

## K. F. Gauss e la partecipazione di Brera al suo programma di misure geomagnetiche

Guido Tagliaferri e Pasquale Tucci<sup>1</sup>

### 1. Premessa

Nel Dicembre del 1832 Gauss(1777–1855) presentò all'Accademia delle scienze di Gottinga la memoria "Intensitas vis magneticae ad mensuram absolutam revocata" (Gauss 1833 e Gauss 1863–1933, vol. V). Fu il primo di molti lavori che Gauss dedicò al problema della descrizione e dell'interpretazione teorica del magnetismo terrestre. Schaefer (1919-1923) e, più recentemente, May (1972) hanno discusso il contesto nel quale Gauss maturò i suoi interessi per il geomagnetismo. Altri autori hanno affrontato argomenti relativi alle ricerche geomagnetiche di Gauss: Cawood (1977), O'Hara (1983 e 1984), Jungnickel e McCormmach (1986), De La Vallée Poussin (1965), Garland (1979), Sheynin (1979).

La prima memoria di Gauss fu tradotta in molte lingue. Nel 1839 fu pubblicata, nell'Appendice alle Effemeridi astronomiche dell'Osservatorio di Brera – Milano, una traduzione italiana a cura di P. Frisiani [Gauss (1838,1) e Frisiani (1838)], astronomo dell'Osservatorio. L'interesse che gli astronomi di Milano dedicarono all'argomento è dimostrato dal fatto che uno di essi, K. Kreil(1798–1862), eseguì una serie di osservazioni magnetiche con uno strumento costruito a Gottinga nel 1835 da Meyerstein, meccanico dell'Università di Gottinga, su specifiche di Gauss. Kreil seguì la metodologia di misura messa a punto da Gauss; tuttavia non

---

<sup>1</sup>Istituto di Fisica Generale Applicata, Univ. degli Studi di Milano e Unità di Milano del Gruppo Nazionale di Coordinamento per la Storia della Fisica del CNR

si limitò solamente ad eseguire le misure e ad elaborarle secondo quanto prevedeva il metodo di Gauss, ma ampliò l'applicazione del metodo a casi che Gauss non aveva considerato. L'elenco dei lavori di Kreil sulle misure geomagnetiche eseguite è riportato in Bibliografia.

Ci proponiamo in questa comunicazione di riassumere i risultati delle ricerche di Gauss sul geomagnetismo e di descrivere i contributi di Kreil sull'argomento.

## 2. I lavori di Gauss sul geomagnetismo

La pubblicazione dell' "Intensitas ..." fu il primo risultato della stretta collaborazione tra W. Weber(1804-1891), che era giunto a Gottinga nel settembre del 1831, e Gauss. Come Schaefer ha mostrato, gli interessi di Gauss per il geomagnetismo erano molto anteriori, ma fu proprio la presenza di Weber, e il clima di stretta collaborazione che si era subito stabilito tra i due, ad indurre Gauss a dare una forma organica alle sue ricerche. Nella memoria in questione per la prima volta si esprime una quantità non meccanica (la componente orizzontale del campo magnetico terrestre) in funzione di unità assolute (distanza, massa, tempo). Era noto a Gauss che il semiperiodo  $t$  di oscillazione di un ago calamitato, liberamente sospeso, era dato da

$$t = \pi \sqrt{\frac{K}{B_x M}} \quad (1)$$

dove  $B_x$  è la componente orizzontale del campo magnetico terrestre,  $K$  è il momento di inerzia dell'ago, e  $M$  è il suo momento magnetico. Con questa formula si potevano ottenere, da misure di  $t$ , valori del prodotto  $B_x M$ ; ma non essendo  $M$  misurabile separatamente, erano deducibili solo valori relativi di  $B_x$ , per di più soggetti all'assunzione alquanto dubbia che il momento magnetico dell'ago rimanesse costante in luoghi diversi e nel tempo. L'unità di misura in uso prima di Gauss era quella introdotta da von Hum-

boldt ed era basata su un valore di campo desunto a Micuipampa (Perù) sull'equatore magnetico, dove von Humboldt supponeva che l'intensità totale del campo avesse un valore minimo. L'assunzione era ragionevole, ma trascurava le perturbazioni locali del campo.

Il contributo originale di Gauss alla soluzione del problema di ottenere valori assoluti del campo fu di introdurre un procedimento di misura nel quale l'ago calamitato, di momento magnetico  $M$ , era usato in un esperimento ausiliario per deflettere un secondo ago montato al suo posto. Con quest'artificio Gauss ricavò il rapporto  $M/B_x$ , per il quale diede l'espressione:

$$\frac{M}{B_x} = \frac{1}{2} F \frac{n+1}{n}, \quad (2)$$

dove

$$F = \frac{R'^5 \tan \nu' - R^5 \tan \nu}{R'^2 - R^2}, \quad (3)$$

e  $\nu$  e  $\nu'$  sono le medie di quattro deflessioni del secondo ago rispetto al meridiano magnetico per due diverse distanze  $R$  e  $R'$  dal primo ago;  $n$  è un coefficiente, funzione della costante di torsione del filo quando ad esso è sospeso il secondo ago. Un apposito metodo per determinare  $n$  era indicato da Gauss.

