I fondamenti della fisica[1]

(Seconda comunicazione.)

David Hilbert

Presentata nella seduta del 23 Dicembre 1916.

[1]Die Grundlagen der Physik (Zweite Mitteilung), Nachrichten von der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Math.-phys. Klasse 1917, 53-76.

Nella mia prima comunicazione[1] ho stabilito un sistema di equazioni fondamentali della fisica. Prima di occuparmi della teoria dell'integrazione di queste equazioni sembra necessario discutere alcune questioni più generali di natura sia logica che fisica.

Sostituiamo in primo luogo al posto dei parametri d'universo w_s ($s = 1, 2, 3, 4$) le più generali coordinate spazio-temporali *reali* x_s ($s = 1, 2, 3, 4$), ponendo

$$w_1 = x_1, \qquad w_2 = x_2, \qquad w_3 = x_3, \qquad w_4 = ix_4$$

e scrivendo al posto di

$$ig_{14}, \qquad ig_{24}, \qquad ig_{34}, \qquad -g_{44}$$

semplicemente

$$g_{14}, \qquad g_{24}, \qquad g_{34}, \qquad g_{44}.$$

I nuovi $g_{\mu\nu}$ ($\mu, \nu = 1, 2, 3, 4$), i potenziali gravitazionali di Einstein, devono essere tutti funzioni reali delle variabili reali x_s ($s = 1, 2, 3, 4$) di tipo tale che nella rappresentazione della forma quadratica

$$G(X_1, X_2, X_3, X_4) = \sum_{\mu,\nu} g_{\mu\nu} X_\mu X_\nu \tag{28}$$

come somma di quattro quadrati di forme lineari degli X_s compaiano sempre tre quadrati con il segno positivo e un quadrato con il segno negativo: la forma quadratica (28) fornisce quindi per il nostro universo tetradimensionale degli x_s *la metrica di una pseudogeometria*. Il determinante g dei $g_{\mu\nu}$ risulta negativo.

Se in questa geometria è data una curva

$$x_s = x_s(p), \qquad (s = 1, 2, 3, 4)$$

dove gli $x_s(p)$ indicano funzioni reali qualsiansi del parametro p, essa può essere divisa in sezioni, in ognuna delle quali l'espressione

$$G\left(\frac{dx_1}{dp}, \frac{dx_2}{dp}, \frac{dx_3}{dp}, \frac{dx_4}{dp}\right)$$

non cambi il suo segno: un tratto di curva, per il quale valga la relazione

$$G\left(\frac{dx_s}{dp}\right) > 0$$

[1] Queste "Nachrichten", 20 Novembre 1915.

viene denominato **segmento** e l'integrale preso lungo questo tratto di curva

$$\lambda = \int \sqrt{G\left(\frac{dx_s}{dp}\right)}dp$$

si chiama **lunghezza del segmento**; un tratto di curva per il quale valga la relazione

$$G\left(\frac{dx_s}{dp}\right) < 0$$

si chiama **linea oraria** e la lunghezza di questo tratto di curva, cioè l'integrale

$$\tau = \int \sqrt{-G\left(\frac{dx_s}{dp}\right)}dp$$

viene detta **tempo proprio della linea oraria**; infine un tratto di curva lungo il quale sia soddisfatta la relazione

$$G\left(\frac{dx_s}{dp}\right) = 0,$$

è detto **linea nulla**.

Per rendere intuitivi questi concetti della nostra pseudogeometria, immaginiamo due strumenti di misura ideali: il **filo metrico**, mediante il quale siamo in grado di misurare la lunghezza λ di qualunque segmento e, in secondo luogo, l'**orologio a luce**, mediante il quale possiamo determinare il tempo proprio di qualunque linea oraria. Il filo metrico segna zero e l'orologio a luce sta fermo lungo ogni linea nulla, mentre il primo non funziona affatto lungo una linea oraria, e il secondo non funziona lungo un segmento.

Innanzitutto mostriamo che ognuno dei due strumenti basta a misurare per mezzo di esso il valore dei $g_{\mu\nu}$ come funzioni di x_s, solo che sia stato introdotto un determinato sistema di coordinate spazio-temporali x_s. Se scegliamo infatti 10 segmenti qualsiansi, che da diverse direzioni concorrano tutti nello stesso punto d'universo x_s, di modo che a questo estremo si attribuisca in ogni caso il valore p del parametro, per ognuno dei 10 segmenti vale nell'estremo l'equazione

$$\left(\frac{d\lambda^{(h)}}{dp}\right)^2 = G\left(\frac{dx_s^{(h)}}{dp}\right), \quad (h = 1, 2, ..., 10);$$

in essa i primi membri sono noti, perché abbiamo misurato le lunghezze $\lambda^{(h)}$ mediante il filo metrico. Se ora poniamo come abbreviazione

$$D(u) = \begin{vmatrix} \left(\frac{dx_1^{(1)}}{dp}\right)^2, & \frac{dx_1^{(1)}}{dp}\frac{dx_2^{(1)}}{dp}, & \ldots, & \left(\frac{dx_4^{(1)}}{dp}\right)^2, & \left(\frac{d\lambda^{(1)}}{dp}\right)^2 \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ \left(\frac{dx_1^{(10)}}{dp}\right)^2, & \frac{dx_1^{(10)}}{dp}\frac{dx_2^{(10)}}{dp}, & \ldots, & \left(\frac{dx_4^{(10)}}{dp}\right)^2, & \left(\frac{d\lambda^{(10)}}{dp}\right)^2 \\ X_1^2 \quad, & X_1X_2 \quad, & \ldots, & X_4^2 \quad, & u \end{vmatrix}$$

si avrà evidentemente

$$G(X_s) = \frac{-D(0)}{\frac{\partial D}{\partial u}}, \tag{29}$$

dalla quale risulta parimenti, per le direzioni delle 10 linee scelte, che nel punto $x_s(p)$ la condizione

$$\frac{\partial D}{\partial u} \neq 0$$

è necessaria. Se si calcolasse G con la (29), l'applicazione del procedimento a un qualunque undicesimo segmento che termini in $x_s(p)$ fornirebbe l'equazione

$$\left(\frac{d\lambda^{(11)}}{dp}\right)^2 = G\left(\frac{dx_s^{(11)}}{dp}\right)$$

e questa equazione sarebbe quindi un controllo della correttezza degli strumenti, e anche una conferma sperimentale che le ipotesi della teoria risultano vere per il mondo reale.

Per l'orologio a luce vale la trattazione corrispondente.

La struttura assiomatica della nostra pseudogeometria si lascia realizzare senza difficoltà: va posto in primo luogo un assioma sulla base del quale lunghezza e rispettivamente tempo proprio sono degli integrali, il cui integrando è funzione solo di x_s e delle sue derivate prime rispetto al parametro; come tale assioma si potrebbe utilizzare la proprietà dello srotolamento del filo metrico ovvero la nota legge dell'inviluppo per le linee geodetiche. In secondo luogo è necessario un assioma, secondo il quale nell'infinitamente piccolo devono valere le leggi della geometria pseudoeuclidea, ossia il vecchio principio di relatività; a questo proposito sarebbe particolarmente adatto l'assioma enunciato da W. Blaschke[2], che afferma che la condizione di ortogonalità per due direzioni arbitrarie, siano esse lungo segmenti o lungo linee orarie, dev'essere sempre reciproca.

[2]Problemi variazionali spaziali con condizione simmetrica di trasversalità, Leipziger Berichte, Math.-phys. Kl. **68**, 50 (1916).

Si riassumeranno ora i fatti più importanti che la teoria delle equazioni differenziali di Monge-Hamilton ci insegna per la nostra pseudogeometria.

