

a) In questi ultimi anni una rinnovata attenzione è stata dedicata allo studio dei fenomeni non lineari, alla luce anche delle nuove scoperte nella teoria dei solitoni. In questo lavoro ci proponiamo di descrivere il comportamento di particolari onde non lineari che sembra si comportino anche come particelle, cioè i solitoni, che sono diventati ormai argomento centrale nella ricerca scientifica contemporanea.

La parola "solitone" fu coniata nel 1965 da Zabusky e Kruskal per indicare strane onde che si comportano come particelle; subito riscuote un tale successo, mentre si fanno grandi scoperte, tanto da indurci ad affermare che a partire dal 1965 è nato un nuovo paradigma della scienza. L'accezione di paradigma è da intendersi, nel contesto del presente lavoro, in senso Kuhniano, anche se è lungi da noi il desiderio di addentrarci nelle spinose questioni sollevate da un'analisi minuziosa del termine "paradigma".

Nel nostro lavoro ci interessa, ed è sufficiente, individuare tre caratteristiche del paradigma: 1) capacità della teoria di attrarre un numero sempre crescente di ricercatori; 2) la teoria dei solitoni risulta a cavallo tra vari campi di indagine; 3) questa teoria apre nuovi e promettenti campi all'indagine scientifica.

b1) La teoria dei solitoni attrae un numero sempre crescente di ricercatori. Questo dato risulta evidente dal numero di lavori pubblicati e di convegni dedicati all'argomento.

b2) La teoria dei solitoni non appartiene ad una sola disciplina scientifica, ma risulta a cavallo tra vari campi. I lavori pubblicati su questo argomento, infatti, hanno un carattere sia teorico che sperimentale, spaziando dalla biofisica alla meccanica classica e quantistica, alla struttura della materia.

b3) La teoria dei solitoni apre nuovi e promettenti campi all'indagine scientifica. I solitoni, infatti, si presentano come il primo approccio ai fenomeni non lineari. E' importante notare che nessun processo linearizzante ha come limite i solitoni, che solo un'analisi non lineare è in grado di descrivere o prevedere. A questo proposito

si nota un importante cambiamento mentale degli scienziati che vedono i solitoni (tipico fenomeno non lineare) anche come primo risultato di un processo perturbativo: cioè la perturbazione non avviene, come prima partendo da stati lineari, ma da stati non lineari. Questa caratteristica ha fatto affermare ad alcuni che i solitoni rappresentano il più grosso contributo alla comprensione dei fenomeni non lineari dai pionieristici lavori di Riemann che per primo "osò sfidare la non linearità".

Cerchiamo ora di descrivere le caratteristiche di queste onde e le loro relazioni con le discipline scientifiche principalmente interessate.

c) Cosa siano i solitoni è presto detto: sono delle onde progressive che godono di alcune pregevoli proprietà. Onde progressive sono anche le soluzioni delle equazioni di Maxwell nel vuoto; ma a differenza di queste ultime, i solitoni si propagano in mezzi non lineari.

È ben noto che un profilo iniziale che si propaga in un mezzo non lineare subisce una deformazione e dopo un certo tempo evolve in un urto. Tale tempo dipenderà dalle caratteristiche del mezzo e dall'ampiezza del profilo iniziale. Ci si può chiedere ora quale sia il meccanismo che bilancia gli effetti non lineari in modo da far propagare certi profili come onde progressive. Questi effetti di bilancio sono dovuti alla dispersione. I solitoni infatti compaiono in mezzi che sono contemporaneamente dispersivi e non lineari.

Un altro aspetto caratteristico dei fenomeni non lineari è che la velocità di propagazione dipende dall'ampiezza del profilo iniziale e questa caratteristica è ancora mantenuta dai solitoni. Cioè ad ampiezze differenti corrispondono velocità di propagazione differenti.

Pertanto ci si può chiedere cosa succede quando due solitoni si incontrano: il fatto interessante è che quando ciò avviene, essi riemergono dall'interazione inalterati in forma subendo solo un lieve spostamento di fase. Tale fenomeno, manifestando la forte individualità di queste onde, indusse Zabusky e Kruskal nel 1965 a definirle "solitoni", riproponendo, in un contesto di fisica classica, il dualismo onda-particella: "(...) What the computer results showed was that these solitary waves would 'interpenetrate' each other (in two's or three's or more) and emerge from their nonlinear interaction entirely unaffected in shape, amplitude and velocity. One usually thinks of waves being broken up or scattered by nonlinear effects, so the persistence of the waves in this case (dramatically prominent in the computer generated moving picture output) was surprising and noteworthy. (...). Since each solitary wave ever present in a solution of KdV remained always present, at least 'innately' (in the sense that though it might temporarily disappear from

view, by merging in a complicatedly interaction with one or more others, it would identifiably reappear later), Zabusky and I felt that such waves partook sufficiently of the nature of material particles to justify a particle-like name, reminiscent of the physicists' particles (proton, neutron, electron) and quasi-particles (photon, graviton). We therefore called them solitons . " .

