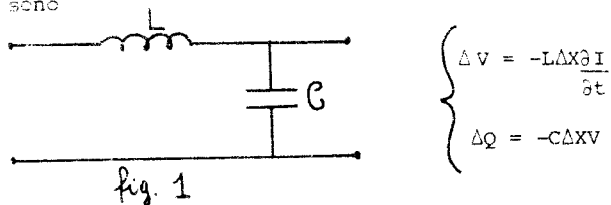


a) La comprensione delle caratteristiche dei fenomeni naturali regolate da equazioni differenziali alle derivate parziali, contenenti termini non lineari, dispersivi e dissipativi, ha sempre costituito un problema didattico di non facile soluzione, a causa della difficile strumentazione matematica richiesta. Eppure la maggior parte dei fenomeni naturali si accorda a leggi di questo tipo. L'operazione di semplificare l'approccio a questi fenomeni linearizzando le equazioni differenziali alle derivate parziali che li reggono e trascurando gli effetti dispersivi e dissipativi, se a volte dà qualche utile risultato, spesso fa perdere un gran numero di informazioni ed una intera fenomenologia. Un esempio tipico è costituito dallo studio del fenomeno del solitone o come lo chiamò il suo scopritore J.S. Russel, "the wave par excellence, the solitary, progressive, great wave of equilibrium of the fluid" [1]. E' un'onda che, formatasi in particolari condizioni (ad es. quando in un canale un battello in moto si arresta bruscamente e dalla prua parte un'onda), procede per lungo tempo indisturbata in forma e senza perdere la sua individualità. L'equazione che descrive in maniera completa la sua evoluzione è la Korteweg-De Vries (KdV) del 1895 [2]. Come sappiamo il fenomeno è dovuto all'equilibrio di due effetti contrastanti: da una parte la non linearità che tenderebbe a far diventare il profilo dell'onda sempre più ripido fino a trasformarla in onda d'urto (è quello che normalmente avviene con le onde del mare) e dall'altra la dispersione che tenderebbe ad appiattire l'onda (per maggiori dettagli vedi [3]-[4]-[5]). Ma per giungere a questo risultato il travaglio fu grande: i primi tentativi, infatti, durati circa quaranta anni, cercavano di dedurre il comportamento dell'onda solitaria dall'equazione classica delle onde, la cui soluzione veniva data nella approssimazione lineare, perdendo quindi informazione proprio su quegli aspetti che determinano l'andamento del fenomeno. Non vogliamo insistere su questo aspetto che richiederebbe un approfondimento storico al quale si sono dedicati due degli autori del presente lavoro. Qui ci interessa presentare dei modelli elettrici e meccanici atti alla rappresentazione ed alla visualizzazione dei fenomeni non lineari, dispersivi e dissipativi retti da un certo insieme di equazioni, con particolare riferimento alla teoria dei solitoni. Scopo dell'introduzione di questi modelli è triplice: 1) familiarizzare l'allievo ai fenomeni descritti da equazioni non lineari in modo da renderlo più disponibile per lo studio