Specificamente, la teoria di Gauss forniva un sistema di tre equazioni nelle incognite  $B_x$ ,  $M$  e  $K$ . L'espressione precedente è equivalente al momento di dipolo magnetico che è possibile calcolare in maniera rapida a partire dalla legge di Biot e Savart. Gauss, invece, pervenne al risultato attraverso l'applicazione del principio dei lavori virtuali.

Prima di Gauss già Poisson aveva tentato di pervenire al rapporto  $M/B_x$  facendo agire su un ago magnetico un altro ago e il campo magnetico terrestre. In una lettera all'astronomo Schumacher, [(1780-1850), fondatore dell'Osservatorio di Altona in Germania] citata da Schaefer, Gauss afferma di essere venuto a conoscenza del metodo di Poisson non prima della primavera del 1832.

Il metodo di Poisson, comunque, anche se in linea di principio uguale a quello di Gauss, non permetteva di raggiungerne gli stessi risultati. Col metodo di Poisson, in effetti, si riesce a stabilire

soddisfacentemente la variazione nel tempo delle caratteristiche del campo magnetico terrestre, ma non si riesce ad esprimere il campo magnetico in funzione di grandezze assolute. Lo scienziato francese, infatti, non arrivò a determinare la costante di proporzionalità che compare nella legge di Coulomb tra gli elementi magnetici, legge di cui si servì per pervenire al rapporto  $M/B_z$ . Nella formula di Poisson, inoltre, i momenti di inerzia degli aghi utilizzati debbono essere valutati teoricamente, assumendo l'ipotesi della loro omogeneità. Nel metodo di Gauss, invece, i momenti di inerzia degli aghi sono collegati ai risultati delle misure, poichè compaiono come incognite del sistema di equazioni trovato.

Non ci soffermiamo qui sulle modalità delle misure di Gauss e sugli strumenti da lui usati, perchè un'illustrazione di questi argomenti è implicita nella descrizione dei lavori di Kreil che faremo più avanti. Vogliamo invece accennare agli sviluppi delle ricerche di Gauss sul geomagnetismo successive alla pubblicazione del suo primo lavoro.

### 3. La teoria generale di Gauss del Geomagnetismo

Nel 1838 Gauss pubblicò l'“Allgemeine Theorie der Erdmagnetismus” (Gauss 1838, 2) che diede inizio all'analisi moderna della configurazione del campo magnetico sulla superficie terrestre.

Gauss si decise a mettere ordine alle sue idee sull'argomento quando fu finalmente disponibile una carta globale dell'intensità totale del campo. L'occasione gliela offrì il fisico ed astronomo Edward Sabine [(1788-1883), fu tra l'altro presidente della Royal Society di Londra dal 1861 al 1871] con la pubblicazione della sua carta in un rapporto della “British Association for the Advancement of Science”. Le osservazioni di Sabine erano espresse nell'unità di campo magnetico definita da von Humboldt.

Nella memoria Gauss esprime il potenziale del campo come somma di armoniche sferiche. Già altri, in particolare Legendre, avevano usato armoniche sferiche, ma l'applicazione della teoria, da parte di Gauss, ai dati osservativi allora disponibili fu molto

coraggiosa. L'accordo tra le sue previsioni teoriche e i valori delle ancora scarse misure esistenti, fu decisamente notevole. La memoria di Gauss fu ben presto tradotta in inglese dalla Sig. ra Sabine, e pubblicata nel 1841.

Per concretezza, converrà richiamare i fondamenti della teoria di Gauss.

Sia  $\psi$  la forza magnetica che si esercita tra elementi infinitesimi di magnetismo  $d\mu$ , e sia  $\rho$  la distanza di un generico  $d\mu$  da un dato punto nello spazio. In quel punto il potenziale magnetico  $V$  derivante da tutti i  $d\mu$  della Terra sarà

$$V = - \int \frac{d\mu}{\rho} \quad (4)$$

il cui gradiente potrà fornire la forza magnetica totale  $\psi_t$ . In qualsiasi punto  $O$  dello spazio,  $V$  può essere considerato funzione di tre variabili che esprimono la posizione di quel punto rispetto a un sistema di riferimento. Gauss sceglie la distanza dal centro della Terra  $r$ , la colatitudine  $u$  (angolo tra  $r$  e la parte settentrionale dell'asse terrestre), e la longitudine  $\lambda$  (angolo, considerato positivo verso Est, che un piano passante per  $r$  e l'asse terrestre fa con un primo meridiano). Espande poi  $V$  in serie decrescente di potenze di  $r$ :