Pertanto, riassumendo, possiamo affermare che i solitoni si comportano come onde lineari nella propagazione e nell'interazione, a meno di un piccolo spostamento di fase, ma esibiscono un comportamento non lineare per ciò che riguarda la loro velocità. Inoltre un generico profilo iniziale evolve in un certo numero di solitoni ed in una parte dispersiva (che può essere prevista da un'analisi lineare) che decade nel tempo.

In un certo senso i solitoni ci appaiono come i mattoni degli stati non lineari.

c1) I mezzi non lineari e dispersivi sono molto comuni in natura.

Un esempio tipico è l'acqua; ed infatti le prime osservazioni sui solitoni furono fatte da Scott-Russell già nel 1834 osservando le onde d'acqua in un canale. Un secondo esempio, molto importante, come sarà visto in seguito, nella storia dei solitoni, sono le vibrazioni anarmoniche di masse puntiformi soggette a forze non lineari. Un'altra grande varietà di mezzi di questo tipo si trovano nella fisica dei plasmi e nelle linee di trasmissione.

E' importante notare che in questi ultimi anni i solitoni sono stati effettivamente osservati in tutti questi mezzi.

La teoria che ci permette di dedurre le equazioni solitoniche dai più generali sistemi non lineari e dispersivi (per es. dalla fluidodinamica, dalla teoria dei plasmi etc.) è stata sviluppata soprattutto dalla scuola giapponese (i Metodi Perturbativi e Riduttivi) ed è ben lungi dall'essere soddisfacente da un punto di vista matematico. Il grosso merito di questa scuola è comunque quello di aver messo in risalto le caratteristiche comuni dei mezzi non lineari e dispersivi che apparentemente descrivono situazioni fisiche assai differenti ed aver individuato nei solitoni proprio queste caratteristiche comuni.

c2) A questo punto ci sembra opportuno fare una lista, che è ben lungi dall'essere completa, per i continui sviluppi della teoria, delle applicazioni dei solitoni alla fisica non lineare. Tale lista include:

- 1) onde di gravità in acque poco profonde e superficiali;
- 2) onde nei plasmi e l'interazione della radiazione con i plasmi;
- 3) la teoria delle giunzioni di Josephson e le linee di trasmissione;

- 4) la teoria dei liquidi di Fermi;
- 5) ferromagnetismo:moto della parete di Bloch;
- 6) fisica dei cristalli non lineari: teoria delle dislocazioni,cristalli anarmonici; fenomeni di ricorrenza nel trasporto termico e comportamento non ergodico(problema di Fermi,Pasta e Ulam) e transizioni di fase;
- 7) ottica non lineare risonante e non risonante e fisica dei laser;
- 8) teoria delle particelle elementari;
- 9) astrofisica;
- 10) biofisica.

Come si vede i campi di applicazione sono molteplici e variegati.

Crediamo con questa veloce carrellata di aver esposto perchè riteniamo la teoria dei solitoni un paradigma della scienza, intesa anche come uno strumento per risolvere quesiti vecchi e nuovi; come campo in continua espansione e anche come modo nuovo di vedere vecchie cose , tipico di tutte le rivoluzioni scientifiche. Nel resto del lavoro vedremo come la teoria si è andata sviluppando storicamente e quali cambiamenti sono stati introdotti nella visione scientifica.

d) La prima osservazione sperimentale sui solitoni fu l'onda solitaria che Scott-Russell individuò nel 1834. Il problema fu affrontato da vari autori fino *alla* spiegazione nel 1895 ad opera di Korteweg e deVries. Rimandiamo comunque all'altro nostro lavoro per un'analisi storica dettagliata di questo periodo.

Dopo la scoperta di Korteweg-deVries, questa problematica fu trascurata per la prima metà del Novecento. Nel 1965 Zabusky e Kruskal ritrovarono e studiarono l'equazione di Korteweg-deVries lavorando sul fenomeno della ricorrenza di Fermi,Pasta e Ulam, fenomeno che i tre fisici avevano individuato nel 1955.

Dopo la scoperta di Zabusky e Kruskal, la ricerca scientifica sulla teoria dei solitoni assume uno sviluppo vertiginoso. Qua ricordiamo semplicemente il contributo di Gardner, Greene, Kruskal e Miura del 1967 e di Lax del 1968 che misero a punto la tecnica della Trasformata Spettrale consentendo l'integrazione analitica di una larga classe di equazioni differenziali non lineari.

e) In quest'ultima parte del lavoro faremo alcune considerazioni di carattere storico ed epistemologico riguardo la teoria dei solitoni.

Il primo problema che vogliamo affrontare è il perchè del vuoto riguardo la teoria che si è verificato nella prima metà del Novecento. Come abbiamo già detto, l'onda solitaria scoperta da Russell è un so-

litone e se ne dà una spiegazione nel lavoro di Korteweg e deVries del 1895. La scoperta dell'esistenza di onde progressive non è ancora comunque la scoperta dei solitoni, anche se questi ultimi possono essere ottenuti in maniera abbastanza semplice dall'equazione di Korteweg-deVries. E' ovvio che il successivo comportamento nell'interazione non è altrettanto banale da ottenere, ma è tutt'altro che impossibile per le capacità matematiche della fine dell'Ottocento.