Ad ogni punto d'universo x_s appartiene un cono del second'ordine, che ha il suo vertice in x_s e che nelle coordinate X_s del punto corrente è determinato dall'equazione

$$G(X_1 - x_1,\ X_2 - x_2,\ X_3 - x_3,\ X_4 - x_4) = 0;$$

esso si chiama il **cono nullo** appartenente al punto x_s. La totalità dei coni nulli determina un campo tetradimensionale di coni, al quale competono sia l'equazione differenziale di Monge

$$G\left(\frac{dx_1}{dp}, \frac{dx_2}{dp}, \frac{dx_3}{dp}, \frac{dx_4}{dp}\right) = 0$$

che l'equazione differenziale alle derivate parziali di Hamilton

$$H\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \frac{\partial f}{\partial x_3}, \frac{\partial f}{\partial x_4}\right) = 0, \tag{30}$$

dove H indica la forma quadratica reciproca di G

$$H(U_1, U_2, U_3, U_4) = \sum_{\mu\nu} g^{\mu\nu} U_\mu U_\nu.$$

Le caratteristiche dell'equazione di Monge e parimenti quelle dell'equazione differenziale alle derivate parziali di Hamilton (30) sono le linee geodetiche nulle. Tutte le geodetiche nulle uscenti da un punto fissato d'universo a_s ($s = 1, 2, 3, 4$) individuano una varietà puntuale tridimensionale, che chiameremo **confine temporale** appartenente al punto d'universo a_s. Questo confine temporale possiede in a_s un punto nodale, il cono tangente del quale è proprio il cono nullo appartenente ad a_s. Se portiamo l'equazione del confine temporale nella forma

$$x_4 = \varphi(x_1, x_2, x_3),$$

allora

$$f = x_4 - \varphi(x_1, x_2, x_3)$$

è un integrale dell'equazione differenziale di Hamilton (30). Tutte le linee temporali uscenti dal punto a_s corrono interamente all'interno di quella parte tetradimensionale d'universo che ha come bordo il confine temporale appartenente ad a_s.

Dopo queste premesse, occupiamoci del problema della *causalità* nella nuova fisica.

Finora abbiamo considerato equivalenti tutti i sistemi di coordinate x_s, che s'ottengono da uno qualsiasi con una trasformazione arbitraria. Questa arbitrarietà deve venire ristretta, se vogliamo rendere valida l'idea che due punti d'universo posti sulla stessa linea oraria possano stare l'uno rispetto all'altro nel rapporto di causa ed effetto, e che pertanto non dovrà esser possibile trasformare alla simultaneità punti d'universo siffatti. Per designare x_4 come coordinata temporale **propria**, stabiliamo la seguente definizione:

Un sistema di coordinate spazio-temporali **proprio** è tale che, oltre alla condizione $g < 0$, siano sempre soddisfatte anche le seguenti quattro disequazioni

$$g_{11} > 0, \quad \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{vmatrix} > 0, \quad \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{vmatrix} > 0, \quad g_{44} < 0. \tag{31}$$

Una trasformazione, che tramuti un tale sistema di coordinate spazio-temporali in un altro sistema proprio di coordinate spazio-temporali viene detta una trasformazione **propria** delle coordinate spazio-temporali.

Le quattro disequazioni esprimono che il cono nullo appartenente ad un qualunque punto d'universo a_s lascia tutto al di fuori lo spazio lineare

$$x_4 = a_4$$

e contiene invece al suo interno la retta

$$x_1 = a_1, \qquad x_2 = a_2, \qquad x_3 = a_3;$$

questa retta è quindi sempre una linea oraria.

Sia data ora una certa linea oraria $x_s = x_s(p)$; poiché

$$G\left(\frac{dx_s}{dp}\right) < 0,$$

si ha che in un sistema proprio di coordinate spazio-temporali dev'essere sempre

$$\frac{dx_4}{dp} \neq 0$$

e, di conseguenza, lungo una linea oraria la coordinata temporale propria x_4 deve sempre o aumentare o diminuire. Poiché una linea oraria rimane una linea oraria per ogni trasformazione di coordinate spazio-temporale, due punti d'universo di una linea oraria non possono mai assumere gli stessi valori della coordinata spazio-temporale x_4 in seguito a una trasformazione propria delle coordinate spazio-temporali, vale a dire non possono venir trasformati alla simultaneità.

D'altra parte quando i punti di una curva possono venir trasformati alla simultaneità in modo proprio, dopo la trasformazione per questa curva vale

$$x_4 = \text{cost.} \quad \text{i.e.} \qquad \frac{dx_4}{dp} = 0,$$

quindi

$$G\left(\frac{dx_s}{dp}\right) = \sum_{\mu\nu} g_{\mu\nu} \frac{dx_\mu}{dp} \frac{dx_\nu}{dp}, \qquad (\mu, \nu = 1, 2, 3)$$

e in questa equazione, per le nostre prime tre disequazioni (31), il primo membro è positivo; la curva si caratterizza perciò come un *segmento*.

Si vede quindi che i concetti di causa ed effetto, che stanno alla base del principio di causalità, anche nella nuova fisica non portano ad alcuna contraddizione interna, se solo aggiungiamo sempre alle nostre equazioni fondamentali le diseguaglianze (31), vale a dire se ci si limita all'uso di coordinate spazio-temporali **proprie**.

A questo punto si indicherà un sistema particolare di coordinate spazio-temporali che sarà utile in seguito, che chiamerò **sistema di coordinate gaussiano**, poiché è la generalizzazione di quel sistema di coordinate polari geodetiche, che Gauss ha introdotto nella teoria delle superfici. Sia dato nel nostro universo tetradimensionale un certo spazio a tre dimensioni, di tipo tale che ogni curva che si sviluppa in questo spazio sia un segmento: uno **spazio di segmenti**, lo potrei chiamare; siano x_1, x_2, x_3 le coordinate di un qualunque punto di questo spazio. Costruiamo ora in ogni punto x_1, x_2, x_3 la linea geodetica ortogonale ad esso, che sarà una linea oraria, e prendiamo la x_4 stessa uguale al tempo proprio; ai punti dell'universo tetradimensionale così ottenuti assegnamo le coordinate x_1, x_2, x_3, x_4. Per queste coordinate si ha, come è facile vedere,

$$G(X_s) = \sum_{\mu\nu}^{1,2,3} g_{\mu\nu} X_\mu X_\nu - X_4^2, \tag{32}$$

vale a dire il sistema di coordinate gaussiano è caratterizzato analiticamente dalle equazioni

$$g_{14} = 0, \quad g_{24} = 0, \quad g_{34} = 0, \qquad g_{44} = -1. \tag{33}$$

A causa della proprietà presupposta per lo spazio tridimensionale $x_4 = 0$ la forma quadratica delle variabili X_1, X_2, X_3 che sta al secondo membro della (32) è necessariamente definita positiva, vale a dire le prime tre delle disequazioni (31) sono soddisfatte e poiché ciò vale anche per la quarta, il sistema di coordinate gaussiano è sempre un sistema *proprio* di coordinate spazio-temporali.

Ritorniamo ora allo studio del principio di causalità in fisica. Come suo contenuto principale vediamo la circostanza, che è stata valida finora in ogni teoria fisica, che dalla conoscenza delle grandezze fisiche e delle loro derivate temporali nel presente è sempre possibile determinare, in maniera univoca, i valori di queste grandezze per il futuro: le leggi della fisica fino ad ora hanno trovato infatti senza eccezioni la loro espressione in un sistema di equazioni differenziali di tipo tale che il numero delle funzioni che in esse intervenivano coincidesse sostanzialmente con il numero delle equazioni differenziali indipendenti e quindi il noto teorema generale di Cauchy sull'esistenza dell'integrale delle equazioni differenziali alle derivate parziali forniva immediatamente la base per dimostrare quella circostanza.

