 + iR_2)}{R_2^2 + \omega^2 L_2^2}$$

Pertanto: quanto più R_2 diviene trascurabile rispetto a ωL_2 , tanto più I_2/I_1 tende a $-N_1/N_2$.

Capitolo XIII

Strumenti e misure

La misura di ogni grandezza fisica è guidata dalla conoscenza acquisita e/o dalla teoria cui la grandezza fisica appartiene. Ogni teoria suggerisce quali grandezze fisiche devono essere misurate: gli sperimentatori usano strumenti esistenti o ne costruiscono di nuovi. Per padroneggiare il funzionamento degli strumenti ed essere certi che siano adatti per l'esecuzione della misura voluta, gli sperimentatori debbono conoscerne la teoria.

Per questa ragione, è opportuno analizzare i procedimenti usati per misurare le grandezze fisiche fondamentali dell'elettromagnetismo: cariche elettriche, correnti, differenze di potenziale, campi elettrici e magnetici, frequenze, energia.

L'analisi sarà rivolta agli strumenti il cui funzionamento è direttamente basato su fenomeni fisici; pertanto, non si considereranno i cosiddetti strumenti digitali caratterizzati dal fatto che le loro misure si basano sulla comparazione fra la grandezza misurata ed una grandezza di riferimento.

XIII.1 Carica elettrica

La carica dell'elettrone è stata misurata da Millikan misurando la velocità costante di gocce di olio cariche sotto l'azione combinata della forza di gravità, di un campo elettrico noto e della resistenza dell'aria. Nella descrizione teorica della misura si trascura il contributo della spinta archimedea dell'aria. Le grandezze misurate direttamente sono lunghezze ed intervalli di tempo: la determinazione della carica elementare è basata sull'assunzione della validità della formula che dà il valore del campo elettrico tra le armature di un condensatore e di quella che fornisce la forza resistente dell'aria in funzione del suo coefficiente di attrito viscoso e del raggio della goccia d'olio supposta sferica.

XIII.1.1 L'esperimento di Millikan



Figura XIII.1. rappresentazione schematica dell'esperimento di Millikan per la misura della carica dell'elettrone.

L'esperimento è svolto in un apparato in equilibrio termico; con l'utilizzo di un polverizzatore si producono particelle d'olio tra le armature di un condensatore. Le particelle sono elettrizzate mediante ionizzazione prodotta da raggi X: sia q la loro carica (in valore e segno). In assenza di campo elettrico le goccioline d'olio,¹ spruzzate tra le piastre, cadranno con velocità di regime costante u_0 sotto l'azione della forza di gravità. Il moto è uniforme e u_0 è determinata mediante un microscopio micrometrico. Caricando il condensatore, si raggiungerà un nuovo regime stazionario caratterizzato dalla velocità costante della particella, diretta verso il basso o verso l'alto, a seconda della direzione e dell'intensità del campo elettrico. Rispetto ad un asse x orientato verticalmente verso il basso, la forza F_x agente sulla particella e dovuta all'azione congiunta della gravità e del campo elettrico, risulta:

$$F_x = mg + q\frac{\Delta V}{d} = \frac{4}{3}\pi r^3 \mu g + q\frac{\Delta V}{d}$$

dove

- $\diamond m$ è la massa della goccia
- ◊ g è l'accelerazione di gravità

 $^{^1\}mathrm{Ad}$ eccezione di quelle di dimensioni molto ridotte che si muoveranno di moto browniano.

- $\diamond q$ la carica della goccia
- $\diamond \mu$ è la massa specifica dell'olio polverizzato
- ♦ r il raggio della particella assunta di forma sferica
- $\diamond \Delta V$ la differenza di potenziale tra l'armatura superiore e quella inferiore
- $\diamond d$ la distanza tra le armature

La forza dovuta alla resistenza dell'aria ha verso opposto al moto:

$$F_x^a = -6\pi\eta r u_x$$

 u_x è la velocità della particella e η il coefficiente di attrito viscoso dell'aria. Il moto stazionario, rettilineo uniforme, della particella d'olio è caratterizzato dall'annullarsi della risultante delle forze agenti su di essa. In assenza di campo elettrico si ha:

$$6\pi\eta r u_{ox} = \frac{4}{3}\pi r^3 \mu g$$

dove u_{ox} è la velocità della particella in assenza di campo elettrico. La sua misura permette di determinare il raggio r della goccia (gli altri parametri dell'equazione sono noti). In presenza di campo si ha invece:

$$6\pi\eta r u_x = \frac{4}{3}\pi r^3\mu g + \frac{\Delta V}{d}q$$

dove u_x è la velocità della goccia; la misura di questa velocità permette di determinare il valore di q. Il risultato dell'esperimento di Millikan dimostrò che la carica elettrica posseduta dalle goccioline d'olio è un multiplo intero del valore $(1.591\pm0.003)\times10^{-19}$ C. Il valore attualmente attribuito alla carica elettronica è di $(1.602176462\pm0.000000063)\times10^{-19}$ C.

XIII.2 Corrente elettrica

La corrente elettrica si misura con strumenti chiamati galvanometri o amperometri. Il loro funzionamento si basa sulla coppia esercitata da un campo magnetico su un avvolgimento di spire percorso dalla corrente da misurare. La coppia esercitata dal campo magnetico viene bilanciata dalla torsione di un filo o dalla deformazione elastica di una molla. La grandezza misurata direttamente è il momento di una coppia e le formule coinvolte sono quelle dell'elasticità e delle forze esercitate dai campi magnetici sulle correnti. Capitolo XIII. Strumenti e misure

XIII.3 Differenza di potenziale

Le misure di differenza di potenziale si effettuano con voltmetri o con elettrometri. Il funzionamento di un voltmetro è basato sull'uso di un galvanometro; quello di un elettrometro sull'uso di un condensatore. Nei voltmetri la misura della differenza di potenziale si riduce a quella di una corrente e quindi a quella del momento di una coppia. Negli elettrometri si misura la forza, di origine elettrostatica, esercitata su una delle due armature del condensatore.

XIII.4 Resistenza elettrica

La resistenza di un elemento di circuito è ottenuta dal rapporto tra la differenza di potenziale ai capi dell'elemento e la corrente che lo attraversa.

XIII.5 Campi elettrici

La misura di un campo elettrostatico, tipicamente quello tra le armature di un condensatore, si riduce a quella di una differenza di potenziale e di una lunghezza (la distanza tra le armature).

XIII.6 Campi magnetici

Il valore di un campo magnetico può essere, in linea di principio, ottenuto misurando la forza esercitata dal campo magnetico su un tratto di filo percorso da una corrente nota. In questo caso, le grandezze misurate direttamente sono forze e lunghezze.

Tuttavia è più conveniente usare una sonda di Hall, basata sull'effetto omonimo (sezione VI.6, pagina 212): le grandezze misurate direttamente sono correnti, differenze di potenziale e lunghezze; deve inoltre essere nota la concentrazione dei portatori di carica della sonda.

XIII.7 Frequenze

La frequenza di una grandezza elettromagnetica periodica può essere misurata in due modi. Mediante la misura della lunghezza d'onda, se si tratta della frequenza di un'onda: tale misura si riduce a quella di una lunghezza, per esempio, sulla lastra fotografica di uno spettroscopio. Oppure, contando il numero di "attraversamenti dello zero" contenuti in un determinato intervallo di tempo di un segnale sinusoidale mediante l'uso di un oscilloscopio. Quindi, per le frequenze, le grandezze misurate direttamente sono lunghezze o tempi.

XIII.8 Energia

Si considerino due forme di energia: energia dissipata da un resistore ed energia trasportata da un'onda elettromagnetica. La misura dell'energia dissipata da un resistore si può ottenere misurando differenze di potenziale e correnti oppure usando un calorimetro. In quest'ultimo caso le grandezze fisiche in gioco sono masse (forze) e temperature. L'energia trasportata da un'onda elettromagnetica la cui lunghezza d'onda cada nell'intervallo dello spettro compreso tra la luce visibile e le microonde può essere misurata con un bolometro. Nella sua forma più semplice, il bolometro è costituito da un ponte di Wheatstone in cui la resistenza incognita è quella di una striscia conduttrice in grado di assorbire tutta la radiazione che la investe: le variazioni di resistenza di questa striscia permettono di risalire all'energia assorbita. In questo caso, la misura dell'energia si riduce a quella di resistenza elettrica e massa.

XIII.9 Osservazione

Le considerazioni svolte mostrano che la misura di tutte le grandezze elettromagnetiche si riduce alla misura di forze, lunghezze e intervalli di tempo. Un'analisi approfondita mostrerebbe che la misura di qualunque grandezza fisica si riduce alla misura di queste grandezze. Il fatto che la misura di ogni grandezza fisica sia concettualmente riconducibile alla misura di forze, lunghezze e intervalli di tempo pone in luce la dipendenza concettuale di ogni branca della Fisica dalla Meccanica. Questo ruolo fondante della Meccanica è forse riconducibile alla fisiologia della specie umana che determina il nostro modo di interazione con il mondo esterno.

XIII.10 Sistema Internazionale delle unità di misura

Il Sistema Internazionale (*SI*) è basato su sette unità di misura (tabella XIII.1). Le definizioni delle unità di misura sono le seguenti (tra parentesi, la data di adozione):

- ♦ *metro*: lunghezza percorsa dalla luce nel vuoto in un intervallo di tempo pari a 1/299792458 di secondo (1983). Con questa definizione la velocità della luce nel vuoto viene *fissata* a 299792458 $m s^{-1}$;
- kilogrammo: è l'unità di massa; è uguale alla massa del prototipo internazionale del kilogrammo conservato presso l'Ufficio Internazionale dei Pesi e delle Misure di Parigi (1889);

	Capitolo XIII.	Strumenti e	misure
--	----------------	-------------	--------

Grandezza fisica	Nome	Simbolo
lunghezza	metro	т
massa	kilogrammo	kg
tempo	secondo	S
corrente elettrica	ampere	Α
temperatura termodinamica	kelvin	K
quantità di sostanza	mole	mol
intensità luminosa	candela	cd

Tabella XIII.1. unità di misura del Sistema Internazionale.

- ♦ *secondo*: è la durata di 9192631770 periodi della radiazione relativa alla transizione tra i due livelli iperfini dello stato fondamentale dell'atomo di ^{133}Cs (1967);
- ◇ *ampere*: è la corrente costante che, circolando in due conduttori paralleli, sufficientemente lunghi, di sezione trascurabile e posti ad una distanza di un metro nel vuoto, produce tra questi conduttori una forza pari a 2 × 10⁻⁷ newton per metro di lunghezza (1946); questa definizione implica che il valore della permeabilità magnetica del vuoto μ₀ è assunto uguale a 4π × 10⁻⁷ H m⁻¹;
- *kelvin*: è la frazione 1/273.16 della temperatura termodinamica del punto triplo dell'acqua (1954);
- *mole*: è la quantità di sostanza di un sistema che contiene un numero di particelle elementari uguale al numero di atomi contenuti in 0.012 kilogrammi di carbonio 12 (1960);
- ♦ *candela*: è l'intensità luminosa, in una determinata direzione, di una sorgente che emette radiazione monocromatica di frequenza 540 × 10^{12} Hz e che ha, in quella direzione, un'intensità di 1/683 watt per radiante solido (1979).

XIII.11 Nuovi standards di unità di misura

La scoperta dell'effetto Josephson e dell'effetto Hall quantico ha aperto la possibilità della definizione di nuovi standards per l'unità di differenza di potenziale e di resistenza, rispettivamente. Una giunzione Josephson è costituita da due superconduttori separata da un sottile strato di isolante (\approx

10 nm). Una giunzione Josephson è attraversata da una corrente senza che vi sia ai suoi capi alcuna differenza di potenziale (effetto Josephson *dc*). Il suo valore è dato da:

$$I = I_{max} \sin \delta$$

dove I_{max} è la corrente massima e δ un parametro che dipende dalle caratteristiche della giunzione. I_{max} decresce esponenzialmente in funzione dello spessore dello strato isolante. Se ad una giunzione Josephson viene applicata una ddp continua ΔV , essa viene attraversata da una corrente alternata data da (effetto Josephson *ac*):

$$I = I_{max}\sin(\delta + 2\pi f)$$

dove f è la frequenza della corrente che attraversa la giunzione. Si ha:

$$f = \frac{2e}{h}\Delta V$$

dove *h* è la costante di Planck. Se la giunzione viene irraggiata con microonde di frequenza f', il diagramma corrente - tensione presenta dei gradini in corrispondenza dei valori ΔV_n della differenza di potenziale:

$$\Delta V_n = n \frac{h}{2e} f' \tag{XIII.1}$$

con *n* intero. La (XIII.1) permette di determinare il rapporto h/2e, misurando δV_n e f'; essa permette anche di definire l'unità standard per la differenza di potenziale. Nel 1990, per la 'costante di Josephson' $K_J = 2e/h$ è stato adottato il valore convenzionale 483597.9 *GHz* V^{-1} .

Abbiamo già discusso l'effetto Hall quantico nella sezione VI.6 a pagina 212. Qui ricordiamo solo che una resistenza di Hall quantizzata è prevista ogni qual volta la densità superficiale degli elettroni n_s e il campo magnetico hanno valori tali per cui il rapporto

assume valori interi (si ricordi che in questa equazione n_s ha le dimensioni dell'inverso di una superficie). In corrispondenza di questi valori interi, la resistenza di Hall assume i valori:

$$R_H = \frac{h}{ie^2}$$

con *i* intero. Alla costante di Klitzing $R_K = h/e^2$ è stato assegnato nel 1990 il valore convenzionale 25812.807 Ω .

Capitolo XIV

Glossario

In questo glossario sono sinteticamente illustrati alcuni argomenti non sviluppati nel manuale.

Distribuzione maxwelliana



Figura XIV.1. andamento della gaussiana $e^{-v_z^2/2\sigma^2}$ contenuta nella (XIV.1) in funzione di v_z . Parametri: T = 300K; per la massa M si è assunta quella dell'argon (peso atomico 39.948).

In un gas di N molecole, il numero di particelle la cui componente della velocità lungo la direzione z (arbitraria) sia compresa tra v_z e $v_z + dv_z$ è



Figura XIV.2. distribuzione maxwelliana delle velocità delle molecole di un gas all'equilibrio termico. P(v)dv è la probabilità che una molecola abbia velocità compresa tra $v \in v + dv$. Parametri: T = 300K; per la massa M si è assunta quella dell'argon (peso atomico 39.948).

dato da:

$$n(v_z) dv_z = N \sqrt{\frac{1}{2\pi\sigma^2}} e^{-v_z^2/2\sigma^2} dv_z$$
 (XIV.1)

dove $\sigma = \sqrt{kT/M}$ (*M* è la massa delle molecole e *T* la temperatura assoluta). La funzione

 $e^{-v_z^2/2\sigma^2}$

che è una gaussiana, è riprodotta in figura XIV.1. La trasposizione della (XIV.1) in tre dimensioni conduce all'equazione:

$$n(v)dv = N\left(\frac{1}{2\pi\sigma^2}\right)^{3/2} e^{-v^2/2\sigma^2} 4\pi v^2 dv$$

dove $v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2$. La funzione P(v) = n(v)/N che fornisce la probabilità che una molecola abbia velocità compresa tra $v \in v + dv$ è mostrata in figura XIV.2.

Statistica di Boltzmann

Secondo questa statistica, la probabilità che un sistema fisico si trovi nello stato di energia E è data da:

$$P(E) = Ae^{-E/kT}$$
(XIV.2)

dove la costante *A* è determinata dalla condizione che la somma delle probabilità relative agli stati possibili sia uguale ad uno.

Statistica di Fermi - Dirac



Figura XIV.3. funzione di distribuzione di Fermi - Dirac; si è posto $E_F = 1 eV e$ T = 300 K.

La probabilità di occupazione di uno stato elettronico di energia E è data da:

$$P(E) = \frac{1}{e^{(E-\mu)/kT} + 1}$$
 (XIV.3)

dove k è la costante di Boltzmann e μ il potenziale chimico (pagina 396), dipendente dalla temperatura. Il valore di μ si determina imponendo la condizione che il numero di particelle N sia uguale a quello espresso in funzione della statistica di Fermi - Dirac:

$$\int N(E)P(E)dE = N$$

La (XIV.3) vale per particelle con spin semi - intero: esse si chiamano *fermioni*.

Nel campo della fisica dello stato solido, si pone usualmente $\mu(T = 0) = E_F$ ed E_F si chiama *energia di Fermi*: è l'energia dello stato occupato più alto in energia allo zero assoluto; inoltre, si usa anche indicare il potenziale chimico con il termine *livello di Fermi*. Questa prassi può favorire qualche confusione.

Statistica di Bose - Einstein

Vale per particelle con spin intero: esse si chiamano bosoni.

$$P(E) = \frac{1}{e^{(E-\mu)/kT} - 1}$$
 (XIV.4)

Nel caso dei fotoni, la (XIV.4) assume la forma:

$$P(E) = \frac{1}{e^{E/kT} - 1}$$

perché, per i fotoni, il potenziale chimico è nullo. La differenza tra la statistica per le particelle con spin intero e quella per i fotoni ($\mu > 0$ nel primo caso, $\mu = 0$ nel secondo) è dovuta al fatto che nella derivazione si pone come condizione la conservazione del numero delle particelle, ma non quella del numero dei fotoni.

Quando $E - \mu \gg kT$ la (XIV.3) e la (XIV.4) si riducono alla:

$$P(E) \approx e^{-E/kT} e^{\mu/kT}$$

Imponendo la condizione di normalizzazione:

$$e^{\mu/kT}\sum_i g_i e^{-E_i/kT} = 1$$

 $(g_i \text{ è il numero degli stati con energia } E_i)$ si ottiene:

$$e^{\mu/kT} = \frac{1}{\sum_i g_i e^{-E_i/kT}} = A$$

Pertanto, la probabilità normalizzata risulta:

$$P(E) = Ae^{-E_i/kT}$$

che coincide con la statistica di Boltzmann (XIV.2).

La figura XIV.4 mostra la convergenza delle due statistiche con quella di Boltzmann.

Potenziale chimico

Il potenziale chimico di un sistema fisico costituito da N particelle identiche è definito dalla relazione:

$$\mu = \left(\frac{\partial G}{\partial N}\right)_{T,F}$$

dove G = H - TS è l'energia libera di Gibbs del sistema, T la temperatura assoluta e P la pressione; H = U + PV è l'entalpia del sistema la cui energia è U ed il cui volume è V.



Figura XIV.4. le statistiche di Fermi - Dirac (curva tratteggiata) e di Bose - Einstein (curva continua) convergono su quella di Boltzmann per valori di $(E - \mu) \gg kT$.

Reticoli cristallini

I solidi cristallini ideali sono caratterizzati dalla disposizione ordinata degli atomi costituenti. La struttura di un cristallo è data da un insieme indefinito e ordinato di punti geometrici detto *reticolo*: ad ogni punto del reticolo è associato un gruppo di atomi (*base*). A sua volta il reticolo può essere individuato riproducendo indefinitamente lungo le tre direzioni una *cella elementare*, che si dice *primitiva* se ad essa è associato un solo punto reticolare.

Per esempio, un cubo dà origine a tre possibili celle elementari:

- *cubica semplice*: ogni suo vertice costituisce un punto del reticolo; a questa cella è associato un solo punto reticolare (ogni vertice appartiene a otto celle; quindi appartiene ad una cella per un ottavo);
- *cubica a facce centrate*: i punti reticolari sono i vertici della cella ed i centri di ogni faccia (quattro punti per cella);
- ◊ *cubica a corpo centrato*: i punti reticolari sono i vertici ed il centro della cella (due punti per cella).

La cella elementare e la cella primitiva di un reticolo non sono definite in modo univoco; tuttavia, tutte le celle primitive hanno lo stesso volume.

Un reticolo può essere definito dai tre vettori (\vec{a}_1 , \vec{a}_2 , \vec{a}_3) che caratterizzano una sua cella primitiva: scelto un punto reticolare come origine, tutti



gli altri punti reticolari sono individuati dagli infiniti vettori

$$\vec{t} = n_1 \vec{a}_1 + n_2 \vec{a}_2 + n_3 \vec{a}_3$$
 n_1, n_2, n_3 interi (XIV.5)

Una particolare cella primitiva è la cella di Wigner - Seitz così definita:

- scelto un punto reticolare, si tracciano i segmenti congiungenti questo punto ai punti primi vicini;
- si tracciano i piani bisettori dei segmenti tracciati;
- ◊ si ripete l'operazione per i secondi vicini e per i vicini successivi;
- ◊ la cella delimitata dai piani bisettori a volume minimo è la cella di Wigner - Seitz.

Ogni reticolo possiede le proprietà di simmetria della sua cella elementare e la simmetria traslazionale legata alla sua estensione infinita. Per un cristallo (*reticolo* + *base*) la simmetria traslazionale implica che le proprietà fisiche del punto generico individuato dal vettore \vec{r} spiccato dall'origine sono le stesse di quelle del punto individuato dal vettore $\vec{r} + \vec{t}$, con \vec{t} dato dalla (XIV.5).

Ad ogni reticolo, definito dai vettori primitivi \vec{a}_1 , \vec{a}_2 , \vec{a}_3 , possiamo associare un *reticolo reciproco* individuato dai vettori

$$\vec{a}_1^* = 2\pi \frac{\vec{a}_2 \times \vec{a}_3}{V_c}$$
$$\vec{a}_2^* = 2\pi \frac{\vec{a}_3 \times \vec{a}_1}{V_c}$$
$$\vec{a}_3^* = 2\pi \frac{\vec{a}_1 \times \vec{a}_2}{V_c}$$

dove V_c è il volume della cella elementare del reticolo. Un qualunque vettore del reticolo reciproco \vec{G} è dato da:

$$\ddot{G} = g_1 \vec{a}_1^* + g_2 \vec{a}_2^* + g_3 \vec{a}_3^*$$
 g_1, g_2, g_3 interi

Per qualunque coppia di vettori (\vec{t} , \vec{G}) vale la relazione:

$$\vec{t} \cdot \vec{G} = 2\pi m$$

con *m* intero.

Temperatura di Debye

Per calcolare il calore specifico di un solido cristallino, è necessario adottare un modello. Quello di Debye, si basa sulle seguenti assunzioni:

- Si sostituisce lo spettro discreto delle frequenze di vibrazione permesse per il moto degli atomi intorno alle loro posizioni di equilibrio con uno spettro continuo.
- ◊ Il rapporto tra i due spettri è stabilito secondo le seguenti regole:
 - Nello spettro continuo, il numero di vibrazioni permesse per unità di volume e di pulsazione è dato da

$$n(\omega) = \frac{\omega^2}{2\pi^2 v_s^3}$$

dove v_s è la velocità del suono nel cristallo. Questa formula è una diretta conseguenza dell'assunzione secondo cui:

$$\omega = k v_s$$

dove k è il vettore d'onda.

Il numero totale di vibrazioni permesse nello spettro continuo deve essere uguale a quello dello spettro discreto:

$$\int_0^{\omega_D} n(\omega) d\omega = 3N$$

dove ω_D è la pulsazione di Debye e *N* il numero di atomi per unità di volume.

Si ottiene, per il calore specifico a volume costante:

$$C_V = 9Nk \frac{T}{\Theta_D} \int_0^{\Theta_D/T} \frac{x^4 e^x}{(e^x - 1)^2} dx$$

dove $x = \hbar \omega / kT$ e Θ_D è la temperatura di Debye definita dalla relazione:

$$\Theta_D = \frac{\hbar\omega_D}{k}$$

A basse temperature, cioè per $T \ll \Theta_D$, si ha:

$$C_V \approx \frac{12\pi^4 NK}{5} \frac{T^3}{\Theta_D^3}$$

in buon accordo con i dati sperimentali. Per temperature elevate ($T \gg \Theta_D$) si ottiene invece:

$$C_V \approx 3NK$$

Questa espressione è stata ricavata per la prima volta da Dulong e Petit (pagina 489). Si noti che queste formule tengono conto solo delle vibrazioni degli atomi intorno alle loro posizioni di equilibrio: esse, pertanto, valgono solo per gli isolanti. Per i metalli bisogna includere anche il contributo al calore specifico degli elettroni di conduzione.

Struttura a bande

I livelli di energia permessi per gli elettroni in un solido cristallino indefinito corrispondono a stati descritti da funzioni d'onda del tipo:

$$\psi_{\vec{k}}(\vec{r}) = e^{ik\cdot\vec{r}} u_{\vec{k}}(\vec{r})$$

dove $u_{\vec{k}}(\vec{r})$ è una funzione periodica avente la stessa periodicità del reticolo cristallino (teorema di Bloch). I valori permessi di \vec{k} si determinano imponendo condizioni al contorno periodiche corrispondenti all'assunzione che

il solido cristallino indefinito sia costituito da una sequenza di cristalli finiti di lunghezza L_1 , L_2 , L_3 lungo le tre dimensioni:

$$\psi_{\vec{k}}(\vec{r}) = \psi_{\vec{k}}(\vec{r} + N_1\vec{a}_1)$$

dove $L_1 = N_1 a_1$; e condizioni analoghe per le altre due dimensioni; \vec{a}_1 , \vec{a}_2 , \vec{a}_3 sono vettori primitivi (lati di una cella primitiva). Le tre condizioni al contorno implicano che:

$$k_{1} = n_{1} \frac{2\pi}{N_{1}a_{1}} \quad n_{1} = 0, 1, 2, \dots N_{1}$$

$$k_{2} = n_{2} \frac{2\pi}{N_{2}a_{2}} \quad n_{2} = 0, 1, 2, \dots N_{2}$$

$$k_{3} = n_{3} \frac{2\pi}{N_{3}a_{3}} \quad n_{3} = 0, 1, 2, \dots N_{3}$$

Nello spazio reciproco, i valori permessi di \vec{k} costituiscono un reticolo di punti che stanno ai vertici di celle di volume $8\pi^3/V$ dove $V = L_1L_2L_3$ è il volume del cristallo: ad ogni valore permesso di \vec{k} è quindi associato un volume dello spazio reciproco pari a $8\pi^3/V$; i valori permessi di \vec{k} sono pari al numero delle celle primitive del cristallo $N = N_1N_2N_3$.

I livelli di energia permessi per gli elettroni in un solido cristallino si raggruppano in *bande* di energia permesse separate da bande di energia proibite. All'interno di ciascuna banda, sono permessi solo i valori dell'energia \mathscr{E} corrispondenti a valori permessi del vettore d'onda \vec{k} associato all'elettrone. Ogni livello energetico così individuato può essere occupato da due elettroni con spin opposto.

La funzione $\mathscr{E}(\vec{k})$ è una funzione pari di \vec{k} e periodica in \vec{k} : lo stato elettronico individuato da \vec{k} è equivalente a quello individuato da $\vec{k} + \vec{G}$, dove \vec{G} è un qualunque vettore del reticolo reciproco. Nel caso monodimensionale, un andamento tipico è mostrato in figura XIV.6.

La velocità dell'elettrone nello stato $\mathscr{E}(\vec{k})$ è data da:

$$\vec{v}_k = \frac{1}{\hbar} grad_k \mathscr{E}(\vec{k})$$

Essendo $\mathscr{E}(\vec{k})$ una funzione pari di \vec{k} , la velocità $\vec{v}(\vec{k})$ è una funzione dispari di \vec{k} . Ne consegue che una banda completamente occupata da elettroni non dà alcun contributo alla corrente elettrica.



Figura XIV.6. tipico andamento della funzione $\mathscr{E}(\vec{k})$ lungo una dimensione; *a* è il lato della cella primitiva nella direzione considerata.

Quantità di moto cristallina

E' la grandezza $\vec{p}_c = \hbar \vec{k}$ che caratterizza uno stato permesso di un elettrone in un cristallo. In presenza di una forza esterna \vec{F} (non derivante dal potenziale elettrostatico periodico del cristallo), vale l'equazione:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}_c}{dt} = \hbar \frac{d\vec{k}}{dt}$$
(XIV.6)

che descrive la dipendenza del vettore d'onda \vec{k} dalla forza \vec{F} (derivante, per esempio, da un campo elettrico o magnetico).

La (XIV.6) non tiene conto delle vibrazioni reticolari. A temperature sufficientemente basse (inclusa la temperatura dell'ambiente), l'interazione tra gli elettroni e le vibrazioni reticolari cambia il vettore d'onda dell'elettrone lasciandone praticamente invariata l'energia (urto quasi elastico).

Si noti che, se si trascura questa interazione, la (XIV.6) implica che, sotto l'azione di un campo elettrico costante, il conduttore è percorso da una corrente periodica: quando il punto rappresentativo dello stato elettronico raggiunge, per esempio, lo stato $k = \pi/a$, esso riappare nello stato equivalente $k = -\pi/a$ e prosegue nel suo spostamento secondo la (XIV.6). L'interazione con le vibrazioni reticolari conduce ad una situazione stazionaria rappresentata nella figura XIV.7: il campo elettrico E_x , applicato lungo la direzione negativa dell'asse x, sposta, per la (XIV.6), i punti rappresentativi degli stati elettronici nel senso positivo dei k_x ; le vibrazioni reticolari spostano i punti rappresentativi degli stati elettronici come indicato dalla freccia orizzonta-le mantenendo invariata l'energia dell'elettrone (approssimazione dell'urto



Figura XIV.7. conduzione elettrica nella banda di conduzione di un metallo.

elastico); l'elettrone cede poi parte della sua energia alle vibrazioni reticolari decadendo sugli stati di energia inferiore, come indicato dalla freccia lungo la curva; gli stati che contribuiscono alla corrente sono quelli i cui vettori d'onda sono compresi tra k_1 e k_2 in un piccolo intervallo di energia collocato intorno al livello di Fermi. Questa descrizione qualitativa mostra che tutti gli elettroni della banda di conduzione partecipano alla conduzione, ma lo fanno con le caratteristiche fisiche degli stati posti nei dintorni del livello di Fermi: in particolare, la velocità v_F con cui gli elettroni entrano nei processi d'urto è quella corrispondente al livello di Fermi. Per questa ragione, il modello di conduzione descritto a pagina 271 conduce a predizioni corrette.

Massa effettiva

La funzione $\mathscr{E}(k_x, k_y, k_z)$ può essere sviluppata in serie nei dintorni di un estremo. Per esempio, nei dintorni di k = 0, possiamo scrivere:

$$\mathscr{E} = Ak_x^2 + Bk_y^2 + Ck_z^2 \tag{XIV.7}$$

In casi di particolare simmetria si ha A = B = C e la (XIV.7) assume la forma semplice:

$$\mathscr{E} = \frac{\hbar k^2}{2m^*}$$

dove m^* ha le dimensioni di una massa e si chiama *massa effettiva*. In questo caso la relazione tra quantità di moto cristallina e velocità assume la forma:

$$p_C = \hbar k = m^* v_k$$

e la (XIV.6) la forma:

$$\vec{F} = m^* \frac{d\vec{v}_k}{dt}$$

Si noti come questa equazione e la (XIV.6) abbiano la stessa forma dell'equazione di Newton, con la massa della particella sostituita dalla massa effettiva. In entrambe le equazioni non c'è apparentemente traccia delle forze derivanti dal potenziale elettrostatico periodico del cristallo: i suoi effetti sono racchiusi nella massa effettiva.

Isolanti

Allo zero assoluto, gli isolanti hanno le bande di energia suddivise in due classi: le bande appartenenti alla prima sono completamente occupate da elettroni, quelle appartenenti alla seconda sono vuote. La separazione in energia tra la banda occupata più alta (in energia) e quella vuota più bassa è dell'ordine di 10 eV: anche a temperature ordinarie la concentrazione di elettroni liberi in banda di conduzione è praticamente nulla.

Metalli

Allo zero assoluto i metalli hanno (almeno) una banda di energia parzialmente occupata, detta *banda di conduzione*. In metalli tipici, come quelli appartenenti al primo gruppo della tavola periodica, sono occupati metà dei livelli della banda di conduzione.

Nell'approssimazione della massa effettiva, l'energia dei livelli permessi per gli elettroni nella banda di conduzione assume la forma:

$$\mathcal{E} = \frac{\hbar^2 k^2}{2m_e} \tag{XIV.8}$$

La densità degli stati, cioè il numero degli stati per unità di volume e unità di energia, è data da:

$$D(\mathcal{E}) = \frac{1}{2\pi^2} \left(\frac{2m_e}{\hbar^2}\right)^{3/2} \mathcal{E}^{1/2}$$

Questa formula si ottiene considerando una corona sferica $4\pi k^2 dk$ nello spazio reciproco, ricordando che ad ogni valore permesso di \vec{k} è associato un volume dello spazio reciproco pari a $8\pi^3$ (per unità di volume del cristallo), usando la (XIV.8) e moltiplicando infine il risultato ottenuto per due per tenere conto dei due valori della componente dello spin dell'elettrone.

I livelli della banda di conduzione si suddividono tra livelli occupati e vuoti: allo zero assoluto, i livelli occupati sono quelli appartenenti alla sfera di

Giuliani Bonizzoni - Lineamenti di elettromagnetismo

	$N\left(m^{-3} ight)$	$k_F\left(m^{-1}\right)$	$v_F(ms^{-1})$	$\mathscr{E}_{\mathbf{F}}(\mathbf{eV})$
Na	2.50×10^{28}	0.90×10^{10}	1.10×10^6	3.1
Cu	8.50×10^{28}	1.35×10^{10}	1.56×10^6	7.0
Au	5.90×10^{28}	1.20×10^{10}	1.39×10^6	5.5

Tabella XIV.1. valori calcolati per i parametri di Fermi di alcuni metalli. Si è assunta la massa effettiva uguale alla massa dell'elettrone.

Fermi dello spazio reciproco di volume

$$\frac{4}{3}\pi k_F^3$$

dove k_F è il vettore d'onda relativo all'energia di Fermi. Si ha:

$$k_F = (3\pi^2 N)^{1/3}$$

$$\mathscr{E}_F = \frac{\hbar^2}{2m_e} (3\pi^2 N)^{2/3}$$

$$v_F = \frac{\hbar}{m_e} (3\pi^2 N)^{1/3}$$

dove N è il numero di elettroni di conduzione per unità di volume. Nella tabella XIV.1 si trovano i valori di questi parametri per alcuni metalli. Si noti come la velocità di Fermi sia dello stesso ordine di grandezza della velocità dell'elettrone sulla prima orbita di Bohr dell'atomo di idrogeno (pagina 225).

L'energia necessaria per sottrarre un elettrone ad un metallo si chiama *funzione lavoro*: nello schema a bande, essa corrisponde alla differenza tra il livello energetico di un elettrone in quiete fuori dal metallo (e a distanza sufficientemente grande dal metallo), assunto come zero di energia, e il livello di Fermi del metallo. Se due metalli *a* e *b* aventi funzioni lavoro diverse ϕ_a e ϕ_b con $\phi_a < \phi_b$ sono posti a contatto, ci sarà un flusso netto di elettroni dal metallo *a* al metallo *b* finché tra *a* e *b* si stabilisce una differenza di potenziale *di contatto* uguale a $(\phi_a - \phi_b)/e$ in una zona di confine tra i due metalli le cui dimensioni lineari sono dell'ordine delle dimensioni atomiche, mentre le parti distanti dalla zona di transizione rimangono

imperturbate. Questo effetto è noto come *effetto Volta*. Nel caso dei semiconduttori la zona di transizione interessata allo scambio di cariche è molto più ampia perché la densità dei portatori è molto più piccola.

Semiconduttori

Allo zero assoluto, le bande di energia permesse dei semiconduttori sono suddivise in due classi: le bande appartenenti alla prima sono completamente occupate da elettroni, quelle appartenenti alla seconda sono vuote. Allo zero assoluto, quindi, i semiconduttori sono isolanti. La separazione in energia tra la banda occupata più alta (banda di valenza) e quella vuota più bassa (banda di conduzione) è dell'ordine di 1 *eV* per semiconduttori tipici come il germanio ed il silicio. Se un elettrone passa da un livello della banda di valenza ad uno della banda di conduzione, il semiconduttore ha due bande parzialmente occupate che contribuiscono alla corrente elettrica.



