Cosa impara un Matematico dalla Fisica

Dal potenziale newtoniano alla superradianza

Claudio Dappiaggi & **Nicolò Drago**

14 11 2017

UNIVERSITÀ DI PAVIA

Motivazioni [1]

"Io volevo studiare la Fisica del Modello Standard.
Ai tempi la Matematica non mi interessava proprio." [S. M.]

"Perché al Liceo non avevo capito cosa fosse né l'una né l'altra.
Io volevo costruire acceleratori." [F.M. F]

"Ai tempi credevo mi interessasse di piú la Fisica.
Con il senno di poi cambierei scelta." [M. B.]

"Mai preso in considerazione Matematica." [F. B.]

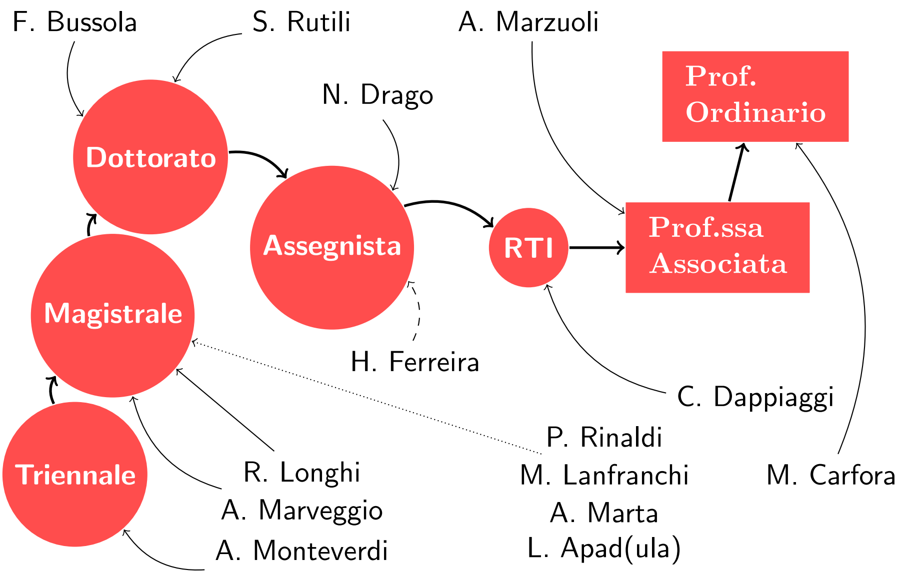
"Perché ero giovane e inesperto." [G. C.]

[1] Tutti gli intervistati hanno una Laurea. Alcuni di loro hanno pure una vita normale.

Gli obiettivi

* Presentare il gruppo di Fisica Matematica di Pavia;
* Mostrare come la Matematica e la Fisica siano in **dualità** (con un esempio pratico!);
* Conciliare la pennichella pomeridiana dei non interessati;
* Passare il tempo aspettando il seminario di Claudio.

La Fisica Matematica a Pavia



Il potenziale Newtoniano in Meccanica Quantistica

$$\text{Hamiltoniana}: \qquad \mathsf{H} = \frac{p^2}{2m} - \frac{\kappa}{|x|}\,, \qquad \kappa\,, m > 0\,, \qquad x \in \mathbb{R}^3\,,$$

Il potenziale Newtoniano in Meccanica Quantistica

Hamiltoniana : $\quad \mathsf{H} = \frac{p^2}{2m} - \frac{\kappa}{|x|}\,, \qquad \kappa\,, m > 0\,, \qquad x \in \mathbb{R}^3\,,$

H è simmetrica : $\quad \langle \phi | \mathsf{H}\psi \rangle = \langle \mathsf{H}\phi | \psi \rangle \qquad \forall \psi, \phi \in \mathsf{L}^2(\mathbb{R}^3)\,,$

Spettro : $\quad \lambda \in \sigma(\mathsf{H}) = \{\text{possibili valori dell'energia}\}\,,$

Il potenziale Newtoniano in Meccanica Quantistica

Hamiltoniana : $\quad \mathsf{H} = \dfrac{p^2}{2m} - \dfrac{\kappa}{|x|}\,, \qquad \kappa\,, m > 0\,, \qquad x \in \mathbb{R}^3\,,$

