

Questa rubrica si propone di stimolare la riflessione sul tipo di conoscenza prodotta dalla fisica e di porre in evidenza termini e concetti che costituiscono punti nodali per l'apprendimento della disciplina. L'approccio storico - critico, così come quello didattico, non hanno alcuna pretesa di essere esaustivi.

### L'esperimento di Stern e Gerlach.

*Si può scegliere tra la concezione quantica e quella classica mediante un esperimento molto semplice. A questo scopo basta esaminare la deviazione che un fascio di atomi subisce in un appropriato campo magnetico non omogeneo [1].*

Otto Stern

#### 1. Il contesto

Il modello di Bohr dell'atomo di idrogeno (1913) (→ Bohr, modello di) aveva suscitato grandi aspettative circa la possibilità di comprendere i processi di emissione e assorbimento della radiazione elettromagnetica da parte degli atomi. Tuttavia, come sovente accade, la strada da percorrere si mostrò più lunga, tortuosa e impervia di quanto ci si potesse aspettare. Verso la fine del decennio, la situazione era ben rappresentata dal difficile e complesso rapporto tra esperimento e teoria. I numerosi dati osservativi relativi agli spettri di emissione (o di assorbimento) includenti anche gli effetti dovuti a campi elettrici (effetto Stark) e magnetici (effetto Zeeman) esterni, avevano ricevuto solo una parziale e frammentata descrizione teorica. Si poteva annoverare tra i successi teorici il modello dell'atomo di idrogeno di Sommerfeld (con uso della dinamica relativistica e la descrizione della "struttura fine" delle righe) (1915–1916), la trattazione dell'effetto Stark (almeno per l'idrogeno) da parte di Epstein e Schwarzschild (1916) e dell'effetto Zeeman "normale" (Debye e Sommerfeld, 1916); appariva invece ancora "intrattabile" l'effetto Zeeman "anomalo". In generale, dai dati sperimentali riguardanti le frequenze delle righe emesse si cercava di risalire alla struttura dei livelli energetici permessi con l'uso di un *opportuno* insieme di "numeri quantici" e di regole di selezione per le transizioni adottate *ad hoc* per poter "riprodurre" le frequenze osservate. Non si era tuttavia in grado di calcolare direttamente intensità e polarizzazione della radiazione emessa: calcoli di questo tipo erano possibili solo mediante l'uso del principio di corrispondenza di Bohr (già implicitamente usato nell'articolo del 1913). Infine, lo sviluppo del cosiddetto *modello vettoriale dell'atomo* era basato sull'ipotesi che i momenti di dipolo magnetici (e i corrispondenti momenti

angolari) dei singoli elettroni (e degli atomi nel loro complesso) potessero assumere solo valori discreti lungo la direzione del campo magnetico applicato. Tuttavia, questa ipotesi poneva problemi di non scarso rilievo ed era priva di un'evidenza sperimentale diretta <sup>(1)</sup>.

## 2. La proposta dell'esperimento; e la sua teoria

Questi problemi sono discussi nell'introduzione del lavoro pubblicato da Stern nel 1921 [1].

Scriva Stern <sup>(2)</sup>:

“Nella teoria quantistica del magnetismo e dell'effetto Zeeman, si suppone che il vettore del momento angolare di un atomo possa formare, con la direzione del campo magnetico  $B$  solo angoli discreti determinati, in modo tale che la componente del momento angolare lungo la direzione di  $B$  sia un multiplo di  $h/2\pi$ . . . Se pensiamo per esempio agli atomi di idrogeno ad un quanto, i piani delle orbite degli elettroni devono essere perpendicolari a  $B$ . Emerge tuttavia la seguente obiezione. Se un fascio di luce attraversa il gas in direzione perpendicolare  $B$ , il vettore campo elettrico della luce parallelo a  $B$  avrà una velocità di propagazione diversa rispetto a quella del vettore campo elettrico perpendicolare a  $B$ .

Il gas dovrebbe quindi esibire una forte birifrangenza che dovrebbe essere indipendente dall'intensità del campo magnetico. . . Ma tale effetto non è stato sinora osservato, sebbene esso avrebbe dovuto essere rilevato nelle numerose ricerche sperimentali in questo campo. . .

Un'altra difficoltà per la concezione quantica consiste, come già è stato osservato da diverse parti, nel fatto che non si riesce ad immaginare come gli atomi del gas, i cui momenti angolari in assenza di campo magnetico possono assumere tutte le direzioni possibili, possano, se sottoposti ad un campo magnetico, orientarsi lungo le direzioni sopra descritte. Secondo la teoria classica ci si deve aspettare qualcosa di ben diverso. L'effetto del campo magnetico consiste, secondo Larmor, nel fatto che tutti gli atomi eseguono una precessione intorno alla direzione del campo, cosicché l'angolo, che la direzione del momento angolare forma con  $B$ , assume con continuità tutti i possibili valori per i differenti atomi. La teoria dell'effetto Zeeman si ricava da questo modello con l'assunzione che la componente del momento angolare nella direzione di  $B$  possa assumere solo i valori  $\pm h/2\pi$  o zero.

Si può scegliere tra la concezione quantica e quella classica mediante un esperimento molto semplice. A questo scopo basta esaminare la deviazione che un fascio di atomi subisce in un appropriato campo magnetico non omogeneo.

<sup>(1)</sup> Per una ricostruzione storica di queste complesse vicende, si possono vedere [2, 3, 4, 5]. In particolare, [4] e [5] trattano questioni direttamente connesse all'argomento di questa “voce”.