Figura XIV.8. l'elettrone corrispondente al vettore d'onda k_1 manca; all'elettrone mancante si dà il nome di buca (*hole*). Si veda il testo.

Consideriamo la banda di valenza (figura XIV.8) in cui manca l'elettrone dello stato corrispondente a k_1 : la corrente elettrica è dovuta all'elettrone che occupa lo stato $-k_1$ perché la somma dei contributi di tutti gli altri elettroni è nulla. Si ha:

$$-e\vec{v}(-k_1) = -e[-\vec{v}(k_1)] = e\vec{v}(k_1)$$

Cioè: il contributo alla corrente elettrica degli N - 1 elettroni della banda di valenza è equivalente a quello di una particella di carica +*e* e velocità uguale a quella dell'elettrone mancante. Questa 'particella' si chiama *buca* (*hole*) e la sue proprietà fisiche sono illustrate nella tabella XIV.2. Si noti che la 'buca' non esiste, nel senso in cui diciamo che esiste l'elettrone: con il concetto di buca, descriviamo le proprietà delle comportamento degli N - 1 elettroni rimasti in banda di valenza. Le proprietà delle buche possono essere misurate: è questo un esempio illuminante dell'affermazione secondo cui la mi-

Giuliani Bonizzoni - Lineamenti di elettromagnetismo

Carica	+e
Quantità di moto cristallina	$-\vec{k}_e$
Velocità	\vec{v}_e
Energia	$-E_e$
Massa effettiva	$-m_e$

Tabella XIV.2. proprietà di una buca in funzione di quelle dell'elettrone mancante (indicate con il suffisso *e*).

sura di una proprietà di un'entità teorica non può essere considerata come una prova della sua esistenza (pagina 7).

Quindi, in un semiconduttore, per $T \neq 0$, la densità di corrente di conduzione avrà l'espressione (e > 0):

$$\vec{J} = \vec{J}_n + \vec{J}_p = -ne\vec{v}_e + pe\vec{v}_h$$

dove: n, p sono le concentrazioni di elettroni e buche, rispettivamente; \vec{v}_e, \vec{v}_h sono le velocità di deriva degli elettroni e delle buche, rispettivamente. Se ci poniamo nell'approssimazione in cui nei dintorni dei suoi massimi e minimi la funzione $\mathscr{E}(k)$ sia data dall'espressione $\hbar^2 k^2 / 2m^*$ (pagina 403) ed in cui il livello di Fermi E_F sia sufficientemente lontano dal fondo della banda di conduzione e dalla cima della banda di valenza ($E_c - E_F \gg kT$; $E_F - E_v \gg kT$), la concentrazione n di elettroni in banda di conduzione e di buche pin banda di valenza è data da:

$$n = N_c e^{-(E_c - E_F)/kT}$$
$$p = N_v e^{-(E_v - E_F)/kT}$$

dove:

$$N_c = 2\left(\frac{2\pi m_e kT}{h^2}\right)^{3/2}$$
$$N_v = 2\left(\frac{2\pi m_h kT}{h^2}\right)^{3/2}$$

sono la densità effettiva degli stati in banda di conduzione e di valenza, rispettivamente (m_e e m_h sono, rispettivamente, la massa effettiva degli elettroni e delle buche).

⇒ La densità effettiva degli stati è dell'ordine di $10^{25} m^{-3}$. Infatti, assumendo le masse effettive uguali a quella dell'elettrone, si ha, a 300*K*:

$$N_c = N_v = 2.51 \times 10^{25} \ m^{-3}$$

Un semiconduttore di dice intrinseco se n = p. Risulta:

$$n = p = \sqrt{N_c N_v} e^{-\Delta E/2kT}$$
(XIV.9)

dove ΔE è la larghezza della banda proibita (che separa la banda di conduzione dalla banda di valenza).



Figura XIV.9. andamento della concentrazione intrinseca dei portatori nel silicio intorno a temperatura ambiente. I parametri usati sono quelli relativi a T = 300K: $N_c = 2.8 \times 10^{25} m^{-3}$; $N_v = 1.04 \times 10^{25} m^{-3}$; $\Delta E = 1.12 eV$.

L'andamento della concentrazione intrinseca dei portatori nel silicio è mostrato nella figura XIV.9.

Introducendo opportune impurezze pentavalenti in un semiconduttore del quarto gruppo come germanio o silicio, si crea un livello permesso per gli elettroni collocato subito sotto la banda di conduzione: in questo livello si collocano, allo zero assoluto, gli elettroni in eccesso delle impurezze pentavalenti (un elettrone per atomo, detto atomo *donatore*). Similmente, introducendo opportune impurezze trivalenti (detti atomi *accettori*), si

Giuliani Bonizzoni - Lineamenti di elettromagnetismo



Figura XIV.10. livello energetico prodotto da atomi donatori (E_d) e accettori (E_a). E_c e E_a sono il livello più basso della banda di conduzione e più alto della banda di valenza, rispettivamente. Le differenze ($E_c - E_d$) e ($E_a - E_v$) non sono in scala: infatti, esse sono dell'ordine di qualche centesimo di eV, mentre ($E_c - E_v$) è dell'ordine di un eV per semiconduttori come germanio e silicio.

crea un livello permesso per gli elettroni collocato subito sopra la banda di valenza (figura XIV.10).

Indicate con N_d e N_a le concentrazioni degli atomi donatori e accettori, il parametro fisico significativo è dato dalla concentrazione effettiva $|N_d - N_a|$. Se $N_d = N_a$ il semiconduttore si dice perfettamente compensato e si comporta come un semiconduttore intrinseco; se $N_d > N_a$, il semiconduttore si dice di tipo n; se $N_a > N_d$ il semiconduttore si dice di tipo p.

Le proprietà di conduzione dei semiconduttori con impurezze, detti semiconduttori drogati, possono essere qualitativamente descritte nel modo seguente. Si consideri il caso di un semiconduttore di tipo n e sia N_d la concentrazione (effettiva) degli atomi donatori. Allo zero assoluto, i livelli della banda di valenza sono tutti occupati; sul livello E_d sono collocati N_d elettroni; la banda di conduzione è vuota e il livello di Fermi è collocato tra il livello dei donatori ed il fondo della banda di conduzione. Aumentando la temperatura, il livello dei donatori si svuota (quasi) completamente, prima ancora che il processo di creazione di coppie buca - elettrone, mediante transizione dalla banda di valenza alla banda di conduzione, diventi significativo. In questa situazione, la concentrazione di elettroni in banda di conduzione è, con buona approssimazione, data da N_d , mentre è trascurabile la concentrazione di buche in banda di valenza: la conduzione elettrica è essenzialmente dovuta agli elettroni. Questa situazione permane per un significativo intervallo di temperatura, finché il processo di creazione di coppie buca elettrone non prende il sopravvento: allora la concentrazione di elettroni in banda di conduzione e di buche in banda di valenza diventa quella tipica del semiconduttore intrinseco (equazione XIV.9). I semiconduttori usati nelle

applicazioni tecniche sono, in genere, semiconduttori n o p con concentrazioni effettive dei donatori o degli accettori di qualche ordine di grandezza superiore alla concentrazione intrinseca dei portatori: pertanto, le loro caratteristiche fisiche sono tali che, nei dintorni della temperatura di utilizzo (temperatura ambiente), la concentrazione dei portatori (elettroni nel caso n e buche nel caso p) è, dal punto di vista pratico, costante ed uguale alla concentrazione effettiva dei donatori (n) o accettori (p).

Se in un semiconduttore la concentrazione degli elettroni e delle buche non è omogenea, si generano correnti di diffusione. La densità di corrente di diffusione dovuta agli elettroni è data da:

$$\vec{J}_n = eD_n \operatorname{grad} n$$

mentre quella delle buche è data da:

$$\vec{J}_p = -eD_p \operatorname{grad} p$$

ove *e* è il valore assoluto della carica dell'elettrone, D_n , D_p i coefficienti di diffusione e *n*, *p* le concentrazioni di elettroni e buche. Risulta:

$$\mu kT = eD$$

dove μ è la mobilità del portatore (elettrone o buca). Le correnti di diffusione svolgono un ruolo essenziale nelle giunzioni p - n.

Giunzione p - n

La giunzione p - n che intendiamo trattare è costituita da materiali omogenei. Essa è dunque una giunzione 'a gradino': la concentrazione effettiva dei donatori $N_d - N_a$ varia in modo discontinuo passando dalla regione n alla regione p. Supporremo che:

Ia giunzione è suddivisa in tre parti: una parte n che mantiene le caratteristiche del materiale n isolato; una parte p che mantiene le caratteristiche del materiale p isolato; una regione di transizione (detta di 'svuotamento') caratterizzata dalla assenza totale di cariche libere (figura XIV.11).

Questa assunzione implica che la resistenza delle parti imperturbate sia trascurabile rispetto a quella della regione di svuotamento.

Giuliani Bonizzoni - Lineamenti di elettromagnetismo



Figura XIV.11. giunzione p - n. Sono mostrate le regioni n e p imperturbate e la regione di svuotamento. Quest'ultima è suddivisa in due zone, una, appartenente alla regione n, è carica positivamente ($\rho = eN_d$), l'altra, appartenente alla regione p, è carica negativamente ($\rho = -eN_d$).



Figura XIV.12. schema a bande di una giunzione p - n all'equilibrio termico. L'andamento delle bande all'interno della regione di svuotamento è stato approssimato da un segmento di retta. Il loro andamento corretto si ottiene risolvendo l'equazione di Poisson $d^2V/dx^2 = -\rho/\varepsilon$ nelle due zone della regione di svuotamento e imponendo la continuità del campo elettrico e del potenziale sulle superficî di separazione.

Giunzione p - n in equilibrio termico

All'equilibrio termico il livello di Fermi ha lo stesso valore in tutti i punti della giunzione. Lo schema a bande sarà allora del tipo mostrato in figura XIV.12.

Tra le parti n e p imperturbate ci sarà allora una differenza di potenziale $\Delta V = (E_{Fn} - E_{Fp})/e$, essendo il materiale n a potenziale maggiore (E_{Fn} e E_{Fp} sono i livelli di Fermi della regione n e p prima che venga effettuata la giunzione). La giunzione non sarà attraversata da alcuna corrente: questo risultato è il prodotto di un equilibrio dinamico che annulla separatamente la corrente di buche e di elettroni. Analizziamo in dettaglio l'equilibrio dinamico delle buche. Le buche che dalla parte n, dove sono portatori di minoranza, entrano nella regione di svuotamento, vengono accelerate dal campo elettrico \vec{E} ivi esistente e raggiungono la parte p: nella regione di svuotamento si suppone infatti che il processo di ricombinazione buca elettrone sia trascurabile. Questo flusso di buche da n a p è bilanciato da un flusso uguale di buche da p a n che, in questo caso, sono portatori di maggioranza. Si noti che solo una piccola frazione di buche che entrano
Capitolo XIV. Glossario

nella regione di svuotamento da p possono raggiungere n: solo quelle la cui energia cinetica è maggiore del dislivello di energia ($E_{Fn} - E_{Fp}$).

Giunzione p - n polarizzata

Se applichiamo alla giunzione p - n una differenza di potenziale continua ΔV con il + dalla parte n, la ritroveremo praticamente tutta ai capi della regione di svuotamento, perché la resistenza della parti imperturbate è trascurabile rispetto a quella della regione di svuotamento. La differenza di potenziale ai capi della regione di svuotamento aumenterà di ΔV e il dislivello di energia di $e\Delta V$. La nuova situazione, denominata di polarizzazione *inversa* ridurrà praticamente a zero le correnti di maggioranza, mentre le correnti di minoranza rimarranno sostanzialmente invariate. Se la differenza di potenziale applicata ha invece il segno + dalla parte p, la polarizzazione si dice *diretta*: il dislivello di energia diminuisce di $-e\Delta V$, le correnti di maggioranza saranno aumentate mentre quelle di minoranza risulteranno ancora invariate.



Figura XIV.13. densità di corrente attraverso una giunzione p - n in polarizzazione diretta; si è assunto $J_i = 4.5 \times 10^{-4} A cm^{-2}$.

La trattazione quantitativa della giunzione polarizzata mostra che la corrente totale che attraversa la giunzione è data da (supponendo che non ci sia ricombinazione tra elettroni e buche nella regione di svuotamento):

$$J = J_i (e^{e\Delta V/kT} - 1) \tag{XIV.10}$$

dove ΔV è positivo per polarizzazione diretta e negativo per polarizzazione

inversa e:

$$J_i = \frac{eD_n n_p}{L_n} + \frac{eD_p p_n}{L_p}$$
(XIV.11)

 n_p e p_n sono le concentrazioni dei portatori di minoranza all'equilibrio termico; $D_n \in D_p$ i coefficienti di diffusione per gli elettroni e le buche; $L_n \in L_p$ le lunghezze di diffusione degli elettroni in materiale p e delle buche in materiale n. L'andamento della (XIV.10) per la polarizzazione diretta è mostrato in figura XIV.13. Si noti che una trattazione completa deve tenere conto anche della caduta ohmica nelle zone del dispositivo lontane dalla giunzione: in questo caso, la densità di corrente in polarizzazione diretta è ancora data dalla (XIV.10), dove però si deve sostituire a ΔV il valore $\Delta V' = \Delta V + RI$: R è la resistenza della zona interessata alla caduta ohmica e I la corrente che attraversa il dispositivo. In polarizzazione inversa la corrente, inizialmente nulla, decresce esponenzialmente verso il valore $-J_i$ dato dalla (XIV.11). Questo valore dipende dalla temperatura essenzialmente attraverso le grandezze $p_n \in n_p$. Per valori della polarizzazione inversa abbastanza elevati, è necessario tenere conto dei processi di generazione e ricombinazione di coppie buca - elettrone nella zona di svuotamento. Ciò comporta, all'inizio, piccole correzioni. Tuttavia, aumentando ulteriormente la polarizzazione inversa, si innescano processi di generazione a valanga di coppie buca elettrone e/o fenomeni di tunneling quantico dei portatori attraverso barriere di potenziale: entrambi i fenomeni comportano un drastico aumento della corrente inversa. Le giunzioni p - n sono oggi largamente usate nei diodi (a giunzione) e nei transistor (a giunzione).

Fononi

Dal punto di vista energetico e della interazione con particelle, è conveniente descrivere le proprietà delle vibrazioni degli atomi di un cristallo intorno alle loro posizioni reticolari (vibrazioni reticolari) introducendo il concetto di *fonone.*

Il fonone è una pseudo - particella caratterizzata da un'energia $\hbar \omega$ e da una quantità di moto cristallina $\hbar \vec{k}$: ω è la pulsazione di una vibrazione reticolare permessa. Così come per gli elettroni sussiste una relazione tra l'energia \mathscr{E} e $\hbar \vec{k}$, per i fononi sussiste una relazione tra ω e \vec{k} . Nella interazione tra un fonone ed una particella (per esempio, elettrone o fotone) si conservano l'energia e la quantità di moto.

Capitolo XIV. Glossario

Laser

Il funzionamento del *laser* (Light Amplification by Stimulated Emission of Radiation) si basa sul fatto che la transizione di un elettrone da un livello energetico ad un altro di energia inferiore è possibile non solo mediante una transizione 'spontanea' ma anche mediante una transizione 'stimolata'. Questi processi sono stati descritti nella sezione V.5 (pagina 128). Tuttavia, tra la trattazione di Einstein (1917) e la realizzazione del primo *maser* (Microwave Amplification by Stimulated Emission of Radiation) (1953) sono intercorsi oltre trentacinque anni; il primo laser è entrato in funzione nel 1960. Maser e laser si basano sui medesimi processi fisici: si differenziano solo per la frequenza della radiazione emessa. Sono oggi disponibili laser che emettono nella regione infrarossa, visibile e ultravioletta.

Il funzionamento del laser (maser) si basa sulle seguenti proprietà dei sistemi quantici (atomi, molecole, solidi cristallini):

- 1. Il fotone emesso mediante una transizione stimolata (coefficiente *B* di Einstein) ha le medesime proprietà fisiche del fotone (direzione, energia, spin) che ne stimola l'emissione. Questa proprietà assicura la coerenza del fascio di fotoni emessi dal laser; viceversa, i fotoni emessi mediante una transizione spontanea non originano fasci coerenti.
- 2. Se un fascio di fotoni, la cui energia corrisponde alla transizione laser, incide su un mezzo nella direzione z, la variazione della sua intensità I, considerando soltanto le transizioni stimolate tra i due livelli E_n ed E_m , sarà data da:

$$\frac{dI}{dz} = -\sigma I(N_m - N_n)$$

Se $N_n > N_m$, l'intensità aumenta con *z*: il mezzo *amplifica* il segnale luminoso.

- 3. E' possibile, usando sistemi quantici dalle caratteristiche appropriate e condizioni sperimentali adeguate, creare una situazione in cui la popolazione del livello più alto in energia E_n sia maggiore di quella di E_m ed ottenere così un'*inversione di popolazione*. Un materiale che può presentare inversione di popolazione si dice *attivo*.
- 4. La collocazione del mezzo laser tra due specchi, tende a generare un sistema di onde la cui lunghezza d'onda è data da $\lambda = 2Ln/N$; *L* è la distanza tra gli specchi, *n* l'indice di rifrazione e *N* un numero intero.

La distanza tra gli specchi è scelta in modo tale che solo (approssimativamente) l'onda corrispondente ad una lunghezza d'onda inclusa nella 'riga naturale' sopravvive alle multiple riflessioni. Come risultato, la larghezza della 'riga laser' può essere di molti ordini di grandezza inferiore a quella della riga naturale.



Figura XIV.14. schema a tre livelli (a) e a quattro livelli (b) di un laser. In entrambi gli schemi, la transizione spontanea tra il livello 3 e il livello 2 deve essere veloce (vita media piccola); la transizione spontanea tra il livello 2 e il livello 1 è opportuno che sia lenta (vita media grande).

I laser utilizzano, in genere, livelli quantici degli atomi o delle molecole (in gas o solidi). Per comprendere come funziona un laser che utilizza livelli energetici di un atomo, si considerino gli schemi della figura XIV.14. Il *pompaggio* dal livello 1 (schema a tre livelli) o dal livello 0 (schema a quattro livelli) può essere realizzato con elettroni o fotoni; nella figura sono indicate le caratteristiche richieste alle transizioni tra i varî livelli.

I laser a semiconduttore, che sono ampiamente usati negli strumenti e apparati di uso comune,¹ erano inizialmente costituiti da una giunzione p - n con materiali p ed n degeneri: all'equilibrio termico, il livello di Fermi giace nella banda di conduzione della parte n e nella banda di valenza nella parte p. Oggi si usano invece laser basati su doppie etero - giunzioni (una etero - giunzione è una giunzione tra due semiconduttori diversi). Il modo più semplice per realizzare l'inversione di popolazione è quello di fare passare attraverso la giunzione una corrente diretta. Nella regione attiva si crea un'inversione di popolazione e la ricombinazione tra elettroni e buche dà

¹Quali i sistemi di telecomunicazione in fibra ottica, i lettori di compact disc ed i puntatori luminosi.

Capitolo XIV. Glossario

origine, in condizioni opportune, all'emissione laser. Lo spessore della regione attiva di un laser a semiconduttore è dell'ordine del decimo di micron.

Piezoelettricità

Alcuni cristalli isolanti non possiedono un centro di inversione: ciò significa che non esiste un punto tale che, sostituendo $-\vec{r}$ ad \vec{r} , si ottiene lo stesso cristallo di partenza. Questi cristalli presentano il fenomeno della piezoelettricità. Tra i cristalli piezoelettrici, hanno una grande rilevanza tecnologica, per il loro basso costo, quelli di quarzo. Se una lamina di quarzo è sottoposta ad una compressione lungo una direzione, il quarzo si polarizza lungo questa direzione e il vettore polarizzazione \vec{P} risulta proporzionale alla pressione esercitata: l'effetto è massimo se la compressione avviene lungo l'asse cristallografico Y, detto 'meccanico'. Trasformando la compressione in trazione, cambia il segno della polarizzazione. Esiste anche il fenomeno inverso e questo è massimo se la differenza di potenziale è applicata lungo la direzione dell'asse 'elettrico' X.

Lamine di quarzo, costituenti il dielettrico di un condensatore, sono utilizzate in circuiti risonanti in modo tale che la frequenza di risonanza sia determinata dalla frequenza tipica di oscillazione piezoelettrica della lamina: negli 'orologi al quarzo' in commercio tale frequenza è di circa 30000 *Hz*. La frequenza di risonanza della lamina è inversamente proporzionale al suo spessore, che deve quindi essere il più uniforme possibile. La frequenza di risonanza della dilatazione termica, dalla temperatura.

Capitolo XV

Appendici matematiche

a cura di *Giancarlo Campagnoli*

XV.1 Vettori e tensori

E' opportuno richiamare la definizione elementare di grandezza vettoriale come di una *entità dotata di intensità, direzione e verso, geometricamente rappresentabile con una "freccia", cioè con un segmento AB orientato dal primo estremo A verso il secondo estremo B.* Essenziali nella nozione di vettore sono la lunghezza (*intensità o modulo* del vettore), la direzione ed il verso della freccia; trasportando *AB* parallelamente a sé stesso si ottiene un'altra *freccia* rappresentativa dello stesso vettore. La grandezza vettoriale tipica sulla quale sono modellate tutte le altre è lo *spostamento*; altri esempi di vettori sono la velocità, l'accelerazione, la forza, etc.

Nello spazio euclideo, supposto un sistema di assi cartesiani ortogonali x_1, x_2, x_3 , ogni spostamento $\vec{s} = AB$ (figura XV.1 a) è individuato dalle sue tre *componenti*

 $x_1(B) - x_1(A), x_2(B) - x_2(A), x_3(B) - x_3(A)$

che sono la differenza tra le coordinate di B e di A; si ha dunque una *corrispondenza biunivoca tra spostamenti e terne di numeri reali e lo stesso vale per qualunque altro vettore*.

Tuttavia, il punto di vista più interessante sulla nozione di vettore si ha in relazione alle sue proprietà di trasformazione, si ha cioè dal considerare

Capitolo XV. Appendici matematiche



Figura XV.1. vettore spostamento. a) in tre dimensioni; b) in due dimensioni con rotazione degli assi.

come variano le componenti quando si effettua una rotazione propria o impropria del sistema di riferimento; si rammenti che una rotazione impropria è una rotoinversione o rotoriflessione.

Si consideri nel piano (figura XV.1 b) un sistema *S* di assi cartesiani ortogonali x_1, x_2 con origine *O*. Le coordinate (x_1, x_2) di un punto *P* sono le *componenti* dello *spostamento OP*. Si ruoti ora il sistema rispetto ad una direzione ortogonale al foglio in modo da ottenere degli assi ruotati in senso antiorario, rispetto ad *S*, dell'angolo ϕ ; le componenti (x'_1, x'_2) di *OP* rispetto al nuovo sistema *S'* sono legate alle componenti (x_1, x_2) nel riferimento *S* dalle relazioni lineari

$$x'_{1} = x_{1}\cos\phi + x_{2}\sin\phi$$
(XV.1)
$$x'_{2} = -x_{1}\sin\phi + x_{2}\cos\phi$$

cioè

$$x'_i = \sum_{j=1}^{2} \alpha_{ij} x_j$$
 (*i* = 1,2)

dove $Det \alpha_{ij} = +1 e$

$$\sum_{i=1}^{2} \alpha_{il} \alpha_{ik} = \delta_{kl}, \qquad \sum_{i=1}^{2} \alpha_{li} \alpha_{ki} = \delta_{kl} \qquad (k, l = 1, 2)$$

Nello spazio 3 - dim si possono considerare riferimenti S' che si ottengono per rotazione, per inversione o per riflessione ed in generale per rotoriflessioni degli assi di S. Per le componenti di OP nei due riferimenti si hanno le relazioni

$$x'_{i} = \sum_{j=1}^{3} A_{ij} x_{j} \qquad (i = 1, 2, 3)$$
(XV.2)

dove A_{ij} sono gli elementi di una matrice 3×3 ortogonale e reale per la quale

$$A^{t}A = AA^{t} = 1, \quad detA_{ij} = \pm 1 \tag{XV.3}$$

dove <u>1</u> è la matrice unità e A^t indica la *trasposta* di $A[(A^t)_{ij} = A_{ji}]$. Si può infatti mostrare che una trasformazione lineare del tipo (XV.2), i cui coefficienti sono gli elementi di una qualsiasi matrice ortogonale, descrive una rotoriflessione del sistema di riferimento costituito da tre assi cartesiani ortogonali. Se $DetA_{ij} = +1$ la trasformazione corrisponde ad una rotazione propria degli assi mentre se $DetA_{ij} = -1$ si ha una rotazione impropria. Ad esempio, la trasformazione

$$x_1' = -x_1, \ x_2' = x_2, \ x_3' = x_3$$

è una rotazione impropria. I coefficienti in (XV.1) definiscono una rotazione propria attorno all'asse x_3 .

Si può verificare che il prodotto di trasformazioni del tipo (XV.2) è ancora una trasformazione dello stesso tipo; inoltre, poiché ogni trasformazione ha la sua inversa, essendo $DetA_{ij} \neq 0$, l'insieme delle trasformazioni (XV.2) costituisce un *gruppo*.

Risulta così evidente che, variando il sistema di riferimento, cambiano le componenti dello spostamento mentre il vettore rimane inalterato.

Terne di numeri reali (V_1, V_2, V_3) , (V'_1, V'_2, V'_3) associate, rispettivamente, a riferimenti cartesiani ortogonali *S* ed *S'*, e legate dalle stesse relazioni di trasformazione (XV.2) che valgono per lo *spostamento* (o per le *coordinate* di un punto), legate cioè dalle relazioni

$$V'_i = \sum_{j=1}^3 A_{ij} V_j$$
 (*i* = 1, 2, 3)

definiscono una grandezza vettoriale V la quale appare dunque come un'entità che è indipendente dal riferimento e che in ogni riferimento è rappresentata da una terna di numeri. I vettori, in quanto enti che non dipendono

Capitolo XV. Appendici matematiche

dal riferimento, risultano particolarmente convenienti nella formulazione delle leggi fisiche che non devono dipendere dalla scelte delle coordinate.

Le proprietà di trasformazione per rotazioni proprie ed improprie permettono di distinguere i *vettori polari* (o semplicemente *vettori*) dai *vettori assiali* o *pseudovettori*. Uno *pseudovettore* è un'entità le cui tre componenti ω_i si trasformano come le coordinate di un punto, cioè secondo le (XV.2), per tutte le rotazioni proprie del riferimento mentre non cambiano segno per inversione di un numero dispari di assi. Il prodotto vettoriale di due vettori polari è il prototipo di uno pseudovettore. Giova ripetere che le componenti di un vettore polare si trasformano invece secondo le (XV.2) sia per rotazioni proprie che improprie. Si può verificare che, ad esempio, la *velocità* di un punto è un vettore polare mentre la *velocità angolare* è uno pseudovettore.

Il concetto di *vettore* cartesiano come un insieme di tre componenti V_i (i = 1,2,3) si generalizza alla nozione di *tensore*. Si dice *tensore di rango 2* l'insieme di 3^2 componenti T_{ij} (i, j = 1,2,3), *tensore di rango 3* l'insieme di 3^3 componenti W_{ijk} (i, j, k = 1,2,3), *tensore di rango n* l'insieme di 3^n componenti $Z_{i_1i_2...i_n}$ ($i_1, i_2, ..., i_n = 1,2,3$).

Il *rango* del tensore è il *numero degli indici* che caratterizza la grandezza tensoriale. Essenziale nel concetto di tensore, come in quello di vettore, è il fatto che si possono definire in ogni arbitrario riferimento cartesiano ortogonale S' delle *componenti* T'_{ij} , W'_{ijk} legate alle componenti in S da

$$T'_{ij} = \sum_{l,m} A_{il}A_{jm}T_{lm} \qquad (i, j = 1, 2, 3)$$

$$W'_{ijk} = \sum_{l,m,n} A_{il}A_{jm}A_{kn}W_{lmn} \qquad (i, j, k = 1, 2, 3)$$

con analoghe relazioni per tensori di rango > 3. Il *vettore* è un *tensore di rango 1*, mentre lo *scalare* è un *tensore di rango 0*.

Anche i tensori, di cui i vettori sono un caso particolare, permettono la formulazione delle leggi fisiche in modo indipendente dal sistema di coordinate. A prescindere da questo importante aspetto concettuale, i tensori sono molto usati anche nello studio delle proprietà dei materiali. Un esempio interessante è il *tensore degli sforzi (stress)* che, nella teoria dell'elasticità, fornisce lo stato di tensione di un materiale mediante l'assegnazione in ogni punto di 3² quantità σ_{ij} (che si riducono a 6 per simmetria) le quali rappresentano le forze per unità di area che si esercitano attraverso 3 elementi piani che passano per il punto e sono a due a due perpendicolari. Un altro importante tensore, collegato a σ_{ij} , è il *tensore di deformazione (strain)* le cui componenti (adimensionali) D_{ij} individuano in ogni punto gli allungamenti e gli scorrimenti del materiale. Ricordiamo infine che nella sezione X.2 (pagina 294) si è visto che, in generale, la suscettività elettrica di un materiale è rappresentata da un tensore χ_{ij} .

XV.1.1 Vettori e tensori nello spazio - tempo

Una generalizzazione importante della nozione di vettore si ha nello spazio tempo della relatività ristretta, in relazione alle *trasformazioni di Lorentz* tra sistemi inerziali. Ci limitiamo in queste note a considerare le particolari *trasformazioni di Lorentz* che legano due sistemi Σ e Σ' che hanno terne ortogonali di assi spaziali equiorientati (figura XV.2) e dove Σ' trasla con velocità V rispetto a Σ secondo la direzione positiva di x_1 . Trasformazioni di Lorentz più generali legano sistemi di riferimento in moto relativo uniforme con velocità e con assi comunque orientati; esse possono includere anche l'inversione della variabile temporale.



Figura XV.2. il sistema di riferimento Σ' trasla con velocità *V* rispetto al sistema di riferimento Σ lungo la direzione positiva dell'asse x_1 .

Supposto che per t = t' = 0 le origini coincidano, si hanno le relazioni

$$\begin{aligned} x_1' &= \Gamma x_1 + i\Gamma \frac{V}{c} x_4 \\ x_2' &= x_2 \\ x_3' &= x_3 \\ x_4' &= -i\Gamma \frac{V}{c} x_1 + \Gamma x_4 \end{aligned}$$

dove $x_4 = ict e x'_4 = ict' e$

$$\Gamma = \left[1 - \frac{V^2}{c^2}\right]^{-1/2}$$

Queste relazioni possono essere sinteticamente scritte nella forma

$$x'_{\mu} = \sum_{\nu=1}^{4} a_{\mu\nu} x_{\nu} \qquad (\mu = 1, 2, 3, 4)$$
(XV.4)

I coefficienti $a_{\mu\nu}$ nelle (XV.4) sono elementi di una matrice per la quale

$$a^t a = a a^t = \underline{1}, \qquad Det a_{\mu\nu} = 1$$

Nella sezione II.8 (pagina 44), è stata adottata una convenzione diversa da quella implicita nelle (XV.4). Alla componente temporale dello spazio - tempo è associato un indice diverso (0 nella sezione II.8, 4 in questa); inoltre la coordinata temporale è immaginaria: con questa scelta il quadrato dell'intervallo tra due punti dello spazio - tempo si scrive

$$ds^{2} = dx_{1}^{2} + dx_{2}^{2} + dx_{3}^{2} + dx_{4}^{2} = dx_{1}^{2} + dx_{2}^{2} + dx_{3}^{2} - c^{2}dt^{2}$$

Naturalmente, le due diverse convenzioni non cambiano la descrizione dei fenomeni.

Poiché nelle (XV.4) *Det* $a_{\mu\nu} = +1$, le trasformazioni si dicono *proprie*; inoltre, poiché $a_{44} \ge +1$, esse sono *ortocrone*, cioè la direzione del tempo nei due riferimenti è la stessa.

Le (XV.4) possono essere interpretate come una *rotazione* nel piano x_1x_4 dello spazio - tempo. Infatti, ponendo tanh $\lambda = V/c$ le (XV.4) si scrivono nella forma

$$\begin{aligned} x_1' &= \cosh \lambda \, x_1 + i \sinh \lambda \, x_4 \\ x_2' &= x_2 \\ x_3' &= x_3 \\ x_4' &= -i \sinh \lambda \, x_1 + \cosh \lambda \, x_4 \end{aligned}$$

da confrontarsi con le formule (XV.1) della rotazione nel piano $x_1 x_2$.

Ogni quantità **V** caratterizzata per ogni sistema di riferimento inerziale Σ da componenti V_{μ} connesse alle componenti in Σ' dalle relazioni ($a_{\mu\nu}$ sono i coefficienti della XV.4)

$$V'_{\mu} = \sum_{\nu=1}^{4} a_{\mu\nu} V_{\nu}$$
 ($\mu = 1, 2, 3, 4$)

è un quadrivettore.

Un esempio rilevante di quadrivettore è la quantità impulso definita da

$$p_{j} = mu_{j} \left[1 - \frac{u^{2}}{c^{2}} \right]^{-1/2} \qquad (j = 1, 2, 3)$$

$$p_{4} = imc \left[1 - \frac{u^{2}}{c^{2}} \right]^{-1/2}$$

dove u_j sono le componenti 3 - dim della velocità di un punto materiale in movimento rispetto a Σ , $u^2 = u_1^2 + u_2^2 + u_3^2$ e *m* è la massa a riposo. Per verificare che le 4 componenti p_{μ} definiscono un quadrivettore occorre in via preliminare ricordare la relazione tra le velocità di un punto in due riferimenti inerziali $\Sigma \in \Sigma'$. Indicando con

$$x_j = x_j(x_4), \ x'_j = x'_j(x'_4)$$
 $(j = 1, 2, 3)$

le leggi di moto in Σ e Σ' , le velocità sono rispettivamente

$$u_j = ic \frac{dx_j}{dx_4}, \ u'_j = ic \frac{dx'_j}{dx'_4} \qquad (j = 1, 2, 3)$$

Dalle (XV.4) si ha

$$u_{1}' = ic\frac{dx_{1}'}{dx_{4}'} = ic\frac{dx_{1}'}{dx_{4}} \left[\frac{dx_{4}'}{dx_{4}}\right]^{-1} = (u_{1} - V) \left[1 - \frac{Vu_{1}}{c^{2}}\right]^{-1}$$
$$u_{2}' = ic\frac{dx_{2}'}{dx_{4}'} = ic\frac{dx_{2}'}{dx_{4}} \left[\frac{dx_{4}'}{dx_{4}}\right]^{-1} = u_{2}\Gamma^{-1} \left[1 - \frac{Vu_{1}}{c^{2}}\right]^{-1}$$
$$u_{3}' = ic\frac{dx_{3}'}{dx_{4}'} = ic\frac{dx_{3}'}{dx_{4}} \left[\frac{dx_{4}'}{dx_{4}}\right]^{-1} = u_{3}\Gamma^{-1} \left[1 - \frac{Vu_{1}}{c^{2}}\right]^{-1}$$

Da qui si ottengono le relazioni tra le componenti $p_{\,\mu}$
e $p_{\,\mu}^{\,\prime}.$ Si ha

$$p_1' = \Gamma p_1 + i \Gamma \frac{V}{c} p_4$$

$$p_2' = p_2$$

$$p_3' = p_3$$

$$p_4' = -i \Gamma \frac{V}{c} p_1 + \Gamma p_4$$

Importante in elettromagnetismo è il *quadrivettore densità di corrente* definito da

$$J_{k} = \rho_{0} u_{k} \left[1 - \frac{u^{2}}{c^{2}} \right]^{-1/2} \qquad (k = 1, 2, 3)$$
$$J_{4} = i c \rho_{0} \left[1 - \frac{u^{2}}{c^{2}} \right]^{-1/2}$$

dove ρ_0 è la densità di carica a riposo e le u_k sono le componenti 3 - dim della velocità della carica.

