Dall'onda solitaria ai solitoni:1834-1895

Pietrò Pantano-Pasquale Tucci
Dip. di Fisica,Univ. della Calabria

In questa comunicazione delineeremo lo sviluppo della teoria dei solitoni a partire dalla scoperta da parte di J.S. Russell dell'onda solitaria nel 1834 fino alla formulazione dell'equazione di Korteweg e de Vries (KdV) nel 1895. La soluzione generale di questa equazione,dipendente da un parametro,nel caso stazionario é costituita dalle onde cnoidali:per una valore opportuno del parametro abbiamo i solitoni e l'onda solitaria.

Tale comunicazione é strettamente collegata alle altre due comunicazioni,pubblicate su questi atti,sulla teoria dei solitoni ed insieme ad esse cerca di dare un quadro il più esauriente possibile della teoria.

Al sesto meeting della British Association for the Advancement off Science tenuto a Bristol nell'agosto del 1836 ad un 'Committee on Wawes' formato da J.S. Russell e J. Robison furono assegnate cento sterline per "an experimental investigation on Wawes, having particular reference to the manner in which they are produced,the effect of wind,and the effect of the form of the canal...". (1). Le risposte che l'Associazione si attendeva erano relative alle seguenti domande:Che cos'é un'onda?,Qual'é la natura delle onde del mare?,L'alta marea é un'onda che obbedisce alle stesse leggi delle altre onde?. Allo stato delle conoscenze idrodinamiche di quel periodo non c'erano risposte esaurienti per queste domande.

Il finanziamento,però,non era solo dovuto all'interesse teoretico dell'argomento:"the beautiful physical phenomena of wawes were not only employed as agents to convey through the air the intimations of distant events to the sense of hearing,and to waft to the eye the exquisite sensations of light and colour,but were likewise employed in the practical uses of every-day life,and took an important part in that commercial intercourse by means of which the comforts of life and the advancement of civilitation are immediately promoted".(2)

Del problema delle onde e delle maree,comunque,sembrava che si potesse capire qualcosa in più da quando era stato osservato un fenomeno relativo alla resistenza offerta dai fluidi,in particolare l'acqua,al passaggio dei corpi. J.S. Russell,infatti,nella estate del 1834 aveva intrapreso una serie di ricerche intorno alle leggi della resistenza dei fluidi e alle modalità per applicarle all'arte della navigazione pratica e dell'architettura navale.

J.S. Russell era un affermato ingegnere navale nonché una singolare figura di scienziato vittoriano,(3) ed era stato stimoto a tali ricerche dal fatto di essere stato consultato sulle possibilità di miglioramento di un sistema di navigazione a velocità molto elevate e dal fatto di essere consapevole dello stato imperfetto di quella parte dell'Idrodinamica teorica,che lui dimostra di conoscere in maniera approfondita,che si riferisce alla resistenza offerta dai fluidi al movimento di corpi galleggianti. Gli esperimenti furono condotti su larga scala e con dovizia di mezzi usando navi sia con forme analoghe a quelle usate nelle costruzioni marine sia analoghe come forma a certi solidi teorici."Accurate Chronometers and Dynamometers of various descriptions used by a number of higly educated and scientific observers,render the experiments worthy of great confidence."(4) La potenza necessaria a vincere la resistenza era data dai cavalli. Fu durante queste ricerche,in maniera quindi nient'affatto casuale,che J.S. Russell "...observed one very singular and beautiful phenomenon,which is so important,that I shall describe minutely the aspect under which it first presented itself."(5) Mentre stava osservando una nave trainata dai cavalli lungo un canale capitò che essa improvvisamente si bloccasse. Dopo una violenta e tumltuosa agitazione dell'acqua si forma una "large,solitary,progressive wave" che prosegue indisturbata per parecchie miglia seguita dall'esperto ingegnere scozzese che subito ne individua alcune caratteristiche salienti.

Era subito apparso probabile che l'esistenza dell'onda solitaria esercitasse una grande influenza sulla natura e sulla quantità di resistenza che un fluido opponeva ad un corpo che si muoveva con data velocità entro di esso. Era allora diventata un'indagine di interesse non solo teorico,ma anche pratico per l'arte della navigazione,determinare con grande accuratezza le leggi che governavano la genesi ed il divenire di quest'onda. A tale fine specifico J.S. Russell intraprende una minuziosa indagine sperimentale.

I primi risultati vengono esposti nel Report del 1837 a Liverpool;

1) L'onda solitaria (o onda primaria) é differente dagli altri tipi noti di onde,

2) La velocità é indipendente dalla larghezza del canale ed uguale alla velocità che acquisterebbe un corpo che cade liberamente, per effetto della gravità,da un'altezza uguale a ½ dell'altezza del fluido,misurata dalla sommità dell'onda al fondo del canale,
3) La forma elementare dell'onda é cicloidale e,dopo un certo tempo si rompe,
4) L'onda solitaria é riflessa da superfici a 90° alla direzione del loro moto senza subire alcun cambiamento se non quello di direzione,
5) Le onde solitarie si attraversano l'un l'altra senza cambiamento di alcun genere nella stessa maniera di piccole oscillazioni prodotte sulla superficie di una vasca dalla caduta di una pietra.