H è simmetrica : $\quad \langle \phi | \mathsf{H}\psi \rangle = \langle \mathsf{H}\phi | \psi \rangle \qquad \forall \psi, \phi \in \mathsf{L}^2(\mathbb{R}^3)\,,$

Spettro : $\quad \lambda \in \sigma(\mathsf{H}) = \{\text{possibili valori dell'energia}\}\,,$

Approccio : cercare gli autovettori i.e. ψ_λ tale che $\mathsf{H}\psi_\lambda = \lambda\psi_\lambda\,.$

Il potenziale Newtoniano in Meccanica Quantistica

Hamiltoniana : $\mathsf{H} = \frac{p^2}{2m} - \frac{\kappa}{|x|}\,, \qquad \kappa\,, m > 0\,, \qquad x \in \mathbb{R}^3\,,$

H è simmetrica : $\langle \phi | \mathsf{H}\psi \rangle = \langle \mathsf{H}\phi | \psi \rangle \qquad \forall \psi, \phi \in \mathsf{L}^2(\mathbb{R}^3)\,,$

Spettro : $\lambda \in \sigma(\mathsf{H}) = \{\text{possibili valori dell'energia}\}\,,$

Approccio : cercare gli autovettori i.e. ψ_λ tale che $\mathsf{H}\psi_\lambda = \lambda\psi_\lambda\,.$

Theorem (Potenziale Newtoniano in $\mathbb{R}^d\,, d = 3$)

$$\sigma(\mathsf{H}) = \left\{ -\frac{\kappa^2 m}{2\hbar n^2} \;\middle|\; n = 1, 2, \dots \right\}.$$

Il potenziale Newtoniano **in** $d = 1, 2$-**dim**

$$\mathsf{H} = \frac{p^2}{2m} - \frac{\kappa}{|x|}\,, \qquad \kappa, m > 0\,, \qquad x \in \mathbb{R}^{d},\ d = 1, 2\,.$$

Il potenziale Newtoniano **in** $d = 1, 2$-**dim**

$$\mathrm{H} = \frac{p^2}{2m} - \frac{\kappa}{|x|}\,, \qquad \kappa, m > 0\,, \qquad x \in \mathbb{R}^{d},\ d = 1, 2\,.$$

1959 Loundon: l'atomo di idrogeno per $d = 1$ ha 2 autovettori per ogni autovalore, tranne il *ground* che ha infinita energia di legame;

Il potenziale Newtoniano **in** $d = 1, 2$-**dim**

$$\mathsf{H} = \frac{p^2}{2m} - \frac{\kappa}{|x|}\,, \qquad \kappa, m > 0\,, \qquad x \in \mathbb{R}^{d},\ d = 1, 2\,.$$

1959 Loundon: l'atomo di idrogeno per $d = 1$ ha 2 autovettori per ogni autovalore, tranne il *ground* che ha infinita energia di legame;

1966 Andrews espresse perplessità per via dell'infinita energia di legame del *ground*;

Il potenziale Newtoniano **in** $d = 1, 2$-**dim**

$$\mathrm{H} = \frac{p^2}{2m} - \frac{\kappa}{|x|}\,, \qquad \kappa, m > 0\,, \qquad x \in \mathbb{R}^{d},\ d = 1, 2\,.$$

1959 Loundon: l'atomo di idrogeno per $d = 1$ ha 2 autovettori per ogni autovalore, tranne il *ground* che ha infinita energia di legame;

1966 Andrews espresse perplessità per via dell'infinita energia di legame del *ground*;

1969 Haines & Roberts calcolarono nuovi autovettori, ottenendo uno spettro continuo;

Il potenziale Newtoniano in $d = 1, 2$-dim

$$\mathrm{H} = \frac{p^2}{2m} - \frac{\kappa}{|x|}\,, \qquad \kappa, m > 0\,, \qquad x \in \mathbb{R}^{d},\ d = 1, 2\,.$$

1959 Loundon: l'atomo di idrogeno per $d = 1$ ha 2 autovettori per ogni autovalore, tranne il *ground* che ha infinita energia di legame;