Si può mostrare che anche l'operatore di componenti

$$\frac{\partial}{\partial x_1}$$
, $\frac{\partial}{\partial x_2}$, $\frac{\partial}{\partial x_3}$, $\frac{\partial}{\partial x_4}$

si trasforma come un quadrivettore.

La nozione di *tensore* si generalizza nello spazio - tempo con una definizione analoga ai tensori nello spazio euclideo 3 - dim. Definiamo infatti *tensore di rango n* una quantità **T** caratterizzata in ogni sistema inerziale Σ da componenti $T_{\mu_1\mu_2...\mu_n}$ legate alle componenti $T'_{\nu_1\nu_2...\nu_n}$ in Σ' dalle relazioni

$$T'_{\nu_1\nu_2...\nu_n} = \sum_{\mu_1\mu_2...\mu_n} a_{\nu_1\mu_1} a_{\nu_2\mu_2} \dots a_{\nu_n\mu_n} T_{\mu_1\mu_2...\mu_n}$$

dove gli $a_{\mu\nu}$ sono i coefficienti di (XV.4). Tutti gli indici greci assumono i valori 1,2,3,4 e gli indici della somma variano da 1 a 4.

In elettromagnetismo, si verifica che

$$F_{\mu\nu} = \begin{cases} 0 & B_3 & -B_2 & -(i/c)E_1 \\ -B_3 & 0 & B_1 & -(i/c)E_2 \\ B_2 & -B_1 & 0 & -(i/c)E_3 \\ (i/c)E_1 & (i/c)E_2 & (i/c)E_3 & 0 \end{cases}$$

costruito con le componenti 3 - dim del campo elettrico E_j e del campo magnetico B_k , esprimibili come opportune combinazioni lineari di derivate del quadripotenziale, è un tensore detto *tensore del campo elettromagnetico*.

Il tensore del campo è antisimmetrico ($F_{\mu\nu} = -F_{\nu\mu}$) e permette la formulazione sintetica ed indipendente dal riferimento delle equazioni di Maxwell nel vuoto:

$$\sum_{\nu} \frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x_{\nu}} = \mu_0 J_{\mu} \qquad (\mu = 1, 2, 3, 4)$$
 (XV.5)

$$\frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x_{\lambda}} + \frac{\partial F_{\lambda\mu}}{\partial x_{\nu}} + \frac{\partial F_{\nu\lambda}}{\partial x_{\mu}} = 0 \qquad (\mu, \nu, \lambda = 1, 2, 3, 4)$$
(XV.6)

Infatti, le (XV.5) sono una scrittura concisa delle equazioni di Maxwell

$$div\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \qquad rot\vec{B} = \mu_0\vec{J} + \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$$

mentre le (XV.6) per μ , ν , λ = 1, 2, 3; 2, 3, 4; 3, 4, 1; 4, 1, 2 forniscono le equazioni

$$div\vec{B} = 0$$
 $rot\vec{E} = -\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$

I tensori possono essere definiti in spazi più generali dello spazio euclideo 3 - dim o dello spazio - tempo della relatività ristretta. Negli spazi curvi della geometria Riemanniana occorre distinguere tra *componenti controvarianti (con indici in alto)* e *componenti covarianti (con indici in basso)*. Anche nello spazio euclideo 3 - dim i tensori possono avere componenti controvarianti e componenti covarianti; infatti, essi possono essere definiti in riferimenti con assi non ortogonali ed anche in coordinate curvilinee. Nei riferimenti cartesiani ortogonali le componenti controvarianti coincidono con le componenti covarianti e la posizione degli indici non è significativa.

XV.1.2 Algebra tensoriale

Le definizioni seguenti valgono anche per i *vettori* che, come ripetutamente ricordato, sono *tensori di rango 1*. Le lettere greche μ , v,... usate come indici assumono, come sarà stato osservato, i valori 1,2,3,4 e questa è una notazione conveniente per trattare vettori e tensori nello spazio - tempo della relatività ristretta; le definizioni valgono tuttavia anche per tensori nello spazio euclideo ordinario dove gli indici assumono i valori 1,2,3. Volendo significare che i tensori sono nello spazio 3 - dim gli indici solitamente usati sono i, j, k, l.... Si osservi inoltre che, in letteratura, la somma sugli indici ripetuti è quasi sempre sottintesa (convenzione di Einstein).

Si definisce *prodotto di un numero reale* α per un tensore $T_{\mu_1\mu_2...\mu_n}$ di *rango n* l'insieme delle quantità

$$(\alpha T)_{\mu_1\mu_2\dots\mu_n} = \alpha T_{\mu_1\mu_2\dots\mu_n}$$

La somma di due tensori $T_{\mu_1\mu_2...\mu_n}$ e $V_{\mu_1\mu_2...\mu_n}$ di rango n è l'insieme delle quantità

$$(T+V)_{\mu_1\mu_2...\mu_n} = T_{\mu_1\mu_2...\mu_n} + V_{\mu_1\mu_2...\mu_n}$$

Si definisce *prodotto tensoriale* o *esterno* di un tensore $T_{\mu_1\mu_2...\mu_n}$ di *rango n* per un tensore $V_{\mu_1\mu_2...\mu_m}$ di *rango m* l'insieme delle quantità

$$(TV)_{\mu_1\mu_2...\mu_{n+m}} = T_{\mu_1\mu_2...\mu_n}V_{\mu_{n+1}...\mu_{n+m}}$$

Da due tensori di *rango* (n + r) e *rango* (m + r), rispettivamente, si può costruire la *contrazione* cioè la quantità con (n + m) componenti

$$C_{\mu_1\dots\mu_n\nu_1\dots\nu_m} = \sum_{\lambda_1\dots\lambda_r} T_{\mu_1\dots\mu_n\lambda_1\dots\lambda_r} V_{\nu_1\nu_2\dots\nu_m\lambda_1\lambda_2\dots\lambda_r}$$

Si verifica facilmente che il risultato di queste operazioni è ancora un *tenso-re*.

La nozione di *prodotto tensoriale*, o *prodotto esterno*, permette di costruire nuovi tensori da tensori dati; in particolare nel caso di due vettori U_{μ} e V_{ν} il *prodotto esterno* è il tensore di *rango 2*

$$T_{\mu\nu} = U_{\mu}V_{\nu}$$

La combinazione

$$R_{\mu\nu} = U_{\mu}V_{\nu} - U_{\nu}V_{\mu}$$

definisce un tensore emisimmetrico o antisimmetrico per il quale

$$R_{\nu\mu} = -R_{\mu\nu}$$

Nel caso dello spazio 3 - dim il tensore emisimmetrico

$$R_{ik} = U_i V_k - U_k V_i \qquad (i, k = 1, 2, 3)$$

possiede solo 3 componenti indipendenti con le quali è possibile costruire uno pseudovettore ω_k . Ponendo infatti

$$R_{23} = \omega_1, R_{31} = \omega_2, R_{12} = \omega_3$$

si riconosce che ω_k sono le componenti del *prodotto vettoriale* della elementare algebra dei vettori

$$\vec{\omega} = \vec{U} \wedge \vec{V}$$

Si costata immediatamente che le componenti del prodotto vettoriale *non* cambiano segno per inversione degli assi al contrario delle coordinate di un punto che invece cambiano segno. Nello spazio - tempo a 4 - dim della relatività ristretta un tensore emisimmetrico $R_{\mu\nu}$ possiede 6 componenti indipendenti e *non può* essere messo in corrispondenza con un quadrivettore.

Vogliamo ora porre attenzione all'operazione di *contrazione* per osservare che una particolare importante contrazione si ha tra due tensori dello stesso rango quando si consideri la somma su tutti gli indici

$$C = \sum_{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_n} T_{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_n} V_{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_n}$$

Si dice che tutti gli indici sono stati *saturati* ed il risultato è una quantità invariante. Il *prodotto scalare* di due vettori

$$\sum_{\mu}V_{\mu}U_{\mu}$$

è una operazione di contrazione in cui l'indice è saturato; in particolare il prodotto scalare di un vettore per sé stesso è un invariante scalare. Ad esempio, in relatività ristretta si verifica immediatamente che per il quadrivettore impulso p_{μ} si ha

$$\sum_{\mu} p'_{\mu} p'_{\mu} = \sum_{\mu} p_{\mu} p_{\mu} = -m^2$$

e dunque che la massa è un invariante relativistico.

Per il quadrivettore (dx_1, dx_2, dx_3, dx_4) che definisce un intervallo infinitesimo tra due eventi nello spazio - tempo della relatività speciale si ha l'invarianza dell'intervallo

$$\sum_{\mu} dx'_{\mu} dx'_{\mu} = \sum_{\mu} dx_{\mu} dx_{\mu} = ds^{2}$$

Se T_{μ} è un quadrivettore si ha ancora che

$$\sum_{\mu} \frac{\partial T'_{\mu}}{\partial x'_{\mu}} = \sum_{\mu} \frac{\partial T_{\mu}}{\partial x_{\mu}}$$

cioè che la *divergenza* di un quadrivettore in relatività ristretta è un invariante.

XV.1.3 Campi tensoriali

Una quantità tensoriale **T** può dipendere dalla posizione nello spazio - tempo. Le componenti $T_{v_1v_2...v_n}$ e $T'_{\mu_1\mu_2...\mu_n}$ in $\Sigma \in \Sigma'$, rispettivamente, dipendono dalle coordinate $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ e $x' = (x'_1, x'_2, x'_3, x'_4)$. Se la relazione tra le componenti è

$$T'_{\mu_1\mu_2...\mu_n}(x') = \sum_{\nu_1\nu_2...\nu_n} a_{\mu_1\nu_1} a_{\mu_2\nu_2} \cdots a_{\mu_n\nu_n} T_{\nu_1\nu_2...\nu_n}(x)$$

la quantità **T** è un *campo tensoriale*. Il tensore $F_{\mu\nu}$ dell'elettromagnetismo, prima citato, è in effetti un campo tensoriale.

Capitolo XV. Appendici matematiche

XV.2 Campi scalari e vettoriali

I campi scalari e vettoriali sono campi tensoriali particolarmente semplici. Le considerazione che seguono, utili nella fisica elementare, sono per semplicità limitate allo spazio ordinario a tre dimensioni. Una funzione $f = f(x, y, z) \equiv f(\vec{r})$ che associa ad ogni punto $\vec{r} \equiv (x, y, z)$ di una regione dello spazio un numero reale o complesso definisce un *campo scalare*. Campi scalari di interesse fisico elementare sono definiti da funzioni a valori reali che sono sufficientemente regolari in una o più regioni, anche disgiunte, dello spazio. Possono essere tuttavia presenti delle singolarità costituite da punti in cui le funzioni divergono.

Per ogni valore f_{λ} il luogo dei punti per cui:

$$f(x, y, z) = f_{\lambda}$$

definisce una superficie detta *ad* f - *costante*. Al variare di f_{λ} si ottiene l'insieme \mathscr{F} delle superficî ad f - costante. Nella maggior parte dei casi di interesse fisico gli elementi di \mathscr{F} sono indicati con nomi specifici in relazione alla particolare natura del campo scalare. Ad esempio, se f è la funzione $T \equiv T(x, y, z)$ che associa ad ogni punto (x, y, z) la temperatura in quel punto, le superficî dell'insieme \mathscr{F} sono superficî *isotermiche*, ciascuna caratterizzata da un valore T_{λ} della temperatura. Allo stesso modo si possono definire le superficî *isobariche* che caratterizzano i punti che hanno la stessa pressione atmosferica o le superficî *equipotenziali* ciascuna delle quali è l'insieme dei punti aventi lo stesso potenziale (elettrostatico, gravitazionale, ecc...).

Accanto ai campi scalari sono importanti i *campi vettoriali* che sono definiti associando un vettore (cioè le sue tre componenti scalari) ad ogni punto $\vec{r} \equiv (x, y, z)$:

$$\vec{v} = \vec{v}(x, y, z) = v_x(x, y, z)\hat{\imath} + v_y(x, y, z)\hat{\jmath} + v_z(x, y, z)k$$

XV.2.1 L'operatore gradiente

Particolarmente notevole è il campo vettoriale che si può ricavare da un campo scalare reale f = f(x, y, z) mediante l'operazione di *gradiente*. Si consideri la superficie ad *f* - *costante* passante per un generico punto *P* e si confrontino le variazioni, rispetto a *P*, della funzione *f* nelle direzioni dei versori $\hat{u}_s \in \hat{u}_n$ (figura XV.3), dove \hat{u}_n definisce la perpendicolare alla



Figura XV.3. la definizione di gradiente. $\vec{u}_n \in \vec{u}_s$ sono versori.

superficie in *P*. Si ha:

$$\lim_{S \to P} \frac{f(S) - f(P)}{PS} =$$

$$= \lim_{(N,S) \to P} \frac{[f(N) - f(P)] + [f(S) - f(N)]}{PN} \cos\theta$$

$$= \lim_{N \to P} \frac{f(N) - f(P)}{PN} \cos\theta + \lim_{(N,S) \to P} \frac{NS}{PN} \frac{f(S) - f(N)}{NS} \cos\theta$$

$$= \lim_{N \to P} \frac{f(N) - f(P)}{PN} \cos\theta + \lim_{(N,S) \to P} \frac{f(S) - f(N)}{NS} \sin\theta$$

Il primo membro è, per definizione, la derivata di f nella direzione \hat{u}_s e un analogo significato si ha per i limiti al secondo membro da cui segue:

$$\left(\frac{df}{ds}\right)_{P} = \left(\frac{df}{dn}\right)_{P}\cos\theta + \left(\frac{df}{dt}\right)_{P}\sin\theta$$

L'ultimo termine, che indica la derivata nella direzione \hat{u}_t ortogonale a \hat{u}_n nel piano di \hat{u}_n e \hat{u}_s , è nullo se le superficî ad f - costante hanno (come supponiamo) carattere di regolarità. Si ha dunque la relazione:

$$\frac{df}{ds} = \frac{df}{dn}\cos\theta$$

la quale identifica la direzione normale alle superficî ad f - costante come la direzione di più rapida variazione della funzione. In altri termini: *la variazione della funzione f per unità di spostamento nella direzione generica* \hat{u}_s è

Capitolo XV. Appendici matematiche

uguale alla variazione per unità di spostamento nella direzione normale \hat{u}_n moltiplicata per il coseno dell'angolo tra le due direzioni.

Se per ogni $P \equiv (x, y, z)$ del campo definiamo un vettore

$$\operatorname{grad} f = \frac{df}{dn} \,\hat{u}_n$$

che ha per direzione \hat{u}_n e per modulo |df/dn|, si ha:

$$\frac{df}{ds} = \operatorname{grad} f \cdot \hat{u}_s = \frac{df}{dn} \cos\theta \qquad (XV.7)$$

Dalla definizione si vede che il verso del vettore *gradiente* è quello di \hat{u}_n o di $-\hat{u}_n$, a seconda che df sia positivo o negativo. In ogni punto, il vettore gradiente è ortogonale alla superficie f_λ che passa per quel punto ed è rivolto nel verso dell'incremento della funzione f. Il campo vettoriale $\vec{V}(x, y, z) = grad f(x, y, z)$ può essere agevolmente caratterizzato in modo analitico. Infatti, considerando in successione:

$$\hat{u}_s = \hat{\imath}, \quad \hat{u}_s = \hat{\jmath}, \quad \hat{u}_s = \hat{k}$$

si trova da (XV.7):

$$\frac{\partial f}{\partial x} = (\operatorname{grad} f) \cdot \hat{\imath} = (\operatorname{grad} f)_x$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = (\operatorname{grad} f) \cdot \hat{\jmath} = (\operatorname{grad} f)_y$$
$$\frac{\partial f}{\partial z} = (\operatorname{grad} f) \cdot \hat{k} = (\operatorname{grad} f)_z$$

Nel linguaggio corrente della fisica oltre che di *vettore* (campo vettoriale) *gradiente* si parla di *operatore gradiente* intendendosi con questa espressione l'insieme delle operazioni matematiche da eseguire su un campo scalare in modo da costruire il vettore (campo vettoriale) gradiente. L'*operatore gradiente* è indicato con il simbolo *grad* o, anche, con ∇ e si ha la definizione:

$$grad \equiv \nabla = \hat{\imath} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{\jmath} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{k} \frac{\partial}{\partial z}$$

Come esempio si consideri il campo scalare definito dal potenziale elettrostatico associato ad una carica puntiforme Q situata in $\vec{r}' \equiv (x', y', z')$ (figura XV.4). Il potenziale rispetto ad un punto di riferimento posto all'infinito è:



Figura XV.4. il potenziale elettrostatico di una carica puntiforme.

$$V(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{\sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}}$$

Le superficî equipotenziali, definite da

$$\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} = V_{\lambda} = costante$$

sono delle sfere aventi centro nel punto \vec{r}' . Le componenti cartesiane del vettore gradiente sono:

$$\begin{split} (\nabla V)_x &= \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right] = -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{x - x'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \\ (\nabla V)_y &= \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right] = -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{y - y'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \\ (\nabla V)_z &= \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right] = -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{z - z'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \end{split}$$

e dunque:

$$\nabla V = -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{(\vec{r} - \vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|^3}$$

Il vettore gradiente, come si vede, è ortogonale alle superficî equipotenziali, diretto come il raggio delle sfere e volto verso il centro o verso l'esterno a seconda che Q > 0 o Q < 0. Poiché il campo elettrostatico della carica Q è:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

si ha:

$$\vec{E} = -\nabla V$$

Capitolo XV. Appendici matematiche

Una carica puntiforme q posta in \vec{r} è assoggettata ad una forza

$$\vec{F}(\vec{r}) = q\vec{E}(\vec{r}) = -\nabla(qV) = -\nabla U$$

La funzione U = qV è l'energia potenziale della carica q nel campo generato da Q. Dunque, il potenziale V è l'energia potenziale per unità di carica e si ha

$$V = \frac{U}{q}$$

XV.2.2 L'operatore divergenza

Dato un campo vettoriale

$$\vec{v} = \vec{v}(x, y, z) = v_x(x, y, z)\hat{\imath} + v_y(x, y, z)\hat{\jmath} + v_z(x, y, z)k$$

se ne può calcolare la *divergenza* e si ha la definizione:

$$div\,\vec{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$$

 $div \vec{v}$ è un campo scalare che si ottiene dal campo vettoriale $\vec{v}(x, y, z)$ mediante le operazioni di derivazione indicate. L'operatore div permette di associare un campo scalare ad ogni campo vettoriale. Dal punto di vista formale $div \vec{v}$ può essere considerato come il prodotto scalare tra l'operatore ∇ ed il vettore \vec{v} . Infatti:

$$div\,\vec{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = \left(\hat{\imath}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{\jmath}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial}{\partial z}\right) \cdot \\ \cdot \left(v_x\hat{\imath} + v_y\hat{\jmath} + v_z\hat{k}\right) = \nabla \cdot \vec{v}$$

Risulta perciò conveniente la notazione:

$$div\equiv\nabla\cdot$$

Campi vettoriali per i quali $\nabla \cdot \vec{v} = 0$ sono detti *solenoidali*.

XV.2.3 L'operatore rotore

L'operazione di gradiente permette sempre di associare un campo vettoriale ad un campo scalare. In generale, però, un campo vettoriale *non* \dot{e} il gradiente di un campo scalare. In altri termini, per un campo vettoriale qualsiasi:

$$\vec{v}(x, y, z) = v_x(x, y, z)\hat{\imath} + v_y(x, y, z)\hat{\jmath} + v_z(x, y, z)\hat{k}$$

può *non* esistere alcuna funzione (scalare) f(x, y, z) le cui derivate parziali vengano a coincidere con le componenti v_x, v_y, v_z . In altri termini, le relazioni

$$\frac{\partial f}{\partial x} = v_x(x, y, z)$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = v_y(x, y, z)$$
$$\frac{\partial f}{\partial z} = v_z(x, y, z)$$

possono non essere verificate da alcuna funzione f. Una *condizione necessaria* per l'esistenza di f(x, y, z) è che sia:

$$\frac{\partial v_z}{\partial y} = \frac{\partial v_y}{\partial z}, \quad \frac{\partial v_x}{\partial z} = \frac{\partial v_z}{\partial x}, \quad \frac{\partial v_x}{\partial y} = \frac{\partial v_y}{\partial x}$$

E' senz'altro opportuno introdurre l'operatore $rot \equiv \nabla \times$ che associa ad ogni campo vettoriale un altro campo vettoriale:

$$rot \vec{v} \equiv \nabla \times \vec{v} = \left(\hat{i}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{j}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial}{\partial z}\right) \times \left(v_x\hat{i} + v_y\hat{j} + v_z\hat{k}\right)$$
$$\equiv \begin{pmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\\partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z\\v_x & v_y & v_z\end{pmatrix}$$

Condizione necessaria perché un campo $\vec{v}(x, y, z)$ sia il gradiente di una funzione scalare è che $\vec{v}(x, y, z)$ sia irrotazionale, cioè che si abbia:

$$\nabla \times \vec{v} = 0$$

XV.2.4 Campi conservativi

I campi vettoriali che sono esprimibili come il gradiente di una funzione scalare sono noti come *campi conservativi*. In modo equivalente si può definire *conservativo* un campo la cui *circuitazione*, cioè l'integrale lungo una linea chiusa, è nulla, qualunque sia la linea:

$$\oint \vec{v} \cdot \vec{dl} = 0$$

Questo implica che

$$\int_{A}^{B} \vec{v} \cdot \vec{dl}$$

è indipendente dalla linea aperta scelta per eseguire l'integrale il cui valore viene così a dipendere *solo* dai punti *A* e *B*. L'integrale si può allora espri-



Figura XV.5. per la definizione di energia potenziale.

mere come differenza tra i valori che una funzione scalare assume in B ed in A. Si ha pertanto:

$$\int_{A}^{B} \vec{v} \cdot \vec{dl} = f(B) - f(A)$$

Per uno spostamento infinitesimo si può scrivere:

$$\vec{v} \cdot \vec{dl} = df$$
$$\vec{v} \cdot \hat{u}_l dl = df \Rightarrow \vec{v} \cdot \hat{u}_l = \frac{df}{dl} = \operatorname{grad} f \cdot \hat{u}_l$$

da cui segue:

$$\vec{v}(x, y, z) = \operatorname{grad} f(x, y, z)$$

La nozione di campo vettoriale conservativo è particolarmente utile per i campi di forza $\vec{F} = \vec{F}(x, y, z)$. In questo caso l'integrale di linea ha il significato di *lavoro* compiuto dalla forza mentre la funzione scalare associata è l'*energia potenziale* U(x, y, z) del campo e si ha, per definizione (figura XV.5):

$$U(P) = \mathscr{L}_{PP_0} = \int_P^{P_0} \vec{F} \cdot \vec{ds}$$

dove P_0 è un punto di riferimento scelto ad arbitrio. Si ha pertanto:

$$\mathscr{L}_{P_0A} + \mathscr{L}_{AB} + \mathscr{L}_{BP_0} = 0$$

da cui

$$\int_{A}^{B} \vec{F} \cdot \vec{ds} = \mathcal{L}_{AB} = -\mathcal{L}_{BP_0} - \mathcal{L}_{P_0A} = \mathcal{L}_{AP_0} - \mathcal{L}_{BP_0} = U(A) - U(B)$$

Un punto di riferimento differente porta a definire una differente energia potenziale U'; è però immediato costatare che:

$$U'(A) - U'(B) = U(A) - U(B)$$

Per uno spostamento infinitesimo:

$$d\mathcal{L} = \vec{F}(x, y, z) \cdot \vec{ds} = -dU$$

$$\Rightarrow \vec{F} \cdot \hat{u}_s \, ds = -dU, \qquad \vec{F} \cdot \hat{u}_s = -\frac{dU}{ds} = -grad \, U \cdot \hat{u}_s$$

da cui:

$$\vec{F}(x, y, z) = -\operatorname{grad} U(x, y, z)$$

XV.2.5 L'operatore ∇^2 (di Laplace)

Si consideri la divergenza di un campo vettoriale conservativo. Poiché un campo conservativo è il gradiente di uno scalare f, si scrive:

$$div \vec{v} = div grad f = \nabla \cdot \nabla f = \nabla^2 f$$

La forma dell'operatore ∇^2 in coordinate cartesiane è:

$$\nabla^2 = \nabla \cdot \nabla$$

= $\left(\hat{i}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{j}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial}{\partial z}\right) \cdot \left(\hat{i}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{j}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)$
= $\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$

Per quanto riguarda i calcoli che portano alla espressione esplicita di ∇^2 in coordinate cartesiane, ricordiamo che, ad esempio, si ha:

$$\left(\hat{\imath}\frac{\partial}{\partial x}\right) \cdot \left(\hat{\imath}\frac{\partial}{\partial x}\right) = \hat{\imath} \cdot \frac{\partial\hat{\imath}}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{\imath} \cdot \hat{\imath}\frac{\partial^2}{\partial x^2} = \frac{\partial^2}{\partial x^2}$$
$$\left(\hat{\imath}\frac{\partial}{\partial x}\right) \cdot \left(\hat{\jmath}\frac{\partial}{\partial y}\right) = \hat{\imath} \cdot \frac{\partial\hat{\jmath}}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{\imath} \cdot \hat{\jmath}\frac{\partial^2}{\partial x\partial y} = 0$$

etc...

Capitolo XV. Appendici matematiche

Con la notazione adottata, in cui il ∇ è trattato formalmente come un vettore, l'operatore di Laplace ($\nabla scalar \nabla$) appare, per una estensione di linguaggio, come *la somma dei quadrati delle componenti dell'operatore gradiente*. Questo accade non solo perché i versori $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ sono ortogonali, ma anche perché essi non dipendono dal punto. In altri sistemi di coordinate, ad esempio in coordinate polari, alla stessa notazione *intrinseca* di ∇ e di $\nabla \cdot \nabla$ corrispondono espressioni più elaborate.

L'equazione differenziale alle derivate parziali omogenea

$$\nabla^2 \varphi(x, y, z) = 0$$

dove φ è la funzione incognita, è nota come *equazione di Laplace*. La corrispondente equazione non omogenea

$$\nabla^2 \varphi(x, y, z) = s(x, y, z)$$

è invece l'*equazione di Poisson*. E' proprio nello studio delle soluzioni di queste equazioni che può essere utile esprimere ∇^2 in coordinate diverse dalle cartesiane.

XV.2.6 Gli operatori differenziali in coordinate polari

La soluzione di numerosi problemi di fisica matematica è facilitata dalla possibilità di esprimere gli operatori *grad*, *div*, *rot*, *div grad* in coordinate non cartesiane. Molto spesso, infatti, si hanno proprietà di simmetria che permettono notevoli semplificazioni. Le coordinate polari, in particolare, sono adatte a problemi bidimensionali aventi simmetria circolare o a problemi tridimensionali aventi simmetria sferica. L'operatore fondamentale è

$$grad \equiv \hat{\imath}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{\jmath}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial}{\partial z}$$

da cui possono essere costruiti gli altri operatori differenziali. L'espressione del ∇ in coordinate polari permette di scrivere gli altri operatori nelle stesse coordinate. Per semplicità, e per illustrare il metodo di derivazione, consideriamo dapprima in dettaglio il caso bidimensionale e cerchiamo l'espressione in coordinate polari piane del gradiente in due dimensioni

$$\nabla \equiv \hat{i}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{j}\frac{\partial}{\partial y}$$

In coordinate polari piane la posizione di un punto è individuata mediante la intersezione di una circonferenza di raggio ρ e di una retta che forma un

angolo θ con l'asse x. Si ha:

$$\begin{aligned} x &= \rho \cos \theta \\ y &= \rho \sin \theta \end{aligned} \tag{XV.8}$$

Ad ogni punto *P* del piano sono associati due versori \hat{u}_{ρ} e \hat{u}_{θ} che sono ortogonali alla circonferenza ed alla retta di anomalia θ passante per *P* (figura XV.6).



Figura XV.6. coordinate e versori polari in due dimensioni.

A differenza dei versori cartesiani $\hat{i} \in \hat{j}$, i versori polari $\hat{u}_{\rho} \in \hat{u}_{\theta}$ risultano essere dipendenti dal punto e si ha:

$$\left\{\hat{u}_{\rho} = \cos\theta \,\hat{\imath} + \sin\theta \,\hat{\jmath}\,\hat{u}_{\theta} = -\sin\theta \,\hat{\imath} + \cos\theta \,\hat{\jmath} \tag{XV.9}\right\}$$

$$\{\hat{\imath} = \cos\theta \,\hat{u}_{\rho} - \sin\theta \,\hat{u}_{\theta}\,\hat{\jmath} = \sin\theta \,\hat{u}_{\rho} + \cos\theta \,\hat{u}_{\theta} \tag{XV.10}$$

Ogni vettore definito in un punto generico del piano può essere espresso sia in coordinate cartesiane che in coordinate polari

$$\vec{v} = v_x \hat{\imath} + v_y \hat{\jmath} = v_\rho \, \hat{u}_\rho + v_\theta \, \hat{u}_\theta$$

dove v_{ρ} , v_{θ} indicano le componenti polari di \vec{v} . Per il vettore posizione \vec{r} si ha:

 $\vec{r} = \rho \, \hat{u}_{\rho}$

Per esprimere il ∇ in coordinate polari occorre scrivere $\partial/\partial x \in \partial/\partial y$ in funzione di $\rho \in \theta$ ed utilizzare la relazione tra versori cartesiani e polari. Può essere opportuno, per chiarezza, considerare una funzione scalare ausiliaria $f(x, y) = f(x(\rho, \theta), y(\rho, \theta))$:

$$\frac{\partial f}{\partial \rho} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \rho} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \rho}$$
$$\frac{\partial f}{\partial \theta} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \theta}$$

Omettendo l'indicazione esplicita della funzione f e ricordando le (XV.8) si ha:

$$\left\{\frac{\partial}{\partial\rho} = \cos\theta \frac{\partial}{\partial x} + \sin\theta \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial}{\partial \theta} = -\rho \sin\theta \frac{\partial}{\partial x} + \rho \cos\theta \frac{\partial}{\partial y}\right\}$$

Risolvendo formalmente il sistema rispetto a $\partial/\partial x$ e $\partial/\partial y$ si trova:

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{1}{\rho} \begin{vmatrix} \partial/\partial\rho & \sin\theta \\ \partial/\partial\theta & \rho\cos\theta \end{vmatrix} = \cos\theta \frac{\partial}{\partial\rho} - \frac{\sin\theta}{\rho} \frac{\partial}{\partial\theta}$$
$$\frac{\partial}{\partial y} = \frac{1}{\rho} \begin{vmatrix} \cos\theta & \partial/\partial\rho \\ -\rho\sin\theta & \partial/\partial\theta \end{vmatrix} = \sin\theta \frac{\partial}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho} \cos\theta \frac{\partial}{\partial\theta}$$

Usando queste relazioni e la (XV.10), si ottiene:

$$\nabla = \hat{i}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{j}\frac{\partial}{\partial y}$$

$$= (\hat{u}_{\rho}\cos\theta - \hat{u}_{\theta}\sin\theta)\left(\cos\theta\frac{\partial}{\partial\rho} - \frac{\sin\theta}{\rho}\frac{\partial}{\partial\theta}\right) +$$

$$+ (\hat{u}_{\rho}\sin\theta + \hat{u}_{\theta}\cos\theta)\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho}\cos\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right)$$

$$= \hat{u}_{\rho}\left(\cos^{2}\theta\frac{\partial}{\partial\rho} - \frac{\sin\theta\cos\theta}{\rho}\frac{\partial}{\partial\theta} + \sin^{2}\theta\frac{\partial}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho}\sin\theta\cos\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) +$$

$$+ \hat{u}_{\theta}\left(-\sin\theta\cos\theta\frac{\partial}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho}\sin^{2}\theta\frac{\partial}{\partial\theta} + \sin\theta\cos\theta\frac{\partial}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho}\cos^{2}\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right)$$

$$= \hat{u}_{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho} + \hat{u}_{\theta}\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\theta}$$

La divergenza di un vettore in coordinate polari si calcola ricordando che occorre eseguire, per definizione, un prodotto scalare:

$$\begin{split} di v \, \vec{v} &= \nabla \cdot \vec{v} \\ &= \left(\hat{i} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{j} \frac{\partial}{\partial y} \right) \cdot \left(v_x \hat{i} + v_y \hat{j} \right) \\ &= \left(\hat{u}_\rho \frac{\partial}{\partial \rho} + \hat{u}_\theta \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \cdot \left(v_\rho \hat{u}_\rho + v_\theta \hat{u}_\theta \right) \\ &= \hat{u}_\rho \cdot \frac{\partial}{\partial \rho} \left(v_\rho \hat{u}_\rho \right) + \hat{u}_\rho \cdot \frac{\partial}{\partial \rho} \left(v_\theta \hat{u}_\theta \right) + \\ &+ \frac{1}{\rho} \hat{u}_\theta \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} \left(v_\rho \hat{u}_\rho \right) + \frac{1}{\rho} \hat{u}_\theta \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} \left(v_\theta \hat{u}_\theta \right) \end{split}$$

Si ha:

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\hat{u}_{\rho}v_{\rho})}{\partial\rho} &= \frac{\partial\hat{u}_{\rho}}{\partial\rho}v_{\rho} + \hat{u}_{\rho}\frac{\partial v_{\rho}}{\partial\rho} = \hat{u}_{\rho}\frac{\partial v_{\rho}}{\partial\rho} \\ \frac{\partial(\hat{u}_{\theta}v_{\theta})}{\partial\rho} &= \frac{\partial\hat{u}_{\theta}}{\partial\rho}v_{\theta} + \hat{u}_{\theta}\frac{\partial v_{\theta}}{\partial\rho} = \hat{u}_{\theta}\frac{\partial v_{\theta}}{\partial\rho} \\ \frac{\partial(\hat{u}_{\rho}v_{\rho})}{\partial\theta} &= \frac{\partial\hat{u}_{\rho}}{\partial\theta}v_{\rho} + \hat{u}_{\rho}\frac{\partial v_{\rho}}{\partial\theta} = \hat{u}_{\theta}v_{\rho} + \hat{u}_{\rho}\frac{\partial v_{\rho}}{\partial\theta} \\ \frac{\partial(\hat{u}_{\theta}v_{\theta})}{\partial\theta} &= \frac{\partial\hat{u}_{\theta}}{\partial\theta}v_{\theta} + \hat{u}_{\theta}\frac{\partial v_{\theta}}{\partial\theta} = -\hat{u}_{\rho}v_{\theta} + \hat{u}_{\theta}\frac{\partial v_{\theta}}{\partial\theta} \end{aligned}$$

Da (XV.9) si ricava infatti:

$$\frac{\partial \hat{u}_{\rho}}{\partial \theta} = \hat{u}_{\theta}, \ \frac{\partial \hat{u}_{\theta}}{\partial \theta} = -\hat{u}_{\rho}$$

mentre:

$$\frac{\partial \hat{u}_{\rho}}{\partial \rho} = \frac{\partial \hat{u}_{\theta}}{\partial \rho} = 0$$

Alla fine si ottiene:

$$div\,\vec{v} = \nabla \cdot \vec{v} = \frac{\partial v_{\rho}}{\partial \rho} + \frac{v_{\rho}}{\rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial v_{\theta}}{\partial \theta}$$

L'operatore di Laplace si valuta ricordando che, anche in questo caso, occorre eseguire un prodotto scalare tra operatori:

$$\nabla^{2} = \frac{\partial^{2}}{\partial x^{2}} + \frac{\partial^{2}}{\partial y^{2}}$$
$$= \left(\hat{i}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{j}\frac{\partial}{\partial y}\right) \cdot \left(\hat{i}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{j}\frac{\partial}{\partial y}\right)$$
$$= \left(\hat{u}_{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho} + \hat{u}_{\theta}\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \theta}\right) \cdot \left(\hat{u}_{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho} + \hat{u}_{\theta}\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \theta}\right)$$

Utilizzando la regola per la derivazione di un prodotto e calcolando le derivate dei versori polari (XV.9), si trova:

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho}$$



Figura XV.7. coordinate polari in tre dimensioni.