analitico di questi fenomeni, 2) i modelli proposti possono essere considerati calcolatori analogici per la ricerca di soluzioni di equazioni la cui integrazione analitica risulta troppo complicata o la cui integrazione numerica richiede un tempo di calcolo troppo lungo; 3) c'è la possibilità di visualizzare i solitoni (ad esempio mediante oscilloscopi per i modelli elettrici). Quest'ultimo aspetto è molto interessante dal punto di vista didattico: come sappiamo due solitoni emergono dalla loro interazione non lineare completamente non influenzati in forma, ampiezza e velocità. Fu per questa ragione che Zabusky e Kruskal cercarono per l'onda di questo tipo una terminologia che evocasse la loro caratteristica particellare accanto a quella ondulatoria: "Zabusky and I felt such waves partook sufficiently of the nature of materia particles to justify a particle-like name, reminiscent of the physicist's particles (proton, neutron, electron) and quasi particles (photon, grabiton). We therefore called them soliton" [6]. È possibile quindi individuare in un contesto classico, come quello dell'idrodinamica, il dualismo onda-corpuscolo che il più delle volte viene presentato in un contesto quantistico e relativamente solo all'estremamente piccolo. Ritrovare un comportamento duale anche nel mondo dell'estremamente grande può essere molto significativo dal punto di vista pedagogico in quanto elimina quel tanto di magico che spesso si avverte quando si parla di questo dualismo nel mondo dell'estremamente piccolo. In questa maniera è possibile affrontare con estrema naturalezza questa problematica senza far riferimento ad un linguaggio allusivo. I modelli elettrici e meccanici che qui presentiamo possono essere facilmente costruiti in laboratorio [7]. È importante notare che i fenomeni descritti da questi modelli, quando esiste un bilancio tra effetti non lineari e dispersivi o dissipativi, sono descritti da equazioni che, nell'approssimazione al continuo, si riducono ad equazioni come la Burgers o la KdV di particolare rilevanza per la ricerca contemporanea. L'importanza di queste equazioni, alla base di qualunque approccio al non lineare, consente di avvicinare l'allievo a tutta una serie di ipotesi scientifiche storicamente e didatticamente assai rilevanti. In questo lavoro, per la brevità di spazio a disposizione, ci limiteremo a riportare i singoli modelli ed il sistema di equazioni che ne reggono il comportamento, nonché le equazioni dedotte quando vengono imposte le approssimazioni opportune ed i bilanci tra gli effetti. Per i dettagli tecnici di costruzione rimandiamo a varie note di volta in volta citate, mentre per la riduzione del sistema non lineare ad una singola equazione rimandiamo alla nota interna [8]. La rilevanza storica limitatamente alla KdV, è sviluppata in un altro lavoro degli autori [9].

b) Una rete di trasmissione può essere rappresentata da un semplice modello composto da una serie di capacitori in parallelo ed induttori in serie (fig. 1). Le equazioni che reggono i voltaggi e le intensità di corrente sono



$$\begin{cases} \Delta V = -L \Delta X \frac{\partial I}{\partial t} \\ \Delta Q = -C \Delta X V \end{cases}$$

Nell'approssimazione continua, le onde sono regolate dall'equazione

$$\frac{\partial^2 I}{\partial t^2} - \frac{1}{LC} \frac{\partial^2 I}{\partial X^2} = 0 \quad (1)$$

Sperimentalmente si osservano dei profili che viaggiano verso destra e verso sinistra con velocità $1/\sqrt{LC}$ inalterati in forma. Ovviamente questi sono anche le soluzioni dell'equazione (1).

b1) Se inseriamo un capacitore non lineare retto da un'equazione del tipo:

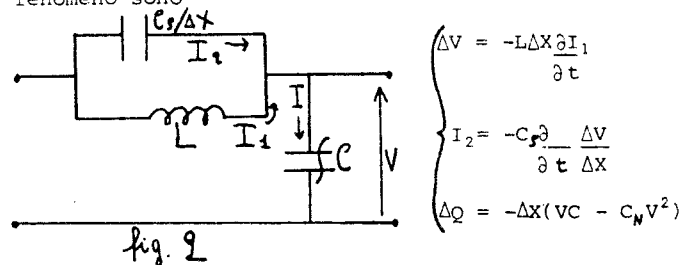
$$\Delta Q = -\Delta X (CV - C_N V^2)$$

le onde di piccola ampiezza saranno regolate, in un sistema di riferimento che si muove con velocità $1/\sqrt{LC}$, da un'equazione del tipo

$$\frac{\partial I}{\partial t} + \frac{C_N}{C^2} I \frac{\partial I}{\partial X} = 0 \quad (2)$$

Questa volta tutti i profili iniziali si modificheranno nel corso della propagazione degenerando in un'onda d'urto [7].

b2) Se nella rete non lineare esistono effetti dispersivi (fig.2) che possiamo rappresentare con un capacitore non lineare, le equazioni che reggono il fenomeno sono



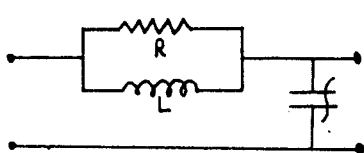
$$\begin{cases} \Delta V = -L \Delta X \frac{\partial I_1}{\partial t} \\ I_2 = -C_N \frac{\partial}{\partial t} \frac{\Delta V}{\Delta X} \\ \Delta Q = -\Delta X (VC - C_N V^2) \end{cases}$$