1966 Andrews espresse perplessità per via dell'infinita energia di legame del *ground*;

1969 Haines & Roberts calcolarono nuovi autovettori, ottenendo uno spettro continuo;

1976 Andrews criticò H&R, non accettando uno spettro continuo;

Il potenziale Newtoniano **in** $d = 1, 2$**-dim**

$$\mathrm{H} = \frac{p^2}{2m} - \frac{\kappa}{|x|}\,, \qquad \kappa, m > 0\,, \qquad x \in \mathbb{R}^{d},\ d = 1, 2\,.$$

1959 Loundon: l'atomo di idrogeno per $d = 1$ ha 2 autovettori per ogni autovalore, tranne il *ground* che ha infinita energia di legame;

1966 Andrews espresse perplessità per via dell'infinita energia di legame del *ground*;

1969 Haines & Roberts calcolarono nuovi autovettori, ottenendo uno spettro continuo;

1976 Andrews criticò H&R, non accettando uno spettro continuo;

1985 Spector & Lee presentarono un argomento relativistico che escludeva il prolema del *ground* con infinita energia di legame.

... Un'altra serie di lavori hanno discusso questo "semplice" problema.

Il potenziale Newtoniano **in** $d = 1, 2$-**dim**

$$\mathrm{H} = \frac{p^2}{2m} - \frac{\kappa}{|x|}\,, \qquad \kappa, m > 0\,, \qquad x \in \mathbb{R}^{d},\; d = 1, 2\,.$$

1959 Loundon: l'atomo di idrogeno per $d = 1$ ha 2 autovettori per ogni autovalore, tranne il *ground* che ha infinita energia di legame;

1966 Andrews espresse perplessità per via dell'infinita energia di legame del *ground*;

1969 Haines & Roberts calcolarono nuovi autovettori, ottenendo uno spettro continuo;

1976 Andrews criticò H&R, non accettando uno spettro continuo;

1985 Spector & Lee presentarono un argomento relativistico che escludeva il prolema del *ground* con infinita energia di legame.

... Un'altra serie di lavori hanno discusso questo "semplice" problema.

2009 de Oliveira & Verri hanno individuato l'origine delle controversie nella scarsa attenzione per i dettagli matematici del problema.

L'approccio matematico

Il problema è ∞-dimensionale.

$$\mathsf{H} \text{ è simmetrica}: \quad \langle \phi | \mathsf{H}\psi \rangle = \langle \mathsf{H}\phi | \psi \rangle \quad \forall \psi, \phi \quad \Longrightarrow \mathsf{H} = \mathsf{H}^*.$$

$\boxed{\text{Caso finito dimensionale } (\mathbb{R}^n)}$

simmetrico

ess. autoaggiunto

autoaggiunto

Il problema è ∞-dimensionale.

$$\mathsf{H} \text{ è simmetrica : } \quad \langle \phi | \mathsf{H}\psi \rangle = \langle \mathsf{H}\phi | \psi \rangle \quad \forall \psi, \phi \quad \Longrightarrow \mathsf{H} \subseteq \mathsf{H}^*.$$

$\boxed{\text{Caso } \infty\text{-dimensionale } (\mathsf{L}^2(\mathbb{R}^d))}$

$$\begin{tikzcd} & \text{simmetrico} & \\ \text{ess. autoaggiunto} \arrow[ur] & & \cancel{\text{ess. autoaggiunto}} \arrow[ul] \\ & \text{autoaggiunto} \arrow[ul] & \end{tikzcd}$$

L'approccio matematico

Il problema è ∞-dimensionale.

$$\mathrm{H} \text{ è simmetrica}: \quad \langle \phi | \mathsf{H}\psi \rangle = \langle \mathsf{H}\phi | \psi \rangle \quad \forall \psi, \phi \quad \Longrightarrow \mathsf{H} \subseteq \mathsf{H}^*.$$