Le equazioni fondamentali della fisica (4) e (5) stabilite nella mia prima comunicazione, come ho ivi posto in particolare risalto, non sono affatto del tipo caratterizzato prima; quattro di esse per il teorema I sono invece una conseguenza delle rimanenti; abbiamo considerato le quattro equazioni di Maxwell (5) come conseguenza delle dieci equazioni gravitazionali (4), e si hanno per i 14 potenziali $g_{\mu\nu}$, q_s solo le 10 equazioni (4) realmente indipendenti l'una dall'altra.

Se ci atteniamo al requisito dell'invarianza generale per le equazioni fondamentali della fisica, la circostanza su accennata è anche essenziale e necessaria. Se infatti fossero date per i 14 potenziali anche ulteriori equazioni invarianti indipendenti dalle (4), l'introduzione di un sistema di coordinate gaussiano secondo la (33) per le 10 grandezze fisiche

$$g_{\mu\nu} \quad (\mu, \nu = 1, 2, 3), \qquad q_s \ \ (s = 1, 2, 3, 4)$$

fornirebbe un sistema di equazioni cha ancora sarebbero indipendenti l'una dall'altra e che, poiché sarebbero più di dieci, risulterebbero in contraddizione tra di loro.

Quindi in circostanze siffatte, come hanno luogo nella nuova fisica della relatività generale, non è più possibile in alcun modo, dalla conoscenza delle grandezze fisiche nel presente e nel passato, desumerne in modo univoco il valore nel futuro. Per mostrar ciò chiaramente con un esempio, le nostre equazioni (4) e (5) della prima comunicazione siano integrate nel caso particolare che corrisponde all'esistenza di un unico elettrone costantemente a riposo, cosicché i 14 potenziali

$$g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}(x_1, x_2, x_3)$$
$$q_s = q_s(x_1, x_2, x_3)$$

siano dati come funzioni note di x_1, x_2, x_3, che siano tutte indipendenti dal tempo, e anche tali che inoltre le prime tre componenti r_1, r_2, r_3 della tetradensità si annullino. Applichiamo allora a questi potenziali la seguente trasformazione di coordinate:

$$x_1 = x_1' \qquad \text{per } x_4' \leq 0$$
$$x_1 = x_1' + e^{-\frac{1}{x_4'^2}} \qquad \text{per } x_4' > 0$$
$$x_2 = x_2'$$
$$x_3 = x_3'$$
$$x_4 = x_4';$$

i potenziali trasformati $g'_{\mu\nu}$, q'_s sono per $x'_4 \leq 0$ rispetto a x'_1, x'_2, x'_3 le stesse funzioni che $g_{\mu\nu}$, q_s sono rispetto alle variabili originarie x_1, x_2, x_3, mentre $g'_{\mu\nu}$, q'_s per $x'_4 > 0$ dipendono in modo essenziale anche dalla coordinata temporale x'_4, vale a dire i potenziali $g'_{\mu\nu}$, q'_s rappresentano un elettrone che fino al tempo $x'_4 = 0$ è a riposo, mentre successivamente si mette in moto nelle sue parti.

Tuttavia ritengo che, per mantenere il principio di causalità anche nella nuova fisica, basti soltanto una formulazione più precisa dell'idea che sta alla base del principio di relatività generale[3]. Secondo l'essenza del nuovo principio di relatività, noi dobbiamo infatti richiedere l'invarianza non solo per le leggi generali della fisica, ma anche che ogni singola affermazione nella fisica, se essa dovrà avere un senso fisico, dovrà avere carattere invariante, in accordo col fatto che ogni circostanza fisica dev'essere in fin dei conti determinabile con il filo metrico o con l'orologio a luce, vale a dire con strumenti di carattere *invariante*. Proprio come nella teoria delle curve o delle superfici una asserzione per la quale è stata scelta la rappresentazione parametrica della curva o della superficie, per la curva o la superficie non ha di per sé alcun significato geometrico, se l'asserzione non rimane invariante per una qualunque trasformazione del parametro, o non si può portare in forma invariante, così anche in fisica dobbiamo dichiarare **fisicamente priva**

[3]Nella sua teoria originaria, ormai abbandonata, A. Einstein (Sitzungsberichte der Akad. zu Berlin, 1914, p. 1067), per mantenere il principio di causalità nella vecchia interpretazione, aveva in particolare postulato 4 equazioni non invarianti per i $g_{\mu\nu}$.

di senso un'affermazione, che non rimanga invariante per una qualunque trasformazione di coordinate. Per esempio, nel caso prima trattato dell'elettrone a riposo l'affermazione che il medesimo è a riposo fino al tempo $x_4 = 0$ non ha senso fisico, perché questa affermazione non è invariante.

Per quanto ora concerne il principio di causalità, supponiamo che le grandezze fisiche e le loro derivate temporali siano note nel presente rispetto a un dato sistema di coordinate: allora un'affermazione avrà senso fisico solo se essa è invariante per tutte quelle trasformazioni di coordinate, per le quali le coordinate usate proprio per il presente restano invariate; io affermo che le asserzioni di questo tipo per il futuro sono tutte determinate univocamente, vale a dire *il principio di causalità vale in questa forma*:

Dalla conoscenza dei 14 potenziali fisici $g_{\mu\nu}$, q_s nel presente derivano necessariamente e univocamente tutte le affermazioni sugli stessi per il futuro, purché abbiano senso fisico.

Per dimostrare questa affermazione, utilizziamo il sistema gaussiano di coordinate spazio-temporali. L'introduzione della (33) nelle equazioni fondamentali (4) della prima comunicazione ci fornisce per i 10 potenziali

$$g_{\mu\nu} \quad (\mu, \nu = 1, 2, 3), \qquad q_s \quad (s = 1, 2, 3, 4) \tag{34}$$

un sistema di altrettante equazioni differenziali alle derivate parziali; quando le integriamo a partire dai valori iniziali dati per $x_4 = 0$ si trova in modo univoco il valore dei potenziali (34) per $x_4 > 0$. Poiché il sistema di coordinate gaussiano è di per sé fissato univocamente, anche tutte le affermazioni su quei potenziali (34) riferite a questo sistema di coordinate hanno carattere invariante.

Le forme in cui le asserzioni possono essere espresse matematicamente in maniera fisicamente significativa, cioè in modo invariante, sono molteplici.

Prima forma. Questa può essere ottenuta mediante l'impiego di un sistema invariante di coordinate. Come il sistema appena usato di coordinate gaussiano, sono utilizzabili a tale scopo anche il noto sistema di Riemann e parimenti il sistema di coordinate spazio-temporali nel quale l'elettricità appare trasformata a riposo e alla densità unitaria.

Se $f(q)$, come alla fine della prima comunicazione, indica la funzione dell'invariante

$$q = \sum_{kl} q_k q_l g^{kl},$$

che interviene nel principio di Hamilton, allora

$$r^s = \frac{\partial f(q)}{\partial q_s}$$

è la tetradensità di elettricità; essa costituisce un vettore controvariante ed è quindi, come facilmente comprensibile, di certo trasformabile alla forma $(0, 0, 0, 1)$. Se accade ciò, con le quattro equazioni

$$\frac{\partial f(q)}{\partial q_s} = 0 \quad (s = 1, 2, 3), \qquad \frac{\partial f(q)}{\partial q_4} = 1$$

le quattro componenti del tetrapotenziale q_s sono esprimibili mediante i $g_{\mu\nu}$ e ogni relazione tra i $g_{\mu\nu}$ in questo o in uno dei due precedenti sistemi di coordinate è quindi una affermazione invariante. Per soluzioni particolari delle equazioni fondamentali si possono dare sistemi invarianti di coordinate particolari; per esempio nel caso trattato in seguito del campo gravitazionale centrosimmetrico r, ϑ, φ, t costituisce un sistema di coordinate invariante per rotazioni.