$$V = \frac{R^2 P^0}{r} + \frac{R^3 P'}{r^2} + \frac{R^4 P''}{r^3} + \frac{R^5 P'''}{r^4} + \dots, \quad (5)$$

dove le  $P^{(n)}$  (connesse con la distribuzione dei  $d\mu$  sulla Terra) sono funzioni di  $u$  e di  $\lambda$ , ed  $R$  è il raggio della Terra supposta sferica. L'espressione esplicita delle  $P^{(n)}$  è data da Gauss come

$$\begin{aligned} P^{(n)} = & g^{n,0} P^{n,0} + (g^{n,1} \cos \lambda + h^{n,1} \sin \lambda) P^{n,1} + \\ & + (g^{n,2} \cos 2\lambda + h^{n,2} \sin 2\lambda) P^{n,2} + \dots + \\ & + (g^{n,n} \cos n\lambda + h^{n,n} \sin n\lambda) P^{n,n}, \end{aligned} \quad (6)$$

nella quale  $g^{n,0}$ ,  $g^{n,1}$ ,  $h^{n,1}$ ,  $h^{n,2}$ , ecc. sono determinati coefficienti numerici, e le  $P^{n,m}$  sono le seguenti funzioni di  $u$

$$P^{n,m} = \left( \cos u^{n-m} - \frac{(n-m)(n-m-1)}{2(2n-1)} \cos u^{n-m-2} + \right. \\ \left. + \frac{(n-m)(n-m-1)(n-m-2)(n-m-3)}{2 \cdot 4(2n-1)(2n-3)} - \dots \right) \sin u^m. \quad (7)$$

Se la forza magnetica  $\psi_t$  nel punto O viene scomposta in tre forze tra loro perpendicolari  $X, Y$  e  $Z$ , con  $Z$  diretta verso il centro della terra, e  $X$  e  $Y$  tangenti alla superficie sferica concentrica alla terra passante per O; e si assume  $X$  diretto verso Nord e giacente su un piano passante per O e per l'asse della terra, e  $Y$  diretto verso Ovest e giacente su un piano parallelo all'equatore, allora, prosegue Gauss,

$$X = -\frac{dV}{r du} \quad Y = -\frac{dV}{r \sin u d\lambda} \quad Z = -\frac{dV}{dr}. \quad (8)$$

Di conseguenza, e poichè  $P^0 = 0$  (dato che le quantità di magnetismo di polarità opposta sono uguali nel volume totale della Terra),

$$X = -\frac{R^3}{r^3} \left( \frac{dP'}{du} + \frac{R}{r} \cdot \frac{dP''}{du} + \frac{R^2}{r^2} \cdot \frac{dP'''}{du} + \dots \right) \quad (9)$$

$$Y = -\frac{R^3}{r^3 \sin u} \left( \frac{dP'}{d\lambda} + \frac{R}{r} \cdot \frac{dP''}{d\lambda} + \frac{R^2}{r^2} \cdot \frac{dP'''}{d\lambda} + \dots \right) \quad (10)$$

$$Z = \frac{R^3}{r^3} \left( 2P' + \frac{3RP''}{r} + \frac{4R^2P'''}{r^2} + \dots \right). \quad (11)$$

Per punti sulla superficie della terra le espressioni delle forze diventano:

$$X = -\left( \frac{dP'}{du} + \frac{dP''}{du} + \frac{dP'''}{du} + \dots \right) \quad (12)$$

$$Y = -\frac{1}{\sin u} \left( \frac{dP'}{d\lambda} + \frac{dP''}{d\lambda} + \frac{dP'''}{d\lambda} + \dots \right) \quad (13)$$

$$Z = 2P' + 3P'' + 4P''' + \dots \quad (14)$$

Queste espressioni di  $X, Y, Z$  permettono (in linea di principio) di calcolare i valori di  $\psi_t$  su tutta la superficie terrestre. Infatti i coefficienti numerici che compaiono nelle  $P^{(n)}$  si possono determinare, una volta che si conoscano i valori sperimentali della forza magnetica per un numero sufficiente di punti, ciascuno individuato con le sue coordinate geografiche  $u$  e  $\lambda$ . Ogni valore di  $X$ , o di  $Y$ , o di  $Z$  ottenuto dalla  $\psi_t$  misurata in quel punto fornirà un'equazione in cui entrano i coefficienti delle  $P^{(n)}$ , per cui una volta stabilito a che ordine si vogliono arrestare gli sviluppi in serie delle  $P^{(n)}$ , e conseguentemente stabilito quante equazioni occorrono per determinare i coefficienti desiderati, sarà fissato il numero minimo di osservazioni sperimentali necessarie. Se, come proposto da Gauss, si arrestano gli sviluppi al quarto ordine, sono sufficienti 8 osservazioni complete (intensità, declinazione e inclinazione) per determinare i 24 coefficienti necessari. In effetti era possibile ottenere, già all'epoca, un numero superiore di osservazioni, sulle quali però incombeva la forte incognita di errori accidentali che, sommati ai termini trascurati nello sviluppo in serie, potevano inficiare notevolmente i risultati. È per questo che Gauss suggerisce di usare il metodo dei minimi quadrati, un metodo che lui stesso aveva precedentemente elaborato, per sfruttare tutte le osservazioni disponibili.