L'equazione che regola onde di piccola ampiezza e bassa frequenza, bilanciando gli effetti non lineari e dispersivi, in un sistema di riferimento mobile con velocità $1/\sqrt{LC}$ è la seguente

$$\frac{\partial I}{\partial t} + \frac{C_N I \partial I}{C^2 \partial X} + \frac{1}{2} \frac{C_N}{C} \frac{1}{\sqrt{LC}} \frac{\partial^3 I}{\partial X^3} = 0 \quad (3)$$

che è proprio una KdV, dove X e t sono coordinate opportunamente normalizzate. Ciò che si osserva è la decomposizione di un generico profilo in una serie di impulsi particolarmente stabili (i solitoni) più un residuo di tipo dispersivo. Questi impulsi, la cui velocità dipende dall'ampiezza sono onde progressive di forma particolare che interagiscono tra loro mantenendo inalterate le loro caratteristiche a meno di uno spostamento di fase [10]-[11]-[12]-[13]-[14].

b3) Altri fenomeni interessanti si osservano quando nella rete non lineare si considerano effetti dissipativi (fig. 3). Le equazioni sono:



$$\left\{ \begin{aligned} \Delta V &= R \Delta X (I - I_2) \\ \Delta V &= -L \Delta X \frac{\partial I_1}{\partial t} \\ \Delta Q &= -\Delta X (C V - C_N V^2) \end{aligned} \right.$$

In questo caso, nel solito sistema di riferimento mobile, le onde di piccola ampiezza e bassa frequenza, saranno regolate dall'equazione

$$\frac{\partial I}{\partial t} + \frac{C_N I \partial I}{C \partial X} + \frac{1}{2RC} \frac{\partial^2 I}{\partial X^2} = 0 \quad (4)$$

che è proprio l'equazione di Burgers. Essa fu introdotta da Burgers nel 1948, dopo il fallimento dei tentativi di arrivare ad una teoria statistica della turbolenza, tentativi che però misero in evidenza l'importanza della contemporanea presenza di effetti dissipativi e non lineari. Essa è la più semplice equazione che tiene conto di questi effetti; successivamente fu integrata nel 1950 e 1951 da Cole e Hopf per mezzo di una trasformazione non lineare che la riduce all'equazione del calore di Fourier. Maggiori dettagli si possono comunque trovare in [15].

b4) Per avere un'idea dell'estrema potenza di questo approccio, consideriamo i due seguenti modelli atti a rappresentare due equazioni oggetto di ricerca contemporanea le cui proprietà non sono completamente note:

i) Il modello con la presenza contemporanea di effetti dissipativi e dispersivi (fig. 4)

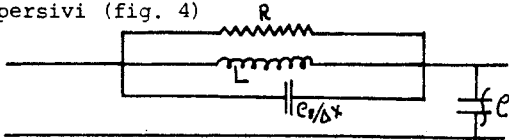


fig. 4

che rappresenta l'equazione di KdV-Burgers [16]

$$\frac{\partial I}{\partial t} + \frac{C}{c} \frac{\partial I}{\partial X} + \frac{1}{2} \frac{C}{c} \frac{1}{\sqrt{LC}} \frac{\partial^3 I}{\partial X^3} + \frac{1}{2RC} \frac{\partial^2 I}{\partial X^2} = 0$$

ii) Il modello dispersivo tridimensionale (fig. 5) [17]

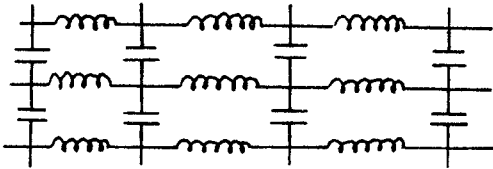
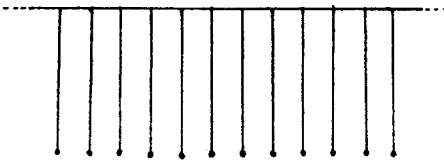


fig. 5

che rappresenta equazioni di KdV a coefficienti variabili. Altri comportamenti si ottengono considerando le non omogeneità [18]-[19]-[20]-[21] ed altri modelli.

b5) Consideriamo infine un modello meccanico per l'equazione di sine-Gordon. Questo modello é composto (fig. 6) da una serie di pendolini accoppiati da una forza elastica. Per i dettagli della costruzione vedi [25].