<sup>(2)</sup> Il testo che segue, è, con qualche piccola variante, quello della traduzione citata in [1]. I simboli usati non sono quelli originali di Stern.

La teoria dell'esperimento è, in breve, la seguente.

Introduciamo un sistema di coordinate cartesiane la cui origine si trova nel baricentro dell'atomo considerato ed il cui asse  $z$  abbia la direzione del campo  $B$  (fig. 1). Sia  $\vec{\mu}$  il vettore del momento magnetico dell'atomo, il quale è legato

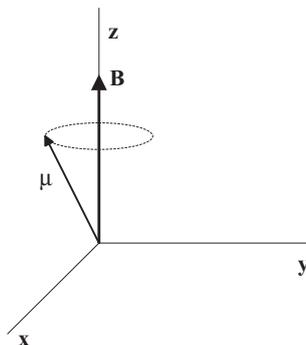


Fig. 1. – Questa figura riproduce, con qualche variante nei simboli usati, la fig. 1 dell'articolo di Stern. Si veda il testo.

al vettore  $\vec{I}$  del suo momento angolare dalla relazione

$$(1) \quad \vec{\mu} = \frac{e}{2m_e} \vec{I}$$

( $e$  carica,  $m_e$  massa dell'elettrone) <sup>(3)</sup> così che la forza che si esercita sull'atomo è

$$(2) \quad \vec{F} = \mu \frac{\partial \vec{B}}{\partial s},$$

dove  $\partial \vec{B} / \partial s$  è la variazione di  $\vec{B}$  per unità di lunghezza nella direzione di  $\vec{\mu}$ . Possiamo scrivere  $\vec{F}$  come la seguente somma di vettori:

$$(3) \quad \vec{F} = \mu_x \frac{\partial \vec{B}}{\partial x} + \mu_y \frac{\partial \vec{B}}{\partial y} + \mu_z \frac{\partial \vec{B}}{\partial z}.$$

Ora, quando l'atomo esegue una rotazione uniforme intorno alla direzione del campo, cioè intorno all'asse  $z$ ,  $\mu_z$  rimane costante, mentre i valori medi di  $\mu_x$  e  $\mu_y$  relativi ad un giro completo risultano nulli. Se dunque, mantenendo costanti  $\partial \vec{B} / \partial x$ ,  $\partial \vec{B} / \partial y$ ,  $\partial \vec{B} / \partial z$  facciamo una media su tempi lunghi rispetto

<sup>(3)</sup> Si noti che  $e$  è qui un numero negativo. Nota del traduttore.

al periodo di rotazione (che, per esempio, per  $B_z = 1000$  gauss è pari a  $7 \times 10^{-10}$  s), la forza media agente sull'atomo risulta

$$(4) \quad \vec{F} = \mu_z \frac{\partial \vec{B}}{\partial z}.$$

Per la forza che si esercita sull'atomo è quindi determinante solo la componente del momento magnetico nella direzione del campo: proprio la grandezza che secondo la concezione quantistica può assumere solo valori discreti.

Il campo utilizzato per i tentativi di deviazione sia ora scelto in modo tale che  $\vec{B}$  e  $\partial \vec{B} / \partial z$  abbiano la stessa direzione.

Diamo allora alla espansione di un elettromagnete la forma di un cuneo, cosicché la richiesta suddetta sarà esattamente soddisfatta nel piano di simmetria che contiene lo spigolo del cuneo.”

### 2.1. Le equazioni di Maxwell . . .

Si osservi, innanzitutto, che la trattazione di Stern è svolta nel sistema di riferimento istantaneamente co-movente con l'atomo <sup>(4)</sup>. Noi descriveremo il fenomeno nel sistema di riferimento del laboratorio <sup>(5)</sup>.

L'espressione della forza agente sull'atomo di argento è

$$\vec{F} = \text{grad} (\vec{\mu} \cdot \vec{B}).$$

Cioè

$$(5) \quad \begin{aligned} F_x &= \mu_x \frac{\partial B_x}{\partial x} + \mu_y \frac{\partial B_y}{\partial x} + \mu_z \frac{\partial B_z}{\partial x}, \\ F_y &= \mu_x \frac{\partial B_x}{\partial y} + \mu_y \frac{\partial B_y}{\partial y} + \mu_z \frac{\partial B_z}{\partial y}, \\ F_z &= \mu_x \frac{\partial B_x}{\partial z} + \mu_y \frac{\partial B_y}{\partial z} + \mu_z \frac{\partial B_z}{\partial z}. \end{aligned}$$

L'equazione di Maxwell  $\text{div} \vec{B} = 0$  implica che almeno una delle componenti  $B_x, B_y$  deve essere diversa da zero. Inoltre, tra le espansioni del magnete deve essere  $\text{rot} \vec{B} = 0$ .

<sup>(4)</sup> Questa scelta non è particolarmente felice. Innanzitutto perché il sistema di riferimento in cui le equazioni assumono la forma più semplice è quello del laboratorio (in cui è in quiete il magnete). Per esempio, mentre nel sistema di riferimento del laboratorio si ha  $\text{rot} \vec{B} = 0$  tra le espansioni del magnete, la stessa equazione non è valida nel sistema di riferimento co-movente con l'atomo: infatti, in questo sistema, non solo il campo magnetico dipende dal tempo, ma esiste anche un campo elettrico variabile nel tempo (e, quindi,  $\text{rot} \vec{B} \neq 0$ ). In secondo luogo, perché, successivamente, Stern dovrà scegliere il sistema di riferimento del laboratorio per poter descrivere il moto degli atomi.