All'atto pratico, l'applicazione del procedimento generale qui sopra sommariamente descritto comportava complicazioni e lungaggini scoraggianti. Per agevolare la soluzione del problema, Gauss escogitò un calcolo basato sulla scelta di dati osservativi raggruppati "per parallelo", tali cioè che per ogni gruppo si avesse lo stesso valore della latitudine (ossia lo stesso valore di  $u$ ). L'inconveniente di questo modo di procedere, dichiarato del resto dall'autore, consisteva nel fatto che alcuni dei dati necessari non erano disponibili da osservazioni dirette, ma dovevano essere desunti da rappresentazioni grafiche (carte) spesso di dubbia precisione.

Gauss lavorò con i dati espressi nell'unità di misura fissata da von Humboldt, nonostante avesse precedentemente dimostrato che

il campo poteva essere misurato in maniera assoluta. (La vecchia unità corrispondeva a 0.3494 volte la nuova unità). Usò essenzialmente la già citata carta dell'intensità tracciata da Sabine (1837), aggiungendo ai dati dell'intensità ivi presentati i dati della declinazione e dell'inclinazione ricavati da carte più vecchie. Tabulò pertanto i valori di queste tre quantità per 12 punti della superficie terrestre posti su ciascuno di 7 paralleli. Nel corso del lavoro si rese anche conto degli errori che si introducevano nel calcolo combinando osservazioni fatte in epoche diverse (la stessa carta di Sabine era stata tracciata nell'arco di vari anni e i dati non erano stati ridotti a una stessa epoca), ma non aveva altra scelta.

Avendo ricavato così i coefficienti, Gauss poté calcolare la declinazione, l'inclinazione, e l'intensità del campo per 91 punti della superficie terrestre per i quali disponeva di osservazioni dirette. Ottenne valori la cui differenza media tra i dati previsti e quelli osservati era di 0.046 unità per l'intensità,  $1^{\circ}6'$  per l'inclinazione e  $1^{\circ}30'$  per la declinazione, e ritenne l'accordo abbastanza soddisfacente, tenendo conto anche del fatto che le differenze tra i dati presi da osservatori diversi erano maggiori delle differenze tra i dati calcolati e quelli osservati.

Un'altra interessante conseguenza della sua analisi fu la conclusione che nel campo vi era preponderanza dei termini di dipolo: questo risultato mostrava l'erroneità dell'ipotesi introdotta da Halley, e ancora accettata da scienziati contemporanei di Gauss, secondo la quale il campo magnetico terrestre era originato da un quadrupolo.

Gauss, infine, era in grado di localizzare il Polo Nord e il Polo Sud. Per il Polo Nord aveva trovato una latitudine Nord di  $73^{\circ} 35'$  e una longitudine Est di  $264^{\circ} 21'$ . Il capitano Ross aveva misurato la posizione del Polo Nord a  $3^{\circ}30'$  più a Sud. La posizione del Polo Sud non era stata ancora osservata al momento della pubblicazione della memoria di Gauss. Nel 1841 Wilkes osservò la posizione del Polo Sud: la differenza tra i valori calcolati da Gauss e i valori osservati da Wilkes era modesta. Secondo la previsione di Gauss la latitudine Sud del Polo Sud era di  $72^{\circ} 35'$ , e la longitudine Ovest era di  $152^{\circ} 30'$ . Wilkes misurò al Polo Sud una latitudine Sud di  $70^{\circ} 21'$ , e una longitudine Est di  $146^{\circ} 17'$ . (Cf. Schaefer 1919-23).



La memoria di Gauss metteva in evidenza quali difficoltà gli avessero impedito di risolvere prima il problema del calcolo del geomagnetismo, e ne rendessero la soluzione ancora insoddisfacente (nella sua opinione) quanto a precisione: la carenza di dati osservativi disponibili e l'impossibilità di confrontare tra di loro dati presi in maniera non omogenea. Gli era apparso necessario quindi che fossero stabiliti dei protocolli di osservazione, usando gli stessi strumenti e la stessa procedura. Per questa ragione aveva organizzato una rete di Osservatori magnetici - il "Magnetisch Verein" -. Essa fu uno dei primi esempi di cooperazione scientifica internazionale.

Fu in seguito a questo progetto che anche a Milano fu costituito un Osservatorio magnetico che, analogamente a quanto avveniva dalle altre parti, fu installato nell'Osservatorio astronomico. Le modalità di misura, infatti, richiedevano una perizia osservativa che, in quel periodo, si pensava possedessero solo gli astronomi. E nella memoria di Gauss [Gauss (1838, 2)] il risultato di Kreil fu citato (v. p. 222 della traduzione inglese), e utilizzato.

