Problemi variazionali invarianti[1]

(A F. Klein per il cinquantesimo anniversario del dottorato.)

Emmy Noether a Gottinga.

Comunicazione presentata da F. Klein nella seduta del 26 luglio 1918[2].

[1]Invariante Variationsprobleme, Nachrichten von der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Math.-phys. Klasse 1918, 235-257.

[2]La versione finale del manoscritto sarà pronta alla fine di settembre.

Si tratta di problemi variazionali che ammettono un gruppo continuo (nel senso di Lie); le conseguenze che da ciò risultano per le equazioni differenziali corrispondenti trovano la loro espressione più generale nei teoremi enunciati nel §1, dimostrati nei paragrafi successivi. Su queste equazioni differenziali che originano da problemi variazionali si possono fare affermazioni molto più precise che su equazioni differenziali arbitrarie che ammettano un gruppo, le quali costituiscono l'oggetto delle ricerche di Lie. Quanto segue si fonda quindi su un collegamento dei metodi del calcolo formale delle variazioni con quelli della teoria dei gruppi di Lie. Per gruppi e problemi variazionali particolari questo collegamento dei metodi non è nuovo; rammento Hamel e Herglotz per gruppi speciali finiti, Lorentz ed i suoi allievi (per esempio Fokker), Weyl e Klein per gruppi speciali infiniti[1]. In particolare la seconda nota di Klein e gli sviluppi presenti si sono mutuamente influenzati, sicché posso rimandare alle osservazioni conclusive della nota di Klein.

§1. **Osservazioni preliminari ed enunciazione dei teoremi.**

Si assumerà che tutte le funzioni che compariranno nel seguito siano analitiche o almeno continue e derivabili un numero finito di volte, e univoche nel dominio considerato.

Per "gruppo di trasformazioni" si intende notoriamente un sistema di trasformazioni tale che per ogni trasformazione esista un'inversa contenuta nel sistema, e che la composizione di due trasformazioni qualsiansi del sistema appartenga ancora al sistema. Il gruppo si chiama un gruppo *finito continuo* $\mathbf{G}_\varrho$, quando le sue trasformazioni siano contenute in uno più generale possibile, che dipenda analiticamente da ϱ parametri *essenziali* ε (cioè i ϱ parametri non dovranno potersi rappresentare come ϱ funzioni di meno parametri). Analogamente si intende per gruppo *infinito continuo* $\mathbf{G}_{\infty\varrho}$ un gruppo, le cui trasformazioni più generali dipendano da ϱ funzioni essenzialmente arbitrarie $p(x)$ e dalle loro derivate, funzioni che siano analitiche o almeno continue e derivabili un numero finito di volte. Come termine intermedio tra i due gruppi esiste il gruppo che dipende da un numero infinito di parametri, ma non da funzioni arbitrarie. Infine si chiama *gruppo misto* un gruppo che dipenda sia da funzioni arbitrarie che da parametri[2].

[1]Hamel: Math. Ann. Vol. 59 e Zeitschrift f. Math. u. Phys. Vol. 50. Herglotz: Ann. d. Phys. (4) Vol. 36, in particolare §9, pagina 511. Fokker, Verslag d. Amsterdamer Akad., 27./1. 1917. Per l'ulteriore bibliografia si veda la seconda nota di Klein: Göttinger Nachrichten 19 luglio 1918. In un lavoro di Kneser apparso or ora (Math. Zeitschrift Vol. 2) si tratta della costruzione di invarianti con metodi analoghi.

[2]Lie definisce nei "Fondamenti per la teoria dei gruppi di trasformazioni infiniti con-

Siano $x_1, ..., x_n$ variabili indipendenti, $u_1(x), ..., u_\mu(x)$ funzioni dipendenti da queste. Se si sottopongono le x e le u alle trasformazioni di un gruppo, per la supposta invertibilità delle trasformazioni, tra le quantità trasformate devono essere comprese di nuovo n quantità indipendenti, - $y_1, ...y_n$ - ; le rimanenti, che dipendono da queste, siano indicate con $v_1(y), ..., v_\mu(y)$. Nelle trasformazioni possono anche comparire le derivate delle u rispetto alle x, ossia $\partial u/\partial x$, $\partial^2 u/\partial x^2$, ...[3]. Si dice che una funzione è un *invariante* del gruppo, se vale una relazione:

$$P\left(x, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, ...\right) = P\left(y, v, \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}, ...\right).$$

In particolare un integrale I sarà quindi un *invariante del gruppo* se vale una relazione[4]:

$$I = \int \cdots \int f\left(x, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, ...\right) dx = \int \cdots \int f\left(y, v, \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}, ...\right) dy, \quad (1)$$

integrato[5] su un dominio reale *arbitrario* delle x e sul corrispondente dominio delle y.

Per un integrale I arbitrario, non necessariamente invariante, costruisco altresì la variazione prima δI e la trasformo mediante integrazione per parti secondo le regole del calcolo variazionale. È noto che, se si assume δu tale da annullarsi al contorno assieme a tutte le derivate che intervengono, ma altrimenti arbitrario, risulta:

$$\delta I = \int \cdots \int \delta f dx = \int \cdots \int \left(\sum \psi_i \left(x, u, \frac{\partial u}{\partial x}, ...\right) \delta u_i\right) dx, \quad (2)$$

tinui" (Ber. d. K. Sächs. Ges. der Wissensch. 1891) [citato come "Fondamenti"] i gruppi infiniti continui come i gruppi di trasformazioni, le cui trasformazioni siano date dalle soluzioni più generali di un sistema di equazioni differenziali alle derivate parziali, purché tali soluzioni non dipendano soltanto da un numero finito di parametri. Si ottiene così uno dei tipi anzidetti, distinti dai gruppi finiti; mentre inversamente il caso limite di infiniti parametri non necessariamente deve soddisfare un sistema di equazioni differenziali.

[3] Trascuro gli indici - eventualmente anche nelle sommatorie - ; quindi $\partial^2 u/\partial x^2$ sta per $\partial^2 u_\alpha/\partial x_\beta \partial x_\gamma$, eccetera.

[4] Scrivo per brevità dx, dy al posto di $dx_1...dx_n$, $dy_1...dy_n$.

[5] Tutti gli argomenti x, u, ε, $p(x)$ che compaiono nelle trasformazioni devono essere assunti come reali, mentre i coefficienti possono essere complessi. Poiché nei risultati finali si ha a che fare con *identità* nei parametri x, u e nelle funzioni arbitrarie, queste valgono anche per valori complessi, purché tutte le funzioni che intervengono siano assunte analitiche. Una gran parte dei risultati si può ottenere del resto senza integrali, sicché la restrizione al campo reale appare anche fondamentalmente non necessaria. Invece le trattazioni alla fine del §2 e all'inizio del §5 non paiono essere eseguibili senza integrali.

dove le ψ indicano le *espressioni lagrangiane*, ovvero i primi membri delle equazioni di Lagrange del corrispondente problema variazionale $\delta I = 0$. A questa relazione integrale corrisponde *un'identità* senza integrali in δu e nelle sue derivate, che risulta scrivendo i termini al contorno. Come mostra l'integrazione per parti, questi termini al contorno sono integrali su *divergenze*, cioè su espressioni

$$\mathrm{Div}A = \frac{\partial A_1}{\partial x_1} + \cdots + \frac{\partial A_n}{\partial x_n},$$

dove A è lineare in δu e nelle sue derivate. Risulta quindi:

$$\sum \psi_i \delta u_i = \delta f + \mathrm{Div}A. \tag{3}$$

Se in particolare f contiene solo derivate *prime* delle u, nel caso dell'integrale semplice l'identità (3) è identica a quella che Heun chiama "equazione centrale lagrangiana":

$$\sum \psi_i \delta u_i = \delta f - \frac{d}{dx}\left(\sum \frac{\partial f}{\partial u'_i}\delta u_i\right), \qquad \left(u'_i = \frac{du_i}{dx}\right), \tag{4}$$

mentre per l'integrale ennuplo la (3) diventa:

$$\sum \psi_i \delta u_i = \delta f - \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\sum \frac{\partial f}{\partial \frac{\partial u_i}{\partial x_1}}\delta u_i\right) - \cdots - \frac{\partial}{\partial x_n}\left(\sum \frac{\partial f}{\partial \frac{\partial u_i}{\partial x_n}}\delta u_i\right). \tag{5}$$

Per l'integrale semplice e κ derivate delle u la (3) è data da

$$\begin{aligned} &\sum \psi_i \delta u_i = \delta f \\ &-\frac{d}{dx}\left\{\sum\left(\binom{1}{1}\frac{\partial f}{\partial u_i^{(1)}}\delta u_i + \binom{2}{1}\frac{\partial f}{\partial u_i^{(2)}}\delta u_i^{(1)} + \cdots + \binom{\kappa}{1}\frac{\partial f}{\partial u_i^{(\kappa)}}\delta u_i^{(\kappa-1)}\right)\right\} \\ &+\frac{d^2}{dx^2}\left\{\sum\left(\binom{2}{2}\frac{\partial f}{\partial u_i^{(2)}}\delta u_i + \binom{3}{2}\frac{\partial f}{\partial u_i^{(3)}}\delta u_i^{(1)} + \cdots + \binom{\kappa}{2}\frac{\partial f}{\partial u_i^{(\kappa)}}\delta u_i^{(\kappa-2)}\right)\right\} \\ &\cdots + (-1)^\kappa \frac{d^\kappa}{dx^\kappa}\left\{\sum \binom{\kappa}{\kappa}\frac{\partial f}{\partial u_i^{(\kappa)}}\delta u_i\right\}, \end{aligned} \tag{6}$$

ed un'identità corrispondente vale per l'integrale ennuplo; A contiene in particolare δu fino alla derivata d'ordine $\kappa - 1$. Che le espressioni lagrangiane ψ_i siano definite effettivamente dalle (4), (5), (6) discende dal fatto che con le combinazioni dei secondi membri tutte le derivate superiori delle δu sono eliminate, mentre è altresì soddisfatta la relazione (2), alla quale porta *univocamente* l'integrazione per parti.

Si tratta ora nel seguito dei due teoremi:

I. Se l'integrale I è invariante rispetto ad un $\mathbf{G}_\varrho$, *allora* ϱ *combinazioni linearmente indipendenti delle espressioni lagrangiane diventano delle divergenze - inversamente segue da questa circostanza l'invarianza di I rispetto ad un* $\mathbf{G}_\varrho$. *Il teorema vale ancora nel caso limite di infiniti parametri.*

II. Se l'integrale I è invariante rispetto ad un $\mathbf{G}_{\infty\varrho}$, *allora esistono* ϱ *relazioni identiche tra le espressioni lagrangiane e le loro derivate fino all'ordine* σ *- anche qui vale l'inverso*[6].

Per i gruppi misti valgono gli enunciati di entrambi i teoremi; compaiono quindi sia dipendenze che relazioni di divergenza indipendenti da esse.

Se si passa da queste identità al corrispondente problema variazionale, se quindi si pone[7] $\psi = 0$, il primo teorema nel caso monodimensionale - quando la divergenza diventa una derivata totale - afferma l'esistenza di ϱ integrali primi, tra i quali possono d'altronde sussistere dipendenze non lineari[8]; nel caso multidimensionale si ottengono le equazioni di divergenza recentemente spesso indicate come "leggi di conservazione"; il teorema II afferma che ϱ delle equazioni di Lagrange sono una conseguenza delle rimanenti.

La rappresentazione parametrica di Weierstrass costituisce l'esempio più semplice del teorema II - senza inverso -; in questo caso l'integrale per omogeneità del prim'ordine è chiaramente invariante, se si sostituisce la variabile indipendente x con una funzione arbitraria di x, che lasci u invariato ($y = p(x)$, $v_i(y) = u_i(x)$). Compare quindi una funzione arbitraria, ma senza derivate, e le corrisponde la nota relazione lineare tra le stesse espressioni lagrangiane: $\sum \psi_i(du_i/dx) = 0$. Un ulteriore esempio fornisce la "teoria della relatività generale" dei fisici; si tratta in questo caso del gruppo di *tutte* le trasformazioni delle x: $y_i = p_i(x)$, mentre le u (indicate come $g_{\mu\nu}$ e q) saranno sottoposte alle trasformazioni indotte per i coefficienti di una forma differenziale rispettivamente quadratica e lineare, che contengono le derivate prime delle funzioni arbitrarie $p(x)$. Ad esse corrispondono le note n dipendenze tra le espressioni lagrangiane e le loro derivate prime[9].

Se si specializza in particolare il gruppo in modo da non ammettere nessuna derivata delle $u(x)$ nelle trasformazioni, e se inoltre si lasciano dipendere le quantità indipendenti trasformate solo dalle x, non dalle u, come sarà dimostrato nel §5, dall'invarianza di I risultano l'invarianza relativa[10] di $\sum \psi_i \delta u_i$, ed anche delle divergenze che compaiono nel teorema I, allorché i

[6] Per certe eccezioni triviali si veda il §2, nota 13.

[7] Un po' più in generale si può anche porre $\psi_i = T_i$, vedasi §3, nota 15.

[8] Vedasi la conclusione del §3.

[9] Si confronti in proposito l'esposizione di Klein.

[10] Cioè $\sum \psi_i \delta u_i$ assume per la trasformazione un fattore.

parametri sono sottoposti ad opportune trasformazioni. Da ciò segue ancora che anche gli integrali primi su menzionati ammettono il gruppo. Per il teorema II risulta pure l'invarianza relativa dei primi membri delle dipendenze, riuniti per mezzo delle funzioni arbitrarie; e come conseguenza di ciò risulta ancora una funzione, la cui divergenza si annulla identicamente e ammette il gruppo - che consente nella teoria della relatività dei fisici la connessione tra dipendenze e legge dell'energia[11]. Il teorema II dà infine la dimostrazione, nella versione secondo la teoria dei gruppi, di un'affermazione di Hilbert ad esso connessa, sulla mancanza di leggi dell'energia vere e proprie in "relatività generale". Con queste osservazioni aggiuntive il teorema I contiene tutti i teoremi noti in meccanica, eccetera, sugli integrali primi, mentre il teorema II può essere designato come la generalizzazione più vasta possibile secondo la teoria dei gruppi della "teoria della relatività generale".

§2. **Relazioni di divergenza e dipendenze.**

Sia **G** un gruppo continuo - finito o infinito - ; allora è sempre possibile far sì che alla trasformazione identica corrisponda[12] il valore zero dei parametri ε, rispettivamente delle funzioni arbitrarie $p(x)$. La trasformazione più generale sarà quindi della forma:

$$y_i = A_i\left(x, u, \frac{\partial u}{\partial x}, ...\right) = x_i + \Delta x_i + \cdots$$

$$v_i(y) = B_i\left(x, u, \frac{\partial u}{\partial x}, ...\right) = u_i + \Delta u_i + \cdots$$

dove Δx_i, Δu_i indicano i termini di potenza più bassa in ε, rispettivamente in $p(x)$ e nelle loro derivate; e in particolare saranno assunti *lineari*. Come si mostrerà in seguito, questo non costituisce una restrizione della generalità.

Sia ora l'integrale I un invariante rispetto a **G**, e quindi la relazione (1) sia soddisfatta. In particolare I è allora invariante anche rispetto alle trasformazioni infinitesime contenute in **G**:

$$y_i = x_i + \Delta x_i, \quad v_i(y) = u_i + \Delta u_i,$$

e perciò la relazione (1) diventa:

---

[11] Si veda la seconda nota di Klein.

[12] Vedasi in proposito Lie: "Fondamenti", pagina 331. Se si tratta di funzioni arbitrarie, i valori speciali a^σ dei parametri vanno sostituiti con funzioni fissate p^σ, $\partial p^\sigma/\partial x$, ...; corrispondentemente i valori $a^\sigma + \varepsilon$ con $p^\sigma + p(x)$, $\partial p^\sigma/\partial x + \partial p/\partial x$ eccetera.

$$\begin{aligned}0 = \Delta I = \int \cdots \int f\left(x, v(y), \frac{\partial v}{\partial y}, ...\right) dy \\ - \int \cdots \int f\left(x, u(x), \frac{\partial u}{\partial x}, ...\right) dx,\end{aligned} \tag{7}$$

dove il primo integrale va esteso sul dominio $x + \Delta x$ corrispondente al dominio x. Ma questa integrazione si può anche trasformare in un'integrazione sul dominio x per mezzo dello sviluppo, valido per Δx infinitesimi

$$\begin{aligned}\int \cdots \int f\left(x, v(y), \frac{\partial v}{\partial y}, ...\right) dy \\ = \int \cdots \int f\left(x, v(x), \frac{\partial v}{\partial x}, ...\right) dx + \int \cdots \int \mathrm{Div}(f \cdot \Delta x) dx.\end{aligned} \tag{8}$$

Se si introduce al posto della trasformazione infinitesima Δu la variazione:

$$\overline{\delta} u_i = v_i(x) - u_i(x) = \Delta u_i - \sum \frac{\partial u_i}{\partial x_\lambda} \Delta x_\lambda, \tag{9}$$

la (7) e la (8) diventano:

$$0 = \int \cdots \int \left\{ \overline{\delta} f + \mathrm{Div}(f \cdot \Delta x) \right\} dx. \tag{10}$$

Il secondo membro è la nota formula per la variazione simultanea delle variabili dipendenti e indipendenti. Poiché la relazione (10) è soddisfatta per integrazione su ogni dominio *arbitrario*, l'integrando deve annullarsi identicamente; le equazioni differenziali di Lie per l'invarianza di I si trasformano quindi nella relazione

$$\overline{\delta} f + \mathrm{Div}(f \cdot \Delta x) = 0. \tag{11}$$

Se in essa, secondo la (3), si esprime $\overline{\delta} f$ mediante le espressioni lagrangiane, si ottiene:

$$\sum \psi_i \overline{\delta} u_i = \mathrm{Div} B \quad (B = A - f \cdot \Delta x), \tag{12}$$

e questa relazione rappresenta quindi per ogni integrale I *invariante* un'identità in tutti gli argomenti che vi compaiono; essa è la forma cercata[13] delle equazioni differenziali di Lie per I.

[13] La (12) diventa 0=0 nel caso triviale - che può avvenire soltanto se Δx, Δu dipendono anche da derivate delle u - quando $\mathrm{Div}(f \cdot \Delta x) = 0$, $\overline{\delta} u = 0$; queste trasformazioni infinitesime vanno quindi sempre separate dal gruppo, e nelle enunciazioni del teorema va contato solo il numero dei parametri o delle funzioni arbitrarie rimanenti. Deve rimanere indeciso se le restanti trasformazioni infinitesime formino ancor sempre un gruppo.

Si assuma ora $\mathbf{G}$ *come gruppo finito continuo* $\mathbf{G}_\varrho$; poiché per ipotesi Δu e Δx sono lineari nei parametri $\varepsilon_1, ..., \varepsilon_\varrho$, per la (9) lo stesso vale per $\overline{\delta} u$ e per le sue derivate; quindi A e B sono lineari negli ε. Se pongo pertanto

$$B = B^{(1)}\varepsilon_1 + \cdots + B^{(\varrho)}\varepsilon_\varrho, \quad \overline{\delta} u = \overline{\delta} u^{(1)}\varepsilon_1 + \cdots + \overline{\delta} u^{(\varrho)}\varepsilon_\varrho,$$

dove quindi $\overline{\delta} u^{(1)}$, ... sono funzioni di x, u, $\partial u/\partial x$, ..., dalla (12) discendono le relazioni di divergenza cercate:

$$\sum \psi_i \overline{\delta} u_i^{(1)} = \mathrm{Div} B^{(1)}, ... \quad \sum \psi_i \overline{\delta} u_i^{(\varrho)} = \mathrm{Div} B^{(\varrho)}. \tag{13}$$

Diventano quindi divergenze ϱ *combinazioni linearmente indipendenti delle espressioni lagrangiane*; l'indipendenza lineare discende dal fatto che per la (9) da $\overline{\delta} u = 0$, $\Delta x = 0$ discenderebbe anche $\Delta u = 0$, $\Delta x = 0$, e quindi una dipendenza tra le trasformazioni infinitesime. Ma essa per ipotesi non è soddisfatta per nessun valore dei parametri, perché altrimenti il $\mathbf{G}_\varrho$ che si riotterrebbe per integrazione dalle trasformazioni infinitesime dipenderebbe da meno di ϱ parametri essenziali. L'ulteriore possibilità $\overline{\delta} u = 0$, $\mathrm{Div}(f \cdot \Delta x) = 0$ era tuttavia esclusa. Queste conclusioni valgono ancora nel caso limite di infiniti parametri.

Sia ora $\mathbf{G}$ *un gruppo continuo infinito* $\mathbf{G}_{\infty \varrho}$; allora di nuovo $\overline{\delta} u$ e le sue derivate, quindi anche B, saranno lineari nelle funzioni arbitrarie $p(x)$ e nelle loro derivate[14], e sia per sostituzione dei valori di $\overline{\delta} u$, ancora indipendentemente dalla (12):

$$\sum \psi_i \overline{\delta} u_i =$$

$$\sum_{\lambda, i} \psi_i \left\{ a_i^{(\lambda)}(x, u, \cdot\cdot) p^{(\lambda)}(x) + b_i^{(\lambda)}(x, u, \cdot\cdot) \frac{\partial p^{(\lambda)}}{\partial x} + \cdots + c_i^{(\lambda)}(x, u, \cdot\cdot) \frac{\partial^\sigma p^{(\lambda)}}{\partial x^\sigma} \right\}.$$

Ora, analogamente alle formule dell'integrazione per parti, a seguito dell'identità

$$\varphi(x, u, ...) \frac{\partial^\tau p(x)}{\partial x^\tau} = (-1)^\tau \cdot \frac{\partial^\tau \varphi}{\partial x^\tau} \cdot p(x) \quad \text{modulo divergenze}$$

le derivate delle p si possono sostituire con le p stesse e con divergenze, che risultano lineari nelle p e nelle loro derivate; pertanto risulta:

$$\sum \psi_i \delta u_i = \tag{14}$$

$$\sum_\lambda \left\{ \left(a_i^{(\lambda)} \psi_i \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(b_i^{(\lambda)} \psi_i \right) + \cdots + (-1)^\sigma \frac{\partial^\sigma}{\partial x^\sigma} \left(c_i^{(\lambda)} \psi_i \right) \right\} p^{(\lambda)} + \mathrm{Div} \Gamma,$$

[14] L'inverso è dimostrato dal fatto che non è restrittivo assumere le p indipendenti dalle u, $\partial u/\partial x$, ...

e in combinazione con la (12)

$$\sum \left\{ \left(a_i^{(\lambda)} \psi_i \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(b_i^{(\lambda)} \psi_i \right) + \cdots + (-1)^\sigma \frac{\partial^\sigma}{\partial x^\sigma} \left(c_i^{(\lambda)} \psi_i \right) \right\} p^{(\lambda)} = \mathrm{Div}(B - \Gamma). \qquad (15)$$

Costruisco ora l'integrale ennuplo sulla (15), esteso su un dominio qualsiasi, e scelgo le $p(x)$ in modo tale che esse assieme a tutte le derivate che compaiono in $B - \Gamma$ si annullino al contorno. Poiché l'integrale su una divergenza si riduce ad un integrale al contorno, si annulla anche l'integrale del primo membro della (15) per $p(x)$ arbitrarie, solo nulle al contorno assieme ad un numero sufficiente di derivate; e da qui discende con ragionamenti noti l'annullarsi degli integrandi per ogni $p(x)$, quindi le ϱ relazioni

$$\sum \left\{ \left(a_i^{(\lambda)} \psi_i \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(b_i^{(\lambda)} \psi_i \right) + \cdots + (-1)^\sigma \frac{\partial^\sigma}{\partial x^\sigma} \left(c_i^{(\lambda)} \psi_i \right) \right\} = 0, \quad (\lambda = 1, 2 \ldots \varrho). \qquad (16)$$

Queste sono le dipendenze cercate tra le espressioni lagrangiane e le loro derivate a seguito dell'invarianza di I rispetto a $\mathbf{G}_{\infty\varrho}$; l'indipendenza lineare si dimostra come prima, poiché l'inverso riconduce alla (12), e poiché dalle trasformazioni infinitesime ci si può di nuovo riportare a quelle finite, come sarà mostrato in dettaglio nel §4. Quindi anche per un $\mathbf{G}_{\infty\varrho}$ già nelle trasformazioni infinitesime intervengono sempre ϱ trasformazioni arbitrarie. Dalla (15) e dalla (16) segue ancora $\mathrm{Div}(B - \Gamma) = 0$.

Se, in corrispondenza ad un "gruppo misto", Δx e Δu si assumono lineari negli ε e nelle $p(x)$, si vede, ponendo una volta le $p(x)$, una volta gli ε uguali a zero, che sussistono sia relazioni di divergenza (13) che dipendenze (16).

§3. **Inverso nel caso del gruppo finito.**

Per dimostrare l'inverso si devono essenzialmente eseguire le considerazioni precedenti in ordine invertito. Dalla validità della (13) segue mediante moltiplicazione con gli ε e addizione la validità della (12), e a seguito dell'identità (3) una relazione $\bar{\delta} f - \mathrm{Div}(A - B) = 0$. Se quindi si pone: $\Delta x = (1/f) \cdot (A - B)$, si perviene alla (11); da qui discende infine per integrazione la (7): $\Delta I = 0$, quindi l'invarianza di I rispetto alla trasformazione infinitesima definita da Δx, Δu, dove i Δu si determinano da Δx e $\bar{\delta} u$ secondo la (9), e Δx e Δu risultano *lineari* nei parametri. Ma $\Delta I = 0$ porta con sè in modo noto l'invarianza di I rispetto alle trasformazioni finite che risultano per integrazione dei sistemi simultanei:

$$\frac{dx}{dt} = \Delta x_i, \quad \frac{du_i}{dt} = \Delta u_i, \quad (x_i = y_i,\ u_i = v_i \ \text{ per } t = 0). \qquad (17)$$

Queste trasformazioni finite contengono ϱ parametri $a_1, ..., a_\varrho$, ossia le combinazioni $t\varepsilon_1, ..., t\varepsilon_\rho$. Dall'ipotesi, che debbano risultare ϱ e soltanto ϱ relazioni di divergenza (13) linearmente indipendenti, segue inoltre che, purché non contengano le derivate $\partial u/\partial x$, le trasformazioni finite formano sempre un gruppo. In caso contrario infatti almeno una trasformazione infinitesima che risulta dal procedimento delle parentesi di Lie non sarebbe combinazione lineare delle ϱ rimanenti, e poiché I ammette anche questa trasformazione, risulterebbero più di ϱ relazioni di divergenza linearmente indipendenti; oppure questa trasformazione infinitesima sarebbe della forma speciale, per la quale $\bar{\delta} u = 0$, Div$(f \cdot \Delta x)$=0, ma allora o Δx o Δu sarebbe, contrariamente all'ipotesi, dipendente da derivate. Che questo caso possa succedere, quando compaiono derivate in Δx o in Δu, deve rimanere in sospeso; infatti alle Δx su determinate vanno aggiunte ancora, per riottenere la proprietà di gruppo, tutte le funzioni Δx per le quali Div$(f \cdot \Delta x) = 0$; ma i parametri così risultanti, come convenuto, non dovranno essere conteggiati. *Quindi l'inverso è dimostrato.*

Da questo inverso segue ancora che effettivamente Δx e Δu possono essere assunti lineari nei parametri. Se infatti Δu e Δx fossero forme di grado superiore in ε, per l'indipendenza lineare dei prodotti di potenze degli ε risulterebbero delle relazioni del tutto corrispondenti alle (13), solo in numero maggiore, dalle quali per l'inverso risulta l'invarianza di I rispetto ad un gruppo, le cui trasformazioni infinitesime contengono i parametri linearmente. Se questo gruppo deve contenere proprio ϱ parametri devono sussistere dipendenze lineari tra le relazioni di divergenza ottenute originariamente mediante i termini di grado superiore in ε.

Va notato ancora che nel caso quando Δx e Δu contengono anche derivate delle u, le trasformazioni finite possono dipendere da infinite derivate delle u; infatti l'integrazione della (17) porta in questo caso nella determinazione di $d^2 x_i/dt^2$, $d^2 u_i/dt^2$ a

$$\Delta\left(\frac{\partial u}{\partial x_\kappa}\right) = \frac{\partial \Delta u}{\partial x_\kappa} - \sum_\lambda \frac{\partial u}{\partial x_\lambda}\frac{\partial \Delta x_\lambda}{\partial x_\kappa},$$

sicché il numero delle derivate delle u in generale cresce ad ogni passo. Un esempio dà:

$$f = \frac{1}{2}u'^2, \ \psi = -u'', \quad \psi \cdot x = \frac{d}{dx}(u - u'x), \quad \bar{\delta} u = x \cdot \varepsilon,$$

$$\Delta x = -\frac{2u}{u'^2}\varepsilon, \quad \Delta u = \left(x - \frac{2u}{u'}\right) \cdot \varepsilon.$$

Poiché l'espressione lagrangiana di una divergenza si annulla identicamente, l'inverso in conclusione mostra ancora quanto segue: Se I ammette un $\mathbf{G}_\varrho$, ogni integrale che si distingua da I solo per un integrale al contorno, cioè per l'integrale su una divergenza, ammette parimenti un $\mathbf{G}_\varrho$ con lo stesso $\overline{\delta}u$, le trasformazioni infinitesime del quale in generale conterranno derivate delle u. Così secondo l'esempio precedente

$$f^* = \frac{1}{2}\left\{u'^2 - \frac{d}{dx}\left(\frac{u^2}{x}\right)\right\}$$

ammette la trasformazione infinitesima $\Delta u = x\varepsilon$, $\Delta x = 0$, mentre nelle trasformazioni infinitesime che corrispondono ad f compaiono derivate delle u.

Se si passa al problema variazionale, cioè se si pone $\psi_i = 0$ [15], le (13) diventano le equazioni: $\mathrm{Div}B^{(1)} = 0$, ..., $\mathrm{Div}B^{(\varrho)} = 0$, che spesso vengono indicate come "leggi di conservazione". Nel caso monodimensionale risulta quindi: $B^{(1)} = \text{cost.}$, ..., $B^{(\varrho)} = \text{cost.}$, e inoltre le B contengono al massimo derivate dell'ordine $2\kappa - 1$ delle u (per la (6)), purché Δu e Δx non contengano alcuna derivata d'ordine superiore di quelle d'ordine κ-esimo che compaiono in f. Poiché in ψ in generale compaiono[16] derivate d'ordine 2κ, si ha *l'esistenza di ϱ integrali primi*. Che possano esistere sotto queste dipendenze non lineari, lo mostra ancora la f precedente. Alle $\Delta u = \varepsilon_1$, $\Delta x = \varepsilon_2$ linearmente indipendenti corrispondono le relazioni linearmente indipendenti:

$$u'' = \frac{d}{dx}u', \quad u'' \cdot u' = \frac{1}{2}\frac{d}{dx}(u')^2,$$

mentre tra gli integrali primi $u' = \text{cost.}$, $u'^2 = \text{cost.}$ sussiste una dipendenza non lineare. Inoltre si tratta del caso elementare per il quale Δu, Δx non contengono[17] alcuna derivata delle u.

[15] $\psi_i = 0$ o un po' più in generale $\psi_i = T_i$ dove le T_i sono funzioni di nuova introduzione, saranno designate in fisica come "equazioni di campo". Nel caso $\psi_i = T_i$ le identità (13) diventano le equazioni: $\mathrm{Div}B^{(\lambda)} = \sum T_i \delta u_i^{(\lambda)}$, che in fisica sono indicate ancora come leggi di conservazione.

[16] Purché f non sia lineare nelle derivate κ-esime.

[17] Altrimenti si ha ancora $u'^{\lambda} = \text{cost.}$, per ogni λ, e in corrispondenza:

$$u'' \cdot (u')^{\lambda-1} = \frac{1}{\lambda}\frac{d}{dx}(u')^{\lambda}.$$

§4. **Inverso nel caso del gruppo infinito.**

Si mostra in primo luogo che l'assunzione della linearità di Δx e Δu non costituisce alcuna restrizione, cosa che già risulta senza inverso dal fatto che $\mathbf{G}_{\infty\varrho}$ dipende formalmente da ϱ e solo ϱ funzioni arbitrarie. Si mostra infatti che nel caso non lineare, per composizione delle trasformazioni, per cui i termini d'ordine più basso si sommano, il numero delle funzioni arbitrarie crescerebbe. Infatti, se si ha

$$y = A\left(x, u, \frac{\partial u}{\partial x}, ...; p\right) = x + a(x, u, ...)p^{\nu} + b(x, u, ...)p^{\nu-1}\frac{\partial p}{\partial x}$$

$$+cp^{\nu-2}\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)^2 + \cdots + d\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)^{\nu} + \cdots \quad \left(p^{\nu} = (p^{(1)})^{\nu_1}...(p^{(\varrho)})^{\nu_\varrho}\right),$$

e analogamente per $v = B\,(x, u, \partial u/\partial x, ...; p)$, per composizione con $z = A\,(y, v, \partial v/\partial y, ...; q)$ risulta per i termini di ordine più basso:

$$z = x + \sum a(p^{\nu} + q^{\nu}) + b\left\{p^{\nu-1}\frac{\partial p}{\partial x} + q^{\nu-1}\frac{\partial q}{\partial x}\right\}$$

$$+c\left\{p^{\nu-2}\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)^2 + q^{\nu-2}\left(\frac{\partial q}{\partial x}\right)^2\right\} + \cdots.$$

Se vi è qualche coefficiente diverso da a e da b che sia diverso da zero, e quindi se si ha realmente, per $\sigma > 1$, un termine

$$p^{\nu-\sigma}\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)^{\sigma} + q^{\nu-\sigma}\left(\frac{\partial q}{\partial x}\right)^{\sigma},$$

esso non si può scrivere come derivata di una funzione *singola*, o come potenza di questa; il numero delle funzioni arbitrarie è quindi cresciuto contro l'ipotesi. Se si annullano tutti i coefficienti diversi da a e da b, per ciascun valore degli esponenti $\nu_1 ... \nu_\varrho$ il secondo termine sarà la derivata del primo (come sempre succede per esempio per un $\mathbf{G}_{\infty 1}$) sicché si ha effettivamente linearità, altrimenti il numero delle funzioni arbitrarie aumenta anche in questo caso. - Per la *linearità* delle $p(x)$ le trasformazioni infinitesime soddisfano quindi ad un sistema lineare di equazioni differenziali alle derivate parziali, e poiché la proprietà di gruppo è soddisfatta, esse costituiscono un "gruppo infinito di trasformazioni infinitesime" secondo la definizione di Lie (Fondamenti, §10).

L'inverso si ottiene ora in modo analogo al caso del gruppo finito. L'esistenza delle dipendenze (16) porta tramite moltiplicazione per $p^{(\lambda)}(x)$ e addizione grazie allo sviluppo identico (14) a $\sum \psi_i \bar{\delta} u_i = \mathrm{Div}\Gamma$, e da qui segue come nel §3 la determinazione di Δx e Δu e l'invarianza di I rispetto a queste trasformazioni infinitesime, che effettivamente dipendono linearmente da ϱ funzioni arbitrarie e dalle loro derivate fino all'ordine σ. Che queste trasformazioni infinitesime, quando non contengano alcuna derivata $\partial u/\partial x$, ..., certamente costituiscano un gruppo, discende come nel §3 dal fatto che altrimenti per composizione apparirebbero più funzioni arbitrarie, mentre per ipotesi le (16) devono dare solo ϱ dipendenze; esse costituiscono quindi un "gruppo infinito di trasformazioni infinitesime". Ma un gruppo siffatto (Fondamenti, teorema VII, pagina 391) risulta dalle trasformazioni infinitesime più generali di un certo "gruppo infinito **G** di trasformazioni finite", definito nel senso di Lie. Ogni trasformazione finita sarà generata da una infinitesima (Fondamenti, §7)[18], e risulta quindi per integrazione del sistema simultaneo:

$$\frac{dx_i}{dt} = \Delta x_i, \quad \frac{du_i}{dt} = \Delta u_i, \quad (x_i = y_i, \ u_i = v_i \ \text{ per } t = 0);$$

però può essere necessario assumere le funzioni arbitrarie $p(x)$ dipendenti anche da t. **G** *dipende quindi effettivamente da ϱ funzioni arbitrarie*; se basta in particolare assumere le $p(x)$ indipendenti da t, questa dipendenza sarà analitica nelle funzioni arbitrarie[19] $q(x) = t \cdot p(x)$. Se compaiono derivate $\partial u/\partial x$, ..., può essere necessario aggiungere ancora trasformazioni infinitesime $\bar{\delta} u = 0$, $\mathrm{Div}(f \cdot \Delta x) = 0$, ma si arriva sempre alla stessa conclusione.

In connessione con un esempio di Lie (Fondamenti, §7) si presenterà ancora un caso abbastanza più generale, nel quale ci si può spingere fino a formule esplicite, che mostrano parimenti che le derivate delle funzioni arbitrarie compaiono fino all'ordine σ, dove l'inverso è quindi completo. Tali sono i gruppi di trasformazioni infinitesime, alle quali corrisponde il gruppo di tutte le trasformazioni delle x e delle trasformazioni delle u "indotte" da queste; ovvero trasformazioni delle u per le quali le Δu e di conseguenza le u dipendono soltanto dalle funzioni arbitrarie che compaiono in Δx, e nelle quali si assume ancora che le derivate $\partial u/\partial x$,... non compaiano in Δu. Si

[18]Da qui segue in particolare, che il gruppo **G** generato dalle trasformazioni infinitesime Δx, Δu di un $\mathbf{G}_{\infty\varrho}$ si riconduce a $\mathbf{G}_{\infty\varrho}$. Infatti $\mathbf{G}_{\infty\varrho}$ non contiene nessuna trasformazione infinitesima diversa da Δx, Δu, dipendente da funzioni arbitrarie, e non può nemmeno contenerne alcuna indipendente da queste, e dipendente da parametri, perché altrimenti sarebbe un gruppo misto. Ma secondo quanto detto prima le trasformazioni finite sono determinate dalle trasformazioni infinitesime.

[19]Le questione, se intervenga sempre quest'ultimo caso, è stata proposta con altra formulazione da Lie (Fondamenti, §7 e conclusione del §13).

ha quindi:

$$\Delta x_i = p^{(i)}(x),$$

$$\Delta u_i = \sum_{\lambda=1}^{n} \left\{ a_i^{(\lambda)}(x,u)p^{(\lambda)} + b_i^{(\lambda)} \frac{\partial p^{(\lambda)}}{\partial x} + \cdots + c_i^{(\lambda)} \frac{\partial^\sigma p^{(\lambda)}}{\partial x^\sigma} \right\}.$$

Poiché la trasformazione infinitesima $\Delta x = p(x)$ genera ogni trasformazione $x = y + g(y)$ con $g(y)$ arbitrario, si può determinare in particolare $p(x)$ con una dipendenza da t tale che si genererà il gruppo con un solo termine:

$$x_i = y_i + t \cdot g_i(y), \tag{18}$$

che per $t = 0$ diventa l'identità, per $t = 1$ va nel cercato $x = y + g(y)$. Per derivazione della (18) risulta infatti:

$$\frac{dx_i}{dt} = g_i(y) = p^{(i)}(x,t), \tag{19}$$

dove $p(x,t)$ si determina da $g(y)$ per inversione della (18), e inversamente la (18) risulta dalla (19) grazie alla condizione aggiuntiva $x_i = y_i$ per $t = 0$, mediante la quale l'integrale è determinato univocamente. Grazie alla (18) gli x in Δu si possono sostituire con le "costanti di integrazione" y e con t; inoltre le $g(y)$ compaiono fino alla derivata di ordine σ, purché in

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \sum \frac{\partial g}{\partial y_\kappa} \frac{\partial y_\kappa}{\partial x}$$

si esprima $\partial y/\partial x$ mediante $\partial x/\partial y$, e in generale $\partial^\sigma p/\partial x^\sigma$ mediante il suo valore in termini di $\partial g/\partial y$,..., $\partial x/\partial y$, $\partial^\sigma x/\partial y^\sigma$. Per la determinazione delle u vale quindi il sistema di equazioni:

$$\frac{du_i}{dt} = F_i\left(g(y), \frac{\partial g}{\partial y}, ..., \frac{\partial^\sigma g}{\partial y^\sigma}, u, t\right) \ (u_i = v_i \text{ per } t = 0),$$

nel quale solo t e le u sono variabili, mentre le $g(y)$,... appartengono alla categoria dei coefficienti, sicché l'integrazione dà:

$$u_i = v_i + B_i\left(v, g(y), \frac{\partial g}{\partial y}, ..., \frac{\partial^\sigma g}{\partial y^\sigma}, t\right)_{t=1},$$

quindi trasformazioni che *dipendono esattamente da σ derivate delle funzioni arbitrarie.* L'identità è contenuta per la (18) quando $g(y) = 0$, e la proprietà di gruppo discende dal fatto che, siccome il procedimento dato produce ogni trasformazione $x = y + g(y)$, mediante la quale l'indotta delle u è fissata univocamente, il gruppo **G** verrà esaurito.

Dall'inverso risulta ancora inoltre che non costituisce alcuna restrizione il fatto di assumere le funzioni arbitrarie dipendenti solo dalle x e non dalle u, $\partial u/\partial x$,... . In quest'ultimo caso infatti comparirebbero nello sviluppo identico (14), quindi anche nella (15), oltre alle $p^{(\lambda)}$ anche $\frac{\partial p^{(\lambda)}}{\partial u}$, $\frac{\partial p^{(\lambda)}}{\partial \frac{\partial u}{\partial x},\ldots}$. Se ora si assume che le $p^{(\lambda)}$ siano successivamente di grado zero, uno ... in u, $\partial u/\partial x$,..., con funzioni arbitrarie di x come coefficienti, risultano ancora dipendenze (16), solo in numero più elevato, le quali tuttavia, secondo l'inverso di cui sopra, per composizione con funzioni arbitrarie dipendenti solo dalle x, riconducono al caso precedente. Si dimostra parimenti che alla comparsa simultanea di dipendenze e di relazioni di divergenza indipendenti da queste corrispondono gruppi misti[20].

[20] Come nel §3 segue anche qui dall'inverso che oltre ad I anche ogni integrale I^* diverso dal primo per un integrale su una divergenza ammette parimenti un gruppo infinito, con lo stesso $\bar{\delta}u$, ma per il quale tuttavia Δx e Δu in generale conterranno derivate delle u. Einstein ha introdotto un integrale I^* siffatto nella teoria della relatività generale, per ottenere una formulazione più semplice della legge dell'energia; io do le trasformazioni infinitesime che questo I^* ammette, attenendomi esattamente nella notazione alla seconda nota di Klein. L'integrale $I = \int \cdots \int K d\omega = \int \cdots \int \mathbf{K} dS$ ammette il gruppo di *tutte* le trasformazioni delle w e quelle da questo indotte per le $g_{\mu\nu}$; a questo corrispondono le dipendenze ((30) in Klein):

$$\sum \mathbf{K}_{\mu\nu} g^{\mu\nu}_{\tau} + 2 \sum \frac{\partial g^{\mu\sigma} \mathbf{K}_{\mu\tau}}{\partial w^{\sigma}} = 0.$$

Sia ora: $I^* = \int \cdots \int \mathbf{K}^* dS$, dove $\mathbf{K}^* = \mathbf{K} + \mathrm{Div}$, e di conseguenza sarà: $\mathbf{K}^*_{\mu\nu} = \mathbf{K}_{\mu\nu}$, dove $\mathbf{K}^*_{\mu\nu}$, $\mathbf{K}_{\mu\nu}$ indicano sempre le espressioni lagrangiane. Le dipendenze prima date sono quindi tali anche per $\mathbf{K}^*_{\mu\nu}$, e dopo moltiplicazione per p^{τ} e addizione risulta sviluppando a ritroso la derivata del prodotto:

$$\sum \mathbf{K}_{\mu\nu} p^{\mu\nu} + 2\mathrm{Div}(\sum g^{\mu\sigma} \mathbf{K}_{\mu\tau} p^{\tau}) = 0;$$

$$\delta \mathbf{K}^* + \mathrm{Div}\left(\sum 2 g^{\mu\sigma} \mathbf{K}_{\mu\tau} p^{\tau} - \frac{\partial \mathbf{K}^*}{\partial g^{\mu\nu}_{\sigma}} p^{\mu\nu} \right) = 0.$$

Per confronto con l'equazione differenziale di Lie: $\delta \mathbf{K}^* + \mathrm{Div}(\mathbf{K}^* \Delta w) = 0$ ne consegue:

$$\Delta w^{\sigma} = \frac{1}{\mathbf{K}^*} \cdot \left(\sum 2 g^{\mu\sigma} \mathbf{K}_{\mu\tau} p^{\tau} - \frac{\partial \mathbf{K}^*}{\partial g^{\mu\nu}_{\sigma}} p^{\mu\nu} \right), \ \Delta g^{\mu\nu} = p^{\mu\nu} + \sum g^{\mu\nu}_{\sigma} \Delta w^{\sigma}$$

come trasformazioni infinitesime che I^* ammette. Queste trasformazioni infinitesime dipendono quindi dalle derivate prime e seconde di $g^{\mu\nu}$, e contengono le p funzioni arbitrarie fino alla derivata prima.

§5. **Invarianza delle singole parti costitutive delle relazioni.**

Se si specializza il gruppo **G** al caso più semplice che si tratta di solito, quando nella trasformazione non si ammette nessuna derivata delle u, e le variabili indipendenti trasformate dipendono solo dalle x e non dalle u, si può decidere riguardo all'invarianza, nelle formule, delle singole parti costitutive. Si ottiene così in primo luogo, secondo note derivazioni, l'invarianza di $\int \cdots \int \left(\sum \psi_i \delta u_i\right) dx$, e quindi l'invarianza relativa di $\sum \psi_i \delta u_i$[21], intendendo con δ una qualsiasi variazione. Si ha infatti da un lato

$$\delta I = \int \cdots \int \delta f\left(x, u, \frac{\partial u}{\partial x}, ...\right) dx = \int \cdots \int \delta f\left(y, v, \frac{\partial v}{\partial y}, ...\right) dy,$$

e dall'altro per δu, $\delta(\partial u/\partial x), ...$ che si annullano al contorno, ai quali per la trasformazione lineare omogenea di δu, $\delta(\partial u/\partial x), ...$ corrispondono dei δv, $\delta(\partial v/\partial y), ...$ che pure si annullano al contorno:

$$\int \cdots \int \delta f\left(x, u, \frac{\partial u}{\partial x}, ...\right) dx = \int \cdots \int \left(\sum \psi_i\,(u, ...)\,\delta u_i\right) dx,$$

$$\int \cdots \int \delta f\left(y, v, \frac{\partial v}{\partial x}, ...\right) dy = \int \cdots \int \left(\sum \psi_i\,(v, ...)\,\delta v_i\right) dy,$$

conseguentemente per $\delta u, \delta(\partial u/\partial x)$,... che si annullano al contorno, si ha:

$$\int \cdots \int \left(\sum \psi_i\,(u, ...)\,\delta u_i\right) dx = \int \cdots \int \left(\sum \psi_i\,(v, ...)\,\delta v_i\right) dy$$

$$= \int \cdots \int \left(\sum \psi_i\,(v, ...)\,\delta v_i\right) \left|\frac{\partial y_i}{\partial x_\kappa}\right| dx.$$

Se si esprimono nel terzo integrale $y, v, \delta v$ mediante $x, u, \delta u$, e lo si pone uguale al primo, si ottiene quindi una relazione:

$$\int \cdots \int \left(\sum \chi_i\,(u, ...)\,\delta u_i\right) dx = 0$$

per δu che si annullano al contorno, ma altrimenti arbitrari, e da qui discende, come noto, l'annullarsi dell'integrando per δu arbitrari; *identicamente in δu, vale quindi la relazione:*

$$\sum \psi_i\,(u, ...)\,\delta u_i = \left|\frac{\partial y_i}{\partial x_k}\right| \left(\sum \psi_i\,(v, ...)\,\delta v_i\right),$$

[21]Vale a dire $\sum \psi_i \delta u_i$ assume per trasformazione un fattore, cosa che nella teoria degli invarianti algebrici si indicherebbe sempre come invarianza relativa.

che afferma l'invarianza relativa di $\sum \psi_i \delta u_i$ *e conseguentemente l'invarianza di* $\int \cdots \int \left(\sum \psi_i \delta u_i\right) dx$ [22].

Per applicare ciò alle relazioni di divergenza e alle dipendenze derivate, occorre prima dimostrare che $\overline{\delta} u$, ottenuto da Δu, Δx soddisfa effettivamente alle leggi di trasformazione per la variazione δu, purché i parametri, rispettivamente le funzioni arbitrarie in $\overline{\delta} v$ siano determinate in modo tale da corrispondere al gruppo analogo delle trasformazioni infinitesime in y, v. Se $\mathbf{T}_q$ indica la trasformazione che porta le x, u in y, v, e se $\mathbf{T}_p$ è una trasformazione infinitesima in x, u, quella analoga in y, v è data dalla trasformazione $\mathbf{T} = \mathbf{T}_q \mathbf{T}_p \mathbf{T}_q^{-1}$, dove quindi i parametri, rispettivamente le funzioni arbitrarie r, si determinano a partire da p e q. In formule questo si esprime così:

$$\mathbf{T}_p : \xi = x + \Delta x(x, p), \quad u^* = u + \Delta u(x, u, p),$$

$$\mathbf{T}_q : y = A(x, q), \quad v = B(x, u, q),$$

$$\mathbf{T}_q \mathbf{T}_p : \eta = A(x + \Delta x(x, p), q), \quad v^* = B(x + \Delta x(p), u + \Delta u(p), q).$$

Ma da qui si ottiene $\mathbf{T}_r = \mathbf{T}_q \mathbf{T}_p \mathbf{T}_q^{-1}$, quindi

$$\eta = y + \Delta y(r), \quad v^* = v + \Delta v(r),$$

purché in conformità all'inverso di $\mathbf{T}_q$ si considerino le x come funzioni delle y e si tenga conto solo dei termini infinitesimi; si ha quindi l'identità

$$\eta = y + \Delta y(r) = y + \sum \frac{\partial A(x, q)}{\partial x} \Delta x(p), \tag{20}$$

$$v^* = v + \Delta v(r) = v + \sum \frac{\partial B(x, u, q)}{\partial x} \Delta x(p) + \sum \frac{\partial B(x, u, q)}{\partial u} \Delta u(p).$$

[22] Queste conclusioni non valgono quando le y dipendono anche dalle u, perché allora $\delta f\,(y, v, \partial v/\partial y, ...)$ contiene anche termini come $\sum (\partial f/\partial y) \delta y$, e quindi la trasformazione della divergenza non porta alle espressioni lagrangiane, anche quando si ammettono derivate delle u; allora infatti le δv saranno combinazioni lineari di $\delta u, \delta(\partial u/\partial x), ...$, porteranno quindi solo dopo una ulteriore trasformazione della divergenza ad una identità $\int \cdots \int (\sum \chi_i(u, ...) \delta u_i) dx = 0$, sicché a secondo membro non compaiono più le espressioni lagrangiane.

La questione, se dall'invarianza di $\int \cdots \int (\sum \psi_i \delta u_i) dx$ si possano già trarre conclusioni riguardo all'esistenza delle relazioni di divergenza, a seguito dell'inverso è equivalente alla questione, se da qui si possano trarre conclusioni riguardo all'invarianza di I rispetto ad un gruppo, che non porti necessariamente alle stesse Δu, Δx, ma piuttosto alle stesse $\overline{\delta} u$. Nel caso particolare dell'integrale semplice e con solo derivate prime in f, dall'invarianza delle espressioni lagrangiane si possono trarre, per il gruppo finito, conclusioni riguardo all'esistenza di integrali primi. (vedasi per esempio Engel, Gott. Nachr. 1916, pagina 270).

Se qui si sostituisce $\xi = x + \Delta x$ con $\xi - \Delta\xi$, quindi ξ ritorna in x e Δx si annulla, allora secondo la prima delle formule (20) anche η ritorna in $y = \eta - \Delta\eta$; mediante questa sostituzione $\Delta u(p)$ va in $\overline{\delta} u(p)$, sicché anche $\Delta v(r)$ va in $\overline{\delta} v(r)$, e la seconda delle formule (20) dà:

$$v + \overline{\delta} v(y, v, ...r) = v + \sum \frac{\partial B(x, u, q)}{\partial u} \overline{\delta} u(p),$$

$$\overline{\delta} v(y, v, ...r) = \sum \frac{\partial B}{\partial u_\kappa} \overline{\delta} u_\kappa(x, u, p),$$

cosicché le formule di trasformazione sono effettivamente soddisfatte per le variazioni purché solo $\overline{\delta} v$ venga assunto dipendente dai parametri, o rispettivamente dalle funzioni arbitrarie r [23].

Ne discende quindi in particolare l'invarianza relativa di $\sum \psi_i \overline{\delta} u_i$, quindi anche per la (12), poiché le relazioni di divergenza sono soddisfatte anche in y, v, l'invarianza relativa di Div$B$, e inoltre, per la (14) e la (13), l'invarianza relativa di DivΓ e dei primi membri delle dipendenze, riassunti con le $p^{(\lambda)}$, dove nelle formule trasformate si devono sempre sostituire le $p(x)$ (o rispettivamente i parametri) arbitrari con le r. In tal modo risulta ancora l'invarianza relativa di Div$(B - \Gamma)$, quindi di una divergenza di un sistema di funzioni non identicamente nullo $B - \Gamma$, la quale si annulla identicamente.

Dall'invarianza relativa di Div$B$ nel caso monodimensionale e per gruppi finiti si può ancora trarre una conclusione sull'invarianza degli integrali primi. La trasformazione dei parametri corrispondente alla trasformazione infinitesima sarà per la (20) lineare ed omogenea, e per l'invertibilità di tutte le trasformazioni anche gli ε saranno lineari ed omogenei nei parametri trasformati ε^*. Questa invertibilità si conserva sicuramente quando si pone $\psi = 0$, perché nella (20) non compare alcuna derivata delle u. Eguagliando i coefficienti degli ε^* in

$$\mathrm{Div} B(x, u, ...\varepsilon) = \frac{dy}{dx} \cdot \mathrm{Div} B(y, v, ...\varepsilon^*)$$

anche i $\frac{d}{dy} B^{(\lambda)}(y, v, ...)$ saranno funzioni lineari omogenee dei $\frac{d}{dx} B^{(\lambda)}(x, u, ...)$, cosicché da $\frac{d}{dx} B^{(\lambda)}(x, u, ...) = 0$ ovvero $B^{(\lambda)}(x, u, ...) =$ cost. discende anche che $\frac{d}{dy} B^{(\lambda)}(y, v, ...) = 0$ ossia $B^{(\lambda)}(y, v) =$ cost.

---

[23] Si mostra inoltre che y deve essere supposto indipendente da u, eccetera, perché le conclusioni siano valide. Come esempio si rammentino le quantità presentate da Klein $\delta g^{\mu\nu}$ e δq_ϱ, che soddisfano le trasformazioni per variazioni purché le p siano sottoposte ad una trasformazione vettoriale.

I ϱ integrali primi, che corrispondono a un $\mathbf{G}_\varrho$, ammettono quindi sempre il gruppo, cosicché anche l'ulteriore integrazione si semplifica. L'esempio più semplice in proposito si ha quando f non contenga x o una u, cosa che corrisponde alla trasformazione infinitesima $\Delta x = \varepsilon$, $\Delta u = 0$, o rispettivamente $\Delta x = 0$, $\Delta u = \varepsilon$. Sarà $\overline{\delta} u = -\varepsilon(du/dx)$ o rispettivamente ε, e poiché B si ottiene per derivazione e combinazioni razionali da f e $\overline{\delta} u$, è anch'esso indipendente dalle x e rispettivamente dalle u, ed ammette i gruppi corrispondenti[24].

§6. Un'affermazione di Hilbert.

Da quanto precede risulta infine ancora la dimostrazione di un'affermazione di Hilbert sulla connessione della mancanza di leggi dell'energia vere e proprie con la "relatività generale" (prima nota di Klein, Göttingen Nachr. 1917, Risposta, 1^o paragrafo), e precisamente nella versione più generale secondo la teoria dei gruppi.

L'integrale I ammetta un $\mathbf{G}_{\infty\varrho}$, e sia $\mathbf{G}_\sigma$ un qualche gruppo finito risultante per specializzazione delle funzioni arbitrarie, quindi sottogruppo di $\mathbf{G}_{\infty\varrho}$. Al gruppo infinito $\mathbf{G}_{\infty\varrho}$ corrispondono allora dipendenze (16), al gruppo finito $\mathbf{G}_\sigma$ relazioni di divergenza (13); e inversamente dall'esistenza di una qualche relazione di divergenza discende l'invarianza di I rispetto ad un gruppo finito, che risulta identico a $\mathbf{G}_\sigma$ se e solo se le $\overline{\delta} u$ sono combinazioni lineari di quelle che si hanno per $\mathbf{G}_\sigma$. L'invarianza rispetto a $\mathbf{G}_\sigma$ non può quindi portare a nessuna relazione di divergenza diversa dalle (13). Poiché dall'esistenza delle (16) discende l'invarianza di I rispetto alle trasformazioni infinitesime Δu, Δx di $\mathbf{G}_{\infty\varrho}$ per $p(x)$ *arbitrarie*, ne discende in particolare già l'invarianza rispetto alle trasformazioni infinitesime di $\mathbf{G}_\sigma$ originate da quelle per specializzazione, e di conseguenza rispetto a $\mathbf{G}_\sigma$. Le relazioni di divergenza $\sum \psi_i \delta u_i^{(\lambda)} = \mathrm{Div} B^{(\lambda)}$ devono quindi essere conseguenza delle dipendenze (16), e queste ultime si possono anche scrivere: $\sum \psi_i a_i^{(\lambda)} = \mathrm{Div}\chi^{(\lambda)}$, dove i $\chi^{(\lambda)}$ sono combinazioni lineari delle espressioni lagrangiane e delle loro derivate. Poiché gli ψ intervengono linearmente

---

[24]Nei casi in cui già dall'invarianza di $\int (\sum \psi_i \delta u_i) dx$ deriva l'esistenza di integrali primi, questi non ammettono il gruppo completo $\mathbf{G}_\varrho$; per esempio $\int (u'' \delta u) dx$ ammette la trasformazione infinitesima: $\Delta x = \varepsilon_2$, $\Delta u = \varepsilon_1 + x\varepsilon_3$, mentre l'integrale primo $u - u'x =$ cost., che corrisponde a $\Delta x = 0$, $\Delta u = x\varepsilon_3$, non ammette le altre due trasformazioni infinitesime, perché contiene esplicitamente sia u che x. A questo integrale primo corrispondono trasformazioni infinitesime per f che contengono derivate. Si vede quindi che l'invarianza di $\int \cdots \int (\sum \psi_i \delta u_i) dx$ in ogni caso produce meno dell'invarianza di I, cosa che va osservata riguardo alla questione sollevata in una nota precedente.

sia nelle (13) che nelle (16), anche le relazioni di divergenza devono essere in particolare combinazioni *lineari* delle dipendenze (16); quindi risulta $\mathrm{Div} B^{(\lambda)} = \mathrm{Div}(\sum \alpha \cdot \chi^{(\kappa)})$. I $B^{(\lambda)}$ stessi si compongono linearmente con i χ, vale a dire con le espressioni lagrangiane e le loro derivate, e con funzioni la cui divergenza è identicamente nulla, come le $B - \Gamma$ che compaiono alla fine del §2 , per le quali $\mathrm{Div}(B - \Gamma) = 0$, e dove la divergenza ha parimenti carattere invariante. Designerò come "improprie" le relazioni di divergenza, per le quali i $B^{(\lambda)}$ si possono comporre nel modo illustrato prima con le espressioni lagrangiane e con le loro derivate, tutte le altre come "proprie".

Se inversamente le relazioni di divergenza sono combinazioni lineari delle dipendenze (16), quindi "improprie", dall'invarianza rispetto a $\mathbf{G}_{\infty\varrho}$ risulta quella rispetto a $\mathbf{G}_\sigma$; $\mathbf{G}_\sigma$ sarà sottogruppo di $\mathbf{G}_{\infty\varrho}$. *Le relazioni di divergenza corrispondenti ad un gruppo finito* $\mathbf{G}_\sigma$ *saranno improprie se e solo se* $\mathbf{G}_\sigma$ *è un sottogruppo di un gruppo infinito, rispetto al quale* I *è invariante.*

Per specializzazione dei gruppi si ottiene quindi l'affermazione originale di Hilbert. Per "gruppo degli spostamenti" si intenda il gruppo finito:

$$y_i = x_i + \varepsilon_i, \quad v_i(y) = u_i(x),$$

quindi:

$$\Delta x_i = \varepsilon_i, \quad \Delta u_i = 0, \quad \bar{\delta} u_i = -\sum_\lambda \frac{\partial u_i}{\partial x_\lambda}\, \varepsilon_\lambda.$$

L'invarianza rispetto al gruppo degli spostamenti afferma, come è noto, che in $I = \int \cdots \int f\,(x, u, \partial u/\partial x, ...)\, dx$ le x non appaiono esplicitamente in f. Le n relazioni di divergenza corrispondenti

$$\sum \psi_i \frac{\partial u_i}{\partial x_\lambda} = \mathrm{Div}\ B^{(\lambda)} \quad (\lambda = 1, 2, ...n)$$

sono indicate come "relazioni dell'energia", poiché le "leggi di conservazione" $\mathrm{Div} B^{(\lambda)} = 0$ che corrispondono al problema variazionale corrispondono alle "leggi dell'energia", e i $B^{(\lambda)}$ corrispondono alle "componenti dell'energia". Si ha quindi: *Se* I *ammette il gruppo degli spostamenti, le relazioni dell'energia sono improprie se e solo se* I *è invariante rispetto a un gruppo infinito, che contenga il gruppo degli spostamenti come sottogruppo*[25].

Un esempio di tali gruppi infiniti è dato dal gruppo di *tutte* le trasformazioni delle x e di quelle trasformazioni indotte delle $u(x)$ nelle quali compaiono solo derivate delle funzioni arbitrarie $p(x)$; il gruppo degli spostamenti risulta dalla specializzazione $p^{(i)}(x) = \varepsilon_i$; deve tuttavia rimanere indeciso,

[25] Le leggi dell'energia della meccanica classica e parimenti quelle della vecchia "teoria della relatività" (nella quale $\sum dx^2$ va in se stesso) sono "proprie" perché in questo caso non intervengono gruppi infiniti.

se con esso - e per mezzo dei gruppi che risultano per variazione di I per un integrale al contorno - sono già dati i più generali di questi gruppi. Trasformazioni indotte del tipo suddetto s'ottengono quando si sottopongono le u alla trasformazione dei coefficienti di una "forma differenziale totale", vale a dire di una forma $\sum ad^\lambda x_i + \sum bd^{\lambda-1}x_i dx_\kappa + \cdots$, che oltre ai dx contiene anche differenziali superiori; trasformazioni indotte più particolari, per le quali i $p(x)$ compaiono solo in derivate prime, sono date dalle trasformazioni dei coefficienti delle forme differenziali consuete $\sum cdx_{i_1}...dx_{i_\lambda}$, e di solito si sono considerate solo queste.

Un ulteriore gruppo del tipo prima dato - che per la presenza del termine logaritmico non può essere nessuna trasformazione di coefficienti - è il seguente:

$$y = x + p(x),\ v_i = u_i + \ln(1 + p'(x)) = u_i + \ln\frac{dy}{dx},$$

$$\Delta x = p(x),\ \Delta u_i = p'(x)^{26},\ \overline{\delta} u_i = p'(x) - u_i' p(x).$$

Le dipendenze (16) saranno in questo caso:

$$\sum_i \left(\psi_i u_i' + \frac{d\psi_i}{dx}\right) = 0,$$

e le relazioni dell'energia improprie saranno:

$$\sum_i \left(\psi_i u_i' + \frac{d(\psi_i + \text{cost.})}{dx}\right) = 0.$$

Un integrale invariante semplicissimo del gruppo è:

$$I = \int \frac{e^{-2u_1}}{u'_1 - u'_2} dx.$$

Il più generale I si determina per integrazione della equazione differenziale di Lie (11) :

$$\overline{\delta} f + \frac{d}{dx}(f \cdot \Delta x) = 0,$$

che, sostituendo i valori per Δx e $\overline{\delta} u$, purché si assuma che f dipenda solo dalle derivate prime delle u, diventa

$$\frac{\partial f}{\partial x} p(x) + \left\{\sum \frac{\partial f}{\partial u_i} - \frac{\partial f}{\partial u'_i} u'_i + f\right\} p'(x) + \left\{\sum \frac{\partial f}{\partial u''_i}\right\} p''(x) = 0$$

[26]Da queste trasformazioni infinitesime si calcola a ritroso la trasformazione finita mediante il metodo illustrato alla fine del §4.

(identicamente in $p(x)$, $p'(x)$, $p''(x)$). Questo sistema di equazioni ammette già per due funzioni $u(x)$ soluzioni che contengono davvero le derivate, vale a dire:

$$f = (u'_1 - u'_2)\Phi\left(u_1 - u_2, \frac{e^{-u'_1}}{u'_1 - u'_2}\right),$$

dove Φ indica una funzione arbitraria degli argomenti considerati.

Hilbert esprime la sua affermazione dicendo che la mancanza di leggi dell'energia vere e proprie è un segno caratteristico della "relatività generale". Perché questa affermazione valga testualmente, bisogna interpretare il termine "relatività generale" in modo più vasto del solito, estenderlo anche ai gruppi prima considerati, dipendenti da n funzioni arbitrarie[27].

[27] In proposito si riconferma la correttezza di un'osservazione di Klein, che il termine "relatività", usuale in fisica, va sostituito con "invarianza rispetto ad un gruppo". (Sui fondamenti geometrici del gruppo di Lorentz. Jhrber. d. d. Math. Vereinig. Vol. 19, p. 287, 1910; pubblicato su phys. Zeitschrift.)