Nel caso tridimensionale per cui:

$$\nabla = \hat{i}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{j}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial}{\partial z}$$

l'espressione di *grad* in coordinate polari si ottiene mediante una estensione del procedimento adottato nel caso piano. I calcoli richiesti sono lasciati

come esercizio al lettore. E' tuttavia opportuno indicare i passaggi più importanti. Nello spazio la posizione di P è individuata in coordinate polari mediante la intersezione di tre superficî tra loro ortogonali che sono:

- 1. una sfera di raggio r,
- 2. un cono retto di apertura 2θ avente come asse l'asse *z*,
- 3. un piano passante per l'asse z il cui angolo con il piano xz è solitamente indicato con φ .

Le relazioni tra coordinate cartesiane *x*, *y*, *z* e polari *r*, θ , φ sono (figura XV.7):

$$x = r\sin\theta\cos\varphi y = r\sin\theta\sin\varphi z = r\cos\theta$$

Analogamente al caso piano, si hanno nello spazio i versori polari \hat{u}_r , \hat{u}_{θ} , \hat{u}_{φ} tra loro ortogonali ed ortogonali alle tre superficî la cui intersezione individua il punto *P*:

$$\begin{aligned} \hat{u}_r &= \sin\theta\cos\varphi\,\hat{\imath} + \sin\theta\sin\varphi\,\hat{\jmath} + \cos\theta\,\hat{k} \\ \hat{u}_\theta &= \cos\theta\cos\varphi\,\hat{\imath} + \cos\theta\sin\varphi\,\hat{\jmath} - \sin\theta\,\hat{k} \\ \hat{u}_\varphi &= -\sin\varphi\,\hat{\imath} + \cos\varphi\,\hat{\jmath} \end{aligned}$$

ed anche:

$$\hat{i} = \sin\theta\cos\varphi\,\hat{u}_r + \cos\theta\cos\varphi\,\hat{u}_\theta - \cos\varphi\,\hat{u}_\varphi$$
$$\hat{j} = \sin\theta\sin\varphi\,\hat{u}_r + \cos\theta\sin\varphi\,\hat{u}_\theta + \cos\varphi\,\hat{u}_\varphi$$
$$\hat{k} = \cos\theta\,\hat{u}_r - \sin\theta\,\hat{u}_\theta$$

Esprimendo $\partial/\partial x$, $\partial/\partial y$, $\partial/\partial z$ in funzione di r, θ , φ , si trova:

$$\nabla \equiv \hat{u}_r \frac{\partial}{\partial r} + \hat{u}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \hat{u}_\varphi \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi}$$
(XV.11)

L'operatore di Laplace in coordinate polari assume la forma:

$$\nabla^{2} = \nabla \cdot \nabla$$
$$= \frac{1}{r^{2}} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^{2} \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^{2} \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^{2} \sin^{2} \theta} \frac{\partial^{2}}{\partial \varphi^{2}} \quad (XV.12)$$

E' possibile esprimere in coordinate polari anche la divergenza o il rotore di un generico campo vettoriale $\vec{A}(x, y, z)$. Si trova:

$$di \, v \, \vec{A} = \nabla \cdot \vec{A} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 A_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial (\sin \theta A_\theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi}$$

Capitolo XV. Appendici matematiche

$$\begin{aligned} rot \vec{A} &= \nabla \times \vec{A} \\ &= \hat{u}_r \frac{1}{r \sin \theta} \left(\frac{\partial (\sin \theta A_{\varphi})}{\partial \theta} - \frac{\partial A_{\theta}}{\partial \varphi} \right) + \\ &+ \hat{u}_{\theta} \left(\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_r}{\partial \varphi} - \frac{1}{r} \frac{\partial (rA_{\varphi})}{\partial r} \right) + \\ &+ \hat{u}_{\varphi} \frac{1}{r} \left(\frac{\partial (rA_{\theta})}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right) \end{aligned}$$

dove A_r , A_{θ} , A_{φ} sono le componenti polari di \vec{A} .

XV.2.7 Teoremi di Green e di Stokes

E' opportuno avere presenti i teoremi seguenti qui riportati senza dimostrazione:

1) Teorema di Green o teorema della divergenza:

$$\int_{V} di \, v \, \vec{A} \, d^3 r = \int_{S} \vec{A} \cdot \hat{n} \, dS$$

dove S è la superficie che racchiude il volume V.

2) Teorema di Stokes:

$$\oint_{l} \vec{A} \cdot \vec{dl} = \int_{S} (rot \vec{A} \cdot \hat{n}) \, dS$$

dove S è una qualunque superficie avente per contorno la linea chiusa l.

XV.2.8 Teorema di Helmoltz

Di importanza fondamentale è il **teorema di Helmoltz**: ogni campo vettoriale dipendente dalla posizione, continuo e derivabile in una o più regioni anche disgiunte dello spazio e con comportamento regolare all'infinito, è sempre decomponibile nella somma di un campo a divergenza nulla e di un campo a rotore nullo:

$$\vec{\mathscr{F}}(\vec{r}) = \vec{\mathscr{F}}_1(\vec{r}) + \vec{\mathscr{F}}_2(\vec{r}), \ rot \vec{\mathscr{F}}_1 = 0, \ div \vec{\mathscr{F}}_2 = 0$$

Poiché:

$$div\vec{\mathscr{F}} = div\vec{\mathscr{F}}_1 = \rho(\vec{r})rot\vec{\mathscr{F}} = rot\vec{\mathscr{F}}_2 = \vec{J}(\vec{r})$$
(XV.13)

dove $\rho(\vec{r}) \in \vec{J}(\vec{r})$ sono funzioni assegnate, l'esistenza di $\vec{\mathscr{F}}_1 \in \vec{\mathscr{F}}_2$ risulta provata qualora sia possibile risolvere le equazioni (XV.13). Per determinare $\vec{\mathscr{F}}_1(\vec{r})$ si può porre, trattandosi di un campo irrotazionale, $\vec{\mathscr{F}}_1 = -grad\phi$, per cui:

$$div\,grad\,\phi = -\rho(\vec{r}) \tag{XV.14}$$

Dalla esistenza ed unicità (a meno di una costante) della soluzione dell'equazione di Poisson (XV.14) discende l'esistenza e l'unicità di $\vec{\mathscr{F}}_1(\vec{r})$. In questo contesto la funzione $\phi(\vec{r})$ è il potenziale scalare di $\vec{\mathscr{F}}_1$ o di $\vec{\mathscr{F}}$.

Per quanto riguarda $\vec{\mathscr{F}}_2(\vec{r})$ osserviamo che, trattandosi di un campo a divergenza nulla, si può porre:

$$\vec{\mathscr{F}}_2 = rot \vec{A}(\vec{r})$$

da cui:

$$rotrot\vec{A} = graddiv\vec{A} - \nabla^{2}\vec{A} = \vec{J}(\vec{r})$$
(XV.15)

L'equazione (XV.15) può essere semplificata se si osserva che il campo $\vec{A}(\vec{r})$ non è univocamente determinato. Infatti se

$$\vec{A}' = \vec{A} + grad f$$

si ha:

$$rot \vec{A}' = rot \vec{A}$$

E' possibile imporre ad \vec{A} la ulteriore condizione:

$$div\vec{A}=0$$

per cui la (XV.15) si scrive:

$$\nabla^2 \vec{A}(\vec{r}) = -\vec{J}(\vec{r}) \tag{XV.16}$$

La (XV.16) è una notazione concisa per le tre equazioni scalari in coordinate cartesiane:

$$\nabla^2 A_x(\vec{r}) = -J_x(\vec{r})$$

$$\nabla^2 A_y(\vec{r}) = -J_y(\vec{r})$$

$$\nabla^2 A_z(\vec{r}) = -J_z(\vec{r})$$

(XV.17)

L'esistenza e l'unicità delle soluzioni delle equazioni (XV.17), che sono del tipo di Poisson (XV.14), garantisce l'esistenza di $\vec{A}(\vec{r})$ e dunque di $\vec{\mathscr{F}}_2$. Il campo vettoriale \vec{A} è il potenziale vettore di $\vec{\mathscr{F}}_2$ o di $\vec{\mathscr{F}}$.

Come corollario del teorema di Helmoltz si ha *che un campo vettoriale continuo in una o più regioni dello spazio è noto se ne sono assegnate la divergenza ed il rotore come funzioni continue e regolari all'infinito*. Ad esempio, in elettrostatica si ha (nel vuoto):

$$rot \vec{E} = 0, \ div \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

e in magnetostatica (nel vuoto):

$$div\vec{B} = 0$$
, $rot\vec{B} = \mu_0\vec{J}$

Il teorema di Helmoltz può essere generalizzato a campi vettoriali dipendenti anche dal tempo ed è questa la ragione per cui il campo elettromagnetico è determinato dalle equazioni di Maxwell.

Concludiamo osservando che la parte irrotazionale di un campo è nota anche come la sua *componente longitudinale*, mentre la parte solenoidale ne è la *componente trasversale*. Per giustificare questa denominazione, si consideri l'esempio di un campo elettrostatico generato da una carica puntiforme: esso è irrotazionale e *longitudinale* rispetto al raggio vettore che congiunge la carica con il punto in cui si considera il campo. Allo stesso modo, un campo magnetico generato da una carica puntiforme in moto rettilineo uniforme è *trasversale* rispetto al raggio vettore tracciato dalla carica al punto in cui si considera il campo.

XV.3 La funzione δ (di Dirac)

Consideriamo la 'funzione' di una sola variabile $\delta(x)$ avente le seguenti peculiari caratteristiche

$$\delta(x) = 0$$
, per

 $x \neq 0\delta(x) \neq 0$, perx = 0 $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) dx = 1$ (XV.18)Le (XV.18) definiscono la funzione δ di Dirac con singolarità in x = 0; inoltre si può osservare che in realtà l'intervallo di integrazione deve comprendere solo il punto singolare x = 0, dove la funzione non è ben definita.

La funzione δ con singolarità in un punto x = a dell'asse x è definita in modo analogo

$$\delta(x-a) = 0$$
, per

 $x \neq a\delta(x-a) \neq 0$, *per*x=a $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x-a) dx = 1$ (XV.19)Di uso frequente sono inoltre le proprietà

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\delta(x)\,dx = f(0) \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\delta(x-a)\,dx = f(a)$$

Da (XV.18) e (XV.19) risulta evidente che $\delta(x)$ *non* è una funzione nel significato usuale del termine. Essa può tuttavia essere concepita come limite di opportune funzioni *ben definite* nel senso usuale. Consideriamo, ad esempio, le curve di Gauss *normalizzate*:

$$G(x,\alpha) = \frac{1}{\alpha\sqrt{\pi}}e^{-x^2/\alpha^2} \quad , \quad \int_{-\infty}^{+\infty} G(x,\alpha)\,dx = 1$$

dove α è un numero reale diverso da zero. Per $\alpha \rightarrow 0$ il grafico delle funzioni si stringe, mentre il massimo (nell'origine) tende a ∞ in modo da mantenere l'area costante.

Si trova

$$\lim_{\alpha \to 0} G(x, \alpha) = \begin{cases} 0, & perx \neq 0\\ \text{non definito}, & perx = 0 \end{cases}$$

Inoltre

$$\lim_{\alpha \to 0} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) G(x, \alpha) \, dx = f(0)$$

Possiamo dunque porre

$$\delta(x) = \lim_{\alpha \to 0} G(x, \alpha)$$

e analogamente

$$\delta(x-a) = \lim_{\alpha \to 0} G(x-a,\alpha)$$

Un'altra proprietà della δ di uso frequente è

$$\int f(x)\delta[g(x)]\,dx = \sum_i f(x_i)\frac{1}{|g'(x_i)|}$$

dove x_i sono gli zeri della funzione g(x) e g'(x) indica la derivata di g(x).

La funzione δ compare in molte circostanze e risulta in generale di grande utilità formale.

Alcuni esempi

1. Supponiamo di voler calcolare la derivata della *funzione gradino* $\theta(x)$

$$\theta(x) = \begin{cases} 0, & perx < 0\\ 1, & perx > 0 \end{cases}$$

Si ha

:

$$\frac{d\theta(x)}{dx} = \begin{cases} 0, & perx \neq 0\\ \text{non definito}, & perx = 0 \end{cases}$$

mentre d'altra parte

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\theta}{dx} dx = \left[\theta(x)\right]_{-\infty}^{+\infty} = 1$$

Si ha dunque

$$\frac{d\theta}{dx} = \delta(x)$$

2. Analogamente, data la *funzione scala* E(x) :

$$E(x) = \begin{cases} 0, & perx < 0\\ c_0, & per0 < x < x_1\\ c_1, & perx_1 < x < x_2\\ c_2, & perx_2 < x < x_3 \end{cases}$$

si ha

$$\frac{dE(x)}{dx} = c_0 \delta(x) + c_1 \delta(x - x_1) + c_2 \delta(x - x_2)$$

3. Supponiamo che una carica elettrica q sia distribuita sull'asse x con densità caratterizzata da una legge gaussiana. In altri termini sia

$$\lambda(x) = carica \, per unit à di \, lunghezza = q \frac{1}{\alpha \sqrt{\pi}} e^{-x^2/\alpha^2}$$

dove

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \lambda(x) \, dx = q$$

Se il parametro α diventa piccolo la carica tende ad *addensarsi* attorno all'origine e per $\alpha \to 0$ si ha la nozione un poco astratta, ma concettualmente rilevante, di *carica puntiforme*. Una carica puntiforme q posta nell'origine dell'asse x è descritta infatti da una *densità lineare*

$$\lambda(x) = q\,\delta(x) \tag{XV.20}$$

Analogamente un insieme di *N* cariche puntiformi localizzate in x_1 , x_2 , ..., x_N è descritto da una funzione densità

$$\lambda(x) = \sum_{i=1}^{N} q_i \delta(x - x_i)$$

Queste considerazioni giustificano il nome *distribuzioni* con cui sono anche note le *funzioni generalizzate* che hanno come prototipo la δ di Dirac. Dal punto di vista dimensionale $\delta(x)$ è una densità lineare (*numero/lunghezza*).

Di ancor maggiore utilità risulta la considerazione della funzione di Dirac nell'ordinario spazio tridimensionale dove, per definizione, si

ha

$$\begin{split} \delta(\vec{r}) &= \delta(x, y, z) = \delta(x)\delta(y)\delta(z) \\ \delta(\vec{r} - \vec{r}') &= \delta(x - x', y - y', z - z') \\ &= \delta(x - x')\delta(y - y')\delta(z - z') \end{split}$$

Valgono le relazioni

$$\int_{V'} \delta(\vec{r} - \vec{r}') \, dV = 1 \qquad \int_{V} \delta(\vec{r} - \vec{r}') f(\vec{r}) \, dV = f(r')$$

nelle quali il volume di integrazione deve racchiudere il punto di singolarità \vec{r}' .

Analogamente al caso lineare (XV.20), una distribuzione di *N* cariche puntiformi localizzate nello spazio in $\vec{r}_1, \vec{r}_2, ..., \vec{r}_N$ è rappresentata da una funzione densità (*carica per unità di volume*)

$$\rho(\vec{r}) = \sum_{i=1}^{N} q_i \,\delta(\vec{r} - \vec{r}_i)$$

XV.4 L'equazione di Poisson dell'elettrostatica

Il campo elettrostatico $\vec{E}(\vec{r})$ associato ad una carica a riposo q posta in \vec{r}' è dato da

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} (\vec{r} - \vec{r}')$$

Il campo è conservativo con un potenziale

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

Qualora il campo sia generato da *N* cariche puntiformi $q_1, q_2, ..., q_N$, localizzate nei punti $\vec{r}_1, \vec{r}_2, ..., \vec{r}_N$, vale la *regola di sovrapposizione* per cui

$$\begin{split} \vec{E}(\vec{r}) &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^3} (\vec{r} - \vec{r}_i) \\ \varphi(\vec{r}) &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|} \end{split}$$
Se il campo è dovuto ad una distribuzione continua di carica $\rho(\vec{r})$ le equazioni precedenti si scrivono

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_{V'} \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} (\vec{r} - \vec{r}') \, dV' \varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_{V'} \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \, dV'$$
(XV.21)

In tutti i casi in cui è nota la distribuzione di carica (tranne forse quando si è in presenza di una sola carica puntiforme) è preferibile calcolare prima il potenziale $\varphi(\vec{r})$ e poi ricavare il campo mediante la relazione

$$\vec{E} = -\operatorname{grad} \varphi \equiv -\nabla \varphi \qquad (XV.22)$$

Per il campo elettrostatico si dimostra la validità del *teorema di Gauss* che, nella sua forma puntuale, si scrive

$$div\,\vec{E} = \nabla \cdot \vec{E} = \frac{1}{\varepsilon_0}\,\rho(\vec{r})$$

Dalla (XV.22) segue che $\varphi(\vec{r})$ soddisfa all'*equazione di Poisson*

$$\nabla^2 \varphi = -\frac{1}{\varepsilon_0} \rho(\vec{r}) \tag{XV.23}$$

Il potenziale elettrostatico si caratterizza, dunque, come soluzione di una equazione non omogenea. E' possibile verificare che la soluzione di (XV.23) è, a meno di una costante, la (XV.21).

Vogliamo dunque valutare il valore $f(\vec{r})$ dell'espressione

$$f(\vec{r}) = \nabla^2 \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \, dV' = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int \nabla^2 \left(\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|}\right) \rho(\vec{r}') \, dV'$$

Si ha

$$\nabla^{2} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \begin{cases} = 0, & per \neq \vec{r}' \\ \neq 0, & per = ' \end{cases}$$
(XV.24)

Per poter attribuire a $\nabla^2 1/|\vec{r} - \vec{r}'|$ un significato che sia valido per tutti i punti dello spazio, consideriamo un volume sferico *V* (di raggio *R*₀) con centro in \vec{r}' , racchiuso dalla superficie *S* e valutiamo il limite

$$\lim_{R_0 \to 0} \int_V \nabla \cdot \nabla \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \, dV = \lim_{R_0 \to 0} \int_S \left(\nabla \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) \cdot \hat{n} \, dS$$
$$= \lim_{R_0 \to 0} -\frac{1}{R_0^2} 4\pi R_0^2 = -4\pi$$

Si può dunque costatare che la funzione

$$\nabla^2 \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

definita nella (XV.24), è tale che il suo integrale su un volume attorno ad \vec{r}' fornisce un valore finito pari a -4π .

Utilizzando la funzione δ si può scrivere

$$\nabla^2 \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = -4\pi \delta(\vec{r} - \vec{r}')$$

Si ha dunque

$$\nabla^2 \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_{V'} \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV' = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int (-4\pi)\delta(\vec{r} - \vec{r}')\rho(\vec{r}') dV'$$
$$= -\frac{1}{\varepsilon_0} \rho(\vec{r})$$

Abbiamo così verificato che il potenziale (XV.21) soddisfa l'equazione di Poisson (XV.23).

Un'osservazione riguarda la forma del termine noto $\rho(\vec{r})/\varepsilon_0$ che compare nell'equazione di Poisson. Poiché le cariche presenti possono essere in parte distribuite con continuità ed in parte localizzate si avrà, in generale

$$\rho(\vec{r}) = f(\vec{r}) + \sum_{i} q_i \,\delta(\vec{r} - \vec{r}_i)$$

Come ultima considerazione, vogliamo sottolineare che la soluzione particolare dell'equazione differenziale non omogenea di Poisson può essere trovata qualora sia nota la *funzione di Green* $G(\vec{r} - \vec{r}')$, soluzione della equazione

$$\nabla^2 G(\vec{r} - \vec{r}') = -\delta(\vec{r} - \vec{r}')$$

soluzione cioè di una equazione non omogenea del tipo di Poisson avente come termine noto una funzione δ . Infatti, è immediato costatare che la funzione

$$\varphi(\vec{r}) = \int G(\vec{r} - \vec{r}') \frac{\rho(\vec{r}')}{\varepsilon_0} dV$$

soddisfa la (XV.23).

Il metodo della funzione di Green è un metodo molto usato per la soluzione di equazioni differenziali non omogenee. Nel caso che è stato trattato in dettaglio, la funzione di Green associata all'operatore differenziale ∇^2 è

$$G(\vec{r} - \vec{r}') = +\frac{1}{4\pi} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

XV.5 I potenziali elettromagnetici

I campi $\vec{E}(\vec{r}, t)$, $\vec{B}(\vec{r}, t)$ - dovuti a distribuzioni di carica e di corrente $\rho(\vec{r}, t)$, $\vec{J}(\vec{r}, t)$ - non sono di solito valutati in modo diretto attraverso le equazioni di Maxwell.

Maggiore eleganza teorica e calcoli più semplici si hanno infatti determinando prima i potenziali $\varphi(\vec{r}, t)$, $\vec{A}(\vec{r}, t)$ e ricavando successivamente i vettori \vec{E} , \vec{B} che hanno con i potenziali un legame semplice. Infatti, poiché, anche nel caso non stazionario, si ha

$$div\vec{B}=0$$

possiamo introdurre il *potenziale vettore* $\vec{A}(\vec{r}, t)$ ponendo

$$\vec{B} = rot \vec{A} \tag{XV.25}$$

Il campo elettrico $\vec{E}(\vec{r}, t)$, invece, *non* può essere ricavato da un potenziale scalare come in elettrostatica perché

$$rot \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

Tuttavia per la (XV.25) si ha

$$rot\left(\vec{E} + \frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\right) = 0$$

e dunque è lecito considerare un *potenziale scalare* $\varphi(\vec{r}, t)$ tale che

$$\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -grad\,\varphi \tag{XV.26}$$

I potenziali \vec{A} , φ non sono univocamente determinati. Infatti ogni altra coppia di potenziali \vec{A}' , φ' con

$$\begin{cases} \vec{A}' = \vec{A} + grad f \\ \varphi' = \varphi - \partial f / \partial t \end{cases}$$
(XV.27)

dove $f(\vec{r}, t)$ è una funzione sufficientemente regolare, ma peraltro arbitraria, fornisce attraverso (XV.25) e (XV.26) gli stessi valori per $\vec{E} \in \vec{B}$.

Le equazioni (XV.27) sono dette *trasformazioni di gauge* e indicano come sia lecito, mediante la imposizione di condizioni addizionali, effettuare

una scelta tra tutti i potenziali possibili. Questo permette di semplificare le equazioni a cui i potenziali soddisfano. Infatti, dalle equazioni di Maxwell e da (XV.25) e (XV.26), si ha

$$rot (rot \vec{A}) = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \left(-\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - grad \varphi \right)$$
(XV.28)

$$div\left(-\frac{\partial\vec{A}}{\partial t} - \operatorname{grad}\varphi\right) = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$
(XV.29)

Ricordando che

$$rot (rot \vec{A}) = grad (div \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A}$$

le (XV.28) e (XV.29) possono essere convenientemente riscritte

$$\nabla^{2}\vec{A} - \mu_{0}\varepsilon_{0}\frac{\partial^{2}\vec{A}}{\partial t^{2}} - grad\left(div\vec{A} + \mu_{0}\varepsilon_{0}\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right) = -\mu_{0}\vec{J} \qquad (XV.30)$$

$$\nabla^2 \varphi + \frac{\partial}{\partial t} di \, v \, \vec{A} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \tag{XV.31}$$

Poiché un campo vettoriale è completamente definito assegnandone il rotore e la divergenza (*teorema di Helmoltz*), possiamo osservare, per quanto concerne $\vec{A}(\vec{r}, t)$, che mentre il suo rotore è dato dall'equazione $rot \vec{A} = \vec{B}$, non è ancora specificata e, dunque disponibile, la funzione $div \vec{A}$. A questo proposito si hanno due principali modi di procedere che vengono utilizzati in contesti differenti, ma, in ogni caso, con lo scopo di limitare l'arbitrarietà dei potenziali.

1. Nel gauge di Coulomb si pone semplicemente

$$div \vec{A} = 0$$

e le equazioni (XV.30) e (XV.31) si semplificano

$$\nabla^{2}\vec{A} - \mu_{0}\varepsilon_{0}\frac{\partial^{2}\vec{A}}{\partial t^{2}} - \mu_{0}\varepsilon_{0}\,grad\,\frac{\partial\varphi}{\partial t} = -\mu_{0}\vec{J} \qquad (XV.32)$$

$$\nabla^2 \varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \tag{XV.33}$$

La (XV.33) è formalmente identica alla equazione di Poisson della elettrostatica e si ha

$$\varphi(\vec{r},t) = \int \frac{\rho(\vec{r}',t)}{|\vec{r}-\vec{r}'|} d^3 \vec{r}'$$

Nella discussione del gauge di Coulomb è conveniente decomporre, secondo il *teorema di Helmoltz*, la corrente \vec{J} in una parte longitudinale \vec{J}_l ed in una parte trasversale \vec{J}_t :

$$\vec{J} = \vec{J}_l + \vec{J}_t \qquad \begin{cases} rot \, \vec{J}_l = 0\\ div \, \vec{J}_t = 0 \end{cases}$$

Si può mostrare che \vec{J}_l è legata solo al potenziale scalare

$$\varepsilon_0 \operatorname{grad} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \vec{J}_i$$

mentre \vec{J}_t è legata solo al potenziale vettore

$$\nabla^2 \vec{A} - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \vec{J}_t$$

In questo gauge *il potenziale vettore risulta così essere completamente trasversale.*

La parte di campo elettrico $\vec{E}(\vec{r}, t)$ che proviene da $grad \varphi$ (equazione XV.26) diminuisce con la distanza dalla sorgente come $1/r^2$. Poiché il campo di radiazione diminuisce come 1/r è ragionevole porre, *qualora interessati solo a problemi di radiazione*, $\varphi(\vec{r}, t) = 0$ e ricavare \vec{E} e \vec{B} solo dal potenziale vettore:

$$\vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$
 $\vec{B} = rot \vec{A}$

Il *gauge di Coulomb o gauge di radiazione o gauge trasverso*, infatti, è appropriato a problemi di radiazione e rende evidente che i termini di sorgente responsabili dell'irraggiamento sono le correnti trasversali.

2. Nel gauge di Lorentz si pone

$$div\,\vec{A} + \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\varphi}{\partial t} = 0$$

e le equazioni per i potenziali si scrivono

$$\nabla^2 \vec{A} - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \vec{J}(\vec{r}, t)$$
 (XV.34)

$$\nabla^2 \varphi - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -\frac{\rho(\vec{r}, t)}{\varepsilon_0}$$
(XV.35)

Il gauge di Lorentz è il gauge più conveniente per determinare, in generale, i potenziali in funzione di $\rho(\vec{r}, t) \in \vec{J}(\vec{r}, t)$.

XV.6 I potenziali ritardati

Vogliamo ora determinare la soluzione delle equazioni (XV.34) e (XV.35). Poiché tali equazioni sono del tutto simili nella forma, è lecito fissare l'attenzione e trattare in dettaglio una sola di esse, ad esempio la (XV.35) che riguarda il potenziale scalare e che qui riscriviamo per comodità ponendo $\varepsilon_0\mu_0 = 1/c^2$:

$$\nabla^2 \varphi(\vec{r}, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi(\vec{r}, t)}{\partial t^2} = -\frac{\rho(\vec{r}, t)}{\varepsilon_0}$$
(XV.36)

E' importante notare che la (XV.36) è una generalizzazione al caso non stazionario della equazione di Poisson dell'elettrostatica e che per la sua soluzione risulta conveniente utilizzare il metodo già applicato nel caso statico. Ricerchiamo dunque la funzione di Green $G(\vec{r}, t; \vec{r}', t')$ che soddisfa un'equazione differenziale dello stesso tipo della (XV.36) ma con termine di sorgente *puntiforme* (sia nello spazio che nel tempo) $\rho(\vec{r}, t) = \delta(\vec{r} - \vec{r}')\delta(t - t')$:

$$\nabla^2 G(\vec{r}, t; \vec{r}', t') - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 G}{\partial t^2} = -\delta(\vec{r} - \vec{r}')\delta(t - t')$$
(XV.37)

La conoscenza di $G(\vec{r}, t; \vec{r}', t')$ permette di valutare il potenziale scalare $\varphi(\vec{r}, t)$:

$$\varphi(\vec{r},t) = \int G(\vec{r},t;\vec{r}',t') \frac{\rho(\vec{r}',t')}{\varepsilon_0} d^3r' dt' \qquad (XV.38)$$

E' immediato verificare, per sostituzione diretta, che (XV.38) soddisfa (XV.36).

Per maggiore chiarezza e semplicità, è opportuno trattare in via preliminare un problema in cui la sorgente puntiforme è posta in $\vec{r} = 0$, t = 0. Si definisce così una funzione di Green $G_0(\vec{r}, t) \equiv G(\vec{r}, t; 0, 0)$ soluzione dell'equazione

$$\nabla^2 G_0 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 G_0}{\partial t^2} = -\delta(\vec{r})\delta(t) \tag{XV.39}$$

Per quanto riguarda la dipendenza di G_0 dalle coordinate spaziali si può intuire che, poiché la sorgente puntiforme è posta in $\vec{r} = 0$, si ha in realtà una dipendenza solo da $r \equiv |\vec{r}|$. In altri termini, si ha simmetria sferica e la funzione di Green è $G_0(r, t)$. D'altra parte si rammenti che, nel caso statico, rappresentato dalla (XV.39) senza il termine $\partial^2 G_0/\partial t^2$), la funzione di Green è ~ 1/r.

Per problemi con simmetria sferica il laplaciano ha la forma (si veda a pagina 441)

$$\nabla^2 = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right)$$

e la (XV.39) si scrive

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}G_0\right) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 G_0}{\partial t^2} = -\delta(\vec{r})\delta(t)$$
(XV.40)

Tenendo conto di quanto osservato a proposito del caso statico, si cerchi una soluzione della forma

$$G_0 = \frac{1}{r}\chi(r,t) \tag{XV.41}$$

Per il primo termine a sinistra della (XV.40) si ha

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial G_0}{\partial r} \right) = \frac{\partial}{\partial r} \left[r^2 \left(-\frac{1}{r^2} \chi + \frac{1}{r} \frac{\partial \chi}{\partial r} \right) \right] = \frac{\partial}{\partial r} \left(-\chi + r \frac{\partial \chi}{\partial r} \right) = r \frac{\partial^2 \chi}{\partial r^2}$$

da cui

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial G_0}{\partial r}\right) = \frac{1}{r}\frac{\partial^2\chi}{\partial r^2}$$

L'equazione (XV.40), tenuto conto della (XV.41), diventa

$$\frac{1}{r}\frac{\partial^2 \chi}{\partial r^2} - \frac{1}{r}\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} = -\delta(\vec{r})\delta(t)$$

Per $\vec{r} \neq 0$, $t \neq 0$ la funzione $\chi(r, t)$ soddisfa all'equazione delle onde

$$\frac{\partial^2 \chi}{\partial r^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} = 0$$

e dunque per $\vec{r} \neq 0$, $t \neq 0$ sarà

$$\chi(r,t) = f\left(t - \frac{r}{c}\right) + g\left(t + \frac{r}{c}\right)$$

dove f e g sono funzioni arbitrarie dell'argomento indicato: f rappresenta una onda sferica divergente dalla origine, mentre g è una onda sferica convergente nella origine.

Per ragioni fisiche è opportuno considerare solo la soluzione sferica divergente e riscrivere la (XV.41)

$$G_0(\vec{r}, t) = \frac{1}{r} f\left(t - \frac{r}{c}\right) \qquad (\vec{r} \neq 0, t \neq 0)$$
(XV.42)

Per determinare la forma funzionale di *f* in tutto lo spazio - tempo compresa la origine ($\vec{r} = 0, t = 0$), si integra la (XV.40) entro una piccola sfera di

volume ΔV (avente raggio R_0 e centro nella origine) e si calcola poi il limite per $\Delta V \rightarrow 0$:

$$\lim_{\Delta V \to 0} \left\{ \int_{\Delta V} \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial G_0}{\partial r} \right) dV + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int_{\Delta V} G_0 dV \right\} = -\int_{\Delta V} \delta(\vec{r}) \delta(t) dV$$

Si ha

$$\lim_{\Delta V \to 0} \left\{ \int_{\Delta V} (\nabla^2 G_0) \, dV - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int_{\Delta V} G_0 \, dV \right\} = -\delta(t)$$

Ricordando il teorema della divergenza, si ottiene

$$\lim_{\Delta V \to 0} \left\{ \int_{\Delta S} (\operatorname{grad} G_0) \cdot \hat{n} \, dS - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int_{\Delta V} G_0 \, dV \right\} = -\delta(t) \tag{XV.43}$$

dove ΔS è la superficie sferica che racchiude ΔV .

In coordinate polari, operando con il gradiente su una funzione dipendente solo da r, si ha

$$\operatorname{grad} G_0(r,t) = \hat{u}_r \frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{r} f\left(t - \frac{r}{c}\right) = \hat{u}_r \left[-\frac{f}{r^2} + \frac{1}{rc} f'\right]$$

dove \hat{u}_r è il versore radiale e \hat{n} è la normale alla superficie sferica ($\hat{u}_r \parallel \hat{n}$). Allora, dalla (XV.43) si ricava

$$\lim_{R_0 \to 0} 4\pi R_0^2 \left[-\frac{1}{R_0^2} f\left(t - \frac{R_0}{c}\right) + \frac{1}{c R_0} f'\left(t - \frac{R_0}{c}\right) \right] + \frac{1}{c^2} \lim_{\Delta V \to 0} \int_{\Delta V} \frac{f''}{r} r^2 \sin\theta \, d\theta \, d\varphi \, dr = -\delta(t)$$

Cioè

$$-4\pi f(t) - \frac{1}{c^2} \lim_{R_0 \to 0} 4\pi \int_0^{R_0} r f'' \left(t - \frac{r}{c}\right) dr = -\delta(t)$$

Da cui infine

$$-4\pi f(t) = -\delta(t)$$

La forma funzionale della f che compare in (XV.42) è dunque

$$f(t) = \frac{1}{4\pi}\delta(t)$$

e la funzione di Green relativa all'equazione (XV.39), per ogni punto dello spazio - tempo, è

$$G_0(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{r} \delta\left(t - \frac{r}{c}\right)$$
(XV.44)

In perfetta analogia con (XV.44), la funzione di Green relativa all'equazione (XV.37) è

$$G(\vec{r}, t; \vec{r}', t') = \frac{1}{4\pi |\vec{r} - \vec{r}'|} \delta\left(t - t' - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c}\right)$$

Da (XV.38) si può ottenere il potenziale scalare

$$\begin{split} \varphi(\vec{r},t) &= \int \frac{1}{4\pi |\vec{r} - \vec{r}'|} \delta\Big(t - t' - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c}\Big) \frac{1}{\varepsilon_0} \rho(\vec{r}',t') \, d^3r' \, dt' \\ &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \rho\Big(\vec{r}',t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c}\Big) d^3r' \end{split}$$
(XV.45)

Si ha dunque che il potenziale nel punto (\vec{r}, t) dello spazio - tempo è la sovrapposizione dei potenziali dovuti alle cariche poste in \vec{r}' ai tempi $t - |\vec{r} - \vec{r}'|/c$, precedenti l'istante t. Per questa ragione il potenziale (XV.45) è noto come *potenziale scalare ritardato*.