Al meeting della British Association del 1844 J.S. Russell dà un quadro riassuntivo degli esperimenti che nel frattempo lui aveva eseguiti riproducendo il fenomeno in laboratorio.In esso dà la espressione analitica della velocità,della lunghezza d'onda,del range di traslazione,della forma d'onda,del cammino di traslazione. Questa trattazione analitica é suscettibile di una rappresentazione geometrica e corrisponde al fatto che l'onda sollevandosi bagna in tempi uguali archi uguali di un disco circolare posto verticalmente in modo da toccare la superfice del liquido in un sol punto.Già Laplace in Mécanique Céleste aveva fatto altrettanto per le onde marine. Durante la trasmissione dell'onda piani verticali immaginari di liquido mantengono il loro parallelismo.

Quando J. S. Russell individuava e descriveva il fenomeno dell'onda solitaria le teorie allora note sulle onde non erano in grado di prevedere o di dare una spiegazione esauriente del fenomeno. La teoria che,secondo J.S. Russell,più si avvicinava-in particolare nella previsione della velocità-era la teoria di Lagrange espressa nella Mécanique Analytique,nella quale viene data l'equazione di propagazione delle vibrazioni in fluidi elastici,quali ad esempio il suono nell'atmosfera

$$\frac{d^2\phi}{dt^2} = gh\left(\frac{d^2\phi}{dy^2} + \frac{d^2\phi}{dx^2}\right)$$

dalla quale si deduce la legge secondo la quale il suono si propaga con una velocità quasi uguale a quella che acquisterebbe un corpo pesante cadendo da un'altezza uguale a ½ h dell'atmosfera (supposta omogenea e uniforme).

Per la propagazione di un'onda in un canale di liquido di profondità α

$$\frac{d^2\Phi}{dt^2} = g\alpha\left(\frac{d^2\Phi}{dy^2} + \frac{d^2\Phi}{dx^2}\right)$$

Analogamente la velocità di propagazione delle onde sarà uguale a quella che acquisterebbe un corpo pesante che cade da un'altezza uguale a $\frac{1}{2}$ profondità del canale.

Il modello che,però,stava dietro a questo calcolo non è applicabile,secondo J.S. Russell,alle onde solitarie,perché esso si applica solo ad onde che sono infinitamente piccole,e che agitano l'acqua ad una profondità molto piccola. L'onda solitaria,invece, ha larghe oscillazioni e si estende molto al di sotto della superficie del canale. Anche la teoria delle onde di Poisson si applica solo a fenomeni che avvengono nel fluido nei pressi del disturbo iniziale. "The greater part of the investigations of M. Poisson and of M. Cauchy under the name of wave theory,are rather to be regarded as mathematical exercises than physical investigation. ... It now remained to the mathematician to predict the discovery after it had happened,i.e. to give an a priori demonstration a posteriori."(6)

Il primo che si cimentò fu Kelland(6) che per la velocità dell'onda trova il valore

$$c^2 = \frac{g}{\alpha}\,\frac{e^{ah}-e^{-ah}}{e^{ah}+e^{-ah}}\left\{1-\varepsilon a\,\frac{e^{ah}-e^{-ah}}{e^{ah}+e^{ah}}\right\}$$

con ε semielevazione e h profondità a riposo.
L'errore medio,però,tra questa formula e i valori osservati era di circa 0,7 mentre la formula di J.S. Russell comportava,con i valori osservati un errore medio di 0,004.
Airy(6) in seguito ottiene per la velocità il valore

$$c^2 = \frac{g}{m}\,\frac{\varepsilon^{mh}-\varepsilon^{-mh}}{\varepsilon^{mh}+\varepsilon^{-mh}} \qquad m = \frac{2\pi}{\lambda}$$

che similmente a quella di Kelland si discosta molto dai risultati sperimentali. Airy,inoltre,trova che se noi non ci mettiamo nella ipotesi di onda lunga rispetto alla profondità del canale,dobbiamo procedere ad una seconda approssimazione,e,in questo caso, per l'onda abbiamo un valore $c = \sqrt{g(h+3K)}$ molto lontano dalla formula fornita da J.S. Russell ($c = \sqrt{g(h+K)}$).

Anche Green(7) cercò di dedurre il comportamento dell'onda solitaria dalla sua teoria delle onde lunghe. Il problema principale era costituito dalla difficoltà di introdurre nei calcoli la lunghezza finita dell'onda.Furono fatti tentativi di introdurre funzioni discontinue;questo portava però a situazioni paradossali.