#### 4. Il contributo degli astronomi di Milano al programma geomagnetico di Gauss

##### 4.1 L'attività osservativa

A Milano iniziarono nel 1836, presso l'Osservatorio astronomico di Brera, le osservazioni geomagnetiche secondo le modalità previste da Gauss nella sua prima memoria [(Gauss (1833)]. Le misurazioni della componente orizzontale del campo magnetico terrestre e della declinazione furono condotte principalmente da Kreil, aiutato da Della Vedova. In seguito si aggiunsero Stambucchi e Capelli. Le osservazioni, condotte fino alla fine del 1838, furono pubblicate da Kreil (da 1837, 1 a 1848, 2). Per la misura della  $B_x$  e della declinazione a Milano furono impiegati due strumenti, uno, come già

detto, costruito da Meyerstein a Gottinga e un altro costruito da Grindel, meccanico dell'Osservatorio di Brera.

Gauss, nella prima stesura dell' "Intensitas ...", aveva appuntato la sua attenzione essenzialmente sulla teoria della misura. La descrizione dello strumento usato fu data da Gauss in una nota della traduzione tedesca della stessa opera apparsa nei "Poggen-dorff's Annalen" nel 1833. Kreil, a sua volta, [Kreil (1838,1)] fornisce una accurata descrizione dello strumento e delle modalità di misura impiegate a Milano.

Durante le misure di  $B_x$  e della declinazione - misure che richiedevano un intervallo di tempo abbastanza lungo - le grandezze stesse cambiavano; era necessario, quindi, ridurre i valori ad un tempo prefissato: a tale scopo veniva usato un altro apparato, del tutto simile a quello di misura. Le modalità della misura verranno descritte più avanti.

Le osservazioni, istituite giornalmente a Milano, dell'intensità  $B_x$  mostravano una variazione diurna, mensile e annua. Kreil riteneva interessante studiare se tale effetto fosse dovuto a un cambiamento della  $B$  totale o semplicemente a una variazione dell'inclinazione.  $B_x$ , infatti, è uguale a  $B \cos i$ . Osservando le indicazioni di un ago di inclinazione durante le epoche di massima e minima inclinazione, si poteva dedurre se le variazioni della  $B_x$  fossero dovute ad una variazione della sola  $i$ . Ma gli strumenti per la misura dell'inclinazione allora in uso non erano molto precisi.

Kreil pertanto progettò un nuovo strumento, che migliorava, con l'impiego di uno specchio, la precisione di lettura di un usuale inclinometro ed usava un congegno di sostegno con punte sottili su piastre di agata che riduceva al minimo gli attriti. Adottando poi per le misure angolari e per quelle di durata dei procedimenti simili a quelli usati da Gauss per le misure di intensità, riusciva a rilevare le variazioni dell'inclinazione e della  $B$  totale con buona precisione.

#### 4.2 Descrizione del magnetometro

Il magnetometro permetteva di risalire ai valori della  $B_x$  e della declinazione da misure angoli e di tempi. L'elemento sensibile (per brevità: ago magnetico) era costituito da un sbarretta di acciaio a

forma di parallelepipedo, di dimensioni  $50\text{cm} \times 3\text{cm} \times 1.3\text{cm}$ ; sospeso ad un filo, era libero di oscillare in un piano orizzontale. Per ottenere la  $B_x$  bisognava effettuare, come indicato da Gauss, anche misure del momento d'inerzia dell'equipaggio mobile, e dell'azione dell'ago magnetico su un secondo (e simile) ago. L'ago doveva avere forma regolare ed essere protetto dalle correnti d'aria. A Milano la protezione era ottenuta rinchiudendo l'ago in una cassa di legno fornita di una finestrella. Anche il filo di sospensione dell'ago era inserito in un tubo di vetro per ripararlo dalle correnti d'aria. Il filo di sospensione era collegato all'ago per il tramite di un circolo di torsione che aveva la funzione di azzerare la tensione residua del filo quando l'ago era in posizione di equilibrio. Sull'ago era montato, perpendicolarmente all'asse, uno specchio in vetro; su di esso si rifletteva una scala graduata che, osservata col cannocchiale di un teodolite, serviva per la lettura degli spostamenti angolari dell'ago. La misura della durata di oscillazione avveniva con un cronometro o con un pendolo. Le quantità misurate, necessarie al calcolo della declinazione erano: la durata di oscillazione, l'angolo di deviazione dell'ago dal meridiano magnetico, e il coefficiente  $n$ , funzione della costante di torsione del filo. Per la misura della  $B_x$  occorre inoltre ricavare sperimentalmente il momento d'inerzia dell'equipaggio mobile, il che comportava l'esecuzione di varie prove variando, con l'aggiunta di pesi, il momento dell'equipaggio; nonchè i coefficienti relativi alle costanti di torsione del filo di sospensione per i vari pesi dell'equipaggio, e per il secondo ago; e infine le deviazioni del secondo ago, prodotte dall'azione del primo.