In analogia con (XV.45) possiamo scrivere le tre componenti $A_i(\vec{r}, t)$ del *potenziale vettore ritardato*, soluzioni di (XV.34)

$$A_{i}(\vec{r},t) = \frac{\mu_{0}}{4\pi} \int \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} J_{i}(r',t') \,\delta\Big(t-t'-\frac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{c}\Big) d^{3}r' \,dt'$$

$$= \frac{\mu_{0}}{4\pi} \int \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} J_{i}\Big(r',t-\frac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{c}\Big) d^{3}r' \quad (i=x,y,z)$$
(XV.46)

XV.6.1 I potenziali ritardati di una carica in moto

Un caso non banale in cui le soluzioni (XV.46) possono essere valutate senza troppe difficoltà si ha quando i potenziali sono generati da una sola carica *puntiforme q* in moto con una legge arbitraria (figura XV.8)

$$\vec{r}_0 = \vec{r}_0(t)$$

Le appropriate densità di carica e di corrente sono

$$\rho(\vec{r}, t) = q \,\delta(\vec{r} - \vec{r}_0(t))$$

$$\vec{J} = \rho \,\vec{v}_0(t)$$

$$= q \,\vec{v}_0(t)\delta(\vec{r} - \vec{r}_0(t))$$

$$\vec{v}_0 = \frac{d\vec{r}_0}{dt}$$



Figura XV.8. campo elettromagnetico dovuto ad una carica puntiforme. *P* è il punto in cui si calcola il campo; *Q* la posizione della carica all'istante *t* e Q^* la posizione della carica all'istante ritardato t^* .

Da (XV.45) e (XV.46) si ha:

$$\begin{split} \varphi(\vec{r},t) &= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \int \delta(\vec{r}\,' - \vec{r}_0(t')) \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} \delta\Big[t - t' - \frac{|\vec{r} - \vec{r}\,'|}{c}\Big] dt' dV' \\ &= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \int \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} \delta\Big[\vec{r}\,' - \vec{r}_0\Big(t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}\,'|}{c}\Big)\Big] dV' \quad (XV.47) \end{split}$$

$$A_{i} = \frac{\mu_{0}q}{4\pi} \int v_{i}(t')\delta(\vec{r}' - \vec{r}_{0}(t')) \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \delta\left[t - t' - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c}\right] dt' dV'$$

$$= \frac{\mu_{0}q}{4\pi} \int v_{i}\left(t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c}\right) \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \delta\left[\vec{r}' - \vec{r}_{0}\left(t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c}\right)\right] dV'$$

$$(i = x, y, z)$$
(XV.48)

La integrazione in dV' comprende le regioni dello spazio - tempo in cui le densità di corrente e carica sono *diverse da zero* così che ogni contributo agli integrali viene da qualche regione sulla traiettoria della particella. Si può mostrare che, fissato il punto $P \equiv (\vec{r}, t)$ in cui calcolare i potenziali, esiste un solo punto Q^* della traiettoria (detto *punto ritardato*) che contribuisce agli integrali. Il punto Q^* (figura XV.8) è definito implicitamente dalla relazione

$$\vec{r}^{*} = \vec{r}_0 \left(t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}^{*}|}{c} \right) = \vec{r}_0(t^{*})$$

dove

$$t^* = t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}^*|}{c}$$

è il *tempo ritardato*. Si può costatare che Q^* è il punto della traiettoria per cui il tempo impiegato dalla carica nello spostamento da Q^* a Q è lo stesso di quanto impiegato dalla luce nella traiettoria rettilinea Q^*P .

Capitolo XV. Appendici matematiche

Il calcolo degli integrali che compaiono in (XV.47) e (XV.48) coinvolge le proprietà della funzione δ e richiede qualche sviluppo analitico non immediato.

Come esercizio vogliamo mostrare, ad esempio, come si può valutare il potenziale scalare (XV.47), qui riscritto per comodità:

$$\begin{split} \varphi(\vec{r},t) &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \delta\left[\vec{r}'-\vec{r}_0\left(t-\frac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{c}\right)\right] d^3\vec{r}' \\ &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \delta\left[x'-x_0\left(t-\frac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{c}\right)\right] \cdot \\ &\cdot \delta\left[y'-y_0\left(t-\frac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{c}\right)\right] \delta\left[z'-z_0\left(t-\frac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{c}\right)\right] dx' dy' dz' \end{split}$$

Effettuando il cambiamento di variabili

$$\xi = x' - x_0 \left(t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c} \right) \eta = y' - y_0 \left(t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c} \right)$$
(XV.49)
$$\zeta = z' - z_0 \left(t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c} \right)$$

.

l'integrale (XV.47) diventa

$$\int \dots dx' dy' dz' \to \int \dots |J|^{-1} d\xi d\eta d\zeta \tag{XV.50}$$

dove compare l'inverso del determinante jacobiano J relativo alla trasformazione (XV.49). Per definizione si ha

$$J = det \begin{pmatrix} \partial \xi / \partial x' & \partial \xi / \partial y' & \partial \xi / \partial z' \\ \partial \eta / \partial x' & \partial \eta / \partial y' & \partial \eta / \partial z' \\ \partial \zeta / \partial x' & \partial \zeta / \partial y' & \partial \zeta / \partial z' \end{pmatrix}$$

dove tutte le derivate possono essere calcolate da (XV.49); ad esempio, ponendo $\tau = t - |\vec{r} - \vec{r}'|/c$, si ha:

$$\frac{\partial\xi}{\partial x'} = 1 - \frac{dx_0}{d\tau} \frac{\partial\tau}{\partial x'} \qquad \frac{\partial\xi}{\partial y'} = -\frac{dx_0}{d\tau} \frac{\partial\tau}{\partial y'} \qquad etc.$$

dove

$$\frac{dx_0}{d\tau} = v_{0x} \left(t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c} \right)$$
$$\frac{d\tau}{dx'} = \frac{1}{c} \frac{(x - x')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \quad etc.$$

Si ottiene così

$$J = det \begin{pmatrix} 1 - \frac{v_{0x}}{c} \frac{(x-x')}{|\vec{r}-\vec{r}'|} & -\frac{v_{0x}}{c} \frac{(y-y')}{|\vec{r}-\vec{r}'|} & -\frac{v_{0x}}{c} \frac{(z-z')}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \\ -\frac{v_{0y}}{c} \frac{(x-x')}{|\vec{r}-\vec{r}'|} & 1 - \frac{v_{0y}}{c} \frac{(y-y')}{|\vec{r}-\vec{r}'|} & -\frac{v_{0y}}{c} \frac{(z-z')}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \\ -\frac{v_{0z}}{c} \frac{(x-x')}{|\vec{r}-\vec{r}'|} & -\frac{v_{0z}}{c} \frac{(y-y')}{|\vec{r}-\vec{r}'|} & 1 - \frac{v_{0z}}{c} \frac{(z-z')}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \end{pmatrix}$$

da cui

$$J = 1 - \frac{1}{c} \vec{v}_0 \left(t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c} \right) \cdot \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

Definendo un versore

$$\hat{n} = \frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

si ha

$$J = 1 - \vec{\beta} \cdot \hat{n} , \ \vec{\beta} = \frac{\vec{\nu}_0}{c}$$

Possiamo perciò ottenere da (XV.50)

$$\begin{split} \varphi(\vec{r},t) &= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \int d\xi \, d\eta \, d\zeta \frac{1}{1-\vec{\beta}\cdot\hat{n}} \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \delta(\xi) \delta(\eta) \delta(\zeta) \\ &= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{1-\vec{\beta}^*\cdot\hat{n}^*} \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}^*|} \end{split} \tag{XV.51}$$

con

$$\vec{\beta}^* = \frac{1}{c} \vec{v} \Big(t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}^*|}{c} \Big) \qquad \hat{n}^* = \frac{\vec{r} - \vec{r}^*}{|\vec{r} - \vec{r}^*|}$$

dove (*) indica le quantità al tempo ritardato.

All'integrale (XV.51) contribuisce solo il punto $\vec{r}' = \vec{r}_0(t^*) = \vec{r}^*$ che corrisponde alla posizione della particella al *tempo ritardato* t^* precedente l'istante t

$$t^* = t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}^*|}{c}$$

Un calcolo analogo permette di trovare le componenti del *potenziale vettore ritardato*

$$A_{i}(\vec{r},t) = \frac{q\mu_{0}}{4\pi} \frac{\nu_{0i}\left(t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}^{*}|}{c}\right)}{|\vec{r} - \vec{r}^{*}|} \frac{1}{1 - \vec{\beta}^{*} \cdot \hat{n}^{*}} \qquad (i = x, y, z)$$
(XV.52)

Utilizzando

$$\vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - grad\varphi$$
$$\vec{B} = rot\vec{A}$$

da (XV.51) e (XV.52) si calcolano il campo elettrico ed il campo magnetico. Per semplicità riportiamo solo il risultato per il campo elettrico

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \left[\frac{(\vec{n}^* - \vec{\beta}^*)(1 - \beta^{*2})}{(1 - \vec{n}^* \cdot \vec{\beta}^*)^3 |\vec{r} - \vec{r}^*|^2} + \frac{\vec{n}^* \times ((\vec{n}^* - \vec{\beta}^*) \times \vec{\beta})}{c (1 - \vec{n}^* \cdot \vec{\beta}^*)^3 |\vec{r} - \vec{r}^*|} \right]$$
(XV.53)

La (XV.53), che dipende dalla velocità $\vec{\beta}^*$ e dall'accelerazione $\vec{\beta}^*$ della particella, è equivalente alla formula di Heaviside - Feynman; tuttavia la (XV.53) mostra in modo esplicito che il campo è la somma di due contributi, noti rispettivamente come *campo di velocità* (che diminuisce come $1/|\vec{r} - \vec{r}^*|^2$) e come *campo di radiazione* (che diminuisce come $1/|\vec{r} - \vec{r}^*|$). Il campo di radiazione, che dipende dalla accelerazione della particella, è il contributo dominante a grande distanza dalle sorgenti ed è il termine che deve essere usato per calcolare la perdita di energia per radiazione.

XV.7 Covarianza delle equazioni di Maxwell

Nel vuoto, le relazioni esistenti tra le varie componenti di $\vec{E} \in \vec{B}$ viste da due osservatori inerziali (connessi da una trasformazione di Lorentz) si possono trovare con un metodo seguito anche da A. Einstein nella memoria originale sulla relatività ristretta. Esso consiste nello scrivere le equazioni di Maxwell per il vuoto in due sistemi inerziali in moto relativo uniforme e nell'imporre che le equazioni abbiano, nei due sistemi, la stessa forma (*Principio di relatività*).

Al solito indicheremo i due sistemi inerziali con $\Sigma \in \Sigma'$ assumendo che sia Σ' a muoversi con velocità $\vec{V} \equiv (V,0,0)$ rispetto ad Σ , essendo i due sistemi equiorientati nello spazio e coincidenti all'istante t = 0. In questa sezione le coordinate sono indicate con (x, y, z, t).

Le coordinate dei due sistemi sono legate dalle particolari trasformazioni di Lorentz che riscriviamo per comodità:

$$\begin{cases} x' = \Gamma[x - Vt] \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = \Gamma[t - (V/c^2)x] \end{cases}$$
(XV.54)

$$\begin{cases} x = \Gamma[x' + Vt'] \\ y = y' \\ z = z' \\ t = \Gamma[t' + (V/c^2)x'] \end{cases}$$

$$\Gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}$$
(XV.55)

con

Consideriamo ora le equazioni di Maxwell e prendiamo dapprima in esame $(rot \vec{E})_{\gamma}$. Nel sistema Σ si ha

$$(rot \vec{E})_{y} = -\frac{\partial B_{y}}{\partial t}$$
$$\frac{\partial E_{x}}{\partial z} - \frac{\partial E_{z}}{\partial x} = -\frac{\partial B_{y}}{\partial t}$$
(XV.56)

Tutte le componenti dei vettori che compaiono in (XV.56) sono funzioni di x, y, z, t attraverso le variabili x', y', z', t' (equazioni XV.54). Ad esempio:

$$E_z = E_z \left(x'(x, y, z, t); y'(x, y, z, t); z'(x, y, z, t); t'(x, y, z, t) \right)$$

etc.

Da (XV.54) si ha:

$$\frac{\partial E_x}{\partial z} = \frac{\partial E_x}{\partial x'} \frac{\partial x'}{\partial z} + \frac{\partial E_x}{\partial y'} \frac{\partial y'}{\partial z} + \frac{\partial E_x}{\partial z'} \frac{\partial z'}{\partial z} + \frac{\partial E_x}{\partial t'} \frac{\partial t'}{\partial z}$$
$$= \frac{\partial E_x}{\partial z'}$$
(XV.57)

$$\frac{\partial E_z}{\partial x} = \frac{\partial E_z}{\partial x'} \frac{\partial x'}{\partial x} + \frac{\partial E_z}{\partial y'} \frac{\partial y'}{\partial x} + \frac{\partial E_z}{\partial z'} \frac{\partial z'}{\partial x} + \frac{\partial E_z}{\partial t'} \frac{\partial t'}{\partial x}$$
$$= \Gamma \frac{\partial E_z}{\partial x'} - \Gamma \frac{V}{c^2} \frac{\partial E_z}{\partial t'}$$
(XV.58)

$$\frac{\partial B_{y}}{\partial t} = \frac{\partial B_{y}}{\partial x'} \frac{\partial x'}{\partial t} + \frac{\partial B_{y}}{\partial y'} \frac{\partial y'}{\partial t} + \frac{\partial B_{y}}{\partial z'} \frac{\partial z'}{\partial t} + \frac{\partial B_{y}}{\partial t'} \frac{\partial t'}{\partial t}$$
$$= -\Gamma V \frac{\partial B_{y}}{\partial x'} + \Gamma \frac{\partial B_{y}}{\partial t'} \tag{XV.59}$$

Sostituendo le (XV.57), (XV.58) e (XV.59) in (XV.56) si trova che in Σ' l'equazione (XV.56) assume la forma:

$$\frac{\partial E_x}{\partial z'} - \Gamma \frac{\partial E_z}{\partial x'} + \Gamma \frac{V}{c^2} \frac{\partial E_z}{\partial t'} = -\Gamma \frac{\partial B_y}{\partial t'} + \Gamma V \frac{\partial B_y}{\partial x'}$$

che più convenientemente può essere scritta:

$$\frac{\partial E_x}{\partial z'} - \frac{\partial}{\partial x'} [\Gamma E_z + \Gamma V B_y] = -\frac{\partial}{\partial t'} \left[\Gamma B_y + \Gamma \frac{V}{c^2} E_z \right]$$
(XV.60)

Risulta così che la (XV.60) ha nel sistema Σ' la stessa struttura di (XV.56) in Σ . In altri termini è possibile e lecito scrivere (XV.60) nella forma *covariante*

$$\frac{\partial E'_x}{\partial z'} - \frac{\partial E'_z}{\partial x'} = -\frac{\partial B'_y}{\partial t'}$$

pur di porre il seguente legame tra le componenti dei campi

$$\begin{cases} E'_x = E_x \\ E'_z = \Gamma[E_z + VB_y] \\ B'_y = \Gamma[B_y + (V/c^2)E_z] \end{cases}$$
(XV.61)

Si consideri ora in Σ e in Σ' la componente $(rot \vec{E})_z$. La corrispondente equazione di Maxwell in Σ è

$$(rot \vec{E})_z = -\frac{\partial B_z}{\partial t}$$

 $\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = -\frac{\partial B_z}{\partial t}$ (XV.62)

Con lo stesso procedimento già usato (equazioni (??), (??) e (??)) si trova

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} = \Gamma \frac{\partial E_y}{\partial x'} - \Gamma \frac{V}{c^2} \frac{\partial E_y}{\partial t'}$$
$$\frac{\partial E_x}{\partial y} = \frac{\partial E_x}{\partial y'}$$
$$\frac{\partial B_z}{\partial t} = -\Gamma V \frac{\partial B_z}{\partial x'} + \Gamma \frac{\partial B_z}{\partial t'}$$

La (XV.62) nel sistema Σ' si scrive

$$\Gamma \frac{\partial E_y}{\partial x'} - \Gamma \frac{V}{c^2} \frac{\partial E_y}{\partial t'} - \frac{\partial E_x}{\partial y'} = \Gamma V \frac{\partial B_z}{\partial x'} - \Gamma \frac{\partial B_z}{\partial t'}$$

o, più convenientemente

$$\frac{\partial}{\partial x'}(\Gamma E_y - \Gamma V B_z) - \frac{\partial E_x}{\partial y'} = -\frac{\partial}{\partial t'} \left(\Gamma B_z - \Gamma \frac{V}{c^2} E_y\right)$$
(XV.63)

L'identità di struttura tra (XV.63) e (XV.62) è resa manifesta dalle seguenti trasformazioni delle componenti dei campi

$$\begin{cases} E'_{x} = E_{x} \\ E'_{y} = \Gamma[E_{y} - VB_{z}] \\ B'_{z} = \Gamma[B_{z} - (V/c^{2})E_{y}] \end{cases}$$
(XV.64)

Per trovare la legge di trasformazione di B_x si consideri la componente $(rot \vec{B})_z$ e la corrispondente equazione di Maxwell

$$(rot \vec{B})_z = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial E_z}{\partial t} \qquad \left(\mu_0 \varepsilon_0 = \frac{1}{c^2}\right)$$

Cioè

$$\frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial E_z}{\partial t}$$
(XV.65)

Seguendo il procedimento illustrato per le altre componenti si trova che (XV.65) mantiene in Σ' la stessa forma che in Σ pur di aggiungere alle trasformazioni già note delle componenti dei campi la relazione

$$B_x' = B_x \tag{XV.66}$$

Possiamo raggruppare per comodità le (XV.61), (XV.64) e (XV.66) in una unica tabella che riassume le trasformazioni di $\vec{E} \in \vec{B}$ per le trasformazioni di Lorentz (XV.54) e (XV.55):

$$\begin{cases} E'_{x} = E_{x} \\ E'_{y} = \Gamma[E_{y} - VB_{z}] \\ E'_{z} = \Gamma[E_{z} + VB_{y}] \end{cases} \begin{cases} E_{x} = E'_{x} \\ E_{y} = \Gamma[E'_{y} + VB'_{z}] \\ E_{z} = \Gamma[E'_{z} - VB'_{y}] \end{cases}$$
$$\begin{cases} B'_{x} = B_{x} \\ B'_{y} = \Gamma[B_{y} + (V/c^{2})E_{z}] \\ B'_{z} = \Gamma[B_{z} - (V/c^{2})E_{y}] \end{cases} \end{cases} \begin{cases} B_{x} = B'_{x} \\ B_{y} = \Gamma[B'_{y} - (V/c^{2})E'_{z}] \\ B_{z} = \Gamma[B'_{z} + (V/c^{2})E'_{y}] \end{cases}$$

Capitolo XVI

Cronologia

... che ci piaccia o meno, non possiamo liberarci del passato, con tutti i suoi errori. Questo sopravvive infatti nei concetti ormai accettati, nel modo di formulare i problemi, nelle dottrine delle scuole, nella vita quotidiana, nel linguaggio e nelle istituzioni. Non esiste una generazione spontanea dei concetti, bensì questi vengono per così dire determinati dai loro "antenati". Ciò che è accaduto nel passato è molto più pericoloso - o, piuttosto, diventa pericoloso - solo quando il nostro legame con il passato resta inconsapevole e ignorato.

Ludwik Fleck

Questa cronologia, con i limiti intrinseci a questo tipo di strumento e con quelli legati alle nostre scelte e alle nostre conoscenze, nasce dall'esigenza di favorire la consapevolezza della natura storica della scienza, nonché di soddisfare qualche curiosità che la lettura del manuale può suscitare. La suddivisione in tre parti (fenomeni elettrici e magnetici, luce e materia) è suggerita dallo sviluppo storico dei secoli lontani; tuttavia, dopo il 1945, abbiamo fatto confluire i primi due filoni in quello della materia. Nella parte finale compaiono termini non definiti o non compiutamente illustrati: il lettore interessato potrà trovare le informazioni mancanti in rete.

XVI.1 Fenomeni elettrici e magnetici

I greci conoscevano alcuni fenomeni elettrici e magnetici connessi all'ambra e alla *magnetite*. L'ambra, *elektron* per i greci, è una resina fossile derivata dal legno; la magnetite è oggi classificata come una ferrite (pagina 248).

Miniere di magnetite si trovavano nella provincia greca di Magnesia, dal cui nome deriva, secondo Lucrezio, il termine di *magnete*.

Dal tredicesimo secolo ci è pervenuto un sorprendente lavoro di **Petrus Peregrinus** (XIII secolo, Francia). Il lavoro (*Epistola Petri Peregrini de Maricourt ad Sygerum de Foucaucourt, militem, de magnete*), scritto nel 1269 mentre Peregrino partecipava come 'tecnico' all'assedio di Lucera, è diviso in due parti: nella prima sono presentate le proprietà della magnetite; nella seconda le sue applicazioni. Peregrino descrive esperimenti eseguiti con un sfera di magnetite:

- posando sulla sfera una piastrina rettangolare di ferro, osservò che essa si disponeva lungo linee meridiane della sfera stessa. Le linee si intersecavano in due punti come quelle della longitudine sulla sfera terrestre. Per analogia, Peregrino chiamò questi due punti della sfera di magnetite *poli del magnete*;
- quando un magnete viene suddiviso in pezzi, ciascuno di essi possiede ancora due poli;
- poli dello stesso tipo si respingono; poli di tipo opposto si attraggono;
- un magnete *più forte* inverte la posizione dei poli di un magnete *più debole*.

Nella seconda parte, Peregrino descrive bussole galleggianti come strumenti di uso comune e propone la costruzione di una bussola rotante intorno ad un perno.

- 1600. William Gilbert (1544 1603, Gran Bretagna) può essere considerato come il pioniere della scienza dell'elettricità e del magnetismo. Nel 1600 pubblica il lavoro *De Magnete, Magneticisque Corporibus, et de Magno Magnete Tellure* in cui presenta i risultati di molti anni di ricerche:
 - un ago magnetico si orienta secondo la linea Sud Nord del meridiano terrestre e si inclina verso il basso perché la Terra agisce come una barra magnetizzata;
 - diversi materiali strofinati si caricano elettricamente; per descrivere le loro attrazioni repulsioni introduce il termine *elettrico*;
 - serva che, mentre le interazioni elettriche sono grandemente influenzate dai materiali interposti tra i corpi carichi, quelle magnetiche lo sono in misura molto minore.

- I663. Otto von Guericke (1602 1686, Germania), noto per avere inventato la pompa ad aria,¹ costruisce il primo generatore di cariche elettriche: una sfera di zolfo montata su un'asta di ferro. La sfera può essere ruotata con una mano e strofinata con l'altra. Dimostra inoltre che la luce, non il suono, attraversa i recipienti in cui è stato fatto il vuoto.
- 1729. Stephen Gray (1666 1736, Gran Bretagna) conclude, sulla base di diversi esperimenti, che l'elettricità può fluire nei materiali (usando tubi di vetro, corde di canapa e fili metallici). [Due dei materiali usati (vetro e canapa) sono isolanti: possono condurre elettricità solo se contaminati da materiali conduttori].
- 1733. Charles Dufay (1698 1739, Francia) avanza l'ipotesi che la materia è, generalmente, elettricamente neutra, perché contiene due fluidi elettrici che si bilanciano: uno *vetroso* (o positivo), l'altro *resinoso* (o negativo). Lo strofinio rompe questo equilibrio lasciando nel materiale strofinato un eccesso di uno dei due fluidi: esso diviene elettricamente carico e respinge materiali che hanno lo stesso fluido in eccesso, mentre attrae materiali con un eccesso dell'altro fluido.
- ♦ 1747. Pieter van Musschenbroek (1692 1761, Olanda) e Georg von Kleist (~1700 - 1748, Germania), indipendentemente l'uno dall'altro, inventano quello che oggi chiamiamo condensatore: un dispositivo costituito da due 'conduttori' affacciati e separati da un isolante (sezione XII.5, pagina 350). Opportunamente 'caricato', esso è in grado di accumulare e mantenere cariche elettriche. Il condensatore inventato da Musschenbroek consisteva in una bottiglia di vetro parzialmente riempita d'acqua e chiusa da un tappo di sughero attraverso cui passava un'asta metallica; un'estremità di questa era in contatto con l'acqua, l'altra emergeva dal tappo di sughero. Il 'condensatore', denominato allora bottiglia di Leida (dal nome della cittadina di Musschenbroek), era caricato tenendo la bottiglia con una mano e ponendo l'estremità dell'asta metallica emergente dal tappo in contatto con una macchina elettrostatica. In linguaggio moderno, le due 'armature' del 'condensatore' erano costituite dalla mano dello sperimentatore e dall'insieme costituito dal metallo e dall'acqua; la macchina

¹Famoso è il suo esperimento, ripetuto più volte, con due coppe di rame congiunte in modo da formare una sfera: diminuita la pressione all'interno della sfera per mezzo della sua pompa, più cavalli non erano in grado di separare le due coppe.

elettrostatica toglieva elettroni dalla mano e li depositava sul sistema *metallo* + *acqua* (o viceversa) attraverso il circuito chiuso dal corpo dello sperimentatore e dal suolo.

- I748. William Watson (1715 1787, Gran Bretagna) migliora l'efficienza della bottiglia di Leida. Elimina l'acqua e riveste le pareti, interna ed esterna, della bottiglia con sottili fogli metallici; quello interno è posto in contatto con l'asta metallica che attraversa il tappo di sughero. E' nato il condensatore 'moderno'.
- 1750 circa. Benjamin Franklin (1706 1790, Stati Uniti) conduce diversi esperimenti sui fenomeni elettrici e propone una teoria dell'elettricità basata su un solo fluido elettrico: gli oggetti elettricamente neutri possiedono la corretta quantità di fluido; quelli che ne hanno in eccesso sono in uno stato '*plus*' (positivo); quelli che ne hanno in difetto sono in uno stato '*minus*' (negativo). Franklin studia in particolare le proprietà della bottiglia di Leida da lui definita 'bottiglia meravigliosa' o 'bottiglia miracolosa'. Gli esperimenti condotti mostrano in linguaggio moderno che le armature del 'condensatore' possiedono cariche elettriche di segno opposto e in quantità uguali; costruisce un condensatore a facce piane e parallele e applica la sua teoria per descriverne le proprietà. Il 29 aprile 1748 scrive che "i termini *carica* e *scarica*" di un condensatore sono fuorvianti perché

...non c'è più fuoco elettrico nella bottiglia dopo quella che è chiamata la sua *carica,* rispetto a prima; né di meno dopo la sua *scarica.*..²

Durante un temporale, Franklin carica un condensatore mediante un'ingegnosa e suggestiva apparecchiatura. Collega un'armatura di una bottiglia di Leida al suolo e l'altra armatura ad una chiave metallica connessa tramite una corda ad un aquilone di seta al cui estremo libero è posta una punta metallica. L'aquilone è trattenuto da una persona mediante una striscia di seta - asciutta perché tenuta al riparo dalla pioggia - connessa alla corda tramite la chiave. Il circuito di carica del 'condensatore' era costituito dalla sequenza armatura - chiave - corda umida - aquilone umido - punta metallica - aria ionizzata - suolo - altra armatura. Con le parole di Franklin:

²B. Franklin, 'Further experiments and observations in electricity', IV lettera di B. Franklin a P. Collinson, 29 aprile 1749. In rete all'indirizzo: http://www.aip.org/history/gap/Franklin/Franklin.html

E quando la pioggia ha inumidito l'aquilone e la corda, così che essi possano condurre liberamente il fuoco elettrico, voi troverete che esso fluisce copiosamente avvicinando il vostro dito alla chiave. A questo punto, la bottiglia può essere caricata...³

- 1767. Joseph Priestley (Gran Bretagna, 1733 1804) pubblica il volume dal titolo Storia e attualità dell'elettricità. Riprendendo un esperimento di Franklin, non rileva alcun effetto sulle sferette di sughero poste all'interno di un contenitore metallico fortemente carico elettricamente. Priestley avanza l'ipotesi che tra due corpi elettricamente carichi si esercita una forza che, come quella gravitazionale, dipende dall'inverso del quadrato della distanza tra i corpi stessi: l'ipotesi era suggerita dall'analogia tra l'assenza di effetti sulle sferette nel contenitore carico e il teorema di Newton secondo cui non ci sono forze gravitazionali all'interno di una sfera cava.
- 1785. Charles Augustin Coulomb (Francia, 1736 1806) pubblica i risultati dei suoi esperimenti sulle forze di interazione tra corpi elettricamente carichi o tra poli magnetici. Gli esperimenti, condotti con una bilancia di torsione, consentono a Coulomb di concludere che queste forze sono inversamente proporzionali al quadrato della distanza tra i due corpi carichi o i due poli magnetici (sezione VI.1.1, pagina 180). Per quanto concerne l'interazione tra due corpi elettricamente carichi, la loro forza di interazione è, secondo Coulomb, proporzionale alla quantità di carica di ciascuno di essi. Coulomb, tuttavia, non effettua alcuna misura al riguardo.
- I800, 20 marzo. Alessandro Volta (1745 1827) nella lettera indirizzata a Sir Joseph Banks, annuncia l'invenzione dell'organo elettrico artificiale: è nata la pila (sezione XI.3.2, pagina 330). La pila, subito perfezionata, permette di produrre correnti di intensità e durata tale da consentire lo studio sperimentale delle correnti e dei loro effetti. L'invenzione della pila impresse una grande accelerazione allo studio dei fenomeni elettrici e magnetici e alle loro applicazioni.
- 1800, 30 aprile. William Nicholson (1753 1815, Gran Bretagna) e Anthony Carlisle (1764 - 1840, Gran Bretagna) mettono a punto la prima pila costruita in Gran Bretagna. Per rendere più sicuro un contatto,

³B. Franklin, 'Observation on Electricity', Lettera XI, 19 ottobre 1752. In rete all'indirizzo citato alla nota precedente.

posano una goccia d'acqua nel punto di connessione tra un polo della pila e il filo che chiude il circuito: osservano così lo sviluppo di gas in quel punto. Procedono allora ad inserire nel circuito della pila un tubo pieno di acqua in cui vengono immersi i due fili provenienti dai poli della pila: un elettrodo sviluppa gas infiammabile, mentre l'altro si ossida. Usando fili di platino, osservano lo sviluppo di idrogeno ad un elettrodo e di ossigeno all'altro elettrodo. Era il 2 maggio 1800: era stata realizzata la prima elettrolisi dell'acqua. Le ricerche elettrochimiche vennero proseguite sistematicamente da **Humphry Davy** (1778 - 1829, Gran Bretagna), di cui Faraday era allora assistente.

I812. Simeon Denis Poisson (1781 - 1840, Francia), sostenitore della teoria dei due fluidi elettrici, applica la teoria del potenziale all'elettrostatica scrivendo, fra l'altro, l'equazione, nota oggi con il suo nome:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

dove ρ è la densità risultante dei due fluidi elettrici (oggi densità di carica elettrica; pagina 179).

- I820. Hans Christian Oersted (1777 1851, Danimarca) scopre che un ago magnetico è deviato da una corrente. La scoperta di Oersted diede immediatamente origine ad una serie di esperimenti tesi ad approfondire i legami tra elettricità e magnetismo: come l'invenzione della pila, esso fu fondamentale per i successivi sviluppi della fisica e della tecnologia.
- ♦ 1820. Jean Baptiste Biot (1774 1862, Francia) e Félix Savart (1791 1841, Francia), studiando l'interazione tra correnti e poli magnetici, trovarono che, in termini moderni, il campo magnetico prodotto da un elemento di filo \vec{dl} percorso dalla corrente *I* è dato da:

$$\vec{dB} \propto \frac{I}{r^3} \vec{dl} \times \vec{r}$$

dove \vec{r} è il vettore distanza spiccato dall'elemento di circuito verso il punto in cui si calcola il campo magnetico (pagina 201).

 1820 circa. André Marie Ampère (1775 - 1836, Francia) studia le interazioni fra correnti e chiama *elettrodinamica* questa parte della fisica. Ampère trova, tra l'altro, che:

- due fili paralleli percorsi da corrente si attraggono o si respingono quando sono attraversati da corrente nello stesso senso o in sensi opposti (pagina 208);
- a la forza esercitata da un circuito chiuso percorso da corrente su un elemento di filo percorso da corrente è perpendicolare all'elemento di filo. Ampère fornisce anche l'espressione analitica di questa forza.

Ampère riteneva che i fenomeni magnetici fossero una manifestazione secondaria dei fenomeni elettrici: i campi magnetici sono, secondo Ampère, sempre prodotti da correnti. Formula quindi l'ipotesi che il campo magnetico prodotto dai magneti permanenti è dovuto a correnti microscopiche circolanti al loro interno (sezione VII.1.1, pagina 216).

- 1822. Thomas Johann Seebeck (1770 1831, Germania) scopre l'effetto termoelettrico. Quando in un circuito chiuso costituito da almeno due elementi conduttori le giunzioni tra gli elementi sono a diversa temperatura, il circuito viene percorso da una (debole) corrente. L'effetto termoelettrico è presto usato per misure di temperatura e il semplice dispositivo costituito da due elementi conduttori, le cui giunzioni sono mantenute a temperatura diversa, si chiama oggi termocoppia.
- I825 circa. William Sturgeon (1783 1850, Gran Bretagna) e Joseph Henry (1797 - 1878, Stati Uniti), negli anni venti, inventano (il primo) e sviluppano (il secondo) l'elettromagnete: una serie di spire di rame avvolte intorno ad un pezzo di ferro. Al passaggio della corrente nell'avvolgimento, il ferro si magnetizza, comportandosi così come una calamita.

Fresnel (1788 - 1827, Francia) aveva ipotizzato che, siccome una barra di ferro posta all'interno di un solenoide percorso da una corrente si magnetizza, la presenza di un magnete all'interno del solenoide potesse generare una corrente nel solenoide stesso. Esperimenti condotti negli anni venti diedero tutti risultati negativi.

I825 - 1827. Georg Simon Ohm (1789 - 1854, Germania) stabilisce le leggi, oggi note con il suo nome, relative ai circuiti in corrente continua (sezione XII.2, pagina 346). La loro accettazione da parte della

comunità scientifica fu lenta. Il punto cruciale delle ricerche di Ohm fu la scoperta della resistenza interna della pila: trascurare la resistenza interna della pila nell'uso di circuiti con piccola resistenza di carico conduceva inevitabilmente a risultati non riproducibili.

♦ 1831. Michael Faraday (1791 - 1867, Gran Bretagna) scopre il fenomeno dell'induzione elettromagnetica (capitolo XI, pagina 317). Faraday usa un anello di ferro intorno al quale avvolge in diverse spire un filo di rame le cui estremità vengono collegate, tramite un interruttore, ad una pila. Un secondo filo di rame è avvolto intorno all'anello nella posizione diametralmente opposta: i suoi due capi, congiunti, chiudono il circuito lontano dall'anello e un ago magnetico, opportunamente disposto, segnala un eventuale passaggio di corrente nel filo. Faraday osserva che, quando il circuito della pila viene chiuso, l'ago subisce una deviazione temporanea; l'ago viene deviato in senso opposto quando il circuito della pila viene aperto (30 agosto 1831). Faraday scopre poi che una corrente viene indotta in un avvolgimento di rame anche avvicinando o allontanando un magnete. Successivamente, esegue i famosi esperimenti con il disco (ampiamente discussi nel capitolo XI, pagina 317). Generatori di corrente continua basati sulla fisica del disco di Faraday verranno sviluppati negli anni sessanta da Antonio Pacinotti (1807 - 1889, Italia) e, a livello industriale, da Zenobe Theophile Gramme (1826 - 1901, Belgio) (dinamo).