Inoltre la scoperta di queste onde in un contesto di fisica classica, ben dieci anni prima della spiegazione dell'effetto fotoelettrico di Einstein e pochi anni prima della scoperta di Plank, poteva comportare un diverso atteggiamento mentale dei fisici dell'epoca e l'ipotesi di De Broglie sarebbe potuta risultare più familiare. Tornando al problema della scarsa attenzione rivolta alla Korteweg-deVries nel periodo che va dal 1895 al 1955 bisogna sottolineare il fatto che da un punto di vista sia matematico che ingegneristico la situazione relativa a questa equazione non era ritenuta problematica. Solo un modo nuovo di vedere vecchi problemi ed una nuova strumentazione mutuata dalla Meccanica Quantistica (lo Scattering Inverso) avrebbero permesso gli ultimi sviluppi su basi completamente nuove.

E' interessante notare che in questo contesto il dualismo onda-particella interviene già in fisica classica, purchè si tenga conto dei più semplici effetti non lineari. Anche l'aspetto delle relazioni tra la teoria dei solitoni e le tecniche matematiche della meccanica quantistica ci sembra comunque abbastanza suggestivo.

Pensiamo così di aver risposto alla domanda posta all'inizio del paragrafo. Forse sarebbe stato più giusto chiedersi perchè la non linearità è stata così trascurata in questa prima metà del Novecento, per uscire così prepotentemente alla ribalta in questi ultimi anni. Perchè si sia preferito spingere sempre più a fondo l'analisi lineare, senza affrontare la non linearità seguendo quindi il programma di ricerca di Riemann.

Vogliamo ancora mettere in evidenza la continuità tra i programmi di ricerca della fisica classica e la teoria dei solitoni. La fisica dell'Ottocento infatti conteneva già due delle più importanti equazioni della teoria dei solitoni: l'equazione di Korteweg-deVries e l'equazione di Sine-Gordon, trovata in un contesto di Geometria Differenziale, oltre ad alcuni strumenti matematici come le trasformazioni di Backlund con i quali impostare l'indagine matematica. Inoltre esistevano già alcune evidenze sperimentali.

Pertanto noi ravvisiamo una continuità tra la fisica dell'ottocento e la recente teoria. In questo contesto ci sembra abbastanza ingenuo chi parla della fisica classica come teoria limite delle due grandi teorie novecentesche.

* A questo punto ci sembra opportuno citare alcuni testi pubblicati sulla teoria dei solitoni

- 1 "Solitons in Actions" ed. K. Lonngren, A. Scott, Academic Press, 1978, New York.
- 2 "Solitons" G. Eilenberger, Springer-Verlag Berlin, 1981.
- 3 "Spectral Transform and Solitons: tools to solve and investigate nonlinear evolution equations" Calogero - DE Gasperis, in corso di stampa.
- 4 "Solitons: Topics in current physics" ed. D.K. Bullough, P.J. Caudrey, Springer, Berlin 1980.
- 5 "Elements on Solitons theory", G.L. Lamb jr., Wiley, New York 1981.
- 6 "The inverse Scattering Transformation and the theory of Solitons" Eckhaus, Van Arte, North-Holland, Amsterdam, 1981
- 7 "Asymptotic method in nonlinear wave theory", A. Jeffrey, T. Kawahara; Pitman ed., London, 1982.
- 8 "Bäcklund Transformation" ed. R.M. Miura, Lect. Not. in Math. 515, Springer 1976.
- 9 "Nonlinear Evolution Equation and dynamical system" ed. M. Boiti, F. Pempinelli, G. Soliani 1980, Lect. Not. in Phys. 120, Springer-Verlag;

alcuni lavori di review sull'argomento:

- 10 A.C. Scott, F.Y.F. Chu, D.W. McLaughlin: "The soliton: a new concept in applied science" Proc. IEEE 51 (1973) 1443;
- 11 C.S. Gardner, J.M. Greene, M.D. Kruskal, R.M. Miura: "Korteweg-deVries equation and generalizations - VI, methods for exact solution" Comm. Pure Appl. Math. 27 (1974) 97;
- 12 R.M. Miura: "The Korteweg-deVries equation: a survey of results" SIAM Rev. 18 (1976) 412;
- 13 C. Cercignani: "Solitons. Theory and Applications" Rivista Nuovo Cimento 7 (1977) 429;
- L.D. Faddeev, V.E. Korepin: "Quantum theory of solitons" Phys. Rep. 42 (1978)
- 14 M.J. Ablowitz: "Lectures on the Inverse Scattering Transform" Stud. Appl. Math. 58 (1978) 17;

ed i fondamentali lavori sulla teoria:

- 15 J. Scott Russell: Rep. British Ass. for Adv. of Sc. (1834), (1835), Murray, London;
- 16 D.J. Korteweg-deVries: Phil. Mag. 39 (1895) 422;
- 17 N.J. Zabusky, M.D. Kruskal: Phys. Rev. Lett. 15 (1965) 240.