Per la raccolta dei dati geomagnetici veniva messo in funzione, oltre a quello di misura, un altro magnetometro, che aveva il compito di permettere di valutare gli eventuali cambiamenti sia nella declinazione che nella durata di oscillazione, derivanti da possibili variazioni dell'intensità orizzontale nel corso delle misurazioni.

Le osservazioni della  $B_x$  e della declinazione erano effettuate con il magnetometro all'aria aperta, non possedendo l'Osservatorio di Milano una stanza libera dal ferro. Le misure di variazione del campo erano condotte contemporaneamente in una stanza all'interno del palazzo di Brera.

### 4.3 Le modalità della misura

L'esperimento per ottenere  $B_x$  consisteva nel mettere in oscillazione l'ago magnetico sospeso caricandolo di volta in volta con pesi attaccati ad un'asticciola di legno, perpendicolare all'ago e solidale con il suo punto di mezzo, a varie distanze da esso uguali ed in direzioni opposte. Ripresa in altra forma la (1)

$$B_x M t^2 = K \pi^2, \quad (15)$$

si ragiona che per l'aggiunta di pesi di massa  $2m$  essa diviene

$$B_x M t'^2 = (K + I + 2mr'^2) \pi^2, \quad (16)$$

dove  $K$  è il momento di inerzia dell'ago magnetico senza pesi aggiuntivi,  $I$  è la somma dei momenti d'inerzia dell'asticciola rispetto alla linea di sospensione e dei pesi rispetto ad assi verticali passanti per i loro centri di gravità, e  $r'$  è la distanza di ciascun peso dal punto medio dell'ago.

Spostando i pesi ad un'altra distanza  $r''$  si ha una seconda relazione

$$B_x M t''^2 = (K + I + 2mr''^2) \pi^2. \quad (17)$$

Le incognite del problema sono  $B_x M$ ,  $K$  e  $I$ , per cui sono sufficienti tre misure del semiperiodo per ottenere la soluzione. Gauss suggeriva comunque di fare un numero maggiore di osservazioni e di usare il metodo dei minimi quadrati.

Per trovare il rapporto  $B_x/M$  Kreil usava uno dei due metodi dati da Gauss, quello oggi noto come 'Prima Posizione di Gauss'.

A tale scopo l'ago del magnetometro veniva sostituito con un altro ago. Il primo ago veniva poi collocato orizzontalmente in un piano perpendicolare al meridiano magnetico, col suo punto medio ad una distanza  $R$  dal filo del magnetometro. In questa posizione si osservava l'azione che il primo ago esercitava su quello sospeso al suo posto, ottenendo gli angoli di deviazione in funzione di  $R$ .

Si disponeva così dei dati da introdurre nelle formule (2) e (3) del §2, dalle quali si ricava il rapporto tra  $B_x$  e  $M$  che, insieme al loro prodotto, fornisce le due grandezze desiderate.

Una volta ottenuti i valori di  $B_x$  e di  $M$ , ad essi bisognava apportare delle correzioni. Come abbiamo visto, infatti, il valore assoluto della componente orizzontale della forza magnetica terrestre dipendeva dalla misura della durata del tempo di oscillazione dell'ago del magnetometro; e questa misura era affetta da vari errori dovuti all'andamento dell'orologio, alla torsione del filo, ecc. . Ma non ci soffermeremo qui sulle correzioni di tali errori, correzioni che pure sono discusse nei lavori dei milanesi.

Per concludere, ricordiamo che Kreil, del cui interesse per lo studio dell'inclinazione si è fatto cenno sopra, approntò due strumenti per la misura di questa grandezza: uno era un inclinometro di Lenoir e veniva usato per le misure istantanee; l'altro, ideato da Kreil stesso, serviva per le misure di variazione. Conoscendo l'inclinazione e la  $B_x$  era ovviamente possibile risalire al valore della forza magnetica totale ( $B_x / \cos i$ ).

## 5. Conclusioni

La partecipazione di Milano al programma di misure geomagnetiche di Gauss fu di buon livello scientifico-tecnico, ma strettamente dipendente dall'impegno di Kreil. Dopo il 1839, anno del trasferimento di Kreil a Praga, dove sarebbe in seguito divenuto direttore del locale osservatorio, le misure geomagnetiche a Milano subirono un brusco rallentamento. Negli anni successivi furono pubblicati da parte degli astronomi di Brera alcuni lavori sul geomagnetismo, ma riguardavano essenzialmente l'analisi dei dati degli anni precedenti per ricavarne regolarità statistiche.