<sup>(5)</sup> Negli anni ottanta del secolo scorso, sono stati pubblicati tre articoli riguardanti la trattazione teorica dell'esperimento di Stern e Gerlach [6, 7, 8]. Il primo di questi [6] critica la descrizione dell'esperimento che si trova usualmente sui testi, e propone, inconsapevolmente, una trattazione “alla Stern” (che è “recuperata” solo in [8]). Il secondo [7], pone in evidenza il fatto che fuori dal piano di simmetria  $x = 0$  (si veda più avanti) il campo magnetico non è più diretto lungo l'asse  $z$  e che si deve tenere conto di questa complicazione.

Per esaminare in dettaglio la struttura del campo magnetico, si supponga (ragionevolmente, data la configurazione del magnete) che il campo magnetico sia simmetrico rispetto al piano  $yz$ ; e che, inoltre,  $B_y = 0$  ovunque. Ne segue che  $B_z$  sarà una funzione pari di  $x$ , mentre  $B_x$  sarà una funzione dispari di  $x$ .

Osservando che

- i)  $\text{rot } \vec{B} = 0$  implica  $\partial B_x / \partial z = \partial B_z / \partial x$ ;
- ii) siccome  $B_z$  è una funzione pari di  $x$ , si ha che  $\partial B_z / \partial x = 0$  per  $x = 0$ ; ne segue che anche  $\partial B_x / \partial z = 0$  per  $x = 0$ ;
- iii)  $\text{div } \vec{B} = 0$  implica, avendo supposto  $B_y \equiv 0$ ,  $\partial B_x / \partial x = -\partial B_z / \partial z$ .

le (5) diventano, per  $x = 0$ ,

$$(6) \quad \begin{aligned} F_x &= -\mu_x \frac{\partial B_z}{\partial z}, \\ F_y &= 0, \\ F_z &= \mu_z \frac{\partial B_z}{\partial z}. \end{aligned}$$

Quindi sull'atomo agisce anche una forza diretta lungo l'asse  $x$ . Tuttavia, siccome  $\mu_x$  assume, durante una rotazione di  $\vec{\mu}$  intorno all'asse  $z$ , alternativamente valori positivi e negativi (ma uguali in valore assoluto) la forza agente lungo la direzione  $x$  è, in media, nulla. (Si ricordi che, come osservato da Stern, la media è effettuata su tempi lunghi rispetto al periodo di precessione).

Fuori dal piano di simmetria  $x = 0$ , il campo magnetico non è più diretto come l'asse  $z$  perché  $B_x \neq 0$ . Secondo i dati di Stern e Gerlach:

- 1)  $\partial B_z / \partial z \approx 10^3 \text{ Tm}^{-1}$  [9].
- 2) Ciò comporta, essendo, per ragioni di simmetria,  $B_x = 0$  per  $x = 0$ , che  $B_x(x) \approx B_x(0) + (\partial B_x / \partial x)_{x=0} x = -(\partial B_z / \partial z)_{x=0} x$ .
- 3) Quindi, per  $x = 4 \times 10^{-4} \text{ m}$  (uguale alla semi-lunghezza della fenditura usata [10]) si ha  $|B_x| \approx 0.4 \text{ T}$ .
- 4) In questo caso, il valore medio di  $F_x$  non è nullo. Ne segue che l'immagine osservata dovrebbe essere deformata lungo la direzione  $x$  rispetto a quella prevista dalla terza equazione delle (6) [7]. Tuttavia, questa deformazione non appare nelle immagini osservate da Stern e Gerlach (vedi fig. 4).
- 5) In ogni caso, la situazione sperimentale è tanto meglio descritta solo dalla terza equazione delle (6), quanto meglio, per  $x \neq 0$ , è soddisfatta la condizione  $B_z \gg B_x$  (si noti che a soddisfare questa condizione contribuisce anche la limitata dimensione del fascio nella direzione  $x$ ). *Si noti infine che, come sottolineato da Stern, la terza equazione delle (6) (con  $\langle F_x \rangle = 0$ ) è rigorosamente soddisfatta per  $x = 0$ .* Quindi, per evitare le complicazioni dovute alla struttura del campo magnetico per  $x \neq 0$ , è sufficiente tenere conto solo dei dati sperimentali relativi a  $x \approx 0$ .

### 3. L'apparato sperimentale

Si supponga ora che un atomo, elettricamente neutro, dotato di un dipolo magnetico  $\vec{\mu}$ , venga lanciato con velocità  $v$ , lungo l'asse  $y$ , tra le espansioni di un magnete

con campo magnetico diretto come l'asse  $z$ , disomogeneo in questa direzione, con  $\partial B_z/\partial z > 0$  e indipendente da  $z$ .

Un magnete di questo tipo può essere realizzato con la forma mostrata in fig. 2. Se l'asse delle  $y$  lungo il quale viene lanciato l'atomo giace sotto il profilo del cuneo

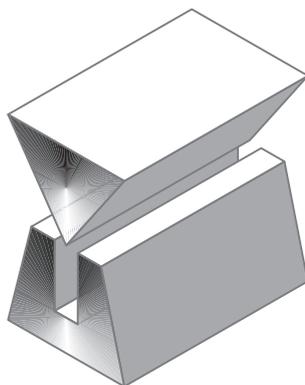


Fig. 2. – Forma del magnete usato da Stern e Gerlach: la lunghezza del magnete era di 3.5 cm. Figura ricostruita sulla base della fig. 1 di [11].