In un articolo pubblicato nel 1845 Earnshaw affronta il problema di Russell;ma anche in questo caso dalle ipotesi discendono situazioni paradossali come la generazione o distruzione istantanea di una velocità finita e similmente un improvviso cambiamento di pressione alla giunzione tra onda e fluido che la precede e la segue. Ciònondimeno la formula per la propagazione dell'onda positiva si accorda molto bene con i risultati sperimentali di Russell.

Tutti i tentativi descritti,quindi,partivano dal presupposto di ampliare il campo di applicazione della teoria classica delle onde lunghe fino a fargli coprire anche il fenomeno dell'onda solitaria.Se pur riuscivano a raggiungere qualche risultato per quanto riguarda la formula approssimata della velocità non erano in grado di comprendere il meccanismo profondo dell'esistenza del fenomeno. Le approssimazioni di calcolo,infatti,facevano perdere informazioni proprio su un aspetto del fenomeno - la non linearità del mezzo - che con la dispersione costituisce la caratteristica principale dell'onda solitaria.

Fu solo nel 1871 con Boussinesq e nel 1876 con Rayleigh che al fenomeno dell'onda solitaria fu data una prima esauriente risposta. I due autori arrivarono,in maniera indipendente,a conclusioni abbastanza simili. J.W. Miles(8) ha recentemente pubblicato un lavoro che contiene una dettagliata analisi del contributo di Boussinesq. In questa comunicazione prenderemo in considerazione il lavoro di Rayleigh(9) che arriva alla soluzione in maniera più diretta.

La prima parte del lavoro di Rayleigh fa veder come la teoria classica delle onde lunghe di Lagrange sia costituzionalmente incapace di dar conto di un'onda stazionaria che,nel corso del tempo,si mantiene indisturbata nella forma. Nelle ipotesi della teoria classica la variazione di pressione nel caso di superfice libera é

$$\delta p = -\frac{3}{2}\frac{g\rho h^2}{\ell^2}$$

A meno quindi di non trascurare h^2 é impossibile per un'onda lunga di altezza finita propagarsi senza cambiare di forma. A questo punto Rayleigh si chiede se, al fine di dar conto del fenomeno dell'onda solitaria, non potrebbe in certi casi esserci compensazione tra la variazione di pressione dovuta all'altezza finita e la variazione di pressione dovuta allo spostamento dalla legge della uniforme velocità orizzontale caractersitica delle onde molto lunghe. Da questa ipotesi e dall'ipotesi di incompressibilità e di assenza di rotazione Rayleigh giunge all'equazione

$$y'' = \frac{3(y-\ell)}{2\ell^2\ell'}\left\{2\ell' + \ell - 3y\right\} \tag{1}$$

che é in buon accordo con i risultati sperimentali di Russell. La validità della (1) é molto meglio compresa se la confrontiamo con l'equazione

$$\frac{1}{2}\eta^2 + \frac{2}{3}\alpha\eta + \frac{1}{3}\sigma\frac{\partial^2\eta}{\partial x^2} = 0 \tag{2}$$

[10][11]

che Korteweg e de Vries danno nel loro lavoro del 1895. La (2) é l'equazione che regola il cambiamento di onde lunghe che avanzano in un canale rettangolare nel caso che esse siano stazionarie.
Il procedimento seguito da K e dV per giungere alla loro equazione é in gran parte quello seguito da Rayleigh.

La differenza consiste nel fatto che essi trovano un'equazione differenziale che descrive tutti i tipi di onde stazionarie.
La soluzione generale dell'equazione é, infatti,

$$\frac{\partial\eta}{\partial t} = \frac{3}{2}\sqrt{\frac{g}{\ell}}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{2}\eta^2 + \frac{2}{3}\alpha\eta + \frac{1}{3}\sigma\frac{\partial^2\eta}{\partial x^2}\right)$$

chiamate dagli autori onde cnoidali in analogia alle onde sinusoidali. Per K=0 abbiamo l'onda solitaria, per K grande abbiamo onde sinusoidali, per K molto grandi abbiamo un treno di onde oscillanti di forma inaltera scoperte da Stokes. Queste ultime vengono quindi ritrovate come caso particolare delle onde cnoidali.

Bibliografia

1) Report Brit. Ass. Adv. Sci. 1837,V:XVI
2) Report Brit. Ass. Adv. Sci. 1838,VI:417
3) Vedi G.S. Emmerson,"J.S. Russell",(London,Murray,1977)
4) -5) Edin. Phil. Trans. 1836,XIV:1
6) Rep. Brit. Ass. Adv. Sci. 1845,XIII:311
7) Trans. Cam. Phil. Soc. 1837,VI:457
8) J. Fluid Mech.,1981,106:131
9)Phil. Mag. 1876,I:257
10) Phil. Mag. 1895,XXXIX:422
11) Notizie biografiche su Korteweg e de Vries si trovano su F. Van der Blij,Nieuw Archief voor Wiskunde,1978,XXVI:54