A partire dall'estate del 1832, Faraday si impegna in una ricerca tendente a dimostrare che tutte le forme di elettricità allora note e prodotte con generatori elettrostatici, pile voltaiche, termocoppie, dinamo e pesci elettrici sono identiche. Viene così condotto a studiare il fenomeno dell'elettrolisi di cui stabilisce le leggi che, espresse in forma moderna, affermano:

- la massa depositata sull'elettrodo di una cella elettrolitica è pro- porzionale al prodotto della corrente usata e della durata del pro-cesso;
- \[
 \u03c8 le masse delle sostanze depositate sugli elettrodi, usando la medesima quantità di elettricità, sono proporzionali alle rispettive masse atomiche divise per la carica degli ioni.
- ◊ 1832. Già negli anni venti, Joseph Henry aveva messo a punto le tecniche di costruzione di elettromagneti. Nel 1830 osserva, ma non

pubblica, alcuni fenomeni di induzione elettromagnetica. Nel 1832 gli capita di osservare che, separando un capo di un lungo avvolgimento di rame dal polo di una batteria, si stabilisce una scarica elettrica tra il capo del filo e il polo della batteria. Henry interpreta correttamente questo fenomeno come un fenomeno di *autoinduzione* (sezione XII.3, pagina 346). In suo onore, l'unità di misura dell'induttanza si chiama *henry*.

1837. Appaiono i primi due modelli di telegrafo basati sull'uso di fenomeni elettrici. William Cooke (1806 - 1879, Gran Bretagna) e Charles Wheatstone (1802 - 1875) ottengono un brevetto per un telegrafo che utilizza, nella stazione ricevente, cinque aghi magnetici che, deviati dal passaggio della corrente in cinque fili diversi, puntano, singolarmente o in coppia, verso numeri o lettere stampate su un pannello. Nonostante la sua complessità, questo apparato fu ampiamente usato in Gran Bretagna, particolarmente nelle ferrovie. Migliore fortuna riscosse il brevetto acquisito nello stesso anno da Samuel Morse (1791 - 1872, Stati Uniti) - sino ad allora pittore e scultore - per un telegrafo basato sull'uso di un singolo tasto che, quando premuto, chiudeva il circuito elettrico per un tempo più (linea) o meno (punto) lungo. L'anno successivo, Morse presenta il codice che porta il suo nome. Nel 1844, realizza - con il finanziamento del Congresso - la prima linea telegrafica degli Stati Uniti tra Baltimora e Washington.

Il telegrafo fu un'invenzione che segnò profondamente l'economia del XIX secolo: per il costo degli impianti, le compagnie telegrafiche divennero - grazie anche ai finanziamenti statali - tra le imprese più grandi dell'Ottocento.

♦ 1840. James Prescott Joule (1818 - 1889, Gran Bretagna) stabilisce la legge che porta il suo nome, relativa alla potenza *P* dissipata da un resistore percorso da corrente:

$$P = I^2 R = \Delta V I$$

dove *I* è la corrente, *R* la resistenza e ΔV la differenza di potenziale ai capi del resistore (pagina 274). Si noti come queste ricerche di Joule abbiano preceduto quelle sull'equivalente meccanico del calore (1847). Nello stesso anno 1847, **Hermann von Helmoltz** (1821 - 1894, Germania) formula il principio di conservazione dell'energia.

♦ 1855 circa. Lo sviluppo del telegrafo stimola lo studio teorico e sperimentale di un problema già affrontato in passato con scarso successo: con quale velocità i fenomeni elettrici si propagano nei conduttori? Le misure erano, in genere, effettuate nel modo seguente. Un circuito costituito da una batteria di pile o di condensatori e da un filo metallico veniva interrotto in due punti spazialmente vicini, ma separati da un lungo percorso del filo, in modo tale da poter osservare le scintille che scoccavano tra le due coppie di terminali. Secondo la misura effettuata da Watson nel 1747 - 1748 con un circuito lungo quattro miglia, le due scintille scoccavano simultaneamente: la velocità di propagazione era troppo elevata per poter essere misurata. Misure effettuate nell'Ottocento avevano dato risultati molto diversi. Nel 1854, Faraday dimostra sperimentalmente che un cavo sottomarino utilizzato per le trasmissioni telegrafiche - con un'anima di rame coperta da guttaperca - si comporta come un condensatore: il rame e l'acqua marina ne costituiscono le due armature, la guttaperca l'isolante che le separa. Si comprese allora che la trasmissione di segnali elettrici lungo un cavo dipendeva anche dalla capacità del cavo (oltre che dall'induttanza del circuito; sezione XII.10, pagina 377). La teoria fu sviluppata da William Thomson (1824 - 1907, Gran Bretagna) nel 1854, da Gustav Robert Kirchhoff (1824 - 1887, Germania) nel 1857 e da Oliver Heaviside (1850 - 1925, Gran Bretagna) nel 1876. Kirchhoff trovò che correnti variabili si 'spostano' in conduttori ideali (conducibilità infinita) con una velocità indipendente dalla natura del conduttore e assai vicina alla velocità della luce. Questa velocità era già comparsa l'anno precedente quando Wilhelm Eduard Weber (1804 - 1891, Germania) e Rudolph Kohlrausch (1809 - 1858, Germania) determinarono sperimentalmente il rapporto tra unità elettrostatica ed elettromagnetica della carica elettrica e lo trovarono pari a circa $3.1 \times 10^8 m s^{-1}$.

Negli anni settanta si svilupparono le **tecniche telefoniche**, ma il loro sfruttamento commerciale fu molto più lento di quello del telegrafo.

Viene pubblicato il trattato di James Clerk Maxwell (1831 - 1879, Gran Bretagna) A treatise on electricity and magnetism. Esso contiene, ma non nella forma a noi nota, le sue famose quattro equazioni che, insieme all'espressione della forza di Lorentz, descrivono tutti i fenomeni elettromagnetici nel vuoto (capitolo III, pagina 75); nonché, con opportune ipotesi aggiuntive, anche nei mezzi materia-li (capitoli VIII, pagina 251 e IX, pagina 271). L'immagine del mon-

do fisico ai tempi di Maxwell era caratterizzata, tra l'altro, dall'idea di *Etere* concepito come un mezzo elastico - in grado di sostenere vibrazioni trasversali, senza massa, trasparente, privo di attrito, non direttamente rilevabile con mezzi fisici o chimici (sezione III.2.3, pagina 81).

Conseguenza delle equazioni di Maxwell è la propagazione del campo elettromagnetico sotto forma di onde trasversali con una velocità, nell'Etere, il cui valore calcolato si approssima a quello noto della luce (sezione IV.1.1, pagina 86). Maxwell conclude che "... è difficile evitare l'inferenza che la luce consista di onde trasversali dello stesso mezzo che è la causa dei fenomeni elettrici e magnetici".

- ♦ 1879. Edwin Hall (1855 1938, USA) scopre l'effetto che porta il suo nome.
- 1884. All'esposizione internazionale di Torino viene presentato un prototipo del 'generatore secondario', detto oggi trasformatore. Galileo Ferraris (1847 - 1897, Italia) riceve l'incarico dalla giuria dell'esposizione di studiarne il funzionamento. Ferraris esegue una serie di misure e, successivamente, sviluppa la teoria dell'apparecchio che diverrà, in poco tempo, indispensabile nel processo di distribuzione e utilizzazione dell'energia elettrica (sezione XII.11, pagina 382).
- 1887. I fenomeni descritti dalle onde di Maxwell sono creati in laboratorio da Heinrich Hertz (1857 - 1894, Germania). Durante gli esperimenti sulle onde elettromagnetiche Hertz scopre l'*effetto fotoelettrico* (sezione IX.2, pagina 287). In una bellissima memoria, Hertz ne descrive le caratteristiche principali osservate eseguendo una serie di esperimenti caratterizzati dalla sequenza ipotesi - esperimento - conferma o falsificazione.
- ♦ 1895. Hendrik Antoon Lorentz (1853 1928, Olanda) scrive l'equazione che esprime la forza esercitata da un campo elettromagnetico su una carica *q* puntiforme:

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$$

dove \vec{v} è la velocità della carica, \vec{E} il campo elettrico e \vec{B} il campo magnetico. Questa equazione completa la teoria di Maxwell indicando quali sono gli effetti del campo elettromagnetico - soluzione delle equazioni di Maxwell - su una carica puntiforme (pagina 78).

- ♦ 1896. Pieter Zeeman (1865 1943, Olanda) scopre l'effetto che porta il suo nome. Già nel 1862, Michael Faraday si era proposto di verificare se l'applicazione di un campo magnetico avesse qualche effetto sulle righe emesse dal sodio vaporizzato su una fiamma: gli esiti dei suoi esperimenti furono negativi. Il successo di Zeeman è da attribuire all'uso di un reticolo prodotto da Rowland e di un magnete in grado di produrre un campo magnetico di 1T. Si noti tuttavia che Zeeman osservò solo, in assorbimento, un allargamento delle due righe del 'doppietto' giallo del sodio. Lorentz gli fece notare che, secondo il suo modello di emissione basato su una carica puntiforme in moto armonico, la luce emessa ai bordi delle righe allargate sarebbe dovuta essere polarizzata circolarmente, se osservata in direzione parallela alla direzione del campo magnetico applicato (sezione VII.5.4, pagina 243): Zeeman eseguì le misure relative e verificò la previsione di Lorentz (1897). Dalle misure, Zeeman fu anche in grado di ottenere una stima rozza del rapporto e/m tra la carica e la massa della particella considerata in moto armonico ottenendo il valore di $10^{11}C/kg$: questo rapporto è pari a $\approx 1.76 \times 10^{11} C/kg$ se la particella è l'elettrone (dati odierni). Si noti, tuttavia, che le righe del doppietto giallo del sodio presentano il cosiddetto effetto Zeeman anomalo, mentre la teoria elettromagnetica di Lorentz si applica solo all'effetto Zeeman normale.
- ♦ 1897. Joseph John Thomson (1856 1940, Gran Bretagna) scopre l'elettrone.
- ♦ 1901. Guglielmo Marconi (1874 1937, Italia) trasmette il primo segnale radio attraverso l'Atlantico (12 dicembre).
- I902. Walter Kaufmann (1871 1947, Germania), studiando la deflessione in campo magnetico degli elettroni emessi da materiali radioattivi, ottiene alcuni dati che suggeriscono la dipendenza della massa degli elettroni dalla loro velocità (pagina 49).
- I902 1905. Henri Poincaré (1854 1912, Francia) pubblica una serie di lavori che contengono una teoria sostanzialmente equivalente alla teoria della relatività ristretta di Einstein. Nel libro *La science et l'hypothèse* (1902), scrive che

non c'è lo spazio assoluto e noi non concepiamo che moti relativi...; non c'è il tempo assoluto; dire che due durate sono uguali è un'asserzione che, per se stessa, non ha alcun senso e che ne

può acquisire uno solo per convenzione; non solo non abbiamo un'intuizione diretta dell'uguaglianza di due durate, ma non abbiamo neppure quella della simultaneità di due eventi che si producono in luoghi differenti...Poco ci importa che l'Etere esista realmente, è una questione che riguarda i metafisici; l'essenziale è che tutto succede come se esistesse e che questa ipotesi è comoda per spiegare i fenomeni. Dopo tutto, non abbiamo ragioni diverse per credere all'esistenza degli oggetti materiali. Non è questa che una comoda ipotesi; solo che essa non cesserà mai di esserla, mentre verrà certamente un giorno in cui l'Etere sarà dichiarato inutile.⁴

Nel 1904 e 1905 pubblica tre lavori, nell'ultimo dei quali (ricevuto il 23 luglio dalla redazione dei *Rendiconti del Circolo matematico di Palermo*, ma pubblicato un anno dopo) sviluppa interamente una teoria sostanzialmente equivalente a quella di Einstein. Tuttavia, i contributi di Poincaré alla teoria della relatività furono sostanzialmente ignorati dai suoi contemporanei. Le motivazioni possono essere state di genere diverso: a) il lavoro completo di Poincaré esce un anno dopo quello di Einstein; b) l'approccio di Poncaré è meno 'fisico' di quello di Einstein; c) la posizione 'convezionalista' di Poincaré; il mantenimento del concetto di Etere.

- I905. Albert Einstein (1879 1955, Germania) formula quella che sarà poi chiamata teoria della relatività ristretta o speciale. L'articolo, intitolato L'elettrodinamica dei corpi in movimento, contiene, fra l'altro, l'assunzione che la velocità della luce è indipendente 'dallo stato di moto del corpo che la emette', l'abbandono del concetto di Etere e del ruolo che esso aveva svolto nell'elettromagnetismo dell'Ottocento, nonché la prima derivazione rigorosa delle trasformazioni di Lorentz (sezioni: II.5.3, pagina 36; II.6.1, pagina 42; II.12, pagina 66).
- Igon 1911. Robert Andrews Millikan (1868 1953, USA) misura la carica dell'elettrone mediante l'esperimento con le goccioline d'olio (sezione XIII.1.1, pagina 386).
- ♦ Anni venti. Irwing Langmuir (1881 1957, USA) introduce il termine plasma per denotare un aggregato neutro di particelle cariche.

⁴In rete all'indirizzo: http://abu.cnam.fr/cgi-bin/donner_html?scihyp2

XVI.2 La luce

- VI a.c. Secondo Pitagora (~575 a.c. ~490 a.c., Grecia) la luce è costituita da raggi che partendo dagli occhi raggiungono gli oggetti verso cui si guarda: la loro vista si realizza quando i raggi luminosi li raggiungono. Il senso della vista veniva così spiegato in termini del più intuitivo senso del tatto.
- III a.c. Secondo Epicuro (341 a.c. 270 a.c., Grecia) la luce, emessa da una sorgente, viene riflessa dagli oggetti nei nostri occhi.
- ◊ 1000 circa. Alhazen (965 1040, Mesopotamia (Iraq)) sviluppa un'ampia teoria dell'ottica che include, fra l'altro, i fenomeni di riflessione, rifrazione e visione binoculare.
- ◊ 1621. Willebrord van Roijen Snell (1580 1626, Olanda) scopre la legge della rifrazione:

$$\frac{\sin i}{\sin r} = \frac{n_r}{n_i}$$

dove *i* e *r* sono gli angoli che il raggio incidente e rifratto formano, rispettivamente, con la normale al piano di incidenza e n_i e n_r sono gli indici di rifrazione dei due mezzi in cui si propagano, rispettivamente, il raggio incidente e quello rifratto (sezione VIII.4, pagina 260).

- I660 circa. Pierre de Fermat (1601 1665, Francia) ricava le leggi della riflessione e rifrazione usando il postulato secondo cui il percorso di un raggio luminoso in un sistema ottico complesso è quello corrispondente al tempo di percorrenza minimo, nonché il postulato secondo cui la velocità della luce in un mezzo di indice di rifrazione *n* è ridotta di un fattore 1/*n* (sezione VIII.4, pagina 260).
- 1665 1666. Isaac Newton (1642 1727, Gran Bretagna), in seguito a esperimenti condotti con prismi di vetro, formula l'ipotesi secondo cui la luce è composta da diversi colori che il prisma separa (sezione VIII.2.1, pagina 257). Newton sostenne una teoria corpuscolare della luce motivata dal fatto che i suoi componenti erano considerati immutabili e tale proprietà poteva essere posseduta, secondo Newton, solo da immutabili particelle materiali. I raggi di diverso colore, costituiti da particelle di dimensioni diverse, provocano sensazioni diverse sulla retina dei nostri occhi.

- I669. Erasmus Bartholin (1625 1698, Danimarca) scopre la *doppia rifrazione*. Tra le mani di Bartholin finirono alcuni cristalli raccolti da un marinaio nella baia di Röeford in Islanda. Ogni piccolo oggetto osservato attraverso questi cristalli appariva doppio: ne dedusse che un raggio di luce, nell'attraversare il cristallo, subiva una *doppia rifrazione*. Uno dei due raggi rifratti obbediva alla nota legge di Snell della rifrazione, mentre l'altro la violava. I cristalli trovati dal marinaio erano cristalli di calcite (*CaCO*₃) detta anche spato d'Islanda (sezione X.2, pagina 294).
- ◇ 1676. Olaf Rømer (1644 1710, Danimarca) osserva che il periodo dell'eclissi del satellite *Io* di Giove varia durante l'anno: il periodo medio è di circa 42 ore e la variazione massima di circa 22 minuti. Rømer suppose che il fenomeno fosse dovuto alla velocità finita di propagazione della luce: supponendo che la variazione della distanza Terra Giove fosse essenzialmente dovuta al moto della Terra intorno al Sole, e che, quindi, i 22 minuti di variazione fossero quelli necessari alla luce per percorrere una distanza pari al diametro dell'orbita terrestre, Rømer stimò che la luce si propaga con una velocità pari a 2.143 × 10⁸ m s⁻¹. Il valore attuale, misurato con lo stesso procedimento usato da Rømer, è di 2.998 × 10⁸ m s⁻¹.
- ◇ 1690. Christiaan Huyghens (1629 1695, Danimarca) pubblica il suo *Trattato della luce* in cui sviluppa una teoria ondulatoria della luce. Secondo Huyghens, la luce è un fenomeno ondulatorio che si propaga nell'Etere. Le caratteristiche di questa propagazione sono studiate da Huyghens sulla base del seguente principio: si consideri all'istante t_0 un fronte d'onda; tutti i suoi punti diventano origine di onde secondarie che, in un mezzo omogeneo ed isotropo, si propagano sotto forma di superficî sferiche; all'istante generico *t* il nuovo fronte d'onda è costituito dall'inviluppo delle onde secondarie (sezione V.7, pagina 132). Huyghens riuscì così a dedurre le leggi della riflessione e della rifrazione. Si noti che Huyghens non considerò mai onde periodiche, bensì perturbazioni impulsive; quindi, nel suo caso, il fronte d'onda è semplicemente costituito, ad un certo istante, dal luogo dei punti in cui la perturbazione si manifesta. Si noti infine che le 'onde' luminose di Huyghens erano, per analogia con le onde sonore, longitudinali.

Huyghens fu anche in grado di descrivere la doppia rifrazione osservata nella calcite. Egli suppose che, nei materiali birifrangenti (pa-

gina 302), vengono prodotti due tipi di onde secondarie: quelle che danno origine al *raggio ordinario* sono superficî sferiche; le altre sono degli ellissoidi di rotazione e danno origine al *raggio straordinario*. Considerate due di queste superficî, una sferica e l'altra ellissoidale, si danno, secondo Huyghens, due casi: l'ellissoide è tangente alla sfera internamente o esternamente e la retta individuata dai due punti di contatto tra le due superficî costituisce l'*asse ottico* del materiale. Se un raggio di luce incide su di una lamina di calcite lungo la direzione del suo asse ottico, ci sarà solo un raggio rifratto perché le velocità di propagazione dei due tipi di onde secondarie sarà la stessa; se la direzione di incidenza è diversa da quella dell'asse ottico, si avranno due raggi: quello ordinario sarà rifratto secondo la legge di Snell, mentre quello straordinario obbedirà ancora alla legge di Snell, purché si tenga conto della variazione del suo indice di rifrazione in funzione della direzione di propagazione (sezione X.2, pagina 294).

Huyghens scoprì anche che se i raggi ordinario e straordinario prodotti da una lamina di calcite attraversano un'altra lamina di calcite essi danno luogo ad uno o due raggi emergenti in funzione della rotazione della seconda lamina intorno all'asse individuato dalla direzione di incidenza del raggio. Huyghens non riuscì, tuttavia, a dare una descrizione teorica del fenomeno osservato (esso è infatti legato alla *polarizzazione* dei due raggi, che verrà scoperta solo nel 1808; capitolo X, pagina 291).

- 1800 circa. Thomas Young (1773 1829, Gran Bretagna) pubblica una serie di lavori in cui sostiene la teoria ondulatoria della luce. Secondo Young, la teoria ondulatoria descrive in modo più soddisfacente, rispetto alla teoria corpuscolare, i fenomeni di riflessione e rifrazione. Essa permette inoltre di descrivere il fenomeno degli *anelli di Newton* come un fenomeno di *interferenza* (sezione V.8, pagina 133).⁵
- 1808. Etienne Louis Malus (1775 1812, Francia) scopre che i raggi riflessi da una superficie d'acqua secondo un angolo di 52°45′ hanno una proprietà simile a quella dei raggi che, dopo aver attraversato una lamina di calcite, attraversano una seconda lamina di calcite: per un'opportuna rotazione di quest'ultima lamina intorno all'asse indi-

⁵Si chiamano *anelli di Newton* una serie di bande concentriche luminose e scure che si osservano quando due pezzi di vetro, uno convesso e l'altro piano, sono disposti in modo che la faccia convessa del primo giaccia sul secondo.

viduato dalla direzione dei raggi incidenti, si ha un solo raggio rifratto, invece dei due raggi rifratti prodotti da luce 'normale'. Malus chiama questa proprietà *polarizzazione* (capitolo X, pagina 291).

- I816. Dominique Francois Jean Arago (1786 1853, Francia) comunica a Young che, insieme a Fresnel, ha osservato che due raggi di luce i cui piani di polarizzazione siano perpendicolari, non interferiscono come raggi di luce ordinari, ma, se ricombinati, danno origine alla medesima intensità luminosa, indipendentemente dalla differenza tra le distanze da loro percorse.
- **1817. Young** avanza l'ipotesi che le onde luminose siano trasversali.
 Si veda la citazione all'inizio del capitolo X (pagina 291).
- 1821. Augustin Jean Fresnel (1788 1827, Francia) sviluppa una teoria ondulatoria della luce basata su onde trasversali. Per far questo è necessario supporre che il fluido (Etere) possegga una rigidità sufficiente da permettere, come in un solido, vibrazioni trasversali.
- 1851. Armand Hippolyte Louis Fizeau (1819 1896, Francia) misura la velocità della luce nell'acqua in moto. I risultati sperimentali sono descritti dalla formula:

$$v_x = \frac{c}{n} + V\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) \tag{XVI.1}$$

dove v è la velocità della luce nel sistema di riferimento del laboratorio, c/n la velocità della luce nel sistema di riferimento dell'acqua in moto (n indice di rifrazione) e V la velocità dell'acqua nella direzione positiva dell'asse x. Scopo dell'esperimento era quello di verificare la correttezza delle diverse teorie dell'Etere. L'Etere era concepito come un fluido elastico privo di massa che permeava tutta la materia e lo spazio. Nel contesto dell'esperimento di Fizeau, le ipotesi in gioco erano quelle relative al rapporto tra Etere e materia, che, per quanto concerne il moto relativo, prevedono l'Etere completamente trascinato dalla materia, parzialmente trascinato, non trascinato. I risultati di Fizeau sono compatibili solo con l'ipotesi di un Etere parzialmente trascinato. Infatti, se l'Etere fosse completamente trascinato - applicando la regola galileiana di composizione delle velocità - si avrebbe che v = c/n + V; se fosse non trascinato, v = c/n. Precisamente, i risultati di Fizeau sono in accordo con le seguenti ipotesi di Fresnel:

- a) la densità dell'Etere in un mezzo materiale è proporzionale al quadrato del suo indice di rifrazione. Si avrà quindi, per un mezzo materiale di indice di rifrazione n, $\rho_n = An^2$ e, per l'Etere, $\rho_e = A$ (assumendo uguale ad uno l'indice di rifrazione dell'Etere);
- b) la densità di Etere trascinato è data da: $\rho_n \rho_e = A(n^2 1);$
- c) la velocità della luce in un mezzo dipende dalla frazione di Etere trascinato secondo la media pesata.

Si avrà:

$$v = \frac{A(n^2 - 1)(c/n + V) + Ac/n}{An^2}$$

cioè la (XVI.1).

La formula (XVI.1) si ricava oggi usando la regola per la composizione delle velocità della relatività ristretta, che, come sappiamo, ha abbandonato il concetto di Etere. Si ha (pagina 48):

$$v_x = \frac{v_x' + V}{1 + v_x' V/c^2}$$

dove abbiamo indicato con v'_x la velocità della luce nell'acqua. Siccome

$$\frac{v_x'V}{c^2} \ll 1$$

l'equazione precedente può essere approssimata dalla:

$$v_x \approx (v'_x + V) \left(1 - \frac{v'_x V}{c^2}\right) \approx \frac{c}{n} + V \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$$

dove, nell'ultimo passaggio, abbiamo usato la relazione $v'_x = c/n$. Abbiamo così ottenuto la (XVI.1).

♦ 1881. Albert Abraham Michelson (1852 - 1931, Germania, USA) esegue il suo famoso esperimento. Scrive Michelson:

> La teoria ondulatoria della luce assume l'esistenza di un mezzo chiamato Etere, le cui vibrazioni producono i fenomeni del calore e della luce, e che è supposto riempire tutto lo spazio. Secondo Fresnel, l'Etere, che è racchiuso nei mezzi ottici, partecipa al moto di questi mezzi, in misura dipendente dai loro indici di rifrazione. Per l'aria, questo moto sarebbe soltanto una piccola frazione di quello dell'aria stessa e sarà trascurato.

Assumendo che l'Etere sia a riposo, mentre la Terra si muove attraverso esso, il tempo richiesto perché la luce passi da un punto all'altro della superficie della Terra dipenderebbe dalla direzione in cui viaggia.⁶

Vediamo perché. Sia *l* la distanza tra due punti *A* e *B* disposti sulla superficie terrestre lungo la direzione di moto della Terra e sia *v* la velocità della Terra. Un lampo di luce - di durata trascurabile rispetto a quelle significative nell'esperimento - viene lanciato da *A* verso *B*, viene riflesso in *B* e torna in *A*. L'osservatore in quiete rispetto all'Etere vede 'l'asta' *AB* in moto rispetto all'Etere e ragiona come segue. L'intervallo di tempo τ_{AB} impiegato dal lampo di luce per andare da *A* a *B*, lungo la direzione di moto della Terra, si ricava dalla relazione:

$$c\tau_{AB} = l + \nu\tau_{AB} \tag{XVI.2}$$

perché mentre il lampo viaggia da *A* verso *B*, il punto *B* 'fugge' davanti al lampo (*c* è la velocità della luce misurata dall'osservatore in quiete nell'Etere). Se τ_{BA} è la durata del viaggio di ritorno del lampo da *B* verso *A*, avremo invece:

$$c\tau_{BA} = l - \nu \tau_{BA} \tag{XVI.3}$$

perché, in questo caso, *A* 'va incontro' al lampo di luce. Ne segue che, secondo l'osservatore in quiete nell'Etere, la durata complessiva del viaggio del lampo - da *A* a *B* e ritorno - è:

$$\tau_{AB} + \tau_{BA} = \frac{2lc}{c^2 - \nu^2} \tag{XVI.4}$$

Secondo l'osservatore in quiete nell'Etere la distanza totale percorsa dal lampo è $2l + v(\tau_{AB} - \tau_{BA})$ e quindi la velocità 'media' della luce durante l'intero percorso è:

$$\frac{2l + \nu(\tau_{AB} - \tau_{BA})}{\tau_{AB} + \tau_{BA}} = c$$

come si verifica immediatamente sommando membro a membro la (XVI.2) e la (XVI.3) e come, ovviamente, ci aspettiamo che sia. Dalla

⁶A.A. Michelson, 'The relative motion of the Earth and the luminiferous Ether', *American Journal of Science*, 22 (1881), 120 - 129, p. 120.
(XVI.4), Maxwell aveva dedotto che la velocità media della luce misurata da un osservatore in moto con la Terra fosse data dalla relazione:

$$\frac{2l}{\tau_{AB} + \tau_{BA}} = c \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right)$$

e, nelle parole di Michelson, aveva concluso che:

Poiché la differenza dipende dal quadrato del rapporto fra le due velocità [$v \in c$], secondo Maxwell, è troppo piccola per essere misurata.⁷

Si noti che si giunge alla conclusione di Maxwell assumendo implicitamente che le lunghezze e le durate misurate nei due sistemi di riferimento - Etere e Terra - siano le stesse. Si noti inoltre che l'Etere stazionario, su cui si basano le considerazioni di Michelson, svolge semplicemente il ruolo di un sistema di riferimento privilegiato; si osservi infine che le conclusioni di Maxwell - Michelson sono errate, non perché basate sull'ipotesi di un sistema di riferimento privilegiato, ma perché usano, implicitamente, le trasformazioni di coordinate galileiane.

L'esperimento di Michelson diede, come è noto, risultato negativo. Il suo ruolo nella nascita della relatività ristretta è stato marginale. Einstein, nel suo lavoro del 1905, lo cita solo di passaggio e in modo indiretto. Esso ha un interesse essenzialmente storico.

- ♦ 1887. Michelson ripete, con Edward William Morley (1838 1923, USA), l'esperimento interferometrico, ancora con risultato negativo.
- ♦ 1905. Einstein suggerisce l'ipotesi che

...quando un raggio luminoso uscente da un punto si propaga, l'energia non si distribuisce in modo continuo in uno spazio via via più grande; essa consiste invece in un numero finito di quanti di energia, localizzati in punti dello spazio, i quali si muovono senza dividersi e possono essere assorbiti e generati solo nella loro interezza.⁸

⁷Nota 6.

⁸A. Einstein, *Annalen der Physik*, 17, 354 - 362 (1905); trad. it. in: A. Einstein, *Opere scelte*, a cura di E. Bellone, Torino, Bollati Boringhieri, 1988, 118 - 135, p. 119.

Secondo l'ipotesi di Einstein, la relazione tra l'energia *E* del quanto di luce e la frequenza *v* della radiazione elettromagnetica descritta come un'onda è:

$$E = hv$$

dove *h* è la costante di Planck (capitolo V, pagina 113). All'interno del medesimo lavoro, Einstein suggerisce che la caratteristica fondamentale dell'effetto fotoelettrico - l'esistenza di una frequenza di soglia al di sotto della quale non viene emesso alcun elettrone - è facilmente spiegabile con l'ipotesi dei quanti di luce. Si avrebbe infatti che l'energia cinetica massima degli elettroni emessi E_{cin} sarebbe data dalla relazione:

$$E_{cin} = h\nu - \phi \tag{XVI.5}$$

dove ϕ è l'energia necessaria per strappare un elettrone al metallo (sezione IX.2, pagina 287).

- I908. Geoffrey Ingram Taylor, (1886 1975), Gran Bretagna) osserva un fenomeno di diffrazione con una sorgente di luce talmente debole che, in media, solo un quanto di luce alla volta è in volo tra la sorgente e la lastra fotografica (sezione V.8.7, pagina 153).
- * 1916. Robert Millikan (1868 1953, USA) verifica sperimentalmente la (XVI.5) e determina così anche il valore della costante h di Planck. Ciò nonostante, afferma:

Questa ipotesi può ben essere definita incauta innanzitutto perché una perturbazione elettromagnetica che rimane localizzata nello spazio appare come una violazione del concetto stesso di perturbazione elettromagnetica, e secondariamente perché contrasta apertamente ["flies in the face of"] con i ben stabiliti fatti dell'interferenza.⁹

I917. Einstein argomenta che il quanto di luce di energia hv possiede anche una quantità di moto uguale a hv/c. Dimostra infatti che: condizione sufficiente affinchè le molecole contenute in una cavità isoterma in equilibrio termodinamico mantengano la distribuzione maxwelliana delle velocità è che, durante l'assorbimento o l'emissione di un quanto di luce hv, esse acquisiscano una quantità di moto pari a hv/c nella direzione di moto (assorbimento) o in direzione

⁹R.A. Millikan, 'A direct photoelectric determination of Planck's *h*', *Physical Review*, 7, (1916), 355 - 388, p. 355.

opposta a quella di moto del quanto (emissione) (sezione V.5, pagina 128).

- I922. Erwin Schrödinger (1887 1961, Austria) sviluppa una teoria corpuscolare dell'effetto Doppler. Schrödinger applica al sistema *atomo* + *quanto di luce* le equazioni di conservazione relativistiche dell'energia e della quantità di moto (sezione V.10.4, pagina 163).
- I923. Arthur Holly Compton (1892 1962, USA) adotta il concetto di quanto di luce per spiegare la diffusione dei raggi X con aumento di lunghezza d'onda (sezione IX.3, pagina 288). Nello stesso anno, una trattazione equivalente è proposta da Debye.
- ◇ 1924. Satyendra Nath Bose (1894 1974, India) ricava la formula di Planck per la distribuzione spettrale della radiazione di corpo nero trattando la radiazione elettromagnetica come composta da quanti di luce di energia *hv* e quantità di moto *hv/c* (pagina 169 e 396).
- Ig26. Il chimico Gilbert Newton Lewis (1875 1946, USA) introduce il termine di *fotone*; successivamente, esso viene sempre più diffusamente usato per denotare il quanto di luce. Oggi, il termine 'quanto di luce' è usato quasi solo in contesti storici.
- ♦ **Fine anni venti.** Al quanto di luce viene attribuita anche un momento angolare intrinseco o di spin di modulo $\hbar = h/2\pi$ e diretto nello stesso senso o in senso opposto alla direzione di propagazione del quanto (sezione X.3, pagina 308).
- 1936. Richard Alexander Beth (1906 1999, USA) mette sperimentalmente in evidenza il momento angolare associato a fotoni polarizzati circolarmente (sezione X.4.1, pagina 313).
- I938. Herbert E. Ives (1882 1953, USA) e G.R. Stilwell misurano l'effetto Doppler trasversale dovuto al moto di atomi di idrogeno (sezione V.10.4, pagina 163).

XVI.3 La materia

IV a.C. Democrito (circa 460 a.C. - circa 370 a.C.), discepolo di Leucippo, riteneva che la materia fosse costituita da *atomi* di varia forma e dimensioni. Essi sono indivisibili e indistruttibili e si muovono nel vuoto. La loro aggregazione e disaggregazione è la causa dei cambiamenti che osserviamo in natura.

- I649. Viene ripubblicato il *De Rerum Natura* di Lucrezio e Pierre Gassendi (1592 1655, Francia) contribuisce alla diffusione della concezione atomica della materia, sebbene separata dal materialismo dei fondatori dell'atomismo greco.
- ♦ 1658. Robert Boyle (1627 1691, Irlanda) inizia i suoi studi sperimentali sull'aria che lo conducono alla legge secondo cui:

$$PV = P'V'$$

(*P* e *V* sono, rispettivamente, la pressione ed il volume di un gas). Boyle usa una teoria atomica della materia e introduce la distinzione tra *elementi* e *composti*: i secondi possono essere ottenuti combinando i primi:

Per elementi intendo...certi corpi primitivi e semplici o perfettamente non mescolati; che non possono essere costituiti da altri corpi o prodotti l'uno dall'altro; essi sono gli ingredienti con i quali possono essere prodotti tutti i corpi composti; questi, a loro volta, possono essere suddivisi negli ingredienti che li compongono...¹⁰

- 1675. Edme Mariotte (1620 1684, Francia) stabilisce, indipendentemente da Boyle, la legge secondo cui la pressione e il volume di un gas sono tra di loro inversamente proporzionali e osserva che tale legge vale solo se la temperatura del gas è mantenuta costante.
- ◊ 1687. Newton pubblica i Philosophiae Naturalis Principia Mathematica.
- ◊ 1704. La concezione che Newton presenta nella sua Ottica può essere considerata tipica dell'atomismo tra Seicento e Settecento:

Tutto considerato, mi sembra probabile che Dio abbia, all'Inizio, formato la materia con particelle solide, massive, dure, impenetrabili e disposte al moto, di dimensioni e forme tali e con tali altre proprietà e in tale proporzione rispetto allo spazio da essere adatte al fine per cui le aveva create; e che, essendo queste particelle primitive solide, esse sono incomparabilmente più dure di ogni corpo poroso da esse costituito; a dire il vero così

¹⁰R. Boyle, *The sceptical chemist*, Londra, 1661; in rete all'indirizzo: http://webserver.lemoyne.edu/faculty/giunta/EA/BOYLEann.HTML#foot19

dure, da non consumarsi mai o rompersi in frammenti; non essendo alcuna potenza ordinaria in grado di suddividere ciò che Dio medesimo fece uno durante la Creazione.¹¹

- I738. Daniel Bernoulli (1700 1782, Svizzera) sviluppa la teoria cinetica dei gas, considerati come composti da particelle in moto. Supponendo che la pressione di un gas sia dovuta agli urti delle particelle costituenti il gas, Bernoulli ricava la legge di Boyle. Questa teoria rimarrà incompresa e trascurata sino alla metà del XIX secolo, quando verrà ripresa e sviluppata da Joule, Clausius, Maxwell e Boltzmann.
- 1789. Antoine Laurent Lavoisier (1743 -1794, Francia) pubblica il suo Trattato elementare di Chimica, in cui, tra l'altro, appare un elenco di elementi (sostanze semplici) basata sulla definizione di Boyle e sullo studio sperimentale delle reazioni chimiche e una chiara enunciazione del principio di conservazione della materia nelle reazioni chimiche.
- 1794. Joseph Louis Proust (1754 1826, Francia) afferma che i costituenti di un composto chimico si combinano sempre secondo proporzioni definite in peso.
- I808. John Dalton (1766 1844, Gran Bretagna) pubblica la prima parte del suo Nuovo Sistema di Filosofia Chimica caratterizzato dalla sistematica applicazione della teoria atomica alla Chimica. Dalton enuncia la legge delle proporzioni multiple, secondo cui, se un elemento chimico entra a far parte di due composti, il rapporto fra i pesi dell'elemento nei due composti è sempre dato da un numero intero.
- 1809. Joseph Louis Gay Lussac (1778 1850, Francia) formula le leggi relative alla combinazione chimica di due gas: i volumi di due gas che si combinano stanno fra di loro secondo numeri interi; anche il volume del composto finale sta, secondo numeri interi, ai volumi dei gas costituenti.
- I811. Amedeo Avogadro (1776 1856, Italia) avanza due ipotesi: a) i gas di un elemento possono essere costituiti da molecole composte da almeno due atomi; b) volumi uguali di gas contengono lo stesso numero di molecole (a parità di altre condizioni). Queste proposte

¹¹I. Newton, *Optics*, IV edizione, Londra, (1730); in rete all'indirizzo: http://www.fordham.edu/halsall/mod/newton-optics.html

di Avogadro furono sottovalutate per circa cinquant'anni, anche per l'opposizione del grande chimico **Jons Jacob Berzelius** (1779 - 1848, Svezia); secondo Berzelius, gli atomi dello stesso elemento non possono unirsi in molecole in quanto si respingono, perché dotati della medesima carica elettrica.