del magnete, allora il moto dell'atomo all'interno del magnete sarà composto da un moto rettilineo uniforme lungo l'asse  $y$  e da un moto uniformemente accelerato lungo l'asse  $z$ : la sua traiettoria sarà dunque una parabola rivolta verso il basso o verso l'alto a seconda del segno di  $\mu_z$ . Se fosse valida l'ipotesi classica della precessione di  $\vec{\mu}$  intorno alla direzione del campo magnetico, la forza agente sull'atomo sarebbe data da

$$F_z = \mu \cos \theta \frac{\partial B_z}{\partial z}$$

( $\theta$  è l'angolo tra  $\vec{\mu}$  e  $\vec{B}$ ), mentre se fosse valida l'ipotesi quantica, questa forza potrebbe assumere solo i valori

$$F_z = \pm \mu \frac{\partial B_z}{\partial z} .$$

Pertanto, usando un fascio di atomi, questo sarebbe semplicemente allargato dal campo magnetico nel primo caso; nel secondo, sarebbe diviso in due fasci distinti. L'esperimento permetterebbe quindi di decidere tra le due possibilità. Appare peraltro evidente che il successo dell'esperimento dipende dalla possibilità di realizzare un gradiente di campo magnetico lungo la direzione  $z$  sufficientemente elevato. Stern progettò di eseguire l'esperimento con atomi di argento, elettricamente neutri e dotati di momento magnetico  $\vec{\mu}$ . Egli suppose che, dal punto di vista quantico, le possibili componenti di  $\vec{\mu}$  lungo la direzione del campo magnetico potessero essere solamente  $\pm \mu$  <sup>(6)</sup>.

<sup>(6)</sup> In realtà, come Stern aveva affermato più sopra a proposito dell'effetto Zeeman, egli avrebbe dovuto includere anche il caso in cui la componente di  $\vec{\mu}$  lungo la direzione del campo fosse zero. Infatti, i momenti magnetici atomici erano allora concepiti come dovuti al moto orbitale degli

Lo schema della disposizione sperimentale usata da Stern e Gerlach è mostrato nella fig. 3.  $F$  è un forno in cui è fatto evaporare argento: gli atomi escono da un

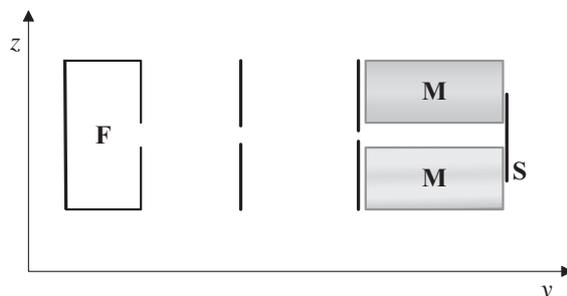


Fig. 3. – Schema dell'apparato sperimentale di Stern e Gerlach. Si veda il testo.

foro praticato in una parete. Di fronte ad esso vengono posti, a distanza opportuna, due schermi dotati, il primo di un foro circolare, ed il secondo di una stretta fenditura disposta orizzontalmente: la loro funzione è quella di collimare il fascio di atomi <sup>(7)</sup>. Questi attraversano poi il campo magnetico fortemente disomogeneo nella direzione  $z$  prodotto dal magnete  $MM$  e, usciti dal magnete, incontrano una lastra di vetro su cui si depositano. Il dispositivo sperimentale è mantenuto sotto vuoto.

In assenza di campo magnetico gli atomi di argento che attraversano i due diaframmi percorrono la distanza che li separa dalla lastra di vetro in moto rettilineo uniforme e si depositano su di essa formando un'immagine della fenditura. Accendendo il campo magnetico disomogeneo sono possibili, sulla base dei modelli descrittivi adottati, due alternative: una suddivisione dell'immagine in due se fosse valida l'ipotesi quantica; un allargamento dell'immagine nelle due direzioni  $\pm z$  se fosse valida l'ipotesi classica <sup>(8)</sup>.

*“Di conseguenza l'esperimento, nel caso riesca, avrà un risultato univoco, di scelta tra la teoria quantica e quella classica”* [12].

elettroni; lo spin elettronico (con associato il momento magnetico intrinseco dell'elettrone) non era ancora comparso sulla scena. Più precisamente: se l'atomo di argento avesse un momento angolare la cui componente lungo una direzione prefissata fosse pari a  $\pm\hbar$ , allora i possibili valori del numero quantico magnetico sarebbero  $m = 1, 0, -1$ . Tuttavia, a quei tempi, le idee non erano, a questo proposito, del tutto coerenti.

<sup>(7)</sup> Come descritto più avanti, Stern e Gerlach effettuarono due cicli di misure: durante il primo ciclo le aperture dei due diaframmi erano entrambe circolari; solo durante il secondo ciclo l'apertura del secondo diaframma era costituita da una stretta fenditura ( $0.8 \times 0.03 - 0.04$  mm).

<sup>(8)</sup> In questo caso, siccome il numero di atomi il cui momento magnetico forma un angolo  $\theta$  con il campo magnetico, è proporzionale a  $\sin\theta$ , questo numero sarà massimo per  $\theta = \pi/2$ , cioè, sarà massimo il numero degli atomi non deviati. Pertanto, nel caso in cui fosse valida l'ipotesi classica, l'immagine della fenditura sarà allargata dal campo magnetico, ma la sua intensità massima sarà ancora al centro dell'immagine.