Indicando con ϕ_i l'angolo che l'iesimo pendolino forma con la verticale, le equazioni di bilancio sono:

$$\frac{Id^2\phi_i}{dt^2} = K(\phi_{i-1} - 2\phi_i + \phi_{i+1}) - mgl\sin\phi_i$$

con l'ovvio significato dei simboli. Normalizzando opportunamente e passando al continuo esse divengono proprio l'equazione di sine-Gordon.

Per questa equazione esistono tre modi fondamentali di oscillazione:

- i) oscillazione di plasma;
- ii) breathers ;
- iii) kinks (flussoni)

Tutti e tre questi modi possono essere osservati con il modello meccanico. In fig. 7 può essere osservato il moto di un flussone e la sua riflessione. Questo modello può essere ulteriormente complicato in modo da tenere conto degli effetti dissipativi, delle forze esterne etc.

Infine notiamo che anche per questa equazione esiste un modello elettrico, descrivente giunture di Josephson estese, che la rappresenta.

Per concludere possiamo notare che per molte equazioni solitoniche esistono dei modelli meccanici ed elettrici molto semplici e di facile costruzione che possono presentare un naturale approccio didattico ai fenomeni non lineari.

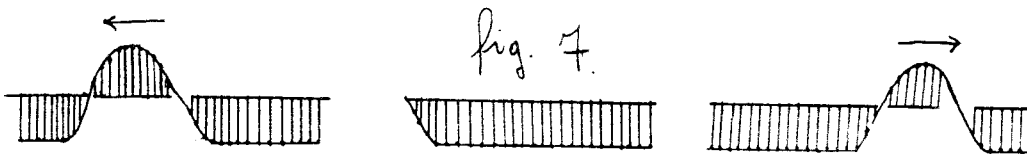


fig. 7.

BIBLIOGRAFIA

- 1) J.S. Russel: Trans. Roy. Soc. Edinbourg XIV (1837) 16
- 2) D.J. Korteweg-G. de Vries: Philos. Mag. 39 (1895) 422
- 3) A. Jeffrey - T. Kakutani: SIAM Rev. 14 (1972) 582
- 4) A. Bettini - T. A. Minnelli - D. Pascoli: PREPRINT 1982
- 5) P. Pantano-P. Tucci: "I Solitoni come Paradigma della Scienza" In questi Atti
- 6) N.J. Zabusky - M.D. Kruskal: Phys. Rev. Lett. 15 (1965) 240
- 7) R.H. Freeman - A.E. Karbowiak: J. Phys. D, Appl. Phys. 10 (1977) 633
- 8) M. Bartuccelli-P. Pantano-P. Tucci: Dip. di Mat., Univ. della Cal., Nota Interna
- 9) P. Pantano-P. Tucci: "I Solitoni: Come nasce un paradigma della Scienza" I.Q.A.
- 10) R. Hirota- K. Suzuki: Proc. IEEE 61 (1973) 1483
- 11) T. Yoshinaga - T. Kakutani: J. Phys. Soc. Jpn. 51 (1982) 1303
- 12) K. Fukushima et al. : J. Phys. Soc. Jpn. 48 (1980) 1029
- 13) K.E. Lonngren: in "soliton in Action" ACAD. Press, New York, (1978) pp. 127-152
- 14) K.E. Lonngren: Lect. Not. in Math. 515 (1976) pp. 12-25
- 15) J.M. Burgers: "The nonlinear Diffusion Equation", D. Reidel Publ. Comp. (1974)
- 16) T. Brugarino - P. Pantano: In preparazione
- 17) Y.A. Stepanyants: Waves Motion 3 (1981) 335
- 18) T. Yaqi: J. Phys. Soc. Jpn. 50 (1981) 2737
- 19) S. Watanabe - K. Muroya: J. Phys. Soc. Jpn. 50 (1981) 3166
- 20) K. Muroya - S. Watanabe: J. Phys. Soc. Jpn. 50 (1981) 3159
- 21) T. Yoshinaga - T. Kakutani: J. Phys. Soc. Jpn. 51 (1982) 1303
- 22) T. Yoshinaga et al. : J. Phys. Soc. Jpn. 56 (1981) 2122
- 23) T. Yoshinaga - T. Kakutani: J. Phys. Soc. Jpn. 49 (1980) 2072
- 24) F. Kako: J. Phys. Soc. Jpn. 47 (1979) 1686
- 25) M. Cirillo - R.D. Parmentier - B. Savo: Physica 3D (1981) 565