Il lavoro teorico fu completamente trascurato, anche se P. Frisiani era un valente matematico. Il fatto è che in quel periodo l'Osservatorio stava passando uno dei periodi meno felici della sua storia a causa della carenza di personale. Le sorti dell'Osservatorio si risollevarono solo dopo l'unità d'Italia con l'arrivo di G. V. Schiaparelli, il quale decise di concentrare le attività dell'Osservatorio su ricerche specificamente astronomiche, relegando al rango di attività secondarie le misure meteorologiche, quelle geodetiche e geo-magne-

tiche, e la compilazione delle Effemeridi.

Dell'attività geomagnetica a Brera al tempo di Kreil sono rimasti i documenti di archivio, le pubblicazioni, e il magnetometro costruito da Meyerstein. Lo strumento, mancante del filo di sospensione, è visibile nel corridoio dell'Osservatorio.

### BIBLIOGRAFIA

Cawood, John (1977), "Terrestrial Magnetism and the Development of International Collaboration in the Early Nineteenth Century," *Annals of Science*, 1977, 34:551-587.

Frisiani, Paolo (1838). Annotazioni. Pp. 58-112 *Primo Supplemento alle Effemeridi Astronomiche di Milano per l'anno 1839*. Milano, 1838.

Contiene le annotazioni di Frisiani a Gauss (1838, 1).

Garland, G. D. (1979), "The Contributions of Carl Friedrich Gauss to Geomagnetism," *Historia Mathematica*, 1979, 6:5-29.

Gauss, Karl Friedrich (1833), "Intensitas vis magneticae terrestris ad absolutam mensuram revocata" *Comment. societ. reg. scientiar. Gotting.*, 1833, 8:3-44.

Gauss, Karl Friedrich; Weber, Wilhelm (eds.). (1837-1843) *Resultate aus den Beobachtungen des magnetischen Vereins*, 6 vols. (Göttingen, Leipzig: 1837-1843).

Gauss, Karl Friedrich (1838, 1). Misura Assoluta dell'Intensità della Forza Magnetica Terrestre. Pp. 1-57 in *Primo supplemento alle Effemeridi Astronomiche di Milano per l'anno 1839*. Milano, 1838. Traduzione di Paolo Frisiani di: Gauss (1833).

Gauss, Karl Friedrich (1838, 2). "Allgemeine Theorie des Erdmagnetismus", *Gauss Werke*, vol V, Pp. 121-180 (Göttingen,

1867). Una traduzione inglese della memoria fu curata da Mrs. Sabine e pubblicata nelle "Taylor's Scientific Memoirs".

Gauss, Karl Friedrich (1863–1933). *Werke* a cura della Königlische Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen (Leipzig–Berlin, 1863-1933), in 12 volumi.

Jungnickel, Christa; McCormach, Russell (1986). *Intellectual Mastery of Nature: Theoretical Physics from Ohm to Einstein. Vol I: The Torch of Mathematics, 1800-1870. Vol II: The now Mighty Theoretical Physics, 1870-1925.* (Chicago, London: University of Chigaco Press, 1986).

Kreil, Karl (1837, 1), "Schreiben an den Herausgeber, Mailand 1837, Januar 23," *Schumacher Astronomische Nachrichten* 1837, 14(328): 258-266 e 14(331): 311-316.

Kreil, Karl (1837, 2), "Observations faites à l'Observatoire de Milan sur l'influence des Aurores Boréales sur l'aiguille aimantée," *Bibliothèque Universelle de Genève (Nouvelle Série)*, 1837, 8: 411-420.

Kreil, Karl (1837, 3), "Beobachtungen der magnetischen Abweichung, Neigung und horizontalen Intensität zu Mailand im Jahre 1836, nebst Angabe eines neuen Inclinatoriums. Mailand, 18 Juni 1837," *Annalen der Physik und Chemie*, 1837, 41: 521-528.

Kreil, Karl (1837, 4), "Gleichzeitige Beobachtungen der magnetischen Abweichung, Neigung und Intensität; Mailand 9 Juli 1837", *Annalen der Physik und Chemie*, 1837:41: 528-538.

Kreil, Karl (1837, 5), "Observations des perturbations magnétiques faites à l'Observatoire de Milan dans le mois de juillet 1837," *Bibliothèque Universelle de Genève (Nouvelle Série)*, 1837, 10: 393-396.

Kreil, Karl (1837, 6), "Lettre de M. Kreil a M. de la Rive, sur une périodicité observée dans l'époque des perturbations magnétiques, Milano 31 Ottobre 1837" *Bibliothèque Universelle de Genève*

(*Nouvelle Série*), 1837, 12: 205-211.

Kreil, Karl (1837, 7), "Lettre de M. Kreil a M. de la Rive, sur les observations de perturbations magnétiques, faites à l'Observatoire de Milan dans les journées du 12, 13, 14 et 15 novembre 1837, Milano 8 Dicembre 1837" *Bibliothèque Universelle de Genève (Nouvelle Série)*, 1837, 12: 408-414.