- 1819. Pierre Louis Dulong (1785 1838, Francia) e Alexis Thérèse Petit (1791 - 1820, Francia) propongono una legge empirica per cui il calore specifico di un solido è proporzionale al numero di atomi in esso contenuti (pagina 400).
- 1854. Heinrich Geissler (1815 1879, Germania), soffiatore di vetro a Bonn, costruisce la pompa a mercurio.
- 1858. Geissler costruisce il tubo di vetro con inseriti due elettrodi metallici che porterà il suo nome. Esso verrà usato per lo studio delle scariche elettriche nei gas rarefatti. Inizia da qui il lungo percorso che porterà, nel 1897, alla scoperta dell'elettrone.
- 1858. Julius Plücker (1801 1868, Germania) scopre i raggi catodici. La natura di questi raggi rimarrà controversa sino al 1897, quando J. J. Thomson mostrerà che sono composti da elettroni.
- I858. Stanislao Cannizzaro (1826 1910, Italia), riprende le idee di Avogadro e le presenta, con successo, al primo Congresso Internazionale di Chimica (Karlsruhe, 1860).
- 1860. Gustav Robert Kirchhoff enuncia il principio secondo cui un corpo emette le stesse radiazioni che assorbe e dà inizio, con Robert Wilhelm Bunsen (1811 - 1899, Germania), allo sviluppo dell'analisi chimica basata su metodi spettroscopici.
- ♦ 1865. Joseph Loschmidt (1821 1895, Impero Austriaco) presenta il primo calcolo sulla dimensione degli atomi: l'ordine di grandezza risulta di 10⁻¹⁰ m. Il calcolo è basato sulla teoria cinetica dei gas e utilizza i dati sperimentali forniti dalla contrazione del volume dovuta alla liquefazione, dalla conducibilità termica e dalla diffusione dei gas.
- ◊ 1869. Dmitry Ivanovic Mendeleyev (1834 1907, Russia) pubblica la sua *Tavola Periodica* dei 63 elementi allora conosciuti. Mendeleyev individua sei gruppi di elementi caratterizzati dalla loro *valenza*.

I885. Johann Jakob Balmer (1825 - 1898, Svizzera), insegnante di matematica in una scuola secondaria, osserva che le righe emesse dall'idrogeno e allora note, possono essere descritte dalla formula:

$$\frac{1}{\lambda} = R\left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{n^2}\right) \qquad n \text{ intero}$$

dove *R* è una costante e λ la lunghezza d'onda delle righe.

- ◊ 1886. Eugene Goldstein (1850 1930, Germania), studiando le scariche elettriche nei gas rarefatti, scopre i *raggi canale* costituiti da particelle cariche positivamente.
- ♦ 1887. Hertz, come già ricordato, scopre l'effetto fotoelettrico (sezione IX.2, pagina 287).
- ♦ 1895. Wilhelm Conrad Röntgen (1845 1923, Germania) scopre i raggi X (sezione V.8.5, pagina 147).
- ♦ 1896. Antoine Henri Becquerel (1852 1908, Francia) scopre la *radioattività naturale*.
- ◊ 1896. Carl Linde, von (1842 1934, Germania), produce aria liquida in quantità utilizzabili.
- ♦ 1897. Joseph John Thomson scopre l'elettrone.
- ♦ **1900. Planck** inventa la costante *h*.
- ◊ 1907. Einstein applica la quantizzazione dell'energia dell'oscillatore armonico alla descrizione del calore specifico dei solidi cristallini.
- ♦ 1908. Heike Kamerlingh Onnes, (1853 1926, Olanda) liquefa l'elio.
- ♦ 1911. Ernest Rutherford (1871 1937, Gran Bretagna) scopre il nucleo.
- I911. Heike Kamerlingh Onnes, scopre la superconducibilità nel mercurio. In diversi metalli e leghe portati a temperature sufficientemente basse (dell'ordine del grado *K*), la resistività elettrica diventa nulla.¹²

¹²Si veda, per esempio, il sito: http://superconductors.org/

- I912. Peter Debye (1884 1966, Olanda) propone il suo modello per il calore specifico dei solidi cristallini (pagina 399).
- I913. Niels Henrik David Bohr (1885 1962, Danimarca) presenta il suo modello teorico dell'atomo di idrogeno (sezione VII.2, pagina 220).
- ♦ 1916. Einstein pubblica il lavoro sulla teoria della relatività generale.
- ♦ **1919. Rutherford** ottiene la prima disintegrazione artificiale di un atomo: bombardando azoto con particelle α si ottiene ossigeno e idrogeno.
- I921. Otto Stern (1888 1969, Germania), propone un esperimento per decidere tra la predizione classica e quantica riguardante il valore della componente del momento magnetico atomico lungo la direzione del campo magnetico applicato. Negli anni successivi, esegue, con Walther Gerlach (1889 - 1979, Germania) gli esperimenti che confermano la predizione quantica (sezione VII.5.2, pagina 236).
- ♦ **1923.** Louis Victor de Broglie (1892 1987, Francia) propone di associare ad una particella dotata di massa un'onda *fittizia* di lunghezza d'onda $\lambda = h/p$, dove p è la quantità di moto della particella (sezione V.8.6, pagina 150).
- I924. Edward Victor Appleton (1892 1965, Gran Bretagna) scopre la ionosfera (pagina 287).
- I925. Wolfgang Pauli (1900 1958, Austria) formula il principio di esclusione: in una determinata regione dello spazio, ogni stato quantico può essere occupato da un solo elettrone. Successivamente, il principio di esclusione apparve come un corollario del postulato, suggerito dalla conoscenza empirica, secondo cui un sistema di almeno due *fermioni*, particelle con spin semi intero, è descritto da una funzione d'onda anti simmetrica: la funzione d'onda cambia di segno quando si scambia lo stato di due particelle.
- ◊ 1925. Werner Heisenberg (1901 1976, Germania) pubblica il lavoro che dà origine alla meccanica quantica delle matrici.
- 1926. Erwin Schrödinger pubblica la prima memoria sulla meccanica quantica ondulatoria.

- 1926 1927. Enrico Fermi (1900 1954, Italia) e Paul Adrien Maurice Dirac (1902 - 1984, Gran Bretagna) formulano, indipendentemente, la statistica oggi detta di Fermi - Dirac, valida per i fermioni (pagina 395).
- 1927. Clinton Joseph Davisson (1881 1958, USA) e Lester Halbert Germer (1896 - 1971, USA) scoprono la diffrazione di elettroni da parte di cristalli di nickel (sezione V.8.6, pagina 150).
- Ig28. George Paget Thomson (1892 1975, Gran Bretagna) studia la diffrazione di elettroni da parte di diversi materiali (sezione V.8.6, pagina 150).
- 1928. Dirac pubblica la teoria quantica relativistica dell'elettrone (pagina 231).
- ◊ 1928. Felix Bloch (1905 1983, Svizzera, USA) discute la sua tesi di dottorato riguardante l'applicazione della meccanica quantica ai solidi cristallini (pagina 400).
- ♦ 1930. Wolfgang Pauli ipotizza l'esistenza di una particella neutra di piccola massa (chiamata 'neutrone') per spiegare l'apparente violazione della conservazione dell'energia nel decadimento β dei nuclei. Nel 1933, dopo la scoperta del neutrone, Pauli ipotizza che la sua ipotetica particella sia priva di massa e la chiama *neutrino*.
- 1930 1939. Diversi paesi (Francia, Germania, Giappone, Gran Bretagna, Italia, Unione Sovietica, USA) iniziano a studiare e sviluppare tecniche radar per impieghi militari.
- ♦ 1931. Harold C. Urey (1893 1981, USA) scopre il deuterio.
- I932. James Chadwick (1891 1974, Gran Bretagna) scopre il neutrone.
- ♦ 1932. Carl David Anderson (1905 1991, USA) scopre il positrone.
- I933. Ernst Ruska (1906 1988, Germania) costruisce il primo microscopio elettronico con una risoluzione maggiore di quella dei microscopi ottici.

- ♦ 1934. Enrico Fermi presenta una teoria del decadimento β in cui svolge un ruolo fondamentale il neutrino, particella neutra e priva di massa.
- ♦ 1934. Irène Curie (1897 1956) e Frédéric Joliot (1900 1958) producono il primo elemento radioattivo artificiale. Bombardando ²⁷ Al con particelle α producono ³⁰ P, un isotopo radioattivo del fosforo non presente in natura.
- ♦ 1934. Enrico Fermi produce diversi isotopi bombardando diversi nuclei con *neutroni lenti*. Ritiene anche di aver ottenuto un elemento transuranico (con numero atomico pari a 93) bombardando ²³⁸U con neutroni.
- 1934. Ida Tacke Noddack (1896 1979, Germania) suggerisce che bombardando l'uranio con neutroni si possano ottenere nuclei di massa inferiore a quella dell'uranio (disintegrazione). Secondo la testimonianza di Segrè, la Noddack inviò una copia del suo articolo a Fermi, ma il gruppo romano non ritenne plausibile l'ipotesi della Noddack. La credenza diffusa era che i nuclei non potessero emettere particelle più massive delle particelle *α*.
- 1936. Lise Meitner (1878 1968, Austria) inizia lo studio delle reazioni prodotte bombardando l'uranio con neutroni. Coinvolge nel lavoro Otto Hahn (1879 - 1968), Fritz Strassmann (1902 - 1980) e, successivamente, il nipote Otto Frisch.
- ♦ **1938. Pyotr Leonidovich Kapitsa** (1894 1984, Russia) scopre la superfluidità nell'⁴*He*. La supefluidità è caratterizzata dal fatto che la viscosità del materiale diventa nulla al di sotto di una temperatura critica (dell'ordine del grado *K*). L'⁴*He* è un bosone: il suo comportamento è pertanto descritto dalla statistica di Bose Einstein (pagina 396).
- I938. Lise Meitner e Otto Frisch (1904 1979, Austria) presentano la prima teoria della *fissione nucleare*.
- ◊ 1939. Felix Bloch e Luis Walter Alvarez (1911 1988, USA) misurano il momento di dipolo magnetico del neutrone.
- I941. Gli USA varano il progetto Manhattan per la costruzione della bomba a fissione nucleare.

- 1942. Chicago, 2 dicembre: prima fissione nucleare a catena controllata.
- ♦ 1945. Hiroshima, 6 agosto: viene sganciata la prima bomba a fissione nucleare.
- ♦ 1946. Felix Bloch e Edward Mills Purcell (1912 1997, USA) mettono a punto, in modo indipendente, la tecnica della risonanza magnetica nucleare (*NMR*).
- 1946. All'Università della Pennsylvania (USA) entra in funzione l'*ENIAC* (Electronic Numerical Integrator and Comparator), il primo calcolatore elettronico, digitale e programmabile costruito con tubi a vuoto.
- I947. John Bardeen (1909 1991, USA), Walter H. Brattain (1902 1987, USA) e William B. Shockley (1910 1989, Gran Bretagna, USA) inventano il transistor.
- ♦ **1947.** Willis E. Lamb jr. (1913, USA) e Robert Retherford osservano la transizione tra lo stato ${}^{2}P_{1/2}$ e lo stato ${}^{2}S_{1/2}$ dell'atomo di idrogeno che, secondo la teoria di Dirac, dovrebbero possedere la stessa energia. La frequenza della transizione è di 1057.858 *MHz* ± 2*KHz* (dato del 1982); la descrizione teorica di quello che fu poi chiamato *Lamb shift* fu data dall'elettrodinamica quantica (sezione VII.4, pagina 230).
- 1950. Hannes Alfven (1908 1995, Svezia) riassume nel libro Cosmical Electrodynamics i suoi primi lavori riguardanti la fisica del plasma (sezione IX.1.6, pagina 285).
- 1951 1952. Rosalind Franklin (1920 1958) svolge studi fondamentali, con tecniche cristallografiche ai raggi X, sulla struttura del DNA (acido desossiribonucleico).
- I953. Francis Harry Compton Crick (1916, Gran Bretagna), James Dewey Watson (1928, USA) e Maurice Hugh Frederick Wilkins (1916, Gran Bretagna) pubblicano lavori sulla struttura a doppia elica del DNA.
- I953. Charles H. Townes (1915, USA) realizza il primo maser (Microwave Amplification by Stimulated Emission of Radiation) (pagina 414).

- I954. I laboratori della *Bell* mettono a punto una cella fotovoltaica al silicio. In precedenza, ricercatori della *RCA* avevano realizzato una cella fotovoltaica con il solfuro di cadmio.
- 1955. Presso il National Physical Laboratory, Teddington, Gran Bretagna entra in funzione il primo orologio atomico al Cesio (pagina 59).
- * 1956. Tsung Dao Lee (1926, Cina, USA) e Chen Ning Yang (1922, Cina, USA), dopo aver attentamente analizzato i lavori sperimentali riguardanti il decadimento β, suggeriscono che la simmetria di parità possa non essere conservata in questi decadimenti e propongono esperimenti per verificare questa ipotesi.
- ◇ 1956. Frederick Reines (1918 1998) e Clyde Cowan (1919 1974, USA) rivelano, indirettamente, (anti) neutrini. Reines e Cowan assunsero che tra i prodotti di una centrale nucleare ci siano anti neutrini v. La reazione prevista era:

 $\overline{v} + p \rightarrow n + e^+$

(anti - neutrino + protone \rightarrow neutrone + positrone). L'esperimento, rivelando i prodotti della reazione, è stato considerato come una conferma dell'esistenza dell'anti - neutrino $\overline{\nu}$.

- ♦ **1957.** Chien Shiung Wu (1912 1997, Cina, USA), con i suoi collaboratori, verifica la violazione della parità nell'emissione β del ⁶⁰*Co*.
- 1957. John Bardeen (1908 1991, USA), Leon N. Cooper (1930, USA) e John Robert Schrieffer (1931, USA) presentano la teoria della superconducibilità, successivamente nota come teoria *BCS*.
- 1957. Rudolf Mössbauer (1929, Germania) scopre l'effetto che prende il suo nome (pagina 61).
- I958. Arthur L. Schawlow (1921 1999, USA) e Charles Hard Townes (1915, USA) pubblicano, su *Physical Review*, il lavoro *Infrared and Optical Masers* che può essere considerato come il punto di partenza della fisica del laser e delle sue applicazioni (pagina 414).
- Igentiation by Stimulated Emission of Radiation) (a impulsi) a rubino (ossido di alluminio con impurezze di cromo).

- ♦ 1962. Robert N. Hall (1919, USA) inventa il *laser* a semiconduttore.
- ◇ 1960 1962. Ivar Giaever (1929, Norvegia) studia sperimentalmente gli effetti di tunneling di elettroni attraverso un sottile strato di isolante che separa un superconduttore da un conduttore normale. Brian Josephson (1940, Gran Bretagna) sviluppa la teoria delle cosiddette (a posteriori) giunzioni Josephson (pagina 390) costituite da due superconduttori separate da un sottile strato di isolante (≈ 10 nm). Gli studi di Giaever e Josephson sono basati sulla teoria BCS della superconducibilità.
- ♦ 1962. Riccardo Giacconi (1931, Italia, USA) scopre sorgenti cosmiche di raggi X.
- > 1964. Murray Gell Mann (1929, USA) elabora il concetto di *quark* (e anti - quark) per descrivere le proprietà dei *barioni* e dei *mesoni*. La medesima idea è sviluppata contemporaneamente e indipendentemente da George Zweig (USA).
- 1965. Arno Penzias (1933, Germania) e Robert Woodrow Wilson (1936, USA) scoprono la radiazione cosmica di fondo (sezione II.10, pagina 62).
- ◇ 1965, circa. Abdus Salam (1926 1996, Pakistan) e Steven Weinberg (1933, USA) propongono, indipendentemente l'uno dall'altro, una teoria unificata dell'interazione elettromagnetica e dell'interazione *nucleare debole* (responsabile del decadimento β). Successivamente, la teoria è sviluppata da Sheldon Lee Glashow (1932, USA).
- ♦ 1968. Raymond Davis jr. (1914, USA) pubblica i primi risultati relativi alla misura del flusso di neutrini prodotti dal sole. Bruno Pontecorvo (1913 - 1993, Italia) aveva suggerito che, interagendo con nuclei di cloro, i neutrini (precisamente gli *e* - neutrini associati agli elettroni) producono nuclei di argon radioattivo (vita media di circa 50 giorni) ed elettroni. Verso la fine degli anni sessanta, Davis pose in un serbatoio, collocato in una miniera del South Dakota, 615 tonnellate di tetracloroetilene: nel serbatoio erano così presenti circa 2 × 10³⁰ nuclei di cloro. Le previsioni di Davis e collaboratori stimavano una produzione di circa 20 nuclei di argon al mese. Nel corso dell'esperimento, durato sino al 1994, furono contati 2000 atomi di argon; il loro nume-

ro era inferiore a quello previsto teoricamente. Questa discrepanza divenne nota come il *problema dei neutrini solari*.

- Anni '70. Diversi esperimenti sono interpretati sulla base dell'ipotesi dei quarks.
- 1972. David M. Lee (1931, USA), Douglas D. Osheroff (1945, USA) e Robert C. Richardson (1937, USA) scoprono la superfluidità nell'³ *He*. L'³*He* è un fermione; pertanto la sua superfluidità ha origini diverse da quella dell'⁴*He* che è un bosone.
- ♦ 1980. Klaus von Klitzing scopre l'effetto Hall quantico (sezione VI.6.1, pagina 214).
- 1981. Gerd Binnig (1947, Germania) e Heinrich Rohrer (1933, Svizzera) inventano il microscopio ad effetto tunnel (Scanning Tunnneling Microscope).
- 1983. Il gruppo di ricerca del *CERN* diretto da Carlo Rubbia (1934, Italia) e da Simon van der Meer (1925, Olanda) individuano i *bosoni intermedi W* e Z previsti dalla teoria unificata dell'interazione elettro - debole.
- 1983. E' completata la costruzione dell'osservatorio Kamiokande, dedicato allo studio degli e - neutrini di origine solare e cosmica. Il serbatoio, collocato in una miniera (1000 metri sotto il suolo), contiene 3000 tonnellate d'acqua: interagendo con i nuclei, i neutrini producono elettroni relativistici che emettono luce per effetto Cherenkov, misurata da un migliaio di fotomoltiplicatori collocati lungo le pareti del serbatoio. Rispetto al rivelatore usato da Davis, quello giapponese permette di individuare la direzione di provenienza dei neutrini e l'istante della loro misura. I dati ottenuti confermano che i neutrini emessi dal sole sono in numero inferiore a quello previsto teoricamente. Attualmente, si conoscono tre tipi di neutrino, associati, rispettivamente, agli elettroni, ai muoni e al leptone *tau*. Si ipotizza che essi possano trasformarsi l'uno nell'altro. Tuttavia, ciò sarebbe possibile solo se almeno uno dei neutrini possedesse una massa diversa da zero.
- 1985, circa. Riprende lo studio teorico e sperimentale degli effetti dovuti al momento angolare della luce (sezione X.4, pagina 313 e sezione X.4.1, pagina 313).

- ◊ 1986. Karl Alex Müller (1927, Svizzera) e Georg J. Bednorz (1950, Germania) scoprono la superconducibilità in materiali ceramici ad 'alta temperatura' (35 K). Negli anni successivi, sono stati prodotti materiali superconduttori sino alla temperatura di 138 K.
- ◊ 1986. Gerd Binnig inventa il microscopio a forza atomica (Atomic Force Microscope).
- I995. Eric A. Cornell (1961, USA) e Carl E. Wieman (1951, USA) realizzano la prima condensazione di Bose Einstein, prevista da Einstein settanta anni prima. Quattro mesi dopo, anche Wolfgang Ketterle (1957, Germania) realizza la condensazione.

Che cos'è che non va?

Enrico Persico, Il Giornale di Fisica, 1, (1956), 64 - 67.¹

"Mi dica almeno qualcosa sulle onde elettromagnetiche".

La candidata, che poco fa non aveva saputo dire perché i fili della luce elettrica sono rivestiti di isolante, appare ora visibilmente sollevata e comincia ad allineare sulla lavagna in bell'ordine le equazioni di Maxwell nella loro elegante forma vettoriale. Finalmente una domanda facile!

"Considero ora il caso che sia $\rho = j = 0...$ "

Cancellati i dovuti termini, le equazioni si semplificano e dopo pochi secondi la candidata (che poco prima era stata incapace di indicare una sola applicazione pratica delle correnti alternate) può procedere all'eliminazione di H e avviarsi con disinvoltura alla equazione differenziale di d'Alembert. Quivi giunta, la stessa persona che voleva far passare 20000 ampere in una comune lampadina elettrica, osserva saggiamente che se E non dipende da y né da z, l'equazione rappresenta onde piane normali all'asse x, e si accinge a dimostrarne le proprietà.

Confesso (inutile dire che "ogni eventuale riferimento a fatti o persone reali è del tutto casuale"), confesso che, anziché seguire l'impeccabile ragionamento della signorina, mi sono un poco distratto e abbandonato a malinconiche riflessioni generali, mentre la lavagna continuava a riempirsi di equazioni eleganti e generalissime.

¹Riprodotto per gentile concessione della Società Italiana di Fisica.

Che cos'è che non va?

Perché questa ragazza, che non è stupida, ma che trova tanto difficile descrivere un condensatore, una volta messa sul binario delle formule corre come una locomotiva? Sono sicuro che era in buona fede quando, avendo scritto E = Ri, sosteneva di conoscere la legge di Ohm, ma perché poi non ha saputo calcolare la corrente in quella tale lampadina? E perché non trovava nulla di strano nell'inverosimile risultato? E quello sgorbio informe che era stata la stentata risposta alla richiesta di disegnare un elettroscopio a foglie, era proprio dovuto a inesperienza del disegno, come lei sosteneva, o a mancanza di qualsiasi immagine mentale dell'oggetto da disegnare?

Il guaio è (pensavo tra me, mentre le onde piane continuavano a propagarsi nel verso dell'asse x con velocità v), il guaio è che questo sarà, sì, un caso estremo, ma la stessa malattia, in forma più o meno grave, è diffusissima in quasi tutti i nostri studenti universitari di Fisica e di Matematica e Fisica. E' una malattia che ha diversi aspetti, così che è difficile designarla con una sola parola, ma che in sostanza denota tutto un atteggiamento errato e innaturale dell'allievo di fronte alla Fisica.

L'aspetto più evidente di questa malattia è uno strano disinteresse per il fenomeno fisico (e ancor più per le sue applicazioni pratiche) congiunto a una lodevole, ma sproporzionata, attenzione rivolta alla formulazione matematica delle leggi, la quale diventa fine a se stessa anziché strumento di rappresentazione e di indagine del mondo fisico. E le formule, si badi bene, sono considerate solo nel loro aspetto algebrico: mai si pensa alla possibilità di sostituire quelle lettere con dei numeri, e a tenerne presenti gli ordini di grandezza che intervengono nei fenomeni reali.

Vi è poi una inesplicabile difficoltà a descrivere anche il più semplice oggetto o fenomeno, sia con la parola, sia, ancor più, col disegno. Il disegno (schematico beninteso) che sembrerebbe in molti casi un mezzo spontaneo, quasi quanto il gesto, per aiutare la parola ad esprimere ciò che si ha in mente, non viene per lo più nemmeno preso in considerazione dall'esaminando, e ogni invito a servirsene viene considerato come un crudele aggravamento di pena. Si ha l'impressione che il candidato non abbia un'immagine mentale da tradurre in parole o in linee, ma piuttosto da ripetere un discorso quanto più fedelmente è possibile. E ciò che è più strano è che la maggior parte degli studenti considera facile la parte descrittiva del corso, e difficile invece la parte matematica.

E' difficile la Fisica? Se si interroga l'uomo della strada, o anche l'avvocato, il medico o l'uomo colto in genere, nove volte su dieci risponde: "Certo! è piena di formule!" Bisogna invece concludere, a giudicare dagli esami, che

pei nostri studenti la Fisica è difficile, ma non a causa delle formule. Probabilmente è difficile perché essi non si accorgono che in essa c'è molto di più delle formule, e qualcosa di diverso da esse. Questo "qualcosa", e cioè il fatto fisico, in molti casi sarebbe facile da comprendere e ritenere, pur di rivolgervi la necessaria attenzione, e dovrebbe anche essere pieno di interesse e di fascino per un giovane moderno, in quanto ricollega la Fisica al mondo della natura, della tecnica, della scienza, e magari della fantascienza. Invece, molti dei nostri studenti non vedono nella Fisica che una materia scolastica, che poco ha che fare col mondo reale: i migliori tra essi ne apprezzano soprattutto l'eleganza della formulazione matematica, ma tengono in dispregio (e talvolta lo dichiarano apertamente) i fatti fisici che quelle formule dovrebbero rappresentare.

Certo, la descrizione matematica dei fenomeni fisici presenta, oltre alla incontestabile utilità pratica, un grandissimo valore estetico. E chissà, forse questa fanciulla, che ha disdegnato di fissare la sua attenzione sui volgari fenomeni che si utilizzano negli elettrodomestici, è stata invece affascinata dalla magica potenza di quelle formule, che in pochi segni racchiudono i miracoli delle radiocomunicazioni, lo splendore della luce solare, il tepore del caminetto e tante altre cose ancora. Forse, dopotutto, questa figliola è un'entusiasta...Proviamo.

"Vuol dirmi, signorina, che interesse ha questa teoria, e a quali fenomeni si applica?"

La domanda è subito classificata (lo leggo negli occhi della candidata) tra quelle malvagie e "non pertinenti" al programma. Bisogna spiegarla e riformularla in diversi modi. Infine la esaminanda crede di capire che cosa si vuole da lei, e recita:

"Maxwell avendo notato che la velocità della luce coincideva numericamente etc. etc."

Si potrebbe pensare che l'inconveniente che lamentiamo in tanti nostri studenti dipenda da una reale, intrinseca difficoltà dei concetti fisici, sia pure elementari. Ma non credo che sia così. Ho avuto occasione di istruire e di esaminare molti studenti di un altro Paese, che non erano in media né più né meno intelligenti dei nostri, ma che avevano, di fronte alla fisica, un atteggiamento tutto diverso e che mi sembra molto più naturale. Non voglio parlare del loro vivo o magari esagerato interesse per le applicazioni tecniche, ma soprattutto della parte preponderante che mostravano di dare nella loro mente alla immagine del fenomeno reale più che alla sua rappresentazione analitica. Ciò si rivelava non solo negli esami buoni, ma anche, e forse

Che cos'è che non va?

in modo più sintomatico, in quelli mediocri. Per spiegarmi con un esempio, immaginerò di aver domandato ad uno di quei ragazzi, non tanto ben preparato, le leggi della rifrazione. Egli comincerà col disegnare una vaschetta d'acqua, una lampadina, un raggio incidente e uno rifratto, e poi forse annasperà per ricordare come si fa a calcolare la direzione di questo, data quella del raggio incidente, magari senza riuscirvi. A me sembra che sia sempre meglio che scrivere sin $i = n \sin r$, senza avere una chiara idea del fenomeno a cui questa formula si riferisce: comunque, ciò prova che non è più difficile capire il fenomeno che ricordare la formula.

Si potrà obiettare che, nonostante la mancanza di concretezza così diffusa nelle nostre scuole, l'Italia ha prodotto e produce eccellenti fisici sia teorici che sperimentali (sempre però pochi in rapporto alla popolazione e alle necessità attuali). Ma il nostro discorso non si riferisce alle minoranze che, per particolari attitudini o per favorevoli circostanze d'ambiente, riescono a farsi una solida ed equilibrata mentalità e cultura fisica. Si riferisce invece alla media degli studenti, alla gran massa da cui il Paese deve trarre i suoi ingegneri, i suoi professori, i fisici dei suoi laboratori industriali che occorreranno in numero sempre maggiore nei prossimi anni. Si riferisce anche, e soprattutto, a coloro che uscendo dal Liceo non si iscrivono nella Facoltà di Scienze, ma diverranno avvocati o giornalisti o uomini politici, e non avranno mai più occasione di sentirsi spiegare che cosa è la Fisica. Essi formeranno la classe dirigente di un mondo sempre più dominato dalle applicazioni della Fisica, ma conserveranno di questa scienza una idea stramba e nebulosa, non disgiunta da una certa avversione, spesso vantata con aria di superiorità.

Quali sono le cause dello strano atteggiamento di tanti nostri studenti nei riguardi della Fisica? Alcune spiegazioni vengono subito in mente, ma vorremmo che voi, lettori che avete quotidiana esperienza dell'insegnamento, e specialmente di quello secondario, ci aiutaste a individuarle e discuterle.

E' colpa dei programmi e del famoso abbinamento?² O dipende dal fatto che la matematica accompagna il ragazzo ininterrottamente dalle elementari alla Università, mentre, dopo le elementari, non si parla più di fatti fisici fino agli ultimi due anni di Liceo? E' colpa degli insegnanti? O degli insegnanti degli insegnanti? Queste e tante altre possono essere le ragioni, e vorremmo che voi ci scriveste il vostro pensiero in proposito. Diteci, per favore, che cos'è che non va?

²Si riferisce alla cattedra di Matematica e Fisica. Nota degli autori.

Costanti fisiche

costante		valore
costante elettrica	ε_0	$8.854187817 \times 10^{-12} Fm^{-1}$
costante magnetica	μ_0	$4\pi \times 10^{-7} NA^{-2}$
costante di gravitazione	G	$6.6742 \times 10^{-11} m^3 kg^{-1}s^{-2}$
costante di Planck	h	$6.6260693 \times 10^{-34} Js$
velocità della luce nel vuoto	С	299792458 ms^{-1} , esatto
costante di Boltzmann	k	$1.3806505 \times 10^{-23} JK^{-1}$
costante di massa atomica	m_u	$1.66053886 \times 10^{-27} kg$
costante di Avogadro	N_A	$6.0221415 \times 10^{23} \ mol^{-1}$
costante di Faraday	F	$96485.3383Cmol^{-1}$
costante molare dei gas	R	$8.314472 Jmol^{-1} K^{-1}$
volume molare di un gas ideale	V_m	$22.710981 \times 10^{-3} m^3 mol^{-1}$
costante di Stefan - Boltzmann	σ	$5.670400 \times 10^{-8} Wm^{-2}K^{-4}$
carica elementare	е	$1.60217653 \times 10^{-19} C$
massa dell'elettrone	m_e	$9.1093826 \times 10^{-31} kg$
massa del protone	m_p	$1.67262171 \times 10^{-27} kg$
massa del neutrone	m_n	$1.67492728 \times 10^{-27} kg$
momento magnetico dell'elettrone	μ_e	$9.28476412 \times 10^{-24} JT^{-1}$
magnetone di Bohr	μ_B	$9.27400949 \times 10^{-24} JT^{-1}$
costante di struttura fine	α	$7.297352568 \times 10^{-3}$

Nota: non sono riportate le incertezze. Fonte: http://physics.nist.gov/cuu/Constants/index.html

$$\begin{split} m_u &= (1/12) \text{ della massa del }^{12}C. \\ V_m &= RT/p, \, (T = 273.15\,K, \, p = 100\,kPa). \\ \sigma &= (\pi^2/60)\,k^4/\hbar^3c^2, \, \hbar = h/2\pi. \\ \mu_B &= e\hbar/2m_e. \\ \alpha &= e^2/4\pi\varepsilon_0\hbar c. \end{split}$$

Riferimenti bibliografici delle citazioni

Pag. ix. D. Diderot, Pensées sur l'interprétation de la nature, 1753. In rete qui.

Pag. xiii. P. Bridgman, *Reflections of a physicist*, Philosophical Library, New York, 1955, p. 82.

Pag. 1. M. Planck, Autobiografia scientifica, Einaudi, Torino, 1956, p. 25.

Pag. 3. D. Collingridge, *Il controllo sociale della tecnologia*, Editori Riuniti, Roma, 1983, p. 13.

Pag. 4. M. Planck, La conoscenza del mondo fisico, Einaudi, Torino, 1942, p. 206.

Pag. 5. J.C. Maxwell, *A treatise on electricity and magnetism*, Dover Publications, New York, 1954. Prefazione alla prima edizione, p. VI.

Pag. 7. O.M. Corbino, 'I fondamenti sperimentali delle nuove teorie fisiche', Discorso inaugurale letto nella Regia Università di Roma il 4 novembre 1909; in: O.M. Corbino, *Conferenze e discorsi*, Roma, 1938, p. 22.

Pag. 8. M. Planck, La conoscenza del mondo fisico, Einaudi, Torino, 1942, p. 43.

Pag. 9. H. Reichenbach, *I fondamenti filosofici della meccanica quantistica*, Boringhieri, Torino, 1954, p. 121.

Pag. 11. Lucrezio, De rerum natura, libro I, 459 - 463.

Pag. 11. H. Hertz, *I principi della meccanica in connessione nuova*, a cura di Giovanni Gottardi, La Goliardica Pavese, Pavia, 1996, Libro I, cap. I, p. 32.

Pag. 14. H. Poincaré, La science et l'hypothèse, 1902.

Pag. 21. Lucrezio, De rerum natura, libro IV, 387 - 390.

Pag. 21. G. Galilei, *Dialogo sopra i due massimi sistemi del mondo tolemaico e copernicano*, Einaudi, Torino, 1970, p. 227 - 228.

Pag. 24. G. Galilei, Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze attenenti alla mecanica e i movimenti locali, (1638).

Pag. 25. A. Einstein, 'L'elettrodinamica dei corpi in movimento', (1905). In rete qui.

Pag. 43. A. Einstein, 'Autobiografia scientifica', in: E. Bellone (a cura di), *Albert Einstein, Opere scelte*, Bollati Boringhieri, Torino, 1988, 61 - 106, p. 88.

Pag. 44. H. Minkowski, 'Spazio e tempo', *Il Nuovo Cimento*, 18, (1909), 333 - 352, p. 335.