Seconda forma. L'affermazione che è possibile trovare un sistema di coordinate, nel quale i 14 potenziali $g_{\mu\nu}$, q_s per il futuro abbiano certi valori determinati oppure soddisfino certe condizioni fissate, è sempre invariante e quindi fisicamente significativa. L'espressione matematica invariante per una tale affermazione si otterrà per eliminazione delle coordinate da quelle relazioni. Un esempio è dato dal caso trattato sopra dell'elettrone a riposo: il contenuto essenziale e fisicamente significativo del principio di causalità si esprime qui nell'affermazione che l'elettrone a riposo per il tempo $x_4 \leq 0$, *con opportuna scelta del sistema di coordinate spazio-temporali* rimane costantemente a riposo in tutte le sue parti anche per il futuro $x_4 > 0$.

Terza forma. Un'affermazione è pure invariante e quindi ha sempre senso fisico, se essa dev'essere valida per un qualunque sistema di coordinate. Un esempio in tal senso sono le equazioni di Einstein dell'energia-impulso in forma di divergenza. Sebbene infatti l'energia di Einstein non abbia la proprietà di invarianza e le equazioni differenziali da lui ottenute per le sue componenti anche come sistema di equazioni non siano affatto covarianti, tuttavia l'affermazione in esse contenuta, che esse devono essere soddisfatte per qualunque sistema di coordinate, è un requisito invariante ed ha quindi un senso fisico.

Secondo la mia concezione la fisica è una pseudogeometria tetradimensionale, la metrica $g_{\mu\nu}$ della quale è legata mediante le equazioni (4) e (5) della mia prima comunicazione alle grandezze elettromagnetiche vale a dire alla materia. Riconosciuto questo, diventa matura per la soluzione una vecchia questione geometrica, cioè la questione se e in quale senso la geometria euclidea, della quale dalla matematica sappiamo solo che è una costruzione logicamente priva di contraddizioni, possieda validità anche nella realtà.

La vecchia fisica assieme al concetto di tempo assoluto assumeva le leggi della geometria euclidea e le poneva a priori a fondamento di ogni teoria fisica particolare. Anche Gauss procedette solo poco diversamente: costruì in via ipotetica una fisica non euclidea, nella quale egli, mantenendo il tempo assoluto, dei postulati della geometria euclidea lasciò cadere solo l'assioma delle parallele; la misura degli angoli di un triangolo di grandi dimensioni gli mostrò allora la non validità di questa fisica non euclidea.

La nuova fisica della relatività generale di Einstein introduce nei confronti della geometria una posizione completamente differente. Essa non pone a priori a fondamento né la geometria euclidea né un'altra geometria data, per dedurre poi le leggi fisiche vere e proprie, ma, come ho fatto vedere nella mia prima comunicazione, la nuova teoria della fisica fornisce d'un sol colpo, con uno ed un solo principio hamiltoniano le leggi geometriche e le leggi fisiche, ovvero le equazioni fondamentali (4) e (5), che insegnano come la metrica $g_{\mu\nu}$, contemporaneamente l'espressione matematica del fenomeno fisico della gravitazione, sia legata ai valori q_s dei potenziali elettrodinamici.

La geometria euclidea è una *legge a distanza di tipo estraneo alla fisica moderna*: la teoria della relatività, ripudiando la geometria euclidea come presupposto generale della fisica, insegna invece che geometria e fisica hanno lo stesso carattere e riposano come un'unica scienza su fondamenti comuni.

La questione geometrica posta precedentemente porta a cercare se e sotto quali ipotesi la pseudogeometria tetradimensionale euclidea

$$g_{11} = 1, \quad g_{22} = 1, \quad g_{33} = 1, \quad g_{44} = -1, \quad g_{\mu\nu} = 0 \quad (\mu \neq \nu) \tag{35}$$

sia una soluzione delle equazioni fisiche fondamentali, oppure sia l'unica soluzione regolare delle stesse.

Le equazioni fondamentali (4) della mia prima comunicazione si scrivono, per l'ipotesi (20) ivi fatta:

$$[\sqrt{g}K]_{\mu\nu} + \frac{\partial \sqrt{g}L}{\partial g^{\mu\nu}} = 0,$$

dove si ha

$$[\sqrt{g}K]_{\mu\nu} = \sqrt{g}(K_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Kg_{\mu\nu}).$$

Inserendo i valori (35) si ottiene

$$[\sqrt{g}K]_{\mu\nu} = 0 \tag{36}$$

e per

$$q_s = 0 \qquad\qquad (s = 1, 2, 3, 4)$$

si ottiene

$$\frac{\partial \sqrt{g} L}{\partial g^{\mu\nu}} = 0;$$

vale a dire quando viene rimossa tutta l'elettricità è possibile la geometria pseudo-euclidea. La domanda se, in questo caso, ciò sia anche necessario, cioè se, sotto certe condizioni aggiuntive, i valori (35) e rispettivamente i valori di $g_{\mu\nu}$ ottenuti da questi mediante una trasformazione di coordinate siano le uniche soluzioni regolari delle equazioni (36), è un problema matematico che qui non sarà discusso in generale. Mi limito invece a esporre alcuni studi particolari che riguardano il problema.

A questo scopo ritorniamo alle coordinate d'universo originarie della mia prima comunicazione

$$w_1 = x_1, \quad w_2 = x_2, \quad w_3 = x_3, \quad w_4 = ix_4$$

e impartiamo ai $g_{\mu\nu}$ il significato corrispondente.

Nel caso della geometria pseudo-euclidea si ha

$$g_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu},$$

dove si è posto

$$\delta_{\mu\mu} = 1, \qquad \delta_{\mu\nu} = 0 \quad (\mu \neq \nu).$$

Per qualunque metrica prossima a questa geometria pseudo-euclidea vale l'approssimazione

$$g_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu} + \varepsilon h_{\mu\nu} + ..., \tag{37}$$

dove ε è una quantità infinitesima e $h_{\mu\nu}$ sono funzioni di w_s. Sulla metrica (37) faccio le seguenti due ipotesi:

I. Gli $h_{\mu\nu}$ saranno indipendenti dalla variabile w_4.

II. Gli $h_{\mu\nu}$ mostreranno all'infinito un certo comportamento regolare.

Ora poiché la metrica (37) deve soddisfare le equazioni differenziali (36) per tutti gli ε, risulta che gli $h_{\mu\nu}$ devono necessariamente soddisfare certe equazioni differenziali lineari e omogenee alle derivate parziali del second'ordine. Quando si pone con Einstein[4]

$$h_{\mu\nu} = k_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\delta_{\mu\nu}\sum_s k_{ss}, \qquad (k_{\mu\nu} = k_{\nu\mu}) \tag{38}$$

[4]Integrazione approssimata delle equazioni di campo della gravitazione. Berichte d. Akad. zu Berlin, 1916, p. 688.

e si assume che tra le 10 funzioni $k_{\mu\nu}$ valgano le quattro relazioni

$$\sum_s \frac{\partial k_{\mu s}}{\partial w_s} = 0, \qquad (\mu = 1, 2, 3, 4) \tag{39}$$

queste equazioni differenziali si scrivono nel modo seguente:

$$\Box k_{\mu\nu} = 0, \tag{40}$$

dove si è usata l'abbreviazione

$$\Box = \sum_s \frac{\partial^2}{\partial w_s^2}.$$

Le relazioni (39) sono, a causa delle posizioni (38), condizioni restrittive per le funzioni $h_{\mu\nu}$; tuttavia mostrerò che, mediante una opportuna trasformazione infinitesima delle variabili w_1, w_2, w_3, w_4, si può sempre ottenere che per le funzioni corrispondenti $h'_{\mu\nu}$ dopo la trasformazione quelle condizioni restrittive siano soddisfatte.