Kreil, Karl (1838, 1), "Resultate der in der letzten Hälfte des Jahres 1837 zu Mailand angestellten magnetischen Beobachtungen. Mailand 10 Jan. 1838," *Annalen der Physik und Chemie*, 1838, 43: 292-303.

Kreil, Karl (1838, 2), "Schreiben an den Herausgeber, Mailand 1838, Januar 16," *Schumacher Astronomische Nachrichten* 1838, 15(346): 169-174.

Kreil, Karl (1838, 3). Descrizione degli apparati magnetici e dei metodi con cui si eseguono le osservazioni. Pp. 133-197 in *Primo supplemento alle Effemeridi Astronomiche di Milano per l'anno 1839*. Milano, 1838.

Kreil, Karl (1839, 1), "Resultate der Mailänder dreijährigen magnetischen Beobachtungen und Einfluss des Mondes auf die magnetischen Erscheinungen. Mailand, 7 Januar 1839," *Annalen der Physik und Chemie*, 1839, 46: 443-458.

Kreil, Karl (1839, 2), "Schreiben an den Herausgeber, Mailand 1839, Febr. 2," *Schumacher Astronomische Nachrichten* 1839, 16(373): 209-214.

Kreil, Karl; Della Vedova, Pietro (1839, 3). Osservazioni sull'intensità e sulla direzione della Forza magnetica istituite negli anni 1836, 1837, 1838 all'I. R. Osservatorio di Milano. Pp. I-XII, 1-268 in *Secondo supplemento alle Effemeridi Astronomiche di Milano per l'anno 1839*. Milano, 1839.

Kreil, Karl (1839, 4), "Lettre à M. Kupffer, contenant un exposé succinct des principaux résultats des observations magnétiques



exécutées à l'Observatoire de Milan," *St. Pétersb. Acad. Sci. Bull.*, 1839, V(21): 311-316; traduzione inglese: "Letter from Kreil, Director the Observatory at Milan (sic!), to M. Kupffer, Director General of the Physical Observatories in Russia, containing a succinct Account of the principal Results of M. Kreil's Magnetic Observations at Milan," *Philosophical Magazine and Journal of Science (Third Series)*, 1840, 16: 241-250.

Kreil, Karl (1840, 1). Die Magnetischen Apparate und ihre Aufstellung an der k. k. Sternwarte zu Prag. Pp. 91-99 in Gauss, Karl Friedrich; Weber, Wilhelm. (eds. ) (1837-1843).

Kreil, Karl (1840, 2), "Schreiben an den Herausgeber, Prag 1840, Juli 22", *Schumacher Astronomische Nachrichten* 1840, 17 (408): 369-374.

Kreil, Karl (1847), "Lettera al signor Paolo Frisiani," *Giornale dell'I.R. Istituto Lombardo di scienze, lettere ed arti e Biblioteca Italiana* 1847, 1: 111-113.

Kreil, Karl (1848, 1), "Schreiben an den Herausgeber" *Schumacher Astronomische Nachrichten* 1848, 26(602): 17-32 e 26(607): 103-110.

Kreil, Karl (1848, 2), "Schreiben an den Herausgeber, Prag 1848, April 17," *Schumacher Astronomische Nachrichten* 1848, 27(637): 193-200.

La Vallée Poussin, Ch.-J. de (1965), "Gauss et la Théorie du potentiel," *Revue des Questions Scientifiques*, 1965, 23:314-329.

May, Kenneth O. (1972). Gauss, Karl Friedrich *Dictionary of Scientific Biography* (New York: 1972) vol. 5:298-315.

McConnell, Anita (1980). *Geomagnetic Instruments before 1900* (Harriet Wynter Ltd., London 1980).

Multhaus, Robert P. ; Good, Gregory (1987). *A brief History of geomagnetism and a Catalog of the Collection of the National*

*Museum of American History*, (Washington, D. C. : Smithsonian Institution Press, 1987).

O'Hara, James Gabriel (1983), "Gauss and the Royal Society: the reception of his ideas on magnetism in Britain (1832-1842)," *Notes and Records of the Royal Society of London*, 1983, 38:17-78.

O'Hara, James Gabriel (1984), "Gauß' Method for Measuring the Terrestrial Magnetic Force in Absolute Measure: Its Invention and Introduction in Geomagnetic Research," *Centaurus*, 1984, 27:121-147.

Sabine, Edward (1838). "Report on the Variations of the Magnetic Intensity observed at different Points of the Earth's Surface", Pp. 1-85 *VII Report of the British Association for the Advancement of Science*. (London, 1838).

Schaefer, Clemens (1919-1923). "Über Gauss' physikalische Arbeiten (Magnetismus, Elektrodynamik, Optik)," *Werke* [Gauss (1863-1933)] vol. XI(2), (1919-1923) Pp. 1-217.

Sheynin, O. B. (1979), "C. F. Gauss and the Theory of Errors," *Archive for History of Exact Sciences*, 1979, 20:22-72.