Pag. 52. A. Einstein, 'L'inerzia di un corpo dipende dal suo contenuto in energia?', (1905), in: E. Bellone (a cura di), *Albert Einstein, Opere scelte*, Bollati Boringhieri, Torino, 1988, 178 - 180, p. 180.

Pag. 52. E. Fermi, 'Le masse nella teoria della relatività', in *Note e Memorie*, vol. I, Roma 1961, 33 - 34, p. 33. Pubblicato in A. Kopff, *I fondamenti della relatività einsteniana*, Milano 1923.

Pag. 57. E. Fermi, 'Le masse nella teoria della relatività', in *Note e Memorie*, vol. I, Roma 1961, 33 - 34, p. 34. Pubblicato in A. Kopff, *I fondamenti della relatività einsteniana*, Milano 1923.

Pag. 62. R.W. Wilson, 'The cosmic microwave background radiation', *Nobel lecture*, (1978). In rete qui.

Pag. 66. Galileo Galilei, Il saggiatore.

Pag. 75. H. Hertz, *Electric waves*, Dover Publications, New York, 1962, p. 21. Ristampa della prima traduzione inglese (1893) dell'edizione originale tedesca del 1892.

Pag. 77. A. Einstein, 'Fisica e realtà', (1936), in: A. Einstein, *Opere scelte*, a cura di E. Bellone, Bollati Boringhieri, Torino, 1988, 528 - 563, p. 533.

Pag. 77. H. Hertz, *Electric waves*, Dover Publications, New York, 1962, p. 138. Ristampa della prima traduzione inglese (1893) dell'edizione originale tedesca del 1892.

Pag. 83. J.C. Maxwell, *A treatise on electricity and magnetism*, Dover Publications, New York, 1954. Libro II, [405], p. 29.

Pag. 86. H. Hertz, *Electric waves*, Dover Publications, New York, 1962, p. 122 - 123. Ristampa della prima traduzione inglese (1893) dell'edizione originale tedesca del 1892.

Pag. 86. A. Einstein, 'I fondamenti della fisica teorica', (1940), in: A. Einstein, *Opere scelte*, a cura di E. Bellone, Bollati Boringhieri, Torino, 1988, 564 - 576, p. 568.

Pag. 96. J.C. Maxwell, *A treatise on electricity and magnetism*, Dover Publications, New York, 1954. Libro II, [782], p. 432.

Pag. 96. J.H. Poynting, 'On the Transfer of Energy in the Electromagnetic field', *Philosophical Transactions*, 174, (1884), 343 - 361, pp. 343 - 344.

Pag. 113. J.C. Maxwell, *A treatise on electricity and magnetism*, Dover Publications, New York, 1954. Libro II, [782], p. 432.

Pag. 113. A. Einstein, 'Un punto di vista euristico relativo alla generazione e alla trasformazione della luce', (1905), in: A. Einstein, *Opere scelte*, a cura di E. Bellone, Bollati Boringhieri, Torino, 1988, 118 - 135, p. 119.

Pag. 116. T. Young, citato da E. Whittaker, *A history of the theories of aether and electricity*, Nelson and Sons, London, 1951, p. 101.

Pag. 140. J.C. Maxwell, voce *Etere*, Enciclopedia Britannica, Vol. VIII, 568 - 572, (1875). Trad. it. qui.

Pag. 145. A. Michelson, Nobel lecture, (1907). In rete qui.

Pag. 150. L. de Broglie, 'Ondes et quanta', *Comptes Rendus*, 177, (1923), 507 - 510, pp. 507 - 508.

Pag. 150. C. Davisson, L.H. Germer, 'Diffraction of electrons by a crystal of nickel', *Physical Review*, 30, (1927), pp. 705 - 740.

Pag. 153. H. Hertz, *Electric Waves*, Dover Publications, New York, 1962, p. 28. Ristampa della prima edizione inglese del 1893.

Pag. 156. P. Caldirola, *Dalla microfisica alla macrofisica*, Edizioni Scientifiche e Tecniche Mondadori, Milano, 1974, p. 43.

Pag. 158. Louis de Broglie, 'Sur les interférences et la théorie des quanta de lumière', *Comptes Rendus*, 175, (1922), 811 - 813.

Pag. 160. R. Emden, 'Über Lichtquanten', *Physikalische Zeitschrift*, 22, (1921), 513 - 517, p. 517.

Pag. 163. E. Schrödinger: 'Principio di Doppler e condizione delle frequenze di Bohr', (1922). Trad, it. in rete qui.

Pag. 169. M. Planck, Autobiografia scientifica, Einaudi, Torino, 1956, p. 25.

Pag. 169, S. Bose, 'Legge di Planck e ipotesi dei quanti di luce', (1924). Trad. it. in rete qui.

Pag. 177. A. Einstein, 'I fondamenti della fisica teorica', (1940), in: A. Einstein, *Opere scelte*, a cura di E. Bellone, Bollati Boringhieri, Torino, 1988, 564 - 576, p. 568.

Pag. 220. N. Bohr, 'On the constitution of atoms and molecules', *Philosophical Magazine*, 26, (1913), 1 - 25, p. 2.

Pag. 230. W. Lamb, Nobel lecture, (1955). In rete qui.

Pag. 236. O. Stern, 'Ein Weg experimentellen Prüfung der Richtungsquantelung im Magnetfeld', *Zeitschrift für Physik*, 7, (1921), 249 - 253, p. 250.

Pag. 252. H. Hertz, *The principles of Mechanics presented in a new form*, Dover Publications, New York, 1956, p. 1. Ristampa della prima edizione inglese del 1899. Traduzione italiana dall'edizione originale tedesca in: *I principi della meccanica in connessione nuova*, a cura di Giovanni Gottardi, La Goliardica Pavese, Pavia, 1996.

Pag. 288. A.H. Compton, 'The spectrum of scattered X - rays', *Physical Review*, 22 (1923), 409 - 413, p. 409.

Pag. 291. T. Young, citato da E. Whittaker, *A history of the theories of aether and electricity*, Nelson and Sons, London, 1951, p. 114.

Pag. 313. J.H. Poynting, 'The wave motion of a revolving shaft, and a suggestion as to the angular momentum in a beam of circularly polarised light', *Proceedings of the Royal Society*, A 82, (1909), 560 - 567, pp. 565 - 567.

Pag. 317. J.C. Maxwell, *A treatise on electricity and magnetism*, Dover Publications, New York, 1954. Prefazione alla prima edizione, p. XI.

Pag. 319. L. Fleck, *Genesi e sviluppo di un fatto scientifico*, Il Mulino, 1983, Bologna, p. 85.

Pag. 331. M. Faraday, *Experimental researches in electricity*, vol. I, London, 1839, par. 218, p. 63.

Pag. 335. M. Faraday, *Experimental researches in electricity*, vol. III, London, 1855, par. 3090, p. 336 - 337.

Pag. 350. B. Franklin, 'Further experiments and observations in electricity', IV lettera di B. Franklin a P. Collinson, 29 aprile 1749. In rete qui.

Pag. 382. G. Ferraris, 'Ricerche sperimentali e teoriche sul generatore secondario di Gaulard e Gibbs', in: *Opere di Galileo Ferraris*, Volume II, Hoepli, Milano, 1903, pp. 163 - 254, pp. 163 - 164.

Pag. 465. L. Fleck, *Genesi e sviluppo di un fatto scientifico*, Il Mulino, Bologna, 1983, p. 75.

Pag. 509. B. Pascal, Pensieri, n. 338. (tr. it. di Paolo Serini, Einaudi, Torino, 1962).

Le scienze hanno due estremi che si toccano. Il primo è la pura ignoranza naturale, in cui si trovano, nascendo, tutti gli uomini; l'altro è quello cui giungono le grandi anime, le quali, avendo percorso tutto lo scibile umano, si avvedono di non saper nulla, e si ritrovano così nella stessa ignoranza iniziale. Ma la loro è un'ignoranza dotta che conosce se stessa. Tra i due estremi si ritrovano coloro che sono usciti dall'ignoranza naturale, ma non sono potuti giungere all'altra: hanno una certa infarinatura di scienza presuntuosa e fanno i saputi. Costoro mettono a soqquadro il mondo e giudicano a sproposito di ogni cosa. Blaise Pascal

Indice analitico

accelerazione centripeta, 61 di gravità, 50, 56, 57, 61, 384 misura, 18 quadrivettore, 46 accelerometro, 18 accettore, atomo, 406 Alfven, Hannes, 492 Alhazen, 476 alternatore, 336-337 Alvarez, Luis, 491 ammettenza, 360, 377 ammoniaca, 128 Ampère, 214 Ampère, André Marie, 468, 469 ampere, definizione, 207 amperometro, 385 ampiezza, definizione, 89 Anderson, Carl David, 490 angolo di Brewster, 265 di diffusione, 219 di incidenza, 258 di riflessione, 258 di rifrazione, 258 limite, 266 antenna, 277 a mezz'onda, 277 a quarto d'onda, 277 Appleton, 285 Appleton, Edward, 489 Arago, Dominique Francois, 479 asse ottico, 297, 298, 478 principale, 292

atomo di Bohr, 218–223 idrogenoide, 225 autoinduzione, 344, 471 coefficiente di, 345, 351, 353–355, 362 di un solenoide, 381 di una linea di trasmissione, 377 Avogadro, Amedeo, 486, 487 Avogadro, costante di, 501

Balmer, 223, 228 Balmer, Johann, 488 Balmer, serie di, 223, 228, 488 balsamo del Canada, 301 banda di conduzione, 402, 404 di energia, 398 di valenza, 404 Banks, Joseph, 467 Bardeen, John, 492, 493 Bartholin, Erasmus, 477 Becquerel, Antoine Henri, 488 Bednorz, Georg, 496 Bernoulli, Daniel, 486 Berzelius, Jons, 487 Bessel, funzione di, 367 Beth, 312 Beth, esperimento di, 312 Beth, Richard, 484 bilancia di torsione, 467 Binnig, Gerd, 495, 496 Biot, 102, 199, 200 Biot e Savart, legge di, 102, 199 Biot, Jean Baptiste, 468 birifrangenza, 300

Bloch, Felix, 490-492 Bloch, teorema di, 398 Bohr, 127, 218, 220-226, 228, 229 atomo di, 218-223 magnetone di, 226 raggio di, 222 Bohr, Niels, 489 bolometro, 387 Boltzmann costante di, 126, 172, 191, 237, 252, 393, 501 statistica di, 126, 237 Bose, 167, 170, 394, 395, 505 Bose, Satyendra, 484, 496 Bose - Einstein condensazione di, 496 statistica di, 394 bosone, 394, 491 Boyle, legge di, 485, 486 Boyle, Robert, 485 Bragg, Lawrence, 146 Bragg, modello di, 146 Brattain, Walter, 492 Brewster, angolo di, 265 buca, 404 proprietà, 405 Bunsen, Robert, 487 caduta libera, 15, 62 calcite, 297, 477 Caldirola, 154 calore specifico dei solidi, 397, 488 calorimetro, 387 cammino libero medio, 126, 282 campo conservativo, 431 di radiazione, 103 elettromotore, 329 indotto, 322 irrotazionale, 176, 431 scalare, 426 smagnetizzante, 245 solenoidale, 430 campo elettrico, 76

conservativo, 177, 325 indotto, 324 locale, 185, 189-191 macroscopico, 185 misura, 386 statico, 177 campo magnetico, 76 filo rettilineo, 200-201 misura, 386 solenoide, 204-205 spira circolare, 201–202 Cannizzaro, Stanislao, 487 capacità di un condensatore cilindrico, 378 piano, 349 di un conduttore, 196 sferico, 198 di una linea di trasmissione, 377 carica conservazione della, 78, 109 densità di, 74, 108 di polarizzazione, 187, 189 libera, 193 Carlisle, Anthony, 467 cavità risonante, 370 cella cubica, 395 di Wigner - Seitz, 396 elementare, 395 primitiva, 395 cesio, 56 Chadwick, James, 490 cinematica relativistica, 44-46 circuito indotto, 338 inducente, 338 LC, 361-362 risonante, 368 RLC, 363-364 COBE, 59 coefficiente di riflessione, 264, 265

di trasmissione, 264 coerenza di due fasci di luce, 118 di due sorgenti di luce, 118 di un fascio di luce, 118 grado di, 118 larghezza di, 119 lunghezza di, 119 tempo di, 120 Compton, 286, 287 effetto, 286-288 lunghezza d'onda di, 287 Compton, Arthur, 484 condensatore ad alte frequenze, 364-369 capacità del, 349, 350 carica del, 351-354 cilindrico, 378 energia del, 353 invenzione del, 465 piano, 348–350, 466 reattanza del, 358 scarica del, 353-354 condensatori in parallelo, 351 in serie, 351 condensazione, di Bose - Einstein, 496 conducibilità elettrica, 271 conduttore, 193 ideale, 282, 364, 369, 370, 372, 373 proprietà, 370 ohmico, 272, 326 conduzione banda di, 402, 404 elettroni di, 210, 211, 269, 271-273, 286, 398, 403 conduzione elettrica nei metalli, 269–275 campi elettrici alternati, 274-275 campi elettrici costanti, 270-274 nei semiconduttori, 405 contatto, differenza di potenziale di, 403 continuità, equazione di, 78

Cooke, William, 471 Cooper, Leon, 493 coordinate polari, 439 Corbino, 7, 333, 335, 503 Corbino, disco di, 333-335 Cornell, Eric, 496 corpo nero definizione, 168 radiazione di, 59, 127, 167-173 corrente, 74 alternata, 360 continua, 344 densità di, 74, 108 di diffusione, 408 di spostamento, 355-357 in Maxwell, 79 misura della, 385 costante dielettrica, 76, 187-189 in un mezzo anisotropo, 188 relativa, 250, 292 misura, 362 Coulomb, 102, 108, 178, 449, 450 gauge di, 449, 450 legge di, 102, 108, 178, 467 Coulomb, Charles, 467 Cowan, Clyde, 493 Crick, Francis, 492 cristallo, 395 uniassico, 297 Curie, Irène, 491 Curie, temperatura di, 245 d'Alembert, 85 d'Alembert, equazione di, 85 Dalton, John, 486 Davis, Raymond, 494 Davisson, 148, 149 Davisson, Clinton, 490 Davy, Humphry, 468 de Broglie, Louis, 148, 149, 156, 505 de Broglie, Louis - Victor, 489 de Broglie, lunghezza d'onda di, 149

Debye

modello di, 397

temperatura di, 148, 169, 273, 397 Debye, Peter, 484, 489 Debye - Waller, fattore di, 147, 148 Democrito, 484 densità effettiva degli stati, 406 deriva, velocità di, 206, 271 diaframma, 136 diamagneti, 217 diamagnetismo, 238-241 dicroismo, 301 diffrazione, 133 attraverso una fenditura, 132-137 di elettroni, 148-151 di raggi X, 145–148 reticolo di, 143 diffusione coefficiente di, 408, 411 corrente di, 408 lunghezza di, 411 dilatazione del tempo, 26-29, 41 verifica sperimentale, 41 dinamica newtoniana, 22-24 legge fondamentale della, 23, 50 dinamica relativistica, 46-49 legge fondamentale della, 47 dinamo, 470 diodo, a giunzione, 410 dipolo elettrico, 179–182 energia potenziale del, 182 indotto, 184 momento di, 180 permanente, 184 dipolo magnetico momento di, 202 dipolo oscillante, 276-278 Dirac, 229, 393, 395, 442, 444 Dirac, funzione δ di, 442 Dirac, Paul, 490, 492 Dirichlet, condizioni di, 91, 92 disco carico, 179 di Corbino, 333-335 di Faraday, 329–333, 335–336

dispersione, 144, 254 anomala, 130, 254 attraverso un prisma, 255-256 normale, 130 divergenza definizione, 430 teorema della, 321, 440 DNA, 492 dominio ferromagnetico, 246 donatore, atomo, 406 Doppler effetto, 32-33, 60, 120, 156-166, 484 con fotoni, 158–166 con onde piane, 156 trasversale, 157 Dufay, Charles, 465 Dulong, Pierre Louis, 487 durata di un fenomeno, 14 propria, 25, 29 effetto Compton, 286-288 Doppler, 32-33, 60, 120, 156-166, 484 con fotoni, 158–166 con onde piane, 156 trasversale, 157 fotoelettrico, 285-286, 473 Hall, 210-212, 324, 386 quantico, 212, 495 Josephson, 388, 389 Joule, 272, 327, 346, 353 Mössbauer, 58, 493 termoelettrico, 469 Volta, 404 Zeeman, 241–244, 474 anomalo, 244, 474 normale, 242, 474 Einstein, 25, 26, 42, 50, 60, 75, 84, 111, 127, 151, 170, 175, 286, 339, 394, 395, 412, 458, 488, 504, 505 Einstein, Albert, 474, 475, 482, 483, 489, 496 electron multiplier, 57

elettrodinamica quantica, 80, 226, 230, 306 elettrolisi, 468, 470 elettromagnete, 469 elettrometro, 328 elettrone, 73, 218, 501 misura della carica, 384-385 mobilità, 271, 335 momento magnetico, 226, 235, 237, 501 rotante, 231-234 scoperta, 474, 488 spin, 226, 230, 235 ellissoide degli indici, 296-298, 303-306 emissione spontanea, 127 stimolata, 127 energia a riposo, 49 densità di, 95, 113 di legame, 53 di rinculo, 120, 164 equipartizione, 168-169 misura, 387 potenziale di un campo di forze, 432 di una carica, 177, 430 di una particella, 49 di una spira elementare, 210 entità teorica, 4 Epicuro, 476 equivalenza, principio di, 25 verifica sperimentale, 51 Etere, 75, 79, 473, 477, 479 evento, 14 Faraday, 79, 84, 315, 316, 329, 330, 332,

333, 335–338, 340, 501, 506 costante di, 501 disco di, 329–333, 335–336 Faraday, Michael, 468, 470, 472 fase definizione, 89 velocità di, 90, 128–130 fasore, 89 fenditura, potere separatore, 136 Fermat, Pierre de, 476 Fermi, 50, 54, 285, 393, 395, 401, 403, 504 energia di, 393 livello di, 285, 393, 405, 407 parametri di, 403 velocità di, 403 Fermi, Enrico, 490, 491 fermione, 393 Fermi - Dirac, statistica di, 393 Ferraris, 380 Ferraris, Galileo, 473 ferrimagnetismo, 246 ferrite, 246 ferromagneti, 217 ferromagnetismo, 244-247 fibra ottica, 266 fissione nucleare, 53, 491 bomba a, 491, 492 controllata, 337, 492 Fizeau, Armand, 479 Fizeau, esperimento di, 479 fonone, 411 forza coercitiva, 245 forza elettromotrice indotta, definizione, 318 fotoelettrico, effetto, 285-286, 473, 483, 488 fotoemissione, 286 fotone, 112 nome, 484 polarizzazione del, 306-310 quantità di moto, 112 spin, 112, 307 Fourier analisi di, 91-92 trasformata di, 91 frange di interferenza, visibilità, 117 Franklin, Benjamin, 466 Franklin, Rosalind, 492 Fraunhofer, 138, 143 Fraunhofer, disposizione di, 138

frequenza definizione, 89 misura, 386 Fresnel, 296, 303, 306 Fresnel, Augustin, 469, 479 Fresnel, equazione di, 296, 303, 306 Frisch, Otto, 491 fronte d'onda, 86 funzione d'onda, 91, 224 funzione lavoro, 286, 403 funzioni sinusoidali, 88–91 fusione nucleare, 53, 285

Galileo, 19, 21–25, 42, 49, 50, 60, 63, 319 principio di invarianza, 22 trasformazioni di, 19-20, 70, 71 galvanometro, 385, 386 Gassendi, Pierre, 485 Gauss, teorema di, 178, 188, 194, 446 gaussiana, 166, 392 Gay Lussac, Joseph, 486 Geissler, Heinrich, 487 Geissler, tubo di, 487 Gell - Mann, Murray, 494 Gerlach, 234, 236, 237 Gerlach, Walther, 489 germanio, 404, 407 Germer, 148, 149 Germer, Lester, 490 Giacconi, Riccardo, 494 Giaever, Ivar, 494 Gilbert, William, 464 giunzione Josephson, 388, 389, 494 p - n, 408–411 equilibrio termico, 408-410 polarizzata, 410-411 Glashow, Sheldon, 494 Goldstein, Eugene, 488 gradi di libertà, 168 gradiente, 426 coordinate polari, 439 definizione, 428 Gramme, Zenobe, 470

grandezza fisica, 4 definizione operativa, 16 misura, 6–7 gravitazione costante di, 55, 501 legge della, 24 Gray, Stephen, 465 Green, teorema di, 440 gruppo, velocità di, 128-130 Guericke, Otto von, 465 guida d'onda, 373-375 Hahn, Otto, 491 Hall, 210-212, 324, 326 campo elettrico di, 326 differenza di potenziale di, 211 effetto, 210-212, 324, 386 quantico, 212, 388, 495 resistenza di, 212 sonda di, 212, 386 Hall, Edwin, 473, 495 Hall, Robert, 494 Heaviside, Oliver, 472 Heisenberg, Werner, 489 Helmoltz, 76, 82, 440, 449, 450 Helmoltz, Hermann von, 471 Helmoltz, teorema di, 76, 82, 440, 449, 450 Henry, Joseph, 469-471 henry, unità di misura, 471 Hertz, 1, 2, 11, 73, 75, 80, 84, 151, 250, 278, 286, 357, 503-506 Hertz, Heinrich, 473, 488 Hooke, 18 Hooke, legge di, 18 Huyghens, 130, 152 Huyghens, Christiaan, 477, 478 Huyghens, principio di, 130 immagine del mondo, 4, 7–8 impedenza, 360 caratteristica di un cavo coassiale, 378 di una linea di trasmissione, 378

incidenza angolo di, 258, 260 piano di, 258 incoerenti fasci di luce, 118 sorgenti di luce, 118 indice del raggio, 294 dell'energia, 294 di rifrazione, 250, 479 isolante, 250-255 metallo, alte frequenze, 282 metallo, basse frequenze, 278-281 induttanza, 345, 471 reattanza della, 360 induzione elettromagnetica, 277, 315-342, Kirchhoff, 167, 168 470 Einstein, 339-342 Faraday, 337-338 legge generale, 318, 319 Maxwell, 338-339 interazione iperfine, 230 spin - orbita, 226, 230 interferenza, 131-153, 478 due fenditure, 138-139 frange di, 133 n fenditure, 141–143 quanti di luce, 151-153 interferometro di Michelson, 114-117 intervallo di tempo misura, 14 proprio, 45 inversione di popolazione, 412 ionosfera, 285, 489 iperfine, interazione, 56 irraggiamento di un circuito, 343 di un elemento di circuito, 276 di una carica puntiforme, 104 isolante, 184, 349, 402 isteresi, ciclo di, 244 Ives, Herbert, 484

Joliot, Frédéric, 491 Josephson costante di, 389 effetto, 388 giunzione di, 494 Josephson, Brian, 494 Ioule effetto, 272, 327, 346, 353 legge di, 471 Joule, James, 471 Kamerlingh - Onnes, Heike, 488 Kapitsa, Pyotr, 491 Kaufmann, Walter, 474 Ketterle, Wolfgang, 496 legge di, 127, 167 teorema di, 131, 132 Kirchhoff, Gustav, 472, 487 Kleist, Georg von, 465 Klitzing, costante di, 389 Klitzing, Klaus von, 495 Kohlrausch, Rudolph, 472 Lamb, shift di, 492 Lamb, Willis jr., 492 lamina a mezz'onda, 300 a quarto d'onda, 300 Landé, fattore di, 227 Langevin, funzione di, 193 Langmuir, 285 Langmuir, Irving, 475 Laplace equazione di, 434 operatore di, 178, 434 coordinate polari, 439 definizione, 433 Larmor, pulsazione di, 234 laser, 411-414 Lavoisier, Antoine - Laurent, 486 Lee, David, 495 Lee, Tsung - Dao, 493 Leida, bottiglia di, 465

Lewis, Gilbert, 484 Liénard, 98 Liénard e Wiechert, potenziali di, 98 Linde, Carl von, 488 linee di campo, definizione, 108 di forza magnetica, 330 di trasmissione, 375-379 Lorentz, x, 60 forza di, x, xi, 76, 77, 251, 317 gauge di, 450 trasformazioni di, x, 25, 35-41, 63-71, 109, 419, 475 Lorentz, Hendrik Antoon, 473, 475 lorentziana, 125 Loschmidt, Joseph, 487 luce emissione della, 119 spontanea, 127 stimolata, 127 momento angolare della, 97, 311-313 polarizzazione della, 289-313, 478, 479 in mezzi anisotropi, 292-302 misura, 302–303 onde e fotoni, 306–310 onde piane, 289–292 velocità della negli isolanti, 250 nei metalli, 279, 282 nel vuoto, 85 prima misura, 477 Lucrezio, 11, 21, 464, 485, 503 lunghezza contrazione, 33, 35 d'onda, 88 definizione operativa, 16 di diffusione, 411 di un'asta, 16 in moto, 33 propria, 25, 33 Lyman, 223

Lyman, serie di, 223 Mössbauer, Rudolf, 493 Müller, Karl, 496 macchina a vapore, 2 maggioranza, portatori di, 409 magnetite, 463 magnetizzazione, 332 curva di, 245 curva di prima, 244 permanente, 245 residua, 244, 245 vettore, 214, 218 magnetoresistenza, 335 Maiman, Theodore, 493 Malus, Etienne, 478 Malus, legge di, 302, 309 Marconi, Guglielmo, 474 Mariotte, Edme, 485 maser, 412, 492 massa a riposo, 47 effettiva, 271, 401–402 gravitazionale, 50 definizione, 25 inerziale, 50 definizione, 24 relativistica, 47 massa - energia, tabella, 52 Maxwell, 5, 81, 94, 111, 138, 315, 338, 356 equazioni di, x, 75, 175 invarianza, 76-78, 458-461 negli isolanti, 249-250 nel vuoto, 75-76 Maxwell, James Clerk, 472 meccanica quantica, 223, 225-228 Meer, Simon van der, 495 Meitner, Lise, 491 Mendeleyev, Dmitry, 487 metallo, 402-404 Michelson, 114, 143, 144, 229 esperimento di, 480-482 interferometro di, 114-117 Michelson, Albert, 480

microonde, 56, 174, 268, 279, 387, 389 microscopio a forza atomica, 496 ad effetto tunnel, 495 elettronico, 490 Millikan, 286, 383 Millikan, esperimento di, 384-385 Millikan, Robert, 475, 483 minoranza, portatori di, 409 misura, 5 momento angolare, 285 densità di, 97 meccanica quantica, 224, 226 modello di Bohr, 221 orbita ellittica, 221 precessione, 227, 232 Morley, 229 Morley, Edward, 482 Morse, Samuel, 471 moti armonici, composizione, 289-292 moto armonico forzato, 251 smorzato, 122 Musschenbroek, Pieter van, 465 neutrino, 490 neutrone, 53, 73, 490, 493, 501 momento di dipolo magnetico del, 491 Newton, 60, 218 Newton, anelli di, 478 Newton, Isaac, 476, 485 Nicholson, William, 467 Nicol, prisma di, 301 Noddack, Ida, 491 nucleo, scoperta del, 488 numeri complessi, uso in fisica, 89-91 quantici, 225-228 Occam, rasoio di, 357 Oersted, Hans Christian, 468

Ohm, 344 legge di, 271, 272, 344

leggi di, 469 Ohm, Georg Simon, 469 onda evanescente, 268 intensità, 134 monocromatica, 88 piana, 86 polarizzata circolarmente, 299 ellitticamente, 299 linearmente, 88, 260, 289 progressiva, 86 regressiva, 86 sferica, 87, 88 stazionaria, 370-371 vettore d', 88, 109 ordine, di uno spettro, 145 orologi, sincronizzazione, 17 orologio atomico, 56-57 e gravità, 57 Osheroff, Douglas, 495 pacchetto d'onde, 122, 128-130 Pacinotti, Antonio, 470 paramagneti, 217 paramagnetismo, 237-238 parametro d'urto, 219 parità, violazione della, 493 particella α , 219 parzialmente coerenti, sorgenti di luce, 118 Paschen, 223 Paschen, serie di, 223 Pauli, Wolfgang, 489, 490 Penzias, 59 Penzias, Arno, 494 permeabilità magnetica, 76 relativa, 216, 292 Petit, Alexis, 487 Petrus Peregrinus, 464 piezoelettricità, 414

pila, 467

Pitagora, 476

resistenza interna, 470

519
Plücker, Julius, 487 Planck, 1, 2, 4, 8, 59 costante di, 112, 149, 169, 212, 389, 483, 488, 501 legge di, 169 Planck, Max, 488 plasma, 285 nome, 285, 475 oscillazioni di, 283-285 pulsazione di, 283 Poincaré, Henri, 474 Poisson, equazione di, 409, 434, 446 Poisson, Simeon, 468 polarizzazione elettrica per deformazione, 185, 189 per orientamento, 189 vettore, 186 polaroid, 301, 308 Pontecorvo, Bruno, 494 positrone, 54, 493 scoperta, 490 potenziale chimico, 393 differenza di, 177 misura, 386 elettrostatico, 176, 430 scalare, 82, 109, 448 vettore, 82, 109, 448 potenziali avanzati, 93 ritardati, 92 potere separatore di n fenditure, 143 di un reticolo, 145 di una fenditura, 136 Poynting, 94 teorema di, 273, 274 vettore di, 96, 124, 135, 250, 263, 264, 273, 293, 294 precessione, moto di, 233 Priestley, Joseph, 467 principio di azione e reazione, 22

di causalità, 3, 39, 93, 107 di equivalenza, 25 verifica sperimentale, 51 di Huyghens, 130 di invarianza di Einstein, 42 di Galileo, 21 di relatività, 22, 69 probabilità ampiezza di, 150 densità di, 224 protone, 53, 73, 218, 228, 230, 493, 501 Proust, Joseph - Louis, 486 pulsazione, definizione, 89 Purcell, Edward, 492 quadricorrente, 77, 108 quadriforza, 47 quadriimpulso, 46 quadripotenziale, 108 quadrivettore, 42, 44, 156 accelerazione, 46 d'onda, 109, 156 energia - impulso, 49, 158 velocità, 45 quadrupolo elettrico, momento di, 183 quantità di moto cristallina, 400 quanto di luce, 112 energia, 483 quantità di moto, 483 Röntgen, Wilhelm, 488 radiazione campo di, 103 cosmica di fondo, 59 formula di Mosengheil, 61 pressione della, 97 spettro della, 173 radioattività naturale, 488 raggi canale, 488 catodici, 487 X, 145–146, 488 raggio

di Bohr, 222 ordinario, 300 straordinario, 300 Rayleigh, 143 Rayleigh, criterio di, 143 realismo delle entità teoriche, 5 delle grandezze fisiche, 5 delle teorie, 5 problema del, 4-5 reattanza capacitiva, 358 induttiva, 360 red - shift gravitazionale, 54-59 Reines, Frederick, 493 relatività principio di, 22, 458 ristretta, 475 resistenza di radiazione, 277-278 elettrica, misura, 386 resistenze in parallelo, 344 in serie, 344 resistività elettrica, 271 dipendenza dalla temperatura, 272 tabella, 271 Retherford, Robert, 492 reticolo a gradini, 153 cristallino, 394, 395 base di un, 395 passo del, 144 potere separatore, 145 reciproco, 397 Richardson, Robert, 495 riflessione, 258-266 angolo di, 258, 260 coefficiente di, 263-265 totale, 266 rifrazione, 258-266 angolo di, 258 indice di

isolante, 250-255 metallo, alte frequenze, 282 metallo, basse frequenze, 278-281 legge della, 476 riga H_{α} , dell'idrogeno, 228–231 allargamento Doppler, 166-167 larghezza naturale, 120, 122-126, 164 riproducibilità dei fenomeni, 3 risonanza, 53, 58, 59, 165, 364 pulsazione di, 362 Rohrer, Heinrich, 495 rotore, definizione, 431 Rubbia, Carlo, 495 Ruska, Ernst, 490 Rutherford, Ernest, 488, 489 Rydberg, costante di, 223 Rømer, esperimento di, 477 Rømer, Olaf, 477 Salam, Abdus, 494 Savart, 102, 199, 200 Savart, Félix, 468 Schawlow, Arthur, 493 Schrödinger, 149, 164 Schrödinger, Erwin, 484, 489 Schrieffer, John, 493 Seebeck, Thomas, 469 semiconduttore, 404-408 drogato, 407 intrinseco, 406 Shockley, William, 492 silicio, 404, 407, 493 simmetria traslazionale, 396 simultaneità locale, 14 sistema di riferimento, 14 inerziale, 15, 61-63 privilegiato, 60 internazionale delle unità di misura, 387 isolato, 12 Snell, legge di, 255, 260, 262 Snell, Willebrord van Roijen, 476, 478

solenoide, 345 rettilineo, 204 toroidale, 347 Sommerfeld, 229 Sommerfeld, modello di, 229 spato d'Islanda, 297, 477 spazio isotropo, 12, 15, 22, 27, 38, 65, 67 omogeneo, 12, 15, 19, 22, 27, 38 quadridimensionale, 43 spazio - tempo, 43-44 spettrometro, 256 di massa, 57 spin elettrone, 226, 230, 235 fotone, 307 orbita, interazione, 230 spira elementare, 208-210 rettangolare, 207-208 spostamento corrente di, 355–357 elettrico, vettore, 187 statistica di Boltzmann, 392–393 di Bose - Einstein, 394 di Fermi - Dirac, 393 Stern, 234, 236, 237 Stern e Gerlach, esperimento di, 234-237 Stern, Otto, 489 Stilwell, G.R., 484 Stokes, teorema di, 203, 440 Strassmann, Fritz, 491 struttura fine, costante di, 229 Sturgeon, William, 469 superconducibilità, 488 ad alta temperatura, 496 teoria della, 493 superficie equipotenziale, 426 isobarica, 426 isotermica, 426 superfluidità, 491, 495

suscettività elettrica, 187, 292 magnetica, 216 svuotamento, regione di, 408 Taylor, 151 Taylor, esperimento di, 151 Taylor, Geoffrey, 483 telegrafisti, equazione dei, 378 telegrafo, 471 temperatura di Curie, 245 di Debye, 148, 169, 273, 397 tempo definizione, 12 dilatazione del, 26-29, 41 termocoppia, 469 Thomson William, 472 Thomson, G.P., 149 Thomson, George Paget, 490 Thomson, J.J., 149 Thomson, Joseph John, 474, 487, 488 Townes, Charles, 492, 493 trasformatore, 380-382, 473 trasformazioni di Galileo, 19–20, 70, 71 di gauge, 83, 448 di Lorentz, x, 25, 35-41, 63-71, 109, 475 trasmissione, coefficiente di, 263-265 Urey, Harold, 490 urto isotropo, 269 omogeneo, 269 quasi elastico, 269 valenza, 487 banda di, 404 valore efficace, 89 velocità composizione delle di Galileo, 20, 319

relativistica, 39, 45, 67, 69

definizione operativa, 17 di deriva, 324 di fase, 90, 128–130 di Fermi, 403 di gruppo, 128–130 distribuzione maxwelliana, 391–392 quadrivettore, 45 visibilità delle frange di interferenza, 117 Volta, Alessandro, 467 Volta, effetto, 404

Watson, James, 492 Watson, William, 466, 472 Weber, Wilhelm, 472 Weinberg, Steven, 494 Wheatstone, Charles, 471 Wheatstone, ponte di, 387 Wiechert, 98 Wieman, Carl, 496 Wilkins, Maurice, 492 Wilson, 59 Wilson, Robert, 494 Wu, Chien - Shiung, 493

Yang, Chen Ning, 493 Young, 114 Young, Thomas, 478, 479

Zeeman, effetto, 241–244, 474 anomalo, 244, 474 normale, 242, 474 Zeeman, Pieter, 474 Zweig, George, 494