A questo scopo si determinino quattro funzioni φ_1, φ_2, φ_3, φ_4 delle variabili, che soddisfino rispettivamente le equazioni differenziali

$$\Box \varphi_\mu = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial w_s} \sum_\nu h_{\nu\nu} - \sum_\nu \frac{\partial h_{\mu\nu}}{\partial w_\nu}. \tag{41}$$

Per la trasformazione infinitesima

$$w_s = w'_s + \varepsilon \varphi_s$$

$g_{\mu\nu}$ si trasforma in

$$g'_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} + \varepsilon \sum_\alpha g_{\alpha\nu} \frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial w_\mu} + \epsilon \sum_\alpha g_{\alpha\mu} \frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial w_\nu} + ...$$

ovvero per la (37) in

$$g'_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu} + \varepsilon h'_{\mu\nu} + ...,$$

dove si è posto

$$h'_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} + \frac{\partial \varphi_\nu}{\partial w_\mu} + \frac{\partial \varphi_\mu}{\partial w_\nu}.$$

Se ora scegliamo

$$k_{\mu\nu} = h'_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \delta_{\mu\nu} \sum_s h'_{ss},$$

per la (41) queste funzioni soddisfano le condizioni di Einstein (39) e si avrà

$$h'_{\mu\nu} = k_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\delta_{\mu\nu}\sum_s k_{ss} \qquad\qquad (k_{\mu\nu} = k_{\nu\mu}).$$

Le equazioni differenziali (40), che per la trattazione precedente devono valere per i $k_{\mu\nu}$ trovati, per l'ipotesi I diventano

$$\frac{\partial^2 k_{\mu\nu}}{\partial w_1^2} + \frac{\partial^2 k_{\mu\nu}}{\partial w_2^2} + \frac{\partial^2 k_{\mu\nu}}{\partial w_3^2} = 0,$$

e, poiché l'ipotesi II, intesa in conformità, permette di concludere che i $k_{\mu\nu}$ all'infinito tendono a valori costanti, segue che gli stessi devono essere costanti ovunque, vale a dire: *per variazione della metrica della geometria pseudo-euclidea sotto le ipotesi I e II non è possibile ottenere una metrica regolare, che non sia anche pseudo-euclidea e che allo stesso tempo corrisponda ad un universo privo di elettricità.*

L'integrazione delle equazioni differenziali alle derivate parziali (36) è possibile anche in un altro caso, che è stato trattato per la prima volta da Einstein[5] e da Schwarzschild[6]. Nel seguito fornisco per questo caso una via di soluzione che non fa alcuna ipotesi sui potenziali gravitazionali $g_{\mu\nu}$ all'infinito e che inoltre presenta vantaggi anche per le mie indagini successive. Le ipotesi per i $g_{\mu\nu}$ sono le seguenti:

1. La metrica è riferita a un sistema di coordinate gaussiano, solo g_{44} sarà lasciato ancora arbitrario; vale a dire si ha
$$g_{14} = 0, \quad g_{24} = 0, \quad g_{34} = 0.$$

2. I $g_{\mu\nu}$ sono indipendenti dalla coordinata temporale x_4.

3. La gravitazione $g_{\mu\nu}$ è a simmetria centrale rispetto all'origine del sistema di coordinate.

Secondo Schwarzschild, in coordinate spaziali polari, quando si ponga

$$\begin{aligned} w_1 &= r\cos\vartheta \\ w_2 &= r\sin\vartheta\cos\varphi \\ w_3 &= r\sin\vartheta\sin\varphi \\ w_4 &= l \end{aligned}$$

[5] Il moto del perielio di Mercurio, Sitzungsber. d. Akad. zu Berlin. 831, 1915.

[6] Il campo gravitazionale di un punto materiale. Sitzunsber. d. Akad. zu Berlin. 189, 1916.

la metrica più generale che risponde a questi requisiti è rappresentata dall'espressione

$$F(r)dr^2 + G(r)(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta d\varphi^2) + H(r)dl^2, \tag{42}$$

dove $F(r)$, $G(r)$, $H(r)$ sono ancora funzioni arbitrarie di r. Se poniamo

$$r^* = \sqrt{G(r)},$$

siamo parimenti autorizzati a interpretare r^*, ϑ, φ come coordinate spaziali polari. Se introduciamo nella (42) r^* al posto di r e tralasciamo poi il simbolo $*$, risulta l'espressione

$$M(r)dr^2 + r^2 d\vartheta^2 + r^2\sin^2\vartheta d\varphi^2 + W(r)dl^2, \tag{43}$$

dove $M(r)$, $W(r)$ indicano le due funzioni di r essenzialmente arbitrarie. Il problema è se e come queste siano da determinarsi nella forma più generale in modo che le equazioni differenziali (36) risultino soddisfatte.

Allo scopo occorrerà calcolare le espressioni note $K_{\mu\nu}$, K fornite nella mia prima comunicazione. Il primo passo a tal fine è la scrittura esplicita delle equazioni differenziali della linea geodetica per variazione dell'integrale

$$\int \left(M\left(\frac{dr}{dp}\right)^2 + r^2\left(\frac{d\vartheta}{dp}\right)^2 + r^2\sin^2\vartheta\left(\frac{d\varphi}{dp}\right)^2 + W(\left(\frac{dl}{dp}\right)^2 \right) dp.$$

Otteniamo come equazioni di Lagrange le seguenti:

$$\begin{aligned}
\frac{d^2r}{dp^2} + \frac{1}{2}\frac{M'}{M}\left(\frac{dr}{dp}\right)^2 - \frac{r}{M}\left[\left(\frac{d\vartheta}{dp}\right)^2 + \sin^2\vartheta\left(\frac{d\varphi}{dp}\right)^2\right] - \frac{1}{2}\frac{W'}{M}\left(\frac{dl}{dp}\right)^2 &= 0,\\
\frac{d^2\vartheta}{dp^2} + \frac{2}{r}\frac{dr}{dp}\frac{d\vartheta}{dp} - \sin\vartheta\cos\vartheta\left(\frac{d\varphi}{dp}\right)^2 &= 0,\\
\frac{d^2\varphi}{dp^2} + \frac{2}{r}\frac{dr}{dp}\frac{d\varphi}{dp} + 2\cot\vartheta\frac{d\vartheta}{dp}\frac{d\varphi}{dp} &= 0,\\
\frac{d^2l}{dp^2} + \frac{W'}{W}\frac{dr}{dp}\frac{dl}{dp} &= 0;
\end{aligned}$$

qui e nel calcolo successivo il simbolo $'$ indica la derivata rispetto a r. Confrontando con le equazioni differenziali generali della linea geodetica:

$$\frac{d^2w_s}{dp^2} + \sum_{\mu\nu}\left\{{}^{\mu}{}_{s}{}^{\nu}\right\}\frac{dw_\mu}{dp}\frac{dw_\nu}{dp} = 0$$

desumiamo per le parentesi $\left\{ {}^{\mu}{}_{s}{}^{\nu} \right\}$ i seguenti valori (non vengono dati i valori nulli):

$$\left\{ {}^{1\,1}_{\ 1} \right\} = \frac{1}{2}\frac{M'}{M}, \quad \left\{ {}^{2\,2}_{\ 1} \right\} = -\frac{r}{M}, \quad \left\{ {}^{3\,3}_{\ 1} \right\} = -\frac{r}{M}\sin^2\vartheta,$$

$$\left\{ {}^{4\,4}_{\ 1} \right\} = -\frac{1}{2}\frac{W'}{M}, \quad \left\{ {}^{1\,2}_{\ 2} \right\} = \frac{1}{r}, \quad \left\{ {}^{3\,3}_{\ 2} \right\} = -\sin\vartheta\cos\vartheta,$$

$$\left\{ {}^{1\,3}_{\ 3} \right\} = \frac{1}{r}, \quad \left\{ {}^{2\,3}_{\ 3} \right\} = \cot\vartheta, \quad \left\{ {}^{1\,4}_{\ 4} \right\} = \frac{1}{2}\frac{W'}{W},$$