#### 4. Le misure

I risultati del primo ciclo di misure furono inviati per la pubblicazione il 14 novembre 1921. Furono tentate nove misure, cinque senza campo magnetico e quattro con campo magnetico. Le misure erano alternate: senza campo, con campo, senza campo... Durante i primi due tentativi non ci fu deposizione di argento sulla lastra di vetro, “una volta per motivi sconosciuti... un'altra volta a causa dell'occlusione del diaframma anteriore da parte dell'argento fuoriuscito dal fornello. Gli ulteriori quattro tentativi senza campo magnetico diedero come risultato una macchia rotonda di circa 1/10 mm di diametro corrispondente alle dimensioni geometriche dell'apparato. I tre tentativi con il campo magnetico diedero come risultato una macchia spostata di 1/10 mm nella direzione di  $\partial B_z/\partial z$  e di larghezza compresa tra 0.25 mm e 0.3 mm. La struttura dell'intensità della macchia non può essere determinata con sicurezza. La misura dello spostamento [della macchia] da entrambe le parti corrisponde all'incirca ad un momento magnetico dell'atomo di argento da uno a due magnetoni di Bohr... Il risultato di questo lavoro è la prova che l'atomo di argento possiede un momento di dipolo magnetico” [10].

Il secondo ciclo di misure fu decisivo. Stern e Gerlach osservarono la suddivisione dell'immagine in due e conclusero che era valida l'ipotesi quantica (fig. 4).

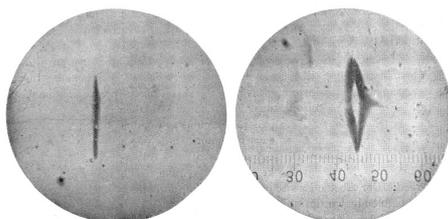


Fig. 4. – Immagini ottenute da Stern e Gerlach. A sinistra, l'immagine in assenza di campo magnetico; a destra con campo magnetico. In questa figura, l'asse  $z$  è orizzontale:  $\partial B_z/\partial z$  è massima al centro dell'immagine e tende ad annullarsi agli estremi superiore e inferiore dell'immagine. L'immagine con campo magnetico appare asimmetrica e presenta una protuberanza al centro. L'asimmetria è dovuta al fatto che il fascio deviato verso il cuneo del magnete entra in regioni dove  $\partial B_z/\partial z$  è maggiore rispetto alle regioni attraversate dall'altro fascio; la protuberanza centrale è dovuta alle medesime cause. Si noti come la larghezza delle immagini con campo magnetico sia maggiore di quella in assenza di campo: l'allargamento è dovuto alla distribuzione maxwelliana della velocità degli atomi. Le dimensioni dell'immagine, che per essere osservata deve essere ingrandita al microscopio, sono: lunghezza 1.1 mm; larghezza massima 0.2 mm. Il tempo di esposizione della lastra di vetro al fascio di atomi era di otto ore. Figura estratta da: W. Gerlach, O. Stern, *Zeitschrift für Physik*, 9 (1922) 349–352, p. 350.

In un successivo lavoro, Stern e Gerlach si dedicano alla misura del momento magnetico dell'atomo di argento. Stern e Gerlach sottolineano come sia necessario:

- i) conoscere con precisione la distanza  $z$  del fascio atomico dal cuneo del magnete, sia in assenza, sia in presenza di campo;
- ii) misurare la disomogeneità del campo magnetico, cioè  $\partial B_z/\partial z$ , in funzione della distanza dal cuneo del magnete.

$\partial B_z/\partial z$  è determinata misurando la forza esercitata su “un piccolissimo corpo di prova di Bismuto e l'intensità del campo per mezzo della variazione della resistenza di un

sottile filo di Bismuto teso parallelamente al cuneo” [9]. Come già detto più sopra, i valori misurati di  $\partial B_z/\partial z$  sono dell’ordine di  $10^3 \text{ Tm}^{-1}$ .

La distanza percorsa da un atomo lungo la direzione  $+z$  è data da (se  $\partial B_z/\partial z$  non varia in funzione di  $z$ )

$$(7) \quad d = \frac{1}{2} at^2 = \frac{1}{2M} \mu \frac{\partial B_z}{\partial z} \frac{l^2}{v^2},$$

dove  $M$  è la massa degli atomi di argento,  $v$  la loro velocità e  $l$  la distanza percorsa lungo la direzione  $y$  all’interno del magnete. Per potere ricavare  $\mu$  dalla (7) è necessario calcolare  $v$  partendo dalla temperatura del forno <sup>(9)</sup>. Confrontando il valore calcolato di  $d$  (tenendo conto, però, anche della variazione di  $\partial B_z/\partial z$  in funzione di  $z$  e ponendo  $\mu$  uguale al magnetone di Bohr  $\mu_B$ ; Stern e Gerlach usano per  $\mu_B$  il valore  $5600/N$  in unità cgs— $N$  numero di Avogadro) con quello misurato sulla lastra di vetro, Stern e Gerlach stimano che la discrepanza tra i due valori è dell’ordine del 10% e concludono pertanto che “Dalle misure risulta che il momento magnetico dell’atomo di argento allo stato di vapore è un magnetone di Bohr.”

Stern e Gerlach pensavano di aver misurato un momento di dipolo magnetico di origine “orbitale”; oggi sappiamo che avevano di fatto misurato il momento di dipolo magnetico intrinseco dell’elettrone di valenza dell’atomo di argento <sup>(10)</sup> <sup>(11)</sup>.