$\boxed{\text{Caso } \infty\text{-dimensionale } (\mathsf{L}^2(\mathbb{R}^d))}$

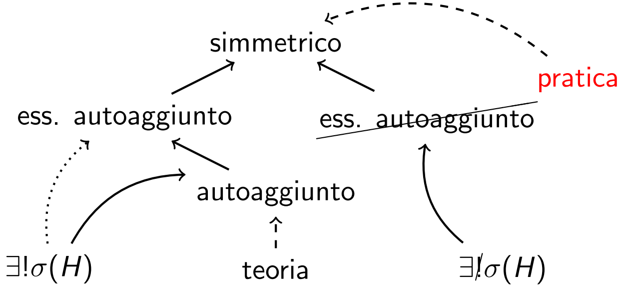
$$\begin{tikzcd}
 & & \text{simmetrico} & & \\
 & \text{ess. autoaggiunto} \arrow[ur] & & \cancel{\text{ess. autoaggiunto}} \arrow[ul] & \\
 & & \text{autoaggiunto} \arrow[ul] & & \\
 \exists!\sigma(H) \arrow[uur, dotted, bend left] \arrow[urr, bend left] & & & & \exists\not{!}\sigma(H) \arrow[uul, bend right]
\end{tikzcd}$$

L'approccio matematico

Il problema è ∞-dimensionale.

$$\mathsf{H} \text{ è simmetrica : } \quad \langle \phi | \mathsf{H}\psi \rangle = \langle \mathsf{H}\phi | \psi \rangle \quad \forall \psi, \phi \quad \Longrightarrow \mathsf{H} \subseteq \mathsf{H}^*.$$

$\boxed{\text{Caso } \infty\text{-dimensionale } (L^2(\mathbb{R}^d))}$



L'approccio matematico

Il problema è ∞-dimensionale.

$$\mathsf{H} \text{ è simmetrica}: \quad \langle \phi | \mathsf{H}\psi \rangle = \langle \mathsf{H}\phi | \psi \rangle \quad \forall \psi, \phi \quad \Longrightarrow \mathsf{H} \subseteq \mathsf{H}^*.$$

$\boxed{\text{Caso } \infty\text{-dimensionale } (L^2(\mathbb{R}^d))}$

$$\begin{tikzcd}
\surd \text{ caso } d = 3 \arrow[dr, dashed] & & \text{simmetrico} & & \dagger \text{ caso } d = 1,2 \arrow[dl, dashed] \\
& \text{ess. autoaggiunto} \arrow[ur] & & \cancel{\text{ess. autoaggiunto}} \arrow[ul] & \\
& & \text{autoaggiunto} \arrow[ul] & & \\
\exists ! \sigma(H) \arrow[uur, dotted, bend left] \arrow[urr, bend left] & & & & \exists \cancel{!} \sigma(H) \arrow[uul, bend left]
\end{tikzcd}$$

L'approccio fisico

$$\mathsf{H} = \frac{p^2}{2m} + V(x) = \frac{p^2}{2m} + \boxed{-\frac{\kappa}{|x|}}$$

L'approccio fisico

$$\mathrm{H} = \frac{p^2}{2m} + V(x) = \frac{p^2}{2m} + \boxed{-\frac{\kappa}{|x|}}$$

Intuito fisico: se $d = 1, 2$, $-\frac{\kappa}{|x|}$ non è il giusto potenziale!

Dimensione d	3	2	1
Potenziale V	$-\frac{\kappa}{\lvert x\rvert}$	$\kappa \ln \lvert x\rvert$	$\kappa\lvert x\rvert$

L'approccio fisico

$$\mathrm{H} = \frac{p^2}{2m} + V(x) = \frac{p^2}{2m} + \boxed{-\frac{\kappa}{|x|}}$$

Intuito fisico: se $d = 1, 2$, $-\frac{\kappa}{|x|}$ non è il giusto potenziale!

Dimensione d	3	2	1
Potenziale V	$-\frac{\kappa}{|x|}$	$\kappa \ln |x|$	$\kappa |x|$

Theorem (Potenziale Newtoniano in $\mathbb{R}^d$, $d = 1, 2$)

$$\mathrm{H}_2 = \frac{p^2}{m^2} + \kappa \ln |x|, \quad x \in \mathbb{R}^2; \qquad \mathrm{H}_1 = \frac{p^2}{m^2} + \kappa |x|, \quad x \in \mathbb{R},$$

sono essenzialmente autoaggiunte.

Morale

Un cattivo intuito fisico porta a misteriose controversie.

Morale

Il rigore matematico a volte aiuta.

Morale

I problemi in Matematica riflettono aspetti della Fisica.

Morale

Un buon intuito fisico evita svangate di conti inutili.