Con essi calcoliamo:

$$K_{11} = \frac{\partial}{\partial r}\left(\left\{ {}^{1\,1}_{\ 1} \right\} + \left\{ {}^{1\,2}_{\ 2} \right\} + \left\{ {}^{1\,3}_{\ 3} \right\} + \left\{ {}^{1\,4}_{\ 4} \right\} \right) - \frac{\partial}{\partial r}\left\{ {}^{1\,1}_{\ 1} \right\}$$

$$+ \left\{ {}^{1\,1}_{\ 1} \right\}\left\{ {}^{1\,1}_{\ 1} \right\} + \left\{ {}^{1\,2}_{\ 2} \right\}\left\{ {}^{2\,1}_{\ 2} \right\} + \left\{ {}^{1\,3}_{\ 3} \right\}\left\{ {}^{3\,1}_{\ 3} \right\} + \left\{ {}^{1\,4}_{\ 4} \right\}\left\{ {}^{4\,1}_{\ 4} \right\}$$

$$- \left\{ {}^{1\,1}_{\ 1} \right\}\left(\left\{ {}^{1\,1}_{\ 1} \right\} + \left\{ {}^{1\,2}_{\ 2} \right\} + \left\{ {}^{1\,3}_{\ 3} \right\} + \left\{ {}^{1\,4}_{\ 4} \right\} \right)$$

$$= \frac{1}{2}\frac{W''}{W} + \frac{1}{4}\frac{W'^2}{W^2} - \frac{M'}{rM} - \frac{1}{4}\frac{M'W'}{MW}$$

$$K_{22} = \frac{\partial}{\partial\vartheta}\left\{ {}^{2\,3}_{\ 3} \right\} - \frac{\partial}{\partial r}\left\{ {}^{2\,2}_{\ 1} \right\}$$

$$+ \left\{ {}^{2\,1}_{\ 2} \right\}\left\{ {}^{2\,2}_{\ 1} \right\} + \left\{ {}^{2\,2}_{\ 1} \right\}\left\{ {}^{1\,2}_{\ 2} \right\} + \left\{ {}^{2\,3}_{\ 3} \right\}\left\{ {}^{3\,2}_{\ 3} \right\}$$

$$- \left\{ {}^{2\,2}_{\ 1} \right\}\left(\left\{ {}^{1\,1}_{\ 1} \right\} + \left\{ {}^{1\,2}_{\ 2} \right\} + \left\{ {}^{1\,3}_{\ 3} \right\} + \left\{ {}^{1\,4}_{\ 4} \right\} \right)$$

$$= -1 - \frac{1}{2}\frac{rM'}{M^2} + \frac{1}{M} + \frac{1}{2}\frac{rW'}{MW}$$

$$K_{33} = -\frac{\partial}{\partial r}\left\{ {}^{3\,3}_{\ 1} \right\} - \frac{\partial}{\partial\vartheta}\left\{ {}^{3\,3}_{\ 2} \right\}$$

$$+ \left\{ {}^{3\,1}_{\ 3} \right\}\left\{ {}^{3\,3}_{\ 1} \right\} + \left\{ {}^{3\,2}_{\ 3} \right\}\left\{ {}^{3\,3}_{\ 2} \right\} + \left\{ {}^{3\,3}_{\ 1} \right\}\left\{ {}^{1\,3}_{\ 3} \right\} + \left\{ {}^{3\,3}_{\ 2} \right\}\left\{ {}^{2\,3}_{\ 3} \right\}$$

$$- \left\{ {}^{3\,3}_{\ 1} \right\}\left(\left\{ {}^{1\,1}_{\ 1} \right\} + \left\{ {}^{1\,2}_{\ 2} \right\} + \left\{ {}^{1\,3}_{\ 3} \right\} + \left\{ {}^{1\,4}_{\ 4} \right\} \right) - \left\{ {}^{3\,3}_{\ 2} \right\}\left\{ {}^{2\,3}_{\ 3} \right\}$$

$$= \sin^2\vartheta\left(-1 - \frac{1}{2}\frac{rM'}{M^2} + \frac{1}{M} + \frac{1}{2}\frac{rW'}{MW} \right)$$

$$K_{44} = -\frac{\partial}{\partial r}\left\{ {}^{4\,4}_{\ 1} \right\} + \left\{ {}^{4\,1}_{\ 4} \right\}\left\{ {}^{4\,4}_{\ 1} \right\} + \left\{ {}^{4\,4}_{\ 1} \right\}\left\{ {}^{4\,1}_{\ 4} \right\}$$

$$- \left\{ {}^{4\,4}_{\ 1} \right\}\left(\left\{ {}^{1\,1}_{\ 1} \right\} + \left\{ {}^{1\,2}_{\ 2} \right\} + \left\{ {}^{1\,3}_{\ 3} \right\} + \left\{ {}^{1\,4}_{\ 4} \right\} \right)$$

$$= \frac{1}{2}\frac{W''}{M} - \frac{1}{4}\frac{M'W'}{M^2} - \frac{1}{4}\frac{W'^2}{MW} + \frac{W'}{rM}$$

$$K = \sum_s g^{ss} K_{ss} = \frac{W''}{MW} - \frac{1}{2}\frac{W'^2}{MW^2} - 2\frac{M'}{rM^2} - \frac{1}{2}\frac{M'W'}{M^2W} - \frac{2}{r^2} + \frac{2}{r^2M} + 2\frac{W'}{rMW}.$$

Poiché

$$\sqrt{g} = \sqrt{MW} r^2 \sin\vartheta$$

si avrà

$$K\sqrt{g} = \left\{ \left(\frac{r^2 W'}{\sqrt{MW}} \right)' - 2\frac{rM'\sqrt{W}}{M^{\frac{3}{2}}} - 2\sqrt{MW} + 2\sqrt{\frac{W}{M}} \right\} \sin\vartheta$$

e, se si pone

$$M = \frac{r}{r-m}, \qquad W = w^2 \frac{r-m}{r},$$

dove d'ora in poi m e w diventano le funzioni incognite di r, si ottiene infine

$$K\sqrt{g} = \left\{ \left(\frac{r^2 W'}{\sqrt{MW}} \right)' - 2wm' \right\} \sin\vartheta,$$

cosicché la variazione dell'integrale quadruplo

$$\int\int\int\int K\sqrt{g}\, dr\, d\vartheta\, d\varphi\, dl$$

è equivalente alla variazione dell'integrale semplice

$$\int wm'dr$$

e porta alle equazioni di Lagrange

$$\begin{aligned} m' &= 0, \\ w' &= 0. \end{aligned} \tag{44}$$

Ci si convince facilmente che queste equazioni comportano l'annullarsi di tutti i $K_{\mu\nu}$; esse rappresentano quindi sostanzialmente la soluzione più generale delle equazioni (36) sotto le ipotesi fatte 1., 2., 3.. Se prendiamo come integrali delle (44) $m = \alpha$, dove α è una costante e $w = 1$, cosa che evidentemente non comporta alcuna restrizione significativa, si ottiene dalla (43) per $l = it$ la metrica cercata nella forma trovata per primo da Schwarzschild

$$G(dr, d\vartheta, d\varphi, dl) = \frac{r}{r-\alpha} dr^2 + r^2 d\vartheta^2 + r^2 \sin^2\vartheta d\varphi^2 - \frac{r-\alpha}{r} dt^2. \tag{45}$$

La singolarità di questa metrica per $r = 0$ sparisce solo quando si assume $\alpha = 0$, vale a dire *la metrica della geometria pseudo-euclidea è sotto le ipotesi* 1., 2., 3. *l'unica metrica regolare corrispondente a un universo privo di elettricità.*

Per $\alpha \neq 0$, i punti $r = 0$ e, per valori positivi di α, anche $r = \alpha$ risultano tali che in essi la metrica non è regolare. Dico **regolare** in un punto una metrica o un campo gravitazionale $g_{\mu\nu}$ quando è possibile, mediante una trasformazione univoca invertibile introdurre un sistema di coordinate tale che per questo le funzioni corrispondenti $g'_{\mu\nu}$ siano regolari in quel punto, cioè siano continue e differenziabili a piacere, in esso e nel suo intorno, e abbiano un determinante g' diverso da zero.