## 5. Nelle zone di confine

Nell’elettromagnetismo classico, il concetto di momento di dipolo magnetico “elementare” associato ad una spira piana percorsa da corrente nasce dalla necessità di collegare la magnetizzazione macroscopica di un materiale (rappresentata dal momento di dipolo magnetico per unità di volume  $\vec{M}$ ) con l’ipotesi fondamentale, inclusa nella quarta equazione di Maxwell, secondo cui le “sorgenti” del campo magnetico nel vuoto sono le correnti, siano esse di conduzione ( $\vec{J}$ ) o di spostamento ( $\epsilon_0 \partial \vec{E}/\partial t$ ). Donde l’idea delle correnti microscopiche (amperiane) e la necessità di inserire nella quarta equazione di Maxwell ( $\rightarrow$  Maxwell, teoria di) un termine  $\vec{J}_M = \text{rot} \vec{M}$  al fine di descrivere le proprietà magnetiche dei materiali. Parallelamente (da un punto di vista concettuale e non temporale) alla descrizione macroscopica sono stati sviluppati modelli microscopici coerenti con questa descrizione che permettono di descrivere,

<sup>(9)</sup> Stern e Gerlach hanno assunto per  $v$  un valore intermedio tra la velocità quadratica media  $\sqrt{3kT/M}$  e il valore quadratico medio della velocità degli atomi che, all’interno del forno, hanno una componente non nulla della velocità lungo la direzione positiva delle  $y$ :  $\sqrt{4kT/M}$  ( $k$  è la costante di Boltzmann e  $T$  la temperatura assoluta).

<sup>(10)</sup> Il momento angolare totale degli elettroni “interni” è nullo; l’elettrone di valenza si trova in uno stato  $1s$  il cui momento “orbitale” è nullo.

<sup>(11)</sup> Esperimenti alla “Stern e Gerlach”, estesi agli atomi dei metalli alcalini, furono eseguiti da J.B. Taylor qualche anno dopo [13].

classicamente, le proprietà diamagnetiche e paramagnetiche <sup>(12)</sup>. Questi modelli usano cariche elettriche puntiformi (elettroni) in moto circolare uniforme: è immediato associare a tale moto un momento angolare  $\vec{I}$  ed un momento di dipolo magnetico  $\vec{\mu}$  legati tra loro dalla relazione (1) usata da Stern. Peraltro, questo modello porta alla definizione del magnetone di Bohr come quello associato al moto dell'elettrone sulla prima orbita (circolare) dell'atomo di idrogeno di Bohr:

$$(8) \quad \mu_B = \hbar \frac{e}{2m_e}.$$

Per quella che appare una pura coincidenza, il valore del momento di dipolo magnetico intrinseco dell'elettrone risulta uguale, a meno delle correzioni previste dalla elettrodinamica quantica, al magnetone di Bohr, che, però, in questo caso si deve scrivere

$$(9) \quad \mu_B = \frac{\hbar}{2} \frac{e}{m_e}.$$

I momenti di dipolo magnetici intrinseci delle particelle subatomiche non possono essere pensati come dovuti a correnti microscopiche <sup>(13)</sup>. Essi costituiscono una grandezza fisica tipica di queste particelle non descrivibile mediante una catena causale del tipo: carica in rotazione  $\rightarrow$  corrente circolare  $\rightarrow$  momento di dipolo magnetico.

## 6. Problemi aperti

In un articolo pubblicato nel 1922, Einstein ed Ehrenfest sottolineano come il meccanismo di orientamento degli atomi di argento nel campo magnetico rimanga oscuro [14] <sup>(14)</sup>. “*Se la direzione del campo muta lentamente rispetto alla rapidità del moto di precessione, l'angolo del moto di precessione risulta rimanere inalterato. Il disporsi secondo le inclinazioni prescritte dalla teoria dei quanti (0 e  $\pi$  per l'atomo di argento nell'esperimento di Stern e Gerlach) non può quindi aver luogo senza influenze esterne quali la radiazione o le collisioni?*” [15]. Il problema può essere illustrato dalla fig. 5.

<sup>(12)</sup> Una situazione simile si è verificata, per esempio, nel caso della conduzione elettrica. Alla legge macroscopica di Ohm ( $\Delta V = IR$ , anni venti dell'Ottocento) ( $\rightarrow$  Ohm, legge di) si sono successivamente affiancati modelli o teorie microscopiche di vario tipo che permettevano di esprimere la conducibilità  $\sigma$  dei metalli (che compare nella forma locale della legge di Ohm  $\vec{J} = \sigma \vec{E}$ ) in funzione di parametri microscopici del materiale.

<sup>(13)</sup> Prima di pubblicare il loro lavoro sullo spin dell'elettrone, Goudsmit e Uhlenbeck lo sottoposero a Lorentz. La critica di fondo fatta da Lorentz consisteva nel fatto che se l'elettrone è descritto come una sfera rotante, allora, per ottenere un momento magnetico pari ad un magnetone di Bohr, l'elettrone dovrebbe essere troppo massivo o troppo grande. Si vedano le ricostruzioni storiche [2, 3, 4, 5].

<sup>(14)</sup> Si ricordi che anche Stern aveva posto in evidenza questo punto. Si veda più sopra. Richiamiamo l'attenzione del lettore sul fatto che Einstein ed Ehrenfest non pongono in discussione il risultato dell'esperimento: il problema sollevato riguarda solo il meccanismo di orientamento degli atomi nel campo magnetico.



Fig. 5. – Livelli energetici del momento magnetico  $\mu$ , con e senza campo magnetico, secondo l'ipotesi quantica.

Entrando nel campo magnetico, gli atomi di argento passano dal livello energetico  $U = 0$  ad uno dei livelli  $\pm\mu B$ , a seconda che il loro momento di dipolo magnetico si disponga parallelamente ( $-$ ) o anti-parallelamente ( $+$ ) al campo magnetico  $\vec{B}$ . La transizione tra lo stato in assenza di campo e lo stato  $-\mu B$  può essere “spontanea” o “stimolata”; l'altra transizione può essere solo stimolata. Si pongono quindi due questioni: quale è la sorgente di energia per le transizioni stimolate; quale è la probabilità di transizione. Einstein ed Ehrenfest sviluppano alcuni calcoli basati su un limite classico (che dovrebbero comunque fornire il corretto ordine di grandezza) e concludono che, mentre l'esperimento di Stern e Gerlach richiede che l'orientamento dei dipoli magnetici avvenga in un intervallo di tempo inferiore a  $10^{-4}$  s (tempo di volo degli atomi nel campo magnetico), la previsione teorica richiede un tempo dell'ordine di  $10^9$  s (nel caso della transizione stimolata) <sup>(15)</sup>. Einstein ed Ehrenfest prendono pertanto in considerazione e discutono in dettaglio due ipotesi che possano spiegare l'orientamento degli atomi nel campo magnetico <sup>(16)</sup>; tuttavia, la loro conclusione è negativa: “*Le difficoltà enumerate mostrano quanto insoddisfacenti siano entrambi i tentativi di interpretazione qui esposti dei risultati trovati da Stern e Gerlach*” [16].

A mia conoscenza, le questioni poste da Einstein ed Ehrenfest sono rimaste senza risposta. Verosimilmente, l'avvento della meccanica quantica ha favorito questa indifferenza nei confronti delle questioni sollevate. La meccanica quantica è, essenzialmente, un algoritmo predittivo <sup>(17)</sup> <sup>(18)</sup>. Pertanto, il suo uso in certi contesti, tende ad affievolire la consapevolezza dell'esistenza di problemi irrisolti: l'esperimento di

<sup>(15)</sup> Einstein ed Ehrenfest suppongono che la sorgente di energia sia la radiazione termica a temperatura ambiente. In realtà, gli atomi di argento si trovano in un fascio di radiazione di corpo nero uscente dal forno e, quindi, corrispondente alla temperatura di fusione dell'argento (1235 K). Tuttavia, tale differenza di temperatura non altera sostanzialmente il calcolo eseguito da Einstein ed Ehrenfest.

<sup>(16)</sup> Per la discussione di queste due ipotesi, rinviamo alla lettura dell'articolo.

<sup>(17)</sup> Le regole che stanno alla base dell'algoritmo quantico si basano su concetti e formule della fisica classica. Inoltre, le applicazioni di questo algoritmo a sistemi fisici richiede sempre l'uso di concetti e formule tratte dalla fisica classica: si pensi, per esempio al termine di energia potenziale che compare nell'operatore hamiltoniano dell'oscillatore armonico o dell'atomo di idrogeno.

<sup>(18)</sup> Come scrivono Fuchs e Peres in un articolo intitolato, provocatoriamente, *La meccanica quantica non richiede alcuna “interpretazione”* [17]: “. . . la meccanica quantica non descrive la realtà fisica. Quello che fa è fornire un algoritmo per calcolare le probabilità di eventi macroscopici (‘clicks di rivelatori’) che sono le conseguenze dei nostri interventi sperimentali. Questa stringente definizione dello scopo della teoria quantica è la sola interpretazione di cui abbiamo bisogno sperimentatori o teorici.”

Stern e Gerlach rientra, verosimilmente, tra questi casi. Esso è infatti divenuto il caso *paradigmatico* di un sistema quantico a due stati descrivibile mediante un vettore di stato dato dalla sovrapposizione di due autostati:

$$(10) \quad |\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\psi_1\rangle + |\psi_2\rangle).$$

In questa rappresentazione, i problemi posti da Einstein ed Ehrenfest non hanno cittadinanza.

Solo assai recentemente, l'esperimento di Stern e Gerlach è stato rivisitato [18,19, 20, 21, 22] <sup>(19)</sup>. Nell'ultimo di questi lavori, una descrizione quantica del moto degli atomi di argento nel campo magnetico conduce alle seguenti conclusioni:

- a) c'è una probabilità non nulla di un'inversione del momento magnetico (spin-flip) dipendente dalla disomogeneità del campo magnetico;
- b) c'è un effetto di "messa a fuoco" degli atomi che vengono deviati nella direzione lungo la quale il modulo del campo magnetico diminuisce.

Sulla base di questa trattazione, l'esperimento di Stern e Gerlach cesserebbe di poter essere considerato come un esperimento che "proietta" lo stato  $|\psi\rangle$  della (10) in uno dei due autostati; cesserebbe inoltre di poter essere considerato un esperimento attendibile perché la deviazione subita dagli atomi non sarebbe più connessa in modo non equivoco alla componente del momento magnetico lungo la direzione del campo. Tuttavia, la trattazione usuale sarebbe ancora valida quando il campo magnetico fosse molto grande rispetto al suo gradiente o quando le dimensioni del fascio di atomi fosse molto piccola (si riveda anche il punto 5 alla fine della sezione 2.1).

I problemi posti da Einstein ed Ehrenfest non sono presi in considerazione. Anzi, gli autori partono da un presupposto contrario a quello che sta alla base del lavoro di Einstein ed Ehrenfest: *"Si può vedere che, per casi realistici, il tempo di transito [passaggio da campo magnetico nullo a campo magnetico massimo], sebbene piccolo rispetto alla durata del volo all'interno del magnete, è sempre più grande del periodo di precessione. Pertanto, gli spin delle particelle del fascio hanno modo di adattarsi al campo magnetico che attraversano"* [24]. Le inversioni del momento magnetico appaiono come conseguenza della disomogeneità del campo magnetico e quindi avverrebbero senza concorso di altri sorgenti di radiazione. Gli autori non danno alcuna indicazione che possa suggerire una possibile verifica sperimentale delle loro predizioni <sup>(20)</sup>.

<sup>(19)</sup> Oltre a questi lavori, si segnala una tesi in cui l'esperimento di Stern e Gerlach è discusso approfonditamente [23].

<sup>(20)</sup> Una verifica sperimentale degli effetti previsti appare infatti problematica. L'effetto di "messa a fuoco" è mascherato dall'allargamento dell'immagine della fenditura dovuta alla distribuzione maxwelliana delle velocità degli atomi; d'altra parte, lo "spin-flip" appare come intrinsecamente non osservabile perché non altera significativamente la divisione del fascio di atomi in due fasci ugualmente popolati.

## 7. Considerazioni finali

L'esperimento di Stern e Gerlach è stato giustamente considerato come uno dei più importanti tra quelli che hanno preceduto la nascita della meccanica quantica. Indipendentemente dalla sua rilevanza, esso possiede il fascino degli esperimenti basati su un'idea *semplice* ma tesi ad interrogare la Natura intorno ad una questione *sottile*. Le conoscenze necessarie per la sua comprensione sono quelle tipiche della fisica che si apprende nel primo biennio universitario. Può essere presentato, nelle sue linee essenziali, anche in una Scuola Secondaria Superiore. Si presta anche ad una discussione critica del rapporto tra previsioni teoriche e risultati sperimentali. Purtroppo non è facilmente riproducibile al di fuori dei laboratori di ricerca. (g.g.)

## Bibliografia

- [1] a) STERN O., *Z. Phys.*, **7** (1921) 249-253. p. 250; b) traduzione italiana in: RIGHETTI A., *L'esperienza di Stern e Gerlach e la quantizzazione spaziale* (Tesi di laurea, Pavia a.a. 1993-1994).
- [2] JAMMER M., *The conceptual development of quantum mechanics* (McGraw-Hill, New York) 1966.
- [3] TAGLIAFERRI G., *Storia della fisica quantistica* (Franco Angeli, Milano) 1985.
- [4] LA TEANA F., *La nascita dello spin* (Bibliopolis, Napoli) 2005.
- [5] IANNIELLO M. G., INGRASSIA M., PETRARCA S., *G. Fis.*, **47** (2006) 229.
- [6] ALSTRØM P., HJORT P., MATTUCK R., *Am. J. Phys.*, **50** (1982) 697.
- [7] SINGH S., SHARMA N.K., *Am. J. Phys.*, **52** (1984) 274.
- [8] ALSTRØM P., *Am. J. Phys.*, **52** (1984) 275.
- [9] GERLACH W, STERN O., *Z. Phys.*, **9** (1922) 353. Traduzione italiana in [1] b).
- [10] GERLACH W, STERN O., *Z. Phys.*, **8** (1922) 110. Traduzione italiana in [1] b).
- [11] GERLACH W, STERN O., *Z. Phys.*, **9** (1922) 349. Traduzione italiana in [1] b).
- [12] Rif. [1], p. 253.
- [13] TAYLOR J.B., *Phys. Rev.*, **28** (1926) 576.
- [14] EINSTEIN A., EHRENFEST P., *Zeits. Phys.*, **11** (1922) 31. Traduzione italiana alla pagina <http://matsci.unipv.it/persons/antoci/qm/Einstein1922b.pdf>
- [15] Rif. [14], traduzione italiana, p. 1.
- [16] Rif. [14], traduzione italiana, p. 5.
- [17] FUCHS C.A., PERES A., *Phys. Today*, **53** (2000) 70. In rete alla pagina <http://ptonline.aip.org/dbt/dbt.jsp?KEY=PHTOAD&Volume=53&Issue=3&usertype=indiv>
- [18] FRANCA H. M., MARSHALL T. W., SANTOS E., WATSON E.J., *Phys. Rev. A*, **46** (1992) 2265.
- [19] GARRAWAY B. M., STENHOLM S., *Phys. Rev. A*, **60** (1999) 63.
- [20] CRUZ-BARRIOS S., GÓMEZ-CAMACHO J., *Phys. Rev. A*, **63** (2000) 012101.
- [21] GALLUP G.A., BATELAAN H. , GAY T. J., *Phys. Rev. Lett.*, **86** (2001) 4508.
- [22] POTEL G., BARRANCO F., CRUZ-BARRIOS S., GÓMEZ-CAMACHO J., *Phys. Rev. A*, **71** (2005) 042106.
- [23] STENSON G.R., *Representations for understanding the Stern - Gerlach effect* (Tesi, Brigham Young University, 2005); in rete alla pagina [www.physics.byu.edu/research/theory/Docs/JaredsThesis05.pdf](http://www.physics.byu.edu/research/theory/Docs/JaredsThesis05.pdf)
- [24] Rif. [22] p. 052106-2.

**Errata corrige.** Voce ‘Tempo, durate e orologi’, *Giornale di Fisica*, **47** (2006) 277-288, a p. 280, alla fine del secondo capoverso, la frase corretta è: “(che, peraltro si ricavano, in questo procedimento, usando la prima delle due formule richiamate).”

Voce ‘Il modello di Bohr dell’atomo di idrogeno’, *Giornale di Fisica*, **47** (2006) 345-358, a p. 352, dopo l’equazione (17) la frase corretta è: “dove  $n_r = 0, 1, 2, \dots, k = 1, 2, \dots, n$  e  $r_0$  è il raggio della prima orbita di Bohr.”