QUANDO LA FISICA PARLAVA TEDESCO

(ALCUNE MEMORIE DI UN'EPOCA)

tradotte da Salvatore Antoci
ricercatore del C.N.R. presso l'Unità I.N.F.M. di Pavia

Indice

Indice degli autori citati

Indice degli argomenti

Prefazione

La Meccanica Quantistica è una teoria completa? e quale relazione ha con la Teoria della Relatività? certo sono difficilmente compatibili come testimoniano i molti e passati tentativi alternativi di fonderle e il grandioso tentativo in atto di formulare una teoria delle stringhe.

Questi sono problemi vivi anche in Italia nonostante la loro "ovvia" improduttività: altrettanto tale quale quella relativa ai problemi del corpo nero, dell'etere, dell'effetto fotoelettrico, della irreversibilità e equipartizione che tanto occuparono i fisici dell'800 e 900. Sono problemi sui quali, specialmente in Italia, si corre il rischio di crescente isolamento mentre i ricercatori "seri" si dedicano a chiedere, per forse fornire, aiuto ad una industria priva di iniziative e originalità.

È utile quindi aver accesso ai classici, agli articoli in cui queste teorie presero forma e furono in grado di predire con meravigliosa precisione risultati confermati da celebri esperimenti. Questa collezione di opere tradotte integralmente dagli originali in tedesco della prima metà del 900 fornisce agli studiosi (e certo anche agli studenti) uno strumento indispensabile non solo fino a quando il tedesco diverrà una lingua più conosciuta in Italia ma anche dopo, in quanto è una selezione coerente e pensata il cui iter logico è analizzato nell'interessante introduzione.

Naturalmente i classici sono anche pericolosi: infatti il loro fascino può indurre i giovani a trasformarsi in storici della scienza senza prima aver avuto la necessaria esperienza con le tecniche e i metodi realmente utilizzati da quanti svolgono ricerca originale. È questo un gravissimo pericolo che però non può giustificare l'ignorare i classici: sta ai singoli individui riuscire a bilanciare l'interesse per la genesi ed evoluzione delle grandi opere del passato con la necessità di misurarsi con problemi presenti anche se molto tecnici dai quali qualcuno riuscirà a trarre idee innovatrici per i futuri classici.

Lasciando dunque a ciascuno il compito di moderare interessi prematuri verso la storia della Scienza questa collezione è dedicata principalmente ai fondamenti della Relatività e della Meccanica Quantica: non tocca la teoria quantistica dei campi che ha raggiunto il massimo sviluppo dopo gli anni '30 ove si arresta questa collezione a parte qualche eccezione che comunque non riguarda direttamente questo tema. L'ordine seguito nella presentazione degli articoli è alfabetico per autore e cronologico per ciascuno.

La Relatività è rappresentata dagli articoli di Einstein del 1905, di Minkowski del 1907, di Einstein del 1916 e dalla memoria di Schwarzschild del 1916. La Meccanica Quantica dall'articolo di Heisenberg del 1925 e da quelli di Schrödinger del 1926. Alcuni fra questi articoli sono disponibili anche in inglese (e due di essi in italiano) ma credo che pochissimi abbiano avuto accesso all'originale della soluzione a simmetria centrale della Relatività Generale. A questi articoli fanno corona un notevole numero di memorie di critica e di sviluppo che l'originalità della nuova teoria non mancò di sollevare e stimolare. Non ci si sofferma dunque sugli articoli che hanno preparato la formulazione del 1916 della Relatività e del 1925-26 della Meccanica Quantica: una scelta che ritengo naturale ed utile.

All'articolo sulla Relatività generale (1916) fa seguito, qui, una nota di Einstein in cui ne enuncia brevemente i principi: un sunto chiarificatore (1916). Nel successivo articolo (1918) vengono derivate le equazioni che regolano le onde gravitazionali: nel pieno del conflitto mondiale la corrispondenza con Levi-Civita viene mantenuta e citata. Risulta difficile comprendere oggi come ciò sia stato possibile. Segue (sempre 1918) un'altra nota ove Einstein torna ad esporre i principi della teoria generale; e l'esposizione è seguita, in tempi più quieti, da una divertente discussione (1920) in cui Einstein risponde ad obiezioni varie senza che si abbia l'impressione che i suoi interlocutori e critici, pur fisici di rango, lo stiano a sentire: è rassicurante che in questa situazione si sia trovato addirittura Einstein; senza dubbio ciò alleverà le angosce di quanti continuamente si trovano testimoni di dialoghi di questo genere.

Einstein presenta (1921) all'Accademia Prussiana alcune considerazioni sulla Matematica: il giudizio è positivo a dispetto dell'affermazione che "laddove le leggi della matematica corrispondono alla realtà, esse non sono certe, e laddove sono certe esse non corrispondono alla realtà". Sarebbe però fuorviante credere che questo sia un articolo filosofico: il suo fine molto concreto è quello di discutere la questione della finitezza (o meno) dell'Universo proponendo vari modi per studiarla.

Ma l'attenzione di Einstein è ormai attratta anche dalla nuova teoria dei quanti (che lui stesso contribuì a fondare circa un ventennio prima) e dalla minacciosa possibilità di una sua incompatibilità con la Relatività. E in proposito è tradotta un'altra comunicazione all'Accademia Prussiana (1923) in cui propone di derivare dalle equazioni del campo gravitazionale la determinazione dello stato iniziale di un elettrone in un atomo il quale "non può essere scelto liberamente, ma questa scelta deve corrispondere alle condizioni quantiche. In generale: non solo l'evoluzione temporale, ma anche lo stato iniziale obbedisce a leggi".

Sulla Relatività e la sua relazione con la teoria dei quanti Einstein ritorna con una discussione sulla nozione di Etere (1924): concludendo che "Ma perfino qualora queste possibilità maturassero in vere teorie non potremmo fare a meno in Fisica Teorica dell'etere, cioè del continuo dotato di proprietà fisiche; la relatività generale, al punto di vista fondamentale della quale i fisici si atterranno sempre, esclude un'interazione immediata a distanza; ogni teoria di azione per prossimità presuppone campi continui, e quindi l'esistenza di un "etere"".

L'elettrodinamica dei corpi in movimento è rappresentata, naturalmente, dall'articolo fondamentale di Minkowski (1907), poi dai lavori di Gordon (1923) sull'influenza della materia sui processi elettromagnetici in Relatività generale e di Von Laue (1950): quest'ultimo, ormai vicino a noi in spirito e formalismo, ritorna sulla questione di quale sia il corretto tensore elettromagnetico per la descrizione dell'elettrodinamica dei corpi in movimento.

La memoria di Schwarzschild (1916) sulla soluzione a simmetria centrale delle equazioni di Einstein è stata inclusa nella collezione e se ne può quindi leggere la semplicità e apprezzare l'affermazione "... è sempre piacevole disporre di soluzioni esatte di forma semplice. Più importante è che il calcolo assicuri anche la determinazione univoca della soluzione ..." che pare diretta a quanti dubitano della grande importanza delle soluzioni esatte che continuano ad apparire (a partire dalla derivazione newtoniana delle leggi di Keplero) nei più diversi problemi, penso ad esempio alle soluzioni del modello di Ising, dei dimeri, dei sei vertici, degli otto vertici, ai reticoli di Toda e Calogero, all'equazione di Korteveg De Vries, al moto dei vortici sottili ed equazione di Schrödinger non lineare ecc. Questo è un articolo che tutti conosciamo ma che pochi fra noi hanno letto in originale certo a causa di difficoltà linguistiche e la sua traduzione sarà quindi benvenuta.

L'articolo espositivo di Bohr, Kramers e Slater (1924) apre la collezione sulla Meccanica Quantica: è di difficile lettura perché insolitamente privo di formule ed è dedicato ad una discussione concettuale sulla relazione fra fenomeni elettromagnetici macroscopici continui e i fenomeni quantici microscopici che li possono generare grazie alle grandi differenze delle scale di tempo ed energia coinvolte.

L'articolo di Born (1926) descrive in forma divulgativa l'urto di un elettrone con un atomo e pone la questione dell'esistenza di "variabili nascoste" optando per la non esistenza delle stesse.

Il successivo articolo di Bose (1924) dà respiro al lettore turbato dalle inquietanti questioni di principio appena sollevate e in poche chiarissime righe deriva la legge di radiazione del corpo nero (e indirettamente la statistica di Bose): è un articolo che fu tradotto in tedesco (dall'inglese) da Einstein in persona. È nella sostanza assai noto come quello di Einstein del 1917, uno dei classici il cui contenuto tutti noi abbiamo incontrato nei testi universitari.

Si ritorna alle questioni di principio con l'articolo di Ehrenfest (1932) che esordisce "Queste domande ... possono ben essere accantonate come "prive di senso", se si vuole stare comodi. Allora qualcuno dovrà pur attirarsi l'antipatia, e porle tuttavia." Segue un'interessante serie di domande che, pur sensate e forse ancora senza risposta, fanno vedere la difficoltà che fisici non più giovani incontrano nell'assorbire nuove idee: " non si potrebbe degnare qualcuno, che realmente domini questa materia, di esprimere in forma leggibile anche per noi fisici vecchi ciò che è noto per il gruppo delle rotazioni reali ...". Questo ci ricorda la odierna situazione riguardo alla teoria delle stringhe.

L'articolo di Einstein (1953) ove dichiara il carattere statistico e incompleto della descrizione dei singoli fenomeni della Meccanica Quantistica precede, per la scelta dell'ordine di presentazione, l'articolo di Heisenberg (1925) ove si pone con forza la questione della osservabilità di quantità che entrano nella descrizione di fenomeni e viene fondata la Meccanica Quantistica nella versione raggiunta alla fine della sua evoluzione verso una teoria completa: questo articolo di Heisenberg fu preceduto da molti articoli dei fondatori della Meccanica Quantistica che fortunatamente sono disponibili in inglese nella collezione di Van der Waerden e che ne rendono comprensibile la genesi e molti aspetti tecnici.

Gli articoli di London sulla teoria di Weyl e di Madelung su un'interpretazione fluidodinamica (1927 e 1926) mostrano quanto avanzata già fosse la Meccanica Quantica appena dopo la sua formulazione: questi articoli già fanno riferimento a Schrödinger i cui lavori fondamentali sono anche raccolti in questa collezione.

L'articolo di Pauli (1932) riprende i problemi non matematici sollevati da Ehrenfest (i quali evita perché "incompetente", cosa non realmente credibile mentre è più probabile che li abbia considerati di evidente risposta e non lo abbia detto per una forma di deferenza verso Ehrenfest). Si trova poi un articolo di gran lunga successivo, di Renninger (1959), che potrebbe essere considerato antesignano della Meccanica Quantistica stocastica di Nelson (apparsa pochi anni dopo).

Un'interruzione importante alle questioni di critica dei fondamenti è poi costituita da una serie di articoli di Schrödinger fra il 1924 e il 1926 che contiene i quattro chiarissimi articoli sulla "quantizzazione come problema agli autovalori" in cui vengono introdotte l'equazione di Schrödinger e la funzione d'onda sulla base di un nuovo principio variazionale e via via si passa a funzioni d'onda complesse ("una certa difficoltà si trova senza dubbio nell'introdurre una funzione d'onda complessa") e, con stupore di chi li legge per la prima volta in originale (purtroppo sono fra costoro), a trattare problemi sempre più difficili fino alla teoria delle perturbazioni. La possibilità di pensare i valori medi quantici come analoghi ai valori medi classici che appaiono in connessione con l'ipotesi ergodica viene esclusa nell'ultimo lavoro (1927) degli anni venti qui riportato.

La serie di articoli di Schrödinger si conclude con l'articolo di critica del 1935: è il famoso articolo (stimolato dall'altrettanto noto articolo, dello stesso anno, di Einstein, Podolsky e Rosen) in cui appare il "gatto di Schrödinger" sottoposto a perfida (quanto ideale, per fortuna) tortura per mostrare le difficoltà fondamentali della Meccanica Quantica. L'interpretazione "di Copenhagen" non solo è oscura, ma è inconsistente logicamente e questo appare chiaro dalle considerazioni di Schrödinger. Se poi si cerca di combinare Meccanica Quantica e Relatività i problemi diventano insormontabili (e restano tali al momento). Come sottolinea Schrödinger il tempo è trattato in modo intrinsecamente asimmetrico rispetto allo spazio e questa è certo una delle cause delle difficoltà.

Questi articoli hanno generato il movimento ideale che ha portato ad una interpretazione moderna della Meccanica Quantica non relativistica e lo studente può ora rivolgersi alla teoria di Bohm; che emerge come (forse unica) interpretazione coerente (processo di misura incluso) della Meccanica Quantica. Coerente ma per alcuni ancora non soddisfacente.

L'articolo di Schrödinger riportato è un esempio importante di critica dei fondamenti e la sua lettura sarà certo utilissima agli studenti: che però, come predicato sopra, dovranno fare attenzione a non lasciarsi tentare dal dedicarsi allo studio di questioni di principio.

La collezione è conclusa da un articolo di Smekal del 1922 che propone di considerare i processi di emissione e assorbimento elettromagnetici come non indipendenti e dal successivo articolo di Wentzel del 1924 che, a partire dall'idea di Smekal, sviluppa un'"ottica quantica". L'esposizione non è chiarissima: Wentzel calcola la probabilità di transizione di un atomo E e assorbimento della luce emessa da parte di un atomo A come proporzionale al modulo quadrato di una somma su tutti i cammini che la luce, e insieme con essa l'atomo emittente stesso, possono seguire nel processo di emissione e assorbimento. La somma consiste nella somma dei prodotti dell'ampiezza dell'onda per un fattore di fase $e^{2\pi i\varphi_s}$ ove φ_s è la "fase quantica" ($h^{-1}\int(t\,dW+\sum_k q_k dp_k)$ in cui il primo termine è il contributo del cammino ottico e il secondo quello del cammino seguito dalle coordinate interne dell'atomo). Le fasi φ_s vengono interpretate come misura della deviazione della traiettoria del fotone dalla traiettoria dell'ottica geometrica e della deviazione delle coordinate interne dell'atomo da un moto classico: assumendo che l'atomo emittente e quello assorbente siano descritti da coordinate angolo–azione interne con moti periodici tutti di uguale periodo Wentzel trasforma la somma sui cammini possibili in integrale sulle variabili d'angolo dei vari gradi di libertà. Ne deduce che transizioni sono possibili solo se sono obbedite le regole di Bohr Sommerfeld. L'ipotesi sulla meccanica dei moti interni dell'atomo è ovviamente molto restrittiva (corrispondendo a integrabilità e, al tempo stesso, isocronia e con uguale periodo per i sistemi E ed A in generale diversi) e la somma sui cammini quale integrale sulle fasi non è accompagnata da giustificazioni euristiche o comunque tecniche.

C'è quindi un'analogia con l'integrale di Feynman in quanto le probabilità quantiche sono calcolate come somme su traiettorie classiche: tuttavia le somme sono pesate in modo diverso da quelle di Feynman che sono invece letteralmente somme delle fasi quantiche di ciascun cammino pesate allo stesso modo (e non con ampiezze variabili). Tenendo conto che l'articolo è del 1924 e di poco successivo a quello di de Broglie si può dire che è un brillantissimo abbozzo, giustamente posto fra gli articoli importanti qui tradotti, di una teoria futura la cui equivalenza con la Meccanica Quantica di Heisenberg e Schrödinger fu mancata dai fondatori della nuova Meccanica.

Dobbiamo essere grati a S. Antoci per le traduzioni che ha eseguito con cura filologica e con felice scelta dei testi: saranno di grande vantaggio per colleghi e studenti.

La collezione si conclude con la traduzione degli atti dell'espulsione di Einstein dall'Accademia tedesca: è, mi pare, tesi (implicita) dell'autore che con questo atto la Fisica cessò di "parlare tedesco". Dobbiamo essergli grati anche per quest'ultima traduzione: l'atto di espulsione (successivo alle dimissioni spontanee) ci fa riflettere su questioni solo apparentemente lontane dalla Fisica quali il razzismo, l'arroganza e violenza del potere, il servilismo che questo genera o forza e, in definitiva, il sonno della ragione che induce. Che la Scienza non sia separata dalla politica è per molti di noi ovvio: ma non per tutti, e comunque è bene che sia ricordato spesso.

Giovanni Gallavotti,
Roma, agosto 2002

Introduzione

Le traduzioni in italiano raccolte in questo volume, come si comprende con una semplice occhiata all'indice, non hanno alcuna pretesa di sistematicità storiografica. Accanto a traduzioni di scritti universalmente noti, e per i quali esistono già ottime traduzioni in italiano[1], si trovano quelle di opere oggi più o meno dimenticate, e viceversa lavori fondamentali, come ad esempio il "Drei-Manner-Arbeit" di Born, Heisenberg e Jordan, sono stati trascurati. Ciò dipende dal fatto che queste traduzioni sono state eseguite nel corso degli anni per soddisfare curiosità nate via via dal lavoro di ricerca, e recano, nella scelta, le tracce del carattere episodico ed individuale degli itinerari percorsi in quel lavoro.

Seguire strade non più battute può, talvolta, dar luogo a imprevisti e sorprese. Un esempio è dato dal lavoro che Walter Gordon scrisse nel 1923, intitolato "La propagazione della luce secondo la teoria della relatività". Sotto quel titolo un po' fuorviante si trovano due risultati sull'elettromagnetismo nei dielettrici in moto di sicura rilevanza ancor oggi. Entrambi sono stati derivati da Gordon con un metodo di riduzione del problema al vuoto della relatività generale, atto a disturbare la quiete mentale di chi ami segnare netti confini tra campi di indagine diversi. Essi riguardano infatti la scelta del tensore dell'energia per il campo elettromagnetico nei dielettrici in moto e l'ottica geometrica di questi ultimi.

Un'altra sorpresa s'incontra con l'articolo che Gregor Wentzel pubblicò su Zeitschrift für Physik all'inizio del 1924. Il lavoro s'intitola "Sull'ottica quantistica" e con esso il giovane Wentzel intendeva "contribuire a superare le contraddizioni che finora esistono in ottica teorica - teoria ondulatoria dell'interferenza e della polarizzazione da un lato, teoria quantistica delle righe spettrali dall'altro", interpretando "le interferenze come espressioni di leggi della statistica dei quanti che ne stanno alla base" e offrendo inoltre "un significato quantistico alla fase della luce della teoria delle onde". Con quel titolo, il lavoro si presenta come uno tra i molti tentativi compiuti a quel tempo per affrontare i problemi che l'idea della "radiazione ad aghi" proposta da Einstein nel 1905 aveva sollevato. Ma il rigoroso impianto fisico-matematico introdotto induce ad una lettura attenta. Ci si accorge allora che la probabilità per il quanto di luce di venire emesso dall'atomo A ed assorbito dall'atomo B viene trovata da Wentzel a partire dalla somma di ampiezze complesse associate a tutti i "cammini non meccanici", a ciascuno dei quali egli attribuisce una fase, desunta dalla meccanica hamiltoniana, ottenuta per integrazione lungo il cammino. Ebbene, tale probabilità è definita usando la stessa struttura formale e concettuale che avrebbe usato Feynman nel 1948 per creare la sua "terza via alla

[1] Vedansi ad esempio le magnifiche e, si direbbe, riverenti traduzioni che Paolo Straneo e Aldo Pratelli fecero rispettivamente delle memorie di Albert Einstein "Sull'elettrodinamica dei corpi in moto" e "I fondamenti della relatività generale" per la pubblicazione del volume "Cinquant'anni di relatività". Il volume fu stampato nel 1955, con prefazione di Einstein medesimo e memorie originali di Aliotta, Armellini, Caldirola, Finzi, Polvani, Severi e Straneo, a cura di Mario Pantaleo, dall'Editrice Universitaria (Giunti-Barbera) di Firenze. Più recentemente, un'interessante raccolta di traduzioni di scritti di Einstein, scientifici, epistemologici, filosofici, politici, è stata pubblicata a cura e con commento di Enrico Bellone (Einstein, Opere Scelte, Bollati Boringhieri, Torino (1988)). Nello spirito della presente raccolta ho tradotto ex novo anche articoli che si trovano nelle opere prima ricordate; la sovrapposizione è tuttavia limitata alle traduzioni riportate alle pagine 3, 24 e 231. Analogamente mi sono comportato con opere dell'"annus mirabilis" di Schrödinger, delle quali un'ottima traduzione commentata si trova nel libro di Sigfrido Boffi (S. Boffi, La Meccanica delle onde, Quaderni di Fisica Teorica, Pavia (1991)).

meccanica quantistica"[2].

Anche lavori universalmente ritenuti alla base della nostra conoscenza attuale, come la memoria sui fondamenti della relatività generale pubblicata da Einstein nel 1916 su Annalen der Physik, se letti oggi, riservano delle sorprese. Ritorna in mente, a questo proposito, la frase di Borges sui libri antichi[3], quando afferma che "Si leemos un libro antiguo es como si leyéramos todo el tiempo che ha transcurrido desde el día en que fue escrito y nosotros". Se un giovane relativista dei nostri giorni prova a leggere la memoria del 1916 stenta a riconoscere nello scritto di Einstein quello che ha trovato nei manuali studiati e negli articoli di ricerca che frequenta. Trova antiquati i metodi di geometria differenziale adoperati, ma, cosa ben più grave, non ritrova affatto, nell'identificazione tra entità geometriche e concetti fisici compiuta da Einstein, l'interpretazione fisica della teoria che gli è stata insegnata.

Il principio di equivalenza tra inerzia e gravitazione, dal quale Einstein prese le mosse nel 1907 e riguardo al quale nel 1916, in risposta a Kottler, egli dichiarava costituire "il fondamento esclusivo della teoria", non è più riconosciuto in questo ruolo dai relativisti di oggi. Vale la pena di analizzare questa evoluzione, perché le sue conseguenze sono state profonde. Per Einstein, le forze inerziali e quelle gravitazionali costituivano un'entità sola, espressa (per una massa di prova unitaria) dai due termini, individualmente non covarianti, della tetraaccelerazione assoluta. La forza gravito-inerziale non era quindi una proprietà del cronotopo, perché per definirla occorre conoscere, oltre alla metrica, anche la linea oraria della particella di prova.

Questa identificazione, che ancora nel 1935 era naturale ed ovvia per Whittaker, venne messa in discussione nel 1937 da Synge, sulla base del fatto che nel caso di moto geodetico la forza gravito-inerziale di Einstein è sempre nulla, e dell'idea che in relatività generale debbano valere solo leggi differenziali che confrontino gli accadimenti in eventi vicini. Synge propose quindi di definire la forza gravitazionale mediante la tetraaccelerazione relativa di due punti materiali di prova vicini, entrambi in moto geodetico. Tale definizione non riconosce più alcun significato al principio d'equivalenza; poiché nell'equazione di deviazione geodetica interviene il tensore di curvatura di Riemann, essa associa l'esistenza della forza gravitazionale alla presenza di una curvatura non nulla. La nuova definizione ha avuto il sopravvento, dal 1960 in poi, assieme all'idea, più generica e vaga, che il campo gravitazionale sia in qualche modo definito dal tensore di curvatura tramite i suoi invarianti.

Il cambiamento di prospettiva ha mutato di riflesso il modo d'interpretare le soluzioni delle equazioni di campo di Einstein. Il caso della soluzione statica sferosimmetrica, trovata da Karl Schwarzschild[4] nel 1916 è esemplare. Fino al 1960 la comunità dei relativisti era stata sostanzialmente d'accordo sul fatto che tale

[2]Un'indagine presso il Niels Bohr Archive ha mostrato che Dirac nel 1925 aveva studiato a fondo la "fase di Wentzel" ed aveva scritto una relazione a Fowler sull'argomento, allegata ad una lettera che quest'ultimo aveva inviato a Bohr. Il ruolo della lagrangiana classica nella meccanica quantistica è stato oggetto di costante attenzione per Dirac (vedi Phys. Zeitschr. Sowjetunion **3** 64-72 (1933), Rev. Mod. Phys. **17** 195-199 (1945)). Feynman stesso ha poi scritto d'essersi ispirato, per la terza via, alle opere citate di Dirac.

[3]J. L. Borges, *Borges oral*, Emecé, Buenos Aires (1979).

[4]Sotto il nome di "soluzione di Schwarzschild" nei manuali e negli articoli di ricerca si riporta la soluzione statica sferosimmetrica trovata successivamente da Droste, Hilbert e Weyl. Essa differisce dalla soluzione originale di Schwarzschild per la scelta della varietà sulla quale la soluzione è definita, come si constata facilmente dalla lettura della memoria di Schwarzschild.

soluzione costituisse solo un modello ideale del campo d'una massa, che la singolarità della metrica al cosidetto "raggio di Schwarzschild" stesse ad indicare che lì la soluzione perde significato fisico, che in ultima analisi Schwarzschild avesse avuto ragione a terminare a quel raggio la varietà sulla quale la soluzione era data. Quest'idea viene confermata dalla circostanza, definibile in maniera invariante, che la norma della tetraaccelerazione d'una particella di prova nel campo di Schwarzschild[5] diverge se si immagina che quest'ultima sia trattenuta a riposo in posizione sempre più prossima al raggio anzidetto.

Ma la definizione di Einstein della forza gravito-inerziale è stata abbandonata e, secondo la definizione di Synge, la forza gravitazionale non diverge al "raggio di Schwarzschild". Di conseguenza, la singolarità della metrica ivi presente è stata dichiarata priva di significato fisico, dovuta solo ad un'infelice scelta delle coordinate, e su questa base si è deciso che la strada della continuazione analitica era percorribile. Il mutamento nell'interpretazione fisica della teoria impostosi gradualmente tra il 1937 e il 1960 ha reso quindi possibile, e generalmente accettata, l'idea, prima generalmente respinta, che la regione interna al di qua del "raggio di Schwarzschild" dovesse ritenersi fisicamente significativa.

Il giovane relativista di oggi troverà inoltre, negli scritti di Einstein successivi al 1916, un atteggiamento verso la relatività generale che non si trova nei manuali: per Einstein la teoria del 1915 non è la teoria compiuta, valida su scala macroscopica, del campo gravitazionale (comunque lo si definisca): è invece solo un primo passo d'un programma che mira alla descrizione, sia su scala macroscopica che microscopica, di tutti i processi naturali mediante una sola teoria di campo. Nel 1923 Einstein si interroga se la soluzione del problema dei quanti non si possa trovare costruendo un sistema sovradeterminato di equazioni differenziali alle derivate parziali, nelle quali intervengano gli oggetti geometrici che descrivono la gravitazione e l'elettromagnetismo; nel 1925, dopo aver dedicato qualche attenzione alla teoria pentadimensionale di Kaluza, egli propone una descrizione unitaria del campo gravitazionale e del campo elettromagnetico mediante un'estensione non simmetrica della relatività generale.

Dopo svariati tentativi d'altro genere, proprio questa estensione non simmetrica Einstein riprese e indagò sistematicamente, dal 1945 al 1955, a Princeton. Per lui, come testimoniato dallo scritto del 1953 dedicato a Max Born, la meccanica quantistica era una teoria statistica soddisfacente dei processi microscopici, ma mancava la "descrizione reale del sistema singolo", poiché "la natura come un tutto può esser pensata solo come un sistema individuale (che esiste unico) e non come una "totalità di sistemi"". La teoria di campo unitaria che egli cercava, in sintonia d'intenti e di metodi con Erwin Schrödinger, proprio questa descrizione del sistema singolo avrebbe dovuto provvedere.

Sia Einstein che Schrödinger erano infatti legati, sia pure in modo diverso, all'ideale intuitivo-realistico della "Physik der Modelle", descritta da Schrödinger con parole d'ammirazione e nostalgia all'inizio del rapporto sulla situazione attuale della meccanica quantistica che egli pubblica nel 1935 su Naturwissenschaften, stimolato dall'apparizione dell'articolo di Einstein, Podolsky e Rosen, e che ironicamente chiama "confessione generale". Tutto il lavoro di Schrödinger sul problema dei quanti è permeato da questo ideale. Ciò non significa certo timore del

[5]In una metrica statica la nozione di "particella di prova a riposo" può essere espressa in modo invariante.

nuovo: Schrödinger non esita, nel 1923, ad indicare un possibile legame tra la quantizzazione di Bohr, Sommerfeld ed Epstein e la teoria unitaria della gravitazione e dell'elettromagnetismo proposta da Weyl nel 1919 né, l'anno successivo, sotto l'influenza del lavoro di Bohr, Kramers e Slater, a meditare la riduzione del principio di conservazione dell'energia a principio di natura statistica. Nei lavori del suo "annus mirabilis" è evidente la soddisfazione per aver trovato un nuovo metodo, grazie al quale la quantizzazione non deriva più dall'imposizione arbitraria di "numeri interi", bensì l'interezza compare in modo spontaneo e naturale, come l'interezza del numero dei nodi di una corda musicale oscillante. Schrödinger lavora con l'intento di costruire una descrizione della realtà microscopica mediante una teoria di campo logicamente chiusa che descriva l'elettromagnetismo mediante le equazioni di Maxwell e la materia, seguendo le idee di de Broglie ed Einstein, mediante un'equazione per le onde materiali. Mentre raccoglie, nelle sue comunicazioni ad Annalen der Physik, le conferme matematicamente a portata di mano sulla capacità della sua teoria di render conto dei fatti atomici, la sua attenzione è sempre protesa oltre.

Nella prima comunicazione, dopo esser pervenuto ad un'equazione per gli stati stazionari della funzione ψ ed averla applicata all'atomo d'idrogeno, pensa all'estensione relativistica del risultato, che permetterebbe di derivare una approssimata proporzionalità tra energia e frequenza, quindi di farsi una ragione della condizione delle frequenze di Bohr, e immagina un meccanismo d'emissione e assorbimento di radiazione elettromagnetica legato ai battimenti tra le oscillazioni di onde materiali stazionarie aventi frequenza diversa. Spera di ottenere per questa via una descrizione spaziotemporale continua delle transizioni, che eviti i salti quantici della dottrina di Planck-Einstein-Bohr.

Nella quarta comunicazione, dopo aver ripreso l'analogia istituita da Hamilton tra meccanica ed ottica, che già aveva usato come punto di partenza nella prima e nella seconda, perviene a scrivere l'equazione che porterà il suo nome, e trova "un tantino antipatico" il fatto che la funzione d'onda risulti intrinsecamente complessa, ma si consola sottolineando che l'equazione (e la sua complessa coniugata) sono l'assai conveniente surrogato di un'equazione differenziale quartica per una funzione reale. Con soddisfazione giunge a determinare quella che egli ritiene sia l'equazione di continuità dell'elettricità portata dalle onde materiali, anche se la costruzione risulta complicata quando si abbia a che fare con n particelle materiali. Nel caso della particella singola, tuttavia, la distribuzione di carica e di corrente che egli trova gode delle proprietà qualitativamente attese in conformità all'idea che emissione ed assorbimento siano associate a battimenti. Ma già il dubbio sul significato fisico della ψ appare, perché proprio per costruire la densità di corrente nel caso di n particelle Schrödinger si trova ad attribuire a $\bar{\psi}\psi$ il ruolo di funzione peso nello spazio delle configurazioni. Egli afferma infatti: "Ogni configurazione della meccanica dei punti contribuisce con un certo peso alla configurazione vera secondo la meccanica ondulatoria, peso dato da $\psi\bar{\psi}$", e commenta questa affermazione con un primo esempio della vena ironica che dispiegherà in anni successivi, aggiungendo: "Se si amano i paradossi, si può dire che il sistema si trova in un certo senso contemporaneamente in tutte le posizioni pensabili dal punto di vista cinematico, ma non in tutte "con ugual intensità"".

Il dubbio che alla ψ, anche per una sola particella, non si possa attribuire alcun ruolo fisico diretto, diventa acuto già sul finire del 1926, quando Schrödinger invia per la pubblicazione il lavoro sulla legge dell'energia e dell'impulso delle onde materiali. Finalmente, grazie all'opera di Klein, Fock, Gordon ed altri, egli può scrivere una lagrangiana relativisticamente invariante per le onde materiali, ed aggiungervi la lagrangiana elettromagnetica. La teoria logicamente chiusa alla quale aspirava è completa, o quasi. Le equazioni si possono derivare applicando il metodo di Hamilton; l'interazione delle onde materiali con il campo elettromagnetico è scritta direttamente nelle leggi di conservazione. Eppure la teoria non può render conto dei fatti osservati neppure per l'atomo d'idrogeno. Essa richiede infatti di introdurre nell'equazione delle onde materiali assieme al potenziale del nucleo quello dovuto alla carica elettronica. Ma Schrödinger sa che questo potenziale non darebbe correttamente i termini dell'atomo di idrogeno. L'ideale della fisica dei modelli non appare quindi realizzato: per render conto dei fatti osservati, bisogna adattarsi ad usare le formule in maniera incoerente, ed il progetto di descrivere le transizioni quantiche come processi continui per questa via risulta vanificato. Alla fine di questa memoria Schrödinger si chiede se la soluzione della difficoltà non si debba cercare nell'interpretazione puramente statistica della teoria, ma gli pare che ciò "significhi una troppo fondamentale rinuncia alla comprensione del singolo evento".

L'idea di un'interpretazione probabilistica della meccanica quantistica, avanzata timidamente nel 1926 da Born con una comunicazione provvisoria, e divenuta col passar degli anni la dottrina ufficiale, è sottoposta da Schrödinger nel 1935 ad una valutazione critica accurata nel già ricordato rapporto per Naturwissenschaften. Il termine di paragone è costituito, come s'è detto, dalla "Physik der Modelle". In quest'ultima si usa costruire una rappresentazione degli oggetti naturali precisa in ogni dettaglio, senza pretendere che tutti i dettagli siano direttamente osservabili, data la limitatezza della nostra esperienza. Il modello classico si fonda su elementi determinanti; se essi sono noti ad un certo tempo, il modello permette di predire con esattezza il valore degli elementi determinanti, ovvero lo stato del sistema, ad ogni tempo successivo. Mediante il confronto con l'esperienza, il modello classico è per sua natura perfettibile, e sebbene il metodo classico del modello preciso sembri permettere in linea di principio di calcolare in anticipo il risultato di tutti gli esperimenti in modo del tutto esatto, nessuno è così ingenuo da ritenere che ciò accada per davvero. Dire "modello completo", nota Schrödinger, implica una contraddizione in termini, all'incirca come "massimo numero intero".

La meccanica quantistica, al confronto, per Schrödinger è una teoria ben strana: prende a prestito dalla meccanica classica i modelli e la descrizione canonica, ma poi li dichiara incompetenti a descrivere la realtà, poiché al più si possono assegnare valori numerici precisi ad una metà ben scelta di un gruppo intero di elementi determinanti. Con essa il concetto classico di stato va perso, e quindi ovviamente vien meno la possibilità di predire uno stato futuro; ci si deve limitare a predizioni di probabilità attraverso la funzione d'onda, che però evolve altrettanto deterministicamente quanto lo stato classico, e ne costituisce per così dire il surrogato.

Dell'imprecisione o indeterminazione che accompagna la descrizione quantistica, per Schrödinger, non si riesce ad avere un'idea chiara: essa si può definire solo negativamente. Essa non è l'indeterminazione familiare nella trattazione statistica dei modelli classici, dovuta all'impossibilità pratica di fissare tutti gli elementi determinanti; non è neppure una indeterminazione intrinseca di qualcuno di questi ultimi perché, postulato fondamentale della teoria, ognuno degli elementi determinanti del modello classico di partenza può essere in linea di principio misurato con tutta l'accuratezza desiderabile. "Che cosa ci rimane allora?" si chiede Schrödinger. E osserva: "In questo dilemma assai difficile la concezione dominante si aiuta o ci aiuta facendo ricorso all'epistemologia. Ci vien detto che non si deve fare alcuna distinzione tra lo stato reale dell'oggetto di natura e quello che io ne so in proposito, o forse meglio, quello che ne potrei sapere in proposito, qualora me ne dessi la pena. Reali - così si dice - sono propriamente solo percezione, osservazione, misura." Insomma: "La realtà si oppone all'imitazione mentale mediante un modello. Perciò si lascia andare il realismo ingenuo e ci si appoggia direttamente alla tesi indubitabile che reali (per il fisico) siano in fin dei conti solo l'osservazione, la misura. Quindi d'ora in poi tutto il nostro pensiero fisico avrà come unica base e come unico oggetto i risultati delle misure eseguibili in linea di principio, e ad un altro tipo di realtà o ad un modello il nostro pensiero dovrà ora espressamente non far più riferimento."

Ma le difficoltà irrisolte d'ordine fisico, che Schrödinger stesso aveva posto in evidenza nel 1926, e che il cambiamento intenzionale del punto di vista epistemologico vorrebbe evitare, riappaiono proprio nella teoria della misura. Come surrogato dello stato classico, la funzione d'onda di un sistema ha il grave difetto di sparire quando si vorrebbe che ci fosse. Schrödinger considera due sistemi A e B con il ruolo (intercambiabile) di oggetto misurato e di strumento di misura. Li considera dapprima separati (ai due capi dell'universo); in tale condizione certamente saranno dotati ciascuno di una funzione d'onda individuale, e quindi si potrà avere, sia di A che di B, la conoscenza massimale che la meccanica quantistica consente. Ma la struttura matematica della teoria è tale che se A e B vengono fatti interagire perdono la loro individualità, non hanno più una funzione d'onda propria, perché si ha solo la funzione d'onda complessiva, nella quale la conoscenza massimale delle due parti è più o meno dissipata in un intreccio di proposizioni condizionali del tipo: se in A..., allora in B... Il guaio vero, però, si ha quando le due parti vengono allontanate mutuamente e non possono più interagire. Ci si aspetterebbe allora che le due parti riacquistassero una funzione d'onda propria, ma la struttura matematica della teoria non lo permette, le proposizioni condizionali rimangono, e solo un'intervento di tipo non fisico, qualcosa che si può assimilare ad un atto mentale, ad un'ispezione di un segno sullo strumento di misura da parte di un essere senziente, può risolvere l'intreccio e ridare al sistema misurato ed allo strumento di misura una funzione d'onda individuale, corrispondente, se la misura è ben fatta, ad un autostato associato ad un autovalore della quantità misurata. Dalla forma della funzione ψ dell'oggetto prima della misura a quella assunta dopo non si va quindi con un processo continuo determinato dall'equazione differenziale che dovrebbe auspicabilmente descrivere sempre e comunque l'evoluzione del sistema, "poiché dal punto di vista realistico l'osservazione è un processo di natura come ogni altro e non può di per sè provocare un'interruzione dell'evoluzione regolare della natura". Non ci si va neppure con una discontinuità, con un salto. Ci si va attraverso la sparizione all'inizio del processo di misura e con il successivo ripristino mediante un atto di rigenerazione di natura non fisica, e con risultato generalmente casuale, perché dipendente dal valore assunto in modo generalmente imprevedibile della quantità misurata.

Nella sua "confessione generale" Schrödinger insiste a lungo sulle "antinomie dell'intreccio". Sempre riguardo ai due sistemi A e B portati ad interagire e poi separati, egli nota che, quando l'intreccio si può risolvere con una serie di misure effettuate esclusivamente su B, la funzione d'onda rigenerata per A alla fine del processo dipende da quali siano state le misure su B, e in quale ordine si siano effettuate, in contrasto con quanto ragionevolmente ci si poteva attendere. Egli studia in un esempio semplice l'intreccio in funzione del tempo, e suggerisce che le antinomie evidenti anche in questo caso forse si risolverebbero, se nella struttura della teoria il tempo non avesse il ruolo particolare che la formulazione non relativistica gli attribuisce, e che impone di associare ad ogni misura un tempo esattamente conosciuto. D'altra parte, è proprio la formulazione non relativistica che permette di fondere con estrema semplicità due sistemi parziali A e B in uno solo. Ma, conclude Schrödinger, "forse il procedimento semplice che la teoria non relativa possiede in proposito è soltanto un comodo artificio di calcolo, che però oggi, come abbiamo visto, ha ottenuto un'influenza straordinariamente grande sul nostro atteggiamento fondamentale riguardo alla natura".

Si intende terminare qui questa sommaria ricognizione delle traduzioni contenute in questo volume; troppi spunti di riflessione emergono da esse, e porterebbero troppo lontano. Tuttavia, riguardo alla "confessione generale" di Schrödinger si vuole ricordare ancora un fatto: essa pervenne a Naturwissenschaften dall'Inghilterra, dove l'autore era riparato nel 1933. Nella primavera dello stesso anno Einstein aveva dato le dimissioni dall'Accademia prussiana delle scienze e abbandonato la Germania. La traduzione del resoconto delle azioni compiute dall'Accademia in seguito alle dimissioni di Einstein, stilato da uno dei Segretari, il Prof. Dr. E. Heymann, è presente al termine di questo volume. Vuole ricordare il modo della fine di un'epoca, quando i fisici scrivevano prevalentemente in tedesco, e a Berna e Zurigo, come a Berlino, a Monaco e Gottinga e Copenhagen seppero approfittare di una particolare quanto effimera condizione di libertà e di agio per il pensiero e per la ricerca.

Ringraziamenti. Voglio qui ringraziare Giovanni Gallavotti per avermi suggerito di raccogliere in un libro le traduzioni, e per la premurosa, costante attenzione dedicata a quest'opera; Dierck Ekkehard Liebscher per la sua lunga amicizia e per i molti consigli ed insegnamenti; Hans Jürgen Treder per avermi consentito di pubblicare il testo sulle dimissioni di Einstein e per il sostegno datomi quando più era necessario. Sono grato al Dipartimento di Fisica "A. Volta" di Pavia per l'ospitalità di tanti anni e per la polverosa ricchezza del fondo storico della sua biblioteca; a Luigi Mihich per averla esplorata con me e per la paziente collaborazione nel tradurre. Ringrazio infine mia moglie Isa e le mie figlie Francesca e Carla per tutto l'affetto, e per l'aiuto dato al mio lavoro.

Salvatore Antoci

Relatività ed elettromagnetismo

L'elettrodinamica dei corpi in movimento[1]

A. Einstein

È noto che l'elettrodinamica di Maxwell - come la si interpreta attualmente - nella sua applicazione ai corpi in movimento porta a delle asimmetrie, che non paiono essere inerenti ai fenomeni. Si pensi per esempio all'interazione elettromagnetica tra un magnete e un conduttore. I fenomeni osservabili in questo caso dipendono soltanto dal moto relativo del conduttore e del magnete, mentre secondo l'interpretazione consueta i due casi, a seconda che l'uno o l'altro di questi corpi sia quello in moto, vanno tenuti rigorosamente distinti. Se infatti il magnete è in moto e il conduttore è a riposo, nei dintorni del magnete esiste un campo elettrico con un certo valore dell'energia, che genera una corrente nei posti dove si trovano parti del conduttore. Ma se il magnete è in quiete e si muove il conduttore, nei dintorni del magnete non esiste alcun campo elettrico, e si ha invece nel conduttore una forza elettromotrice, alla quale non corrisponde nessuna energia, ma che - a parità di moto relativo nei due casi considerati - dà luogo a correnti elettriche della stessa intensità e dello stesso andamento di quelle alle quali dà luogo nel primo caso la forza elettrica. Esempi di tipo analogo, come pure i tentativi andati a vuoto di constatare un moto della terra relativamente al "mezzo luminoso" portano alla supposizione che il concetto di quiete assoluta non solo in meccanica, ma anche in elettrodinamica non corrisponda ad alcuna proprietà dell'esperienza, e che inoltre per tutti i sistemi di coordinate per i quali valgono le equazioni meccaniche debbano valere anche le stesse leggi elettrodinamiche e ottiche, come già è dimostrato per le quantità del prim'ordine. Assumeremo questa congettura (il contenuto della quale nel seguito sarà chiamato "principio di relatività") come postulato, e oltre a questo introdurremo il postulato con questo solo apparentemente incompatibile, che la luce nello spazio vuoto si propaghi sempre con una velocità determinata V, indipendente dallo stato di moto dei corpi emittenti. Questi due postulati bastano a pervenire ad un'elettrodinamica dei corpi in movimento semplice ed esente da contraddizioni, costruita sulla base della teoria di Maxwell per i corpi in quiete. L'introduzione di un "etere luminoso" si dimostra fin qui come superflua, in quanto secondo l'interpretazione sviluppata non si introduce uno "spazio assoluto in quiete" dotato di proprietà speciali, né si associa un vettore velocità ad un punto dello spazio vuoto nel quale abbiano luogo processi elettromagnetici. La teoria da svilupparsi si fonda - come ogni altra elettrodinamica - sulla cinematica dei corpi rigidi, poiché le affermazioni di una tale teoria riguardano relazioni tra corpi rigidi (sistemi di coordinate), orologi e processi elettromagnetici. La non sufficiente considerazione di queste circostanze è la radice delle difficoltà, con le quali l'elettrodinamica dei corpi in movimento attualmente deve lottare.

I. Parte cinematica

§1. Definizione della simultaneità

Si assuma un sistema di coordinate, nel quale valgano le equazioni meccaniche di Newton. Chiamiamo questo sistema di coordinate il "sistema a riposo", per distinguerlo nel discorso dai sistemi di coordinate che si introdurranno in seguito e per precisare la descrizione.

[1]Zur Elektrodynamik bewegter Körper, Annalen der Physik **17**, 891-921 (1905).

Se un punto materiale è a riposo rispetto a questo sistema di coordinate, la sua posizione rispetto a quest'ultimo può essere determinata mediante regoli rigidi utilizzando i metodi della geometria euclidea, e può essere espressa in coordinate cartesiane. Se vogliamo descrivere il *moto* di un punto materiale, diamo i valori delle sue coordinate in funzione del tempo. Ora si deve tenere ben in mente che una descrizione matematica siffatta ha un significato fisico solo quando si sia detto chiaramente in precedenza che cosa si intende qui per "tempo". Dobbiamo tener presente che tutte le nostre asserzioni nelle quali il tempo gioca un ruolo sono sempre asserzioni su *eventi simultanei.* Quando per esempio dico: "Quel treno arriva qui alle ore 7," ciò significa: "Il porsi della lancetta piccola del mio orologio sulle 7 e l'arrivo del treno sono eventi simultanei".[2]

Potrebbe sembrare che tutte le difficoltà che riguardano la definizione del "tempo" si potrebbero superare se sostituissi al posto di "tempo" l'espressione "posizione della lancetta piccola del mio orologio". Una definizione del genere basta infatti quando si tratta di definire un tempo indipendentemente dalla posizione nella quale si trova l'orologio; ma la definizione non basta più quando si tratta di collegare temporalmente serie di eventi che abbiano luogo in posti diversi, ovvero - il che è equivalente - valutare temporalmente eventi che abbiano luogo in posti lontani dall'orologio.

Potremmo altresì accontentarci di valutare temporalmente gli eventi mediante un osservatore che si trovi assieme all'orologio nell'origine delle coordinate, e che associ la corrispondente posizione delle lancette dell'orologio ad ogni segnale luninoso che giunga a lui attraverso lo spazio vuoto, e che rechi testimonianza dell'evento da valutare. Una tale coordinazione porta con sé tuttavia l'inconveniente di non essere indipendente dal punto di vista dell'osservatore che accudisce all'orologio, come sappiamo dall'esperienza. Giungiamo ad una determinazione molto più pratica mediante la seguente considerazione.

Se nel punto A dello spazio si trova un orologio, un osservatore che si trovi in A può valutare temporalmente gli eventi nell'intorno immediato di A osservando le posizioni delle lancette dell'orologio simultanee con questi eventi. Se anche nel punto B dello spazio si trova un orologio - aggiungeremo, "un orologio esattamente con le stesse proprietà di quello che si trova in A" - allora una valutazione temporale degli eventi nell'intorno immediato di B da parte di un osservatore che si trovi in B è pure possibile. Non è possibile tuttavia, senza un'ulteriore deliberazione, confrontare temporalmente un evento in A con un evento in B; finora abbiamo definito soltanto un "tempo di A" ed un "tempo di B", ma non abbiamo definito alcun "tempo" per A e B complessivamente. Quest'ultimo tempo può essere definito soltanto quando si assuma *per definizione* che il "tempo" che la luce impiega per andare da A a B è uguale al "tempo" che essa impiega per andare da B ad A. Ossia, parta un raggio di luce al "tempo di A" t_A da A verso B, sia al "tempo di B" t_B riflesso verso A e ritorni ad A al "tempo di A" t'_A. I due orologi per definizione camminano sincroni quando

$$t_B - t_A = t'_A - t_B.$$

Assumiamo che questa definizione di sincronismo sia possibile in modo esente da contraddizioni, che quindi valgano le condizioni:

[2]Non si considererà qui l' imprecisione che si introduce nel concetto di simultaneità di due eventi (approssimativamente) nello stesso posto e che viene superata con l'astrazione.

1. Quando l'orologio in B cammina sincrono con l'orologio in A, l'orologio in A cammina sincrono con l'orologio in B.

2. Quando l'orologio in A cammina sincrono sia con l'orologio in B che con l'orologio in C, gli orologi in B e C camminano in modi mutuamente sincroni.

Abbiamo così determinato con l'aiuto di certe esperienze fisiche (pensate) che cosa si debba intendere per orologi a riposo che camminano sincroni e si trovano in posti separati e con questo evidentemente abbiamo ottenuto una definizione di "simultaneo" e di "tempo". Il "tempo" di un evento è l'indicazione simultanea con l'evento di un orologio a riposo che si trova nella posizione dell'evento, che cammina sincrono con un determinato orologio a riposo, e cioè per tutte le determinazioni di tempo compiute con l'orologio stesso.

Assumiamo secondo l'esperienza che la quantità

$$\frac{2\overline{AB}}{t'_A - t_A} = V$$

sia una costante universale (la velocità della luce nello spazio vuoto).

È essenziale che noi abbiamo definito il tempo mediante orologi a riposo nel sistema a riposo; chiamiamo il tempo ora definito, a motivo di questa associazione con il sistema a riposo "il tempo del sistema a riposo".

§2. Sulla relatività delle lunghezze e dei tempi.

Le considerazioni seguenti si fondano sul principio di relatività e sul principio della costanza della velocità della luce, principi che definiamo nel modo seguente.

1. Le leggi secondo le quali evolvono gli stati dei sistemi fisici sono indipendenti da quale di due sistemi di coordinate che si trovino uno rispetto all'altro in moto traslatorio uniforme queste evoluzioni di stato siano osservate.

2. Ogni raggio di luce si muove nel sistema di coordinate "a riposo" con la velocità fissa V, indipendentemente dal fatto che questo raggio di luce sia emesso da un corpo a riposo o in moto. Si ha

$$\text{Velocità} = \frac{\text{Cammino della luce}}{\text{Durata}},$$

dove la "durata" va intesa nel senso della definizione del §1.

Sia dato un regolo rigido a riposo; esso abbia, se misurato con un campione di lunghezza ugualmente a riposo, la lunghezza l. Pensiamo ora che l'asse del regolo giaccia nella direzione dell'asse X del sistema di coordinate a riposo, e che sia impartito in seguito al regolo un moto di traslazione parallela uniforme (velocità v) lungo l'asse X nel senso delle x crescenti. Ci interroghiamo ora riguardo alla lunghezza del regolo *in moto*, che pensiamo trovata mediante le due operazioni seguenti:

a) L'osservatore si muove insieme con il campione di lunghezza anzidetto assieme al regolo da misurare e misura direttamente con l'accostamento del campione la lunghezza del regolo, proprio come quando regolo da misurare, osservatore e campione di lunghezza si trovano a riposo.

b) L'osservatore determina mediante orologi a riposo disposti nel sistema a riposo, sincronizzati secondo §1, in quali punti del sistema a riposo si trovano l'inizio e la fine del regolo da misurare ad un dato tempo t. La separazione tra i due punti, misurata con il campione di lunghezza già utilizzato, in questo caso a riposo, è parimenti una lunghezza, che si può contrassegnare come "lunghezza del regolo". Secondo il principio di relatività la lunghezza che si trova mediante l'operazione a), che indicheremo come "la lunghezza del regolo nel sistema in moto", dev'essere uguale alla lunghezza l del regolo in quiete.

La lunghezza che si trova con l'operazione b), che chiameremo "la lunghezza del regolo (in moto) nel sistema a riposo", la determineremo in base ai nostri due principi, e troveremo che essa è diversa da l.

La cinematica generalmente utilizzata assume tacitamente che le lunghezze determinate mediante le due operazioni su menzionate siano esattamente uguali, ovvero in altre parole, che un corpo rigido in moto al tempo t per quanto riguarda le relazioni geometriche sia completamente sostituibile dallo *stesso* corpo, che *sia a riposo* in un determinato posto.

Immaginiamo che ai due estremi del regolo (A e B) si faccia uso di orologi che sono sincroni con gli orologi del sistema a riposo, cioè tali che le loro indicazioni corrispondano sempre al "tempo del sistema a riposo" nella posizione nella quale esattamente si trovano; questi orologi sono quindi "sincroni nel sistema a riposo".

Immaginiamo inoltre che in corrispondenza di ciascun orologio si trovi un osservatore, e che questo osservatore applichi ai due orologi il criterio enunciato nel §1 per il cammino sincrono di due orologi. Al tempo[3] t_A parte un raggio di luce da A, viene riflesso in B al tempo t_B e ritorna ad A al tempo t'_A. Tenendo conto del principio della costanza della velocità della luce troviamo:

$$t_B - t_A = \frac{r_{AB}}{V - v}$$

e

$$t'_A - t_B = \frac{r_{AB}}{V + v},$$

dove r_{AB} significa la lunghezza del regolo in moto - misurata nel sistema a riposo. L'osservatore che si muove con il regolo in moto troverà quindi che i due orologi non camminano sincroni, mentre l'osservatore che si trova nel sistema in quiete interpreterà gli orologi come procedenti in sincronia.

Vediamo quindi che non possiamo attribuire al concetto di simultaneità alcun significato *assoluto*, ma che invece due eventi che, considerati in un sistema di coordinate, sono simultanei, se considerati da un sistema che si muove relativamente a questo sistema, non si possono più assumere come simultanei.

§3. Teoria delle trasformazioni delle coordinate e del tempo dal sistema a riposo ad uno che si trovi relativamente a questo in moto di traslazione uniforme.

Vi siano nello spazio "a riposo" due sistemi di coordinate, cioè due sistemi definiti da tre linee materiali rigide, ortogonali tra di loro, uscenti dallo stesso punto. Possiamo far coincidere gli assi X dei due sistemi, e siano gli assi Y e Z rispettivamente paralleli. Ad ogni sistema si assegnino un campione di lunghezza rigido ed un certo

[3] "tempo" significa qui "tempo del sistema a riposo" e parimenti "posizione delle lancette dell'orologio in moto, che si trova nella posizione di cui si parla."

numero di orologi, ed entrambi i campioni di lunghezza come pure tutti gli orologi di entrambi i sistemi siano esattamente uguali tra loro.

Si imprima ora all'origine di uno dei due sistemi (k) una velocità v (costante) nella direzione degli x crescenti dell'altro sistema (K) a riposo, velocità che si possa comunicare anche agli assi coordinati, al campione di lunghezza relativo e pure agli orologi. Ad ogni tempo t del sistema a riposo K corrisponde quindi una determinata posizione degli assi del sistema in moto e in base alla simmetria siamo autorizzati ad assumere che il moto di k possa esser tale che gli assi del sistema in moto al tempo t (con "t" si indica sempre un tempo del sistema a riposo) siano paralleli agli assi del sistema a riposo.

Pensiamo ora di misurare lo spazio sia dal sistema a riposo K per mezzo del campione di lunghezza a riposo che dal sistema in moto k mediante il campione di lunghezza che si muove con esso, e di determinare così le coordinate x, y, z, rispettivamente ξ, η, ζ. Si determini poi con gli orologi che si trovano a riposo nel sistema a riposo, attraverso segnali di luce nel modo descritto nel §1, il tempo t del sistema a riposo per tutti i punti di quest'ultimo, dove si trovino degli orologi; analogamente si determini il tempo τ del sistema in moto per tutti i punti del sistema in moto, nei quali si trovino orologi a riposo rispetto a quest'ultimo, applicando il suddetto metodo del §1 dei segnali luminosi tra i punti nei quali si trovano questi ultimi orologi.

A ogni sistema di valori x, y, z, t che determinano completamente la posizione e il tempo di un evento nel sistema a riposo corrisponde un sistema di valori ξ, η, ζ, τ che fissa un tale evento relativamente al sistema k, e bisogna ora assolvere il compito di trovare il sistema di equazioni che legano queste quantità.

È chiaro che le equazioni devono essere *lineari* a causa delle proprietà di omogeneità che noi attribuiamo allo spazio ed al tempo.

Se poniamo $x' = x - vt$, è chiaro che ad un punto a riposo nel sistema k spetta un insieme di valori x', y, z indipendente dal tempo. Determiniamo in primo luogo τ in funzione di x', y, z e t. A tal fine dobbiamo esprimere in equazioni che τ rappresenta il complesso delle indicazioni degli orologi a riposo nel sistema k, che sono stati resi sincroni secondo la regola data nel §1. Dall'origine del sistema k si mandi al tempo τ_0 un raggio di luce lungo l'asse X verso x' e lo si rifletta da lì al tempo τ_1 verso l'origine delle coordinate, dove esso arrivi al tempo τ_2; dev'essere allora:

$$\frac{1}{2}\left(\tau_0 + \tau_2\right) = \tau_1$$

ovvero, se si aggiungono gli argomenti della funzione τ e si applica il principio della costanza della velocità della luce nel sistema a riposo:

$$\frac{1}{2}\left[\tau\left(0,0,0,t\right) + \tau\left(0,0,0,\left\{t + \frac{x'}{V-v} + \frac{x'}{V+v}\right\}\right)\right]$$
$$= \tau\left(x', 0, 0, t + \frac{x'}{V-v}\right).$$

Da qui segue, scegliendo x' infinitamente piccolo:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{V-v} + \frac{1}{V+v}\right)\frac{\partial \tau}{\partial t} = \frac{\partial \tau}{\partial x'} + \frac{1}{V-v}\frac{\partial \tau}{\partial t},$$

ovvero
$$\frac{\partial \tau}{\partial x'} + \frac{v}{V^2 - v^2} \frac{\partial \tau}{\partial t} = 0.$$
È da notare che avremmo potuto scegliere come punto di partenza del raggio luminoso ogni altro punto al posto dell'origine delle coordinate e che l'equazione ora determinata vale perciò per tutti i valori di x', y, z.

Una analoga trattazione - applicata agli assi H e Z, quando si osservi che la luce lungo questi assi, considerata dal sistema a riposo, si propaga costantemente con la velocità $\sqrt{V^2 - v^2}$, porta a
$$\frac{\partial \tau}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \tau}{\partial z} = 0.$$
Da queste equazioni segue che τ è una funzione *lineare*:
$$\tau = a\left(t - \frac{v}{V^2 - v^2} x'\right),$$
dove a è una funzione provvisoriamente incognita $\varphi(v)$ e per brevità si è assunto che nell'origine di k per $\tau = 0$ sia $t = 0$.

Per mezzo di questi risultati è facile trovare le quantità ξ, η, ζ in modo tale da esprimere con le equazioni che la luce (come richiede il principio della costanza della velocità della luce assieme al principio di relatività) anche quando è misurata nel sistema in moto si propaghi con la velocità V. Per un raggio di luce emesso al tempo $\tau = 0$ nella direzione degli ξ crescenti vale:
$$\xi = V\tau,$$
ovvero
$$\xi = aV\left(t - \frac{v}{V^2 - v^2} x'\right).$$
Ma ora il raggio di luce misurato nel sistema a riposo si muove rispetto all'origine di k con la velocità $V - v$, sicché:
$$\frac{x'}{V - v} = t.$$
Sostituiamo questo valore di t nell'equazione per ξ, e otteniamo:
$$\xi = a\frac{V^2}{V^2 - v^2} x'.$$
In modo analogo si trova considerando raggi di luce che si muovano lungo gli altri due assi:
$$\eta = V\tau = aV\left(t - \frac{v}{V^2 - v^2} x'\right),$$
dove
$$\frac{y}{\sqrt{V^2 - v^2}} = t;\ x' = 0;$$
quindi
$$\eta = a\frac{V}{\sqrt{V^2 - v^2}} y$$

e

$$\zeta = a\frac{V}{\sqrt{V^2 - v^2}}z.$$

Sostituiamo al posto di x' il suo valore e otteniamo:

$$\tau = \varphi(v)\beta\left(t - \frac{v}{V^2}x\right),$$

$$\xi = \varphi(v)\beta\left(x - vt\right),$$

$$\eta = \varphi(v)y,$$

$$\zeta = \varphi(v)z,$$

dove

$$\beta = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{V}\right)^2}}$$

e φ è una funzione di v per ora incognita. Poiché non si fa nessuna ipotesi sulla posizione dell'origine del sistema in moto e sul punto di zero di τ, è sempre possibile aggiungere al secondo membro di queste equazioni una costante additiva. Dobbiamo ora dimostrare che ogni raggio di luce, misurato nel sistema in moto, si propaga con la velocità V, nel caso che ciò si verifichi, come abbiamo assunto, nel sistema a riposo; non abbiamo fornito ancora la dimostrazione che il principio della costanza della velocità della luce sia compatibile con il principio di relatività.

Al tempo $t = \tau = 0$ sia emessa dall'origine delle coordinate dei due sistemi a questo tempo coincidente un'onda sferica, che si propaghi nel sistema k con la velocità V. Sia (x, y, z) un punto raggiunto da quest'onda, allora

$$x^2 + y^2 + z^2 = V^2t^2.$$

Trasformiamo questa equazione per mezzo delle nostre equazioni di trasformazione e otteniamo con un calcolo semplice:

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = V^2\tau^2.$$

L'onda in esame, anche quando la si consideri nel sistema in moto, è quindi un'onda sferica con la velocità di propagazione V. Risulta da qui che i nostri due principi fondamentali sono compatibili tra loro. Nella equazioni di trasformazione sviluppate compare ancora una funzione incognita φ di v, che vogliamo ora determinare.

Introduciamo a questo scopo ancora un terzo sistema di coordinate K', che sia pensato in moto di traslazione parallela rispetto al sistema k parallelamente all'asse Ξ, in modo tale che la sua origine si muova con la velocità $-v$ lungo l'asse Ξ. Al tempo $t = 0$ tutti e tre i punti origine delle coordinate coincidano e sia per $t = x = y = z = 0$ uguale a zero il tempo t' del sistema K'. Chiamiamo x', y', z' le coordinate, misurate nel sistema K', e otteniamo applicando due volte le nostre equazioni di trasformazione:

$$t' = \varphi(-v)\beta(-v)\left\{\tau + \frac{v}{V^2}\xi\right\} = \varphi(v)\varphi(-v)t,$$

$$x' = \varphi(-v)\beta(-v)\{\xi + v\tau\} = \varphi(v)\varphi(-v)x,$$
$$y' = \varphi(-v)\eta = \varphi(v)\varphi(-v)y,$$
$$z' = \varphi(-v)\zeta = \varphi(v)\varphi(-v)z.$$

Poiché le relazioni tra x', y', z' e x, y, z non contengono il tempo t, i due sistemi K e K' sono mutuamente a riposo, ed è chiaro che la trasformazione da K a K' dev'essere la trasformazione identica. È quindi

$$\varphi(v)\varphi(-v) = 1.$$

Ci chiediamo ora qual è il significato di $\varphi(v)$. Fissiamo l'attenzione sul tratto dell'asse H del sistema k, compreso tra $\xi = 0$, $\eta = 0$, $\zeta = 0$ e $\xi = 0$, $\eta = l$, $\zeta = 0$. Questo tratto dell'asse H è un regolo che si muove rispetto al sistema K con la velocità v ortogonalmente al suo asse, e le cui estremità possiedono in K le coordinate

$$x_1 = vt,\ y_1 = \frac{l}{\varphi(v)},\ z_1 = 0$$

e

$$x_2 = vt,\ y_2 = 0,\ z_2 = 0.$$

La lunghezza del regolo, misurata in K, è quindi $l/\varphi(v)$; da ciò risulta definito il significato della funzione φ. Per ragioni di simmetria è ora evidente che la lunghezza, misurata nel sistema a riposo, di un dato regolo che si muova ortogonalmente al proprio asse, può dipendere solo dalla velocità, ma non dalla direzione e dal verso del moto. Quindi la lunghezza del regolo in moto, misurata nel sistema a riposo, non muta se si scambia v con $-v$. Da qui segue

$$\frac{l}{\varphi(v)} = \frac{l}{\varphi(-v)},$$

ovvero

$$\varphi(v) = \varphi(-v).$$

Da questa e dalla relazione trovata prima segue che dev'essere $\varphi(v) = 1$, di modo che le relazioni trovate diventano:

$$\tau = \beta\left(t - \frac{v}{V^2}x\right),$$
$$\xi = \beta\,(x - vt)\,,$$
$$\eta = y,$$
$$\zeta = z,$$

dove

$$\beta = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{V}\right)^2}}.$$

§4. Significato fisico delle equazioni ottenute, riguardante corpi rigidi in moto e orologi in moto.

Consideriamo una sfera rigida[4] di raggio R, che sia in quiete relativamente al sistema in moto k, e il cui centro stia nell'origine delle coordinate di k. L'equazione della superficie di questa sfera che si muove relativamente al sistema K con la velocità v è :

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = R^2.$$

L'equazione di questa superficie, espressa in x, y, z al tempo $t = 0$ è:

$$\frac{x^2}{1 - \left(\frac{v}{V}\right)^2} + y^2 + z^2 = R^2.$$

Un corpo rigido, che misurato nello stato a riposo ha la forma di una sfera, ha quindi nello stato di moto - considerato dal sistema a riposo - la forma di un ellissoide di rotazione con gli assi

$$R\sqrt{1 - \left(\frac{v}{V}\right)^2},\ R,\ R.$$

Mentre quindi le dimensioni Y e Z della sfera (quindi anche di ogni corpo rigido di forma arbitraria) non appaiono modificate con il movimento, la dimensione X appare accorciata nel rapporto $1 : [1 - (v/V)^2]^{1/2}$, quindi tanto più quanto più grande è v. Per $v = V$ tutti gli oggetti in moto - considerati dal sistema "a riposo" - si riducono alla forma di superfici. Per velocità superluminali le nostre considerazioni sono prive di senso; troveremo del resto nella trattazione successiva che la velocità della luce nella nostra teoria gioca fisicamente il ruolo della velocità infinitamente grande.

È chiaro che i medesimi risultati valgono per corpi a riposo nel sistema "a riposo", quando li si considerino da un sistema in moto uniforme.

Consideriamo inoltre uno degli orologi, che a riposo rispetto al sistema a riposo sono capaci di dare il tempo t, a riposo rispetto al sistema in moto, posto nell'origine di k e così regolato da dare il tempo τ. Con che velocità cammina questo orologio, considerato dal sistema a riposo?

Tra le quantità x, t e τ, che si riferiscono alla posizione di questo orologio, valgono evidentemente le equazioni:

$$\tau = \frac{\left(t - \frac{v}{V^2}x\right)}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{V}\right)^2}}$$

e

$$x = vt.$$

È quindi

$$\tau = t\sqrt{1 - \left(\frac{v}{V}\right)^2} = t - \left[1 - \sqrt{1 - \left(\frac{v}{V}\right)^2}\right] t,$$

dalla quale segue che l'indicazione dell'orologio (considerata nel sistema a riposo) ritarda al secondo di $[1 - (1 - (v/V)^2)^{1/2}]$ secondi ovvero - a meno di quantità dell'ordine quarto e più alto, di $(1/2)\left(\frac{v}{V}\right)^2$ secondi.

[4] Cioè un corpo, che esaminato a riposo possieda forma sferica.

Da qui risulta la seguente conseguenza singolare. Nei punti A e B di K siano disposti due orologi a riposo, che camminano sincroni quando siano considerati nel sistema a riposo, e si muova l'orologio in A con la velocità v lungo la congiungente verso B, allora all'arrivo di quest'orologio in B i due orologi non sono più sincroni, ma l'orologio mosso da A a B resta indietro rispetto a quello che dall'inizio si trova in B di $(1/2)\,t\left(v^2/V^2\right)$ secondi (a meno di quantità di ordine quarto e più alto), dove t è il tempo che l'orologio impiega da A a B.

Si vede immediatamente che questo risultato vale anche quando l'orologio si muove da A a B lungo una linea poligonale arbitraria, e in particolare anche quando i punti A e B coincidono.

Se si assume che il risultato dimostrato per una linea poligonale valga anche per una linea incurvata con continuità, si ottiene la legge: si trovino in A due orologi che camminano sincroni e si muova uno degli stessi lungo una curva chiusa con velocità costante, finché esso ritorni in A, cosa che può durare t secondi; allora quest'ultimo orologio al suo arrivo in A risulta ritardato rispetto a quello che non è stato mosso di $(1/2)\,t\,(v/V)^2$ secondi. Si conclude da ciò che un orologio a bilanciere che si trovi all'equatore terrestre deve camminare più lento di un importo assai piccolo rispetto ad un orologio fatto esattamente alla stessa maniera, e sottoposto per il resto a condizioni uguali, ma che si trovi a un polo terrestre.

§5. Teorema di addizione delle velocità.

Nel sistema k che si muove con la velocità v lungo l'asse X del sistema K un punto si muova secondo le equazioni:

$$\xi = w_\xi \tau,\ \ \eta = w_\eta \tau,\ \ \zeta = 0,$$

dove w_ξ e w_η indicano delle costanti.

Si cerchi il moto del punto relativamente al sistema K. Se si introducono nelle equazioni di moto del punto le quantità x, y, z, t per mezzo delle equazioni di trasformazione sviluppate al §3, si ottiene:

$$x = \frac{w_\xi + v}{1 + \frac{v w_\xi}{V^2}} t,$$

$$y = \frac{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{V}\right)^2}}{1 + \frac{v w_\xi}{V^2}} w_\eta t,$$

$$z = 0.$$

La legge del parallelogrammo delle velocità vale quindi secondo la nostra teoria solo in prima approssimazione. Poniamo:

$$U^2 = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2,$$

$$w^2 = w_\xi^2 + w_\eta^2$$

e

$$\alpha = \arctan \frac{w_y}{w_x};$$

α è allora l'angolo tra le velocità v e w. Con un calcolo semplice risulta:

$$U = \frac{\sqrt{(v^2 + w^2 + 2vw\cos\alpha) - \left(\frac{vw\sin\alpha}{V}\right)^2}}{\left(1 + \frac{vw\cos\alpha}{V^2}\right)}.$$

È degno di nota che v e w entrino in modo simmetrico nell'espressione per la velocità risultante. Se anche w ha la direzione dell'asse X (asse Ξ) si ottiene:

$$U = \frac{v + w}{1 + \frac{vw}{V^2}}.$$

Da questa equazione segue che dalla composizione di due velocità che siano minori di V risulta sempre una velocità inferiore a V. Si ponga infatti $v = V - \kappa$, $w = V - \lambda$, dove κ e λ sono positivi e minori di V; risulta:

$$U = V\frac{2V - \kappa - \lambda}{2V - \kappa - \lambda + \frac{\kappa\lambda}{V}} < V.$$

Risulta inoltre che la velocità V non può essere mutata per composizione con una "velocità sottoluminale". Si trova in questo caso:

$$U = \frac{V + w}{1 + \frac{w}{V}} = V.$$

Avremmo potuto ottenere le formule di U per il caso che v e w possiedano ugual direzione anche per composizione di due trasformazioni secondo il §3. Introduciamo oltre ai sistemi K e k considerati nel §3 anche un terzo sistema di coordinate k' pensato in moto parallelo rispetto a k, la cui origine si muova lungo l'asse Ξ con la velocità w; in tal modo otteniamo tra le quantità x, y, z, t e le corrispondenti quantità di k' delle equazioni, che si distinguono da quelle trovate nel §3 solo perché al posto di "v" compare la quantità

$$\frac{v + w}{1 + \frac{vw}{V^2}};$$

si vede pertanto che queste trasformazioni parallele - come dev'essere - costituiscono un gruppo.

Abbiamo ora derivato le leggi per noi necessarie della cinematica che corrisponde ai nostri due principi, e passiamo a mostrare la loro applicazione nell'elettrodinamica.

II. Parte elettrodinamica

§6. Trasformazione delle equazioni di Maxwell-Hertz per lo spazio vuoto. Sulla natura della forza elettromotrice che compare con il moto in un campo magnetico.

Se equazioni di Maxwell-Hertz per lo spazio vuoto sono valide per il sistema a riposo K, si deve avere:

$$\frac{1}{V}\frac{\partial X}{\partial t}=\frac{\partial N}{\partial y}-\frac{\partial M}{\partial z},\quad \frac{1}{V}\frac{\partial L}{\partial t}=\frac{\partial Y}{\partial z}-\frac{\partial Z}{\partial y},$$

$$\frac{1}{V}\frac{\partial Y}{\partial t}=\frac{\partial L}{\partial z}-\frac{\partial N}{\partial x},\quad \frac{1}{V}\frac{\partial M}{\partial t}=\frac{\partial Z}{\partial x}-\frac{\partial X}{\partial z},$$

$$\frac{1}{V}\frac{\partial Z}{\partial t}=\frac{\partial M}{\partial x}-\frac{\partial L}{\partial y},\quad \frac{1}{V}\frac{\partial N}{\partial t}=\frac{\partial X}{\partial y}-\frac{\partial Y}{\partial x},$$

dove (X,Y,Z) è il vettore della forza elettrica, (L,M,N) quello della forza magnetica.

Se applichiamo a queste equazioni la trasformazione sviluppata al § 3, e riferiamo i processi elettromagnetici al sistema di coordinate là introdotto, che si muove con la velocità v, otteniamo le equazioni

$$\frac{1}{V}\frac{\partial X}{\partial \tau}=\frac{\partial \beta\left(N-\frac{v}{V}Y\right)}{\partial \eta}-\frac{\partial \beta\left(M+\frac{v}{V}Z\right)}{\partial \zeta},$$

$$\frac{1}{V}\frac{\partial \beta\left(Y-\frac{v}{V}N\right)}{\partial \tau}=\frac{\partial L}{\partial \zeta}-\frac{\partial \beta\left(N-\frac{v}{V}Y\right)}{\partial \xi},$$

$$\frac{1}{V}\frac{\partial \beta\left(Z+\frac{v}{V}M\right)}{\partial \tau}=\frac{\partial \beta\left(M+\frac{v}{V}Z\right)}{\partial \xi}-\frac{\partial L}{\partial \eta},$$

$$\frac{1}{V}\frac{\partial L}{\partial \tau}=\frac{\partial \beta\left(Y-\frac{v}{V}N\right)}{\partial \zeta}-\frac{\partial \beta\left(Z+\frac{v}{V}M\right)}{\partial \eta},$$

$$\frac{1}{V}\frac{\partial \beta\left(M+\frac{v}{V}Z\right)}{\partial \tau}=\frac{\partial \beta\left(Z+\frac{v}{V}M\right)}{\partial \xi}-\frac{\partial X}{\partial \zeta},$$

$$\frac{1}{V}\frac{\partial \beta\left(N-\frac{v}{V}Y\right)}{\partial \tau}=\frac{\partial X}{\partial \eta}-\frac{\partial \beta\left(Y-\frac{v}{V}N\right)}{\partial \xi},$$

dove

$$\beta=\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{V}\right)^2}}.$$

Il principio di relatività richiede ora che le equazioni di Maxwell-Hertz per lo spazio vuoto valgano anche nel sistema k quando esse valgono nel sistema K, ossia che per i vettori della forza elettrica e magnetica ((X',Y',Z') e (L',M',N')) del sistema in moto k, definiti mediante le loro azioni ponderomotrici nel sistema in moto k esercitate su masse elettriche o rispettivamente magnetiche, valgano le equazioni

$$\frac{1}{V}\frac{\partial X'}{\partial \tau}=\frac{\partial N'}{\partial \eta}-\frac{\partial M'}{\partial \zeta},\quad \frac{1}{V}\frac{\partial L'}{\partial \tau}=\frac{\partial Y'}{\partial \zeta}-\frac{\partial Z'}{\partial \eta},$$

$$\frac{1}{V}\frac{\partial Y'}{\partial \tau} = \frac{\partial L'}{\partial \zeta} - \frac{\partial N'}{\partial \xi}, \ \frac{1}{V}\frac{\partial M'}{\partial \tau} = \frac{\partial Z'}{\partial \xi} - \frac{\partial X'}{\partial \zeta},$$
$$\frac{1}{V}\frac{\partial Z'}{\partial \tau} = \frac{\partial M'}{\partial \xi} - \frac{\partial L'}{\partial \eta}, \ \frac{1}{V}\frac{\partial N'}{\partial \tau} = \frac{\partial X'}{\partial \eta} - \frac{\partial Y'}{\partial \xi}.$$

Evidentemente i due sistemi di equazioni trovati per il sistema k devono esprimere esattamente la stessa cosa, poiché entrambi i sistemi di equazioni sono equivalenti alle equazioni di Maxwell-Hertz per il sistema K. Poiché le equazioni dei due sistemi coincidono inoltre a meno dei simboli che rappresentano i