Sebbene secondo la mia idea solo soluzioni regolari delle equazioni fondamentali rappresentano immediatamente la realtà, tuttavia proprio le soluzioni con punti non regolari sono un mezzo matematico importante per approssimare soluzioni caratteristiche regolari, e in questo senso, secondo il procedimento di Einstein e Schwarzschild, la metrica (45), non regolare per $r = 0$ e per $r = \alpha$, va vista come espressione della gravitazione di una massa distribuita con simmetria centrale nell'intorno dell'origine[7]. Nello stesso senso anche il punto materiale va interpretato come il caso limite di una certa distribuzione di elettricità attorno a un punto, tuttavia rinuncio in questo luogo a derivare le equazioni di moto dello stesso dalle mie equazioni fondamentali della fisica. Analogamente succede con il problema delle equazioni differenziali per il moto della luce.

Come surrogato della derivazione dalle equazioni fondamentali possono servire, secondo Einstein, *i seguenti due assiomi*:

Il moto di un punto materiale nel campo gravitazionale sarà descritto da una linea geodetica che sia linea oraria[8].

Il moto della luce nel campo gravitazionale sarà descritto da una linea geodetica nulla.

Poiché la linea d'universo che rappresenta il moto del punto materiale dev'essere una linea oraria, è sempre possibile, come si può facilmente vedere, ridurre a riposo il punto materiale mediante trasformazioni spazio-temporali *proprie*, cioè esistono sistemi di coordinate spazio-temporali *proprî*, rispetto ai quali il punto materiale è costantemente a riposo.

[7]Trasformare all'origine la posizione $r = \alpha$, come fece Schwarzschild, secondo me non è raccomandabile; inoltre la trasformazione di Schwarzschild non è la più semplice per raggiugere tale scopo.

[8]Quest'ultima aggiunta restrittiva non si trova né in Einstein, né in Schwarzschild.

Le equazioni differenziali della linea geodetica per il campo gravitazionale centrale (45) scaturiscono dal problema variazionale

$$\delta \int \left(\frac{r}{r-\alpha} \left(\frac{dr}{dp} \right)^2 + r^2 \left(\frac{d\vartheta}{dp} \right)^2 + r^2 \sin^2 \vartheta \left(\frac{d\varphi}{dp} \right)^2 - \frac{r-\alpha}{r} \left(\frac{dt}{dp} \right)^2 \right) dp = 0;$$

mediante il noto procedimento si scrivono:

$$\frac{r}{r-\alpha} \left(\frac{dr}{dp} \right)^2 + r^2 \left(\frac{dr}{dp} \right)^2 + r^2 \sin^2 \vartheta \left(\frac{d\varphi}{dp} \right)^2 - \frac{r-\alpha}{r} \left(\frac{dt}{dp} \right)^2 = A, \qquad (46)$$

$$\frac{d}{dp} \left(r^2 \frac{d\vartheta}{dp} \right) - r^2 \sin \vartheta \cos \vartheta \left(\frac{d\varphi}{dp} \right)^2 = 0, \qquad (47)$$

$$r^2 \sin^2 \vartheta \left(\frac{d\varphi}{dp} \right)^2 = B, \qquad (48)$$

$$\frac{r-\alpha}{r} \frac{dt}{dp} = C, \qquad (49)$$

dove A, B, C sono costanti d'integrazione.

Dimostro innanzitutto che *le traiettorie dello spazio* r ϑ φ *giacciono in piani che passano per il centro della gravitazione.*

Allo scopo eliminiamo il parametro p dalle equazioni differenziali (47) e (48) per ottenere una equazione differenziale per ϑ come funzione di φ. Si ha identicamente

$$\frac{d}{dp} \left(r^2 \frac{d\vartheta}{dp} \right) = \frac{d}{dp} \left(r^2 \frac{d\vartheta}{d\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{dp} \right) = \left(2r \frac{dr}{d\varphi} \frac{d\vartheta}{d\varphi} + r^2 \frac{d^2\vartheta}{d\varphi^2} \right) \left(\frac{d\varphi}{dp} \right)^2$$
$$+ r^2 \frac{d\vartheta}{d\varphi} \frac{d^2\varphi}{dp^2}. \qquad (50)$$

D'altra parte dalla (48) si ottiene derivando rispetto a p:

$$\left(2r \frac{dr}{d\varphi} \sin^2 \vartheta + 2r^2 \sin \vartheta \cos \vartheta \frac{d\vartheta}{d\varphi} \right) \left(\frac{d\varphi}{dp} \right)^2 + r^2 \sin^2 \vartheta \frac{d^2\varphi}{dp^2} = 0,$$

e se ricaviamo da qui il valore di $\frac{d^2\varphi}{dp^2}$ e lo sostituiamo al secondo membro della (50), si avrà

$$\frac{d}{dp} \left(r^2 \frac{d\vartheta}{dp} \right) = \left(\frac{d^2\vartheta}{d\varphi^2} - 2 \cot \vartheta \left(\frac{d\vartheta}{d\varphi} \right)^2 \right) r^2 \left(\frac{d\varphi}{dp} \right)^2.$$

L'equazione (47) prende allora la forma :

$$\frac{d^2\vartheta}{d\varphi^2} - 2\cot\vartheta\left(\frac{d\vartheta}{d\varphi}\right)^2 = \sin\vartheta\cos\vartheta,$$

un'equazione differenziale il cui integrale generale si scrive

$$\sin\vartheta\cos(\varphi + a) + b\cos\vartheta = 0,$$

dove a, b sono costanti di integrazione.

Con ciò si è ottenuta la dimostrazione desiderata, e quindi per la discussione successiva delle linee geodetiche basterà considerare il valore $\vartheta = \pi/2$. Perciò il problema variazionale si semplifica come segue

$$\delta\int\left\{\frac{r}{r-\alpha}\left(\frac{dr}{dp}\right)^2 + r^2\left(\frac{d\varphi}{dp}\right)^2 - \frac{r-\alpha}{r}\left(\frac{dt}{dp}\right)^2\right\}dp = 0,$$

e le tre equazioni differenziali del primo ordine che ne derivano si scrivono

$$\frac{r}{r-\alpha}\left(\frac{dr}{dp}\right)^2 + r^2\left(\frac{dr}{dp}\right)^2 + r^2\left(\frac{d\varphi}{dp}\right)^2 - \frac{r-\alpha}{r}\left(\frac{dt}{dp}\right)^2 = A, \tag{51}$$

$$r^2\frac{d\varphi}{dp} = B, \tag{52}$$

$$\frac{r-\alpha}{r}\frac{dt}{dp} = C. \tag{53}$$

L'equazione differenziale di Lagrange per r

$$\frac{d}{dp}\left(\frac{2r}{r-\alpha}\frac{dr}{dp}\right) + \frac{\alpha}{(r-\alpha)^2}\left(\frac{dr}{dp}\right)^2 - 2r\left(\frac{d\varphi}{dp}\right)^2 + \frac{\alpha}{r^2}\left(\frac{dt}{dp}\right)^2 = 0 \tag{54}$$

è necessariamente collegata con le equazioni precedenti e precisamente, se indichiamo i primi membri delle equazioni (51), (52), (53), (54) rispettivamente con [1], [2], [3], [4], si ha identicamente

$$\frac{d\,[1]}{dp} - 2\frac{d\varphi}{dp}\frac{d\,[2]}{dp} + 2\frac{dt}{dp}\frac{d\,[3]}{dp} = \frac{dr}{dp}\,[4]\,. \tag{55}$$

Se si pone $C = 1$, cosa equivalente a una moltiplicazione del parametro p per una costante, e poi si eliminano p e t dalle (51), (52), (53), si arriva a quella equazione differenziale per $\rho = \frac{1}{r}$ come funzione di φ, che hanno trovato Einstein e Schwarzschild, vale a dire:

$$\left(\frac{d\rho}{d\varphi}\right)^2 = \frac{1+A}{B^2} - \frac{A\alpha}{B^2}\rho - \rho^2 + \alpha\rho^3. \tag{56}$$

Questa equazione rappresenta la traiettoria del punto materiale in cordinate polari; da essa deriva in prima approssimazione per $\alpha = 0$ e con $B = \sqrt{\alpha}b$, $A = -1+\alpha a$ il moto di Keplero, e la seconda approssimazione conduce a una delle scoperte più splendide del tempo presente: il calcolo della precessione del perielio di Mercurio.

Secondo l'assioma precedente la linea d'universo per il moto di un punto materiale sarà una linea oraria; dalla definizione di linea oraria segue quindi sempre $A < 0$.

Ci domandiamo ora in particolare se la circonferenza, vale a dire $r =$ cost., possa essere la traiettoria di un moto. L'identità (55) mostra che in questo caso, poichè $\frac{dr}{dp} = 0$, l'equazione (54) non è affatto conseguenza delle (51), (52), (53); le ultime tre equazioni non sono quindi sufficienti alla determinazione del moto; le equazioni che devono essere necessariamente soddisfatte sono invece le (52), (53), (54). Dalla (54) si ha

$$-2r\left(\frac{d\varphi}{dp}\right)^2 + \frac{\alpha}{r^2}\left(\frac{dt}{dp}\right)^2 = 0 \tag{57}$$

cioè per la velocità v nella traiettoria circolare

$$v^2 = \left(r\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = \frac{\alpha}{2r}. \tag{58}$$

D'altra parte, poiché $A < 0$, la (51) fornisce la disequazione

$$r^2\left(\frac{d\varphi}{dp}\right)^2 - \frac{r-\alpha}{r}\left(\frac{dt}{dp}\right)^2 < 0 \tag{59}$$

ovvero, usando la (57)

$$r > \frac{3\alpha}{2}. \tag{60}$$

Per la (58) da qui deriva per la velocità del punto materiale in moto lungo una circonferenza la disequazione[9]

$$v < \frac{1}{\sqrt{3}}. \tag{61}$$

La disequazione (60) ammette la seguente interpretazione. Per la (58) la velocità angolare del punto materiale in moto circolare è

$$\frac{d\varphi}{dt} = \sqrt{\frac{\alpha}{2r^3}}.$$

[9] L'affermazione di Schwarzschild (l.c.), secondo la quale la velocità del punto materiale nella traiettoria circolare al diminuire del raggio della traiettoria si approssima al limite $\frac{1}{\sqrt{2}}$, corrisponde alla disequazione $r \geq \alpha$ e per quanto detto sopra non dovrebbe esser giusta.

Se vogliamo introdurre al posto di r, φ le coordinate polari di un sistema di coordinate corotante attorno all'origine, dobbiamo necessariamente sostituire

$$\varphi \quad \text{con } \varphi + \sqrt{\frac{\alpha}{2r^3}}t.$$

La metrica

$$\frac{r}{r-\alpha}dr^2 + r^2 d\varphi^2 - \frac{r-\alpha}{r}dt^2$$

mediante la trasformazione spazio-temporale corrispondente diventa

$$\frac{r}{r-\alpha}dr^2 + r^2 d\varphi^2 + \sqrt{2\alpha r}d\varphi dt + \left(\frac{\alpha}{2r} - \frac{r-\alpha}{r}\right)dt^2.$$

In questa per la (60) la disequazione $g_{44} < 0$ è soddisfatta e poiché valgono anche le restanti disequazioni (31), *la trasformazione considerata del punto materiale a riposo è una trasformazione spazio-temporale* **propria**.

D'altra parte il limite superiore $1/\sqrt{3}$ trovato prima nella (61) per la velocità di un punto materiale in moto circolare ha anche un significato semplice. Secondo l'assioma per il moto della luce questo sarà infatti rappresentato da una linea geodetica nulla. Se quindi poniamo nella (51) $A = 0$, si ottiene per il moto circolare della luce invece della disequazione (59) l'equazione

$$r^2\left(\frac{d\varphi}{dp}\right)^2 - \frac{r-\alpha}{r}\left(\frac{dt}{dp}\right)^2 = 0;$$

insieme alla (57) si ottiene allora per il raggio della traiettoria della luce:

$$r = \frac{3\alpha}{2}$$

e per la velocità della luce in moto circolare il valore che compare nella (61) come limite superiore:

$$v = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

In generale si ottiene dalla (56) per il cammino della luce, poiché $A = 0$, l'equazione differenziale

$$\left(\frac{d\rho}{d\varphi}\right)^2 = \frac{1}{B^2} - \rho^2 + \alpha\rho^3; \tag{62}$$

questa possiede per $B = \frac{3\sqrt{3}}{2}\alpha$ la circonferenza $r = 3\alpha/2$ come "ciclo" di Poincaré, in conformità con il fatto che allora $\rho - \frac{2}{3\alpha}$ compare a secondo membro come fattore doppio. Infatti in questo caso l'equazione differenziale (62) possiede infinite curve integrali (per l'equazione più generale (56) vale l'affermazione corrispondente), che si approssimano senza limite a quella circonferenza lungo spirali, come richiede la teoria generale dei cicli di Poincaré.

Se consideriamo ora un raggio di luce proveniente dall'infinito e prendiamo α piccolo rispetto alla distanza minima di questo dal centro di gravitazione, il raggio di luce ha in approssimazione la forma di un'iperbole con fuoco nel centro[10].

Come *pendant* al moto circolare vi è il moto su una retta che passi per il centro di gravitazione. Otteniamo l'equazione differenziale per questo moto se poniamo $\varphi = 0$ nella (54) e poi eliminiamo p dalle (53) e (56); l'equazione differenziale per r in funzione di t così ottenuta si scrive:

$$\frac{d^2r}{dt^2} - \frac{3\alpha}{2r(r-\alpha)}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \frac{\alpha(r-\alpha)}{2r^3} = 0 \tag{63}$$

con il seguente integrale che deriva dalla (51)

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = \left(\frac{r-\alpha}{r}\right)^2 + A\left(\frac{r-\alpha}{r}\right)^3. \tag{64}$$

Per la (63) si ha che l'accelerazione è negativa o positiva, cioè che la gravitazione agisce attrattivamente o repulsivamente, a seconda che per il valore assoluto della velocità sia

$$\left|\frac{dr}{dt}\right| < \frac{1}{\sqrt{3}}\frac{r-\alpha}{r}$$

oppure

$$\left|\frac{dr}{dt}\right| > \frac{1}{\sqrt{3}}\frac{r-\alpha}{r}.$$

Per la luce si ha per la (64)

$$\left|\frac{dr}{dt}\right| = \frac{r-\alpha}{r};$$

la luce diretta rettilineamente verso il centro sarà sempre respinta in accordo con l'ultima disequazione; la sua velocità cresce da 0 per $r = \alpha$ ad 1 per $r = \infty$. Quando sia α che dr/dt sono piccoli, la (63) approssima l'equazione di Newton

$$\frac{d^2r}{dt^2} = -\frac{\alpha}{2}\frac{1}{r^2}.$$

[10] Una discussione esauriente delle equazioni differenziali (56) e (62) sarà l'oggetto di una comunicazione di V. Fréedericksz che apparirà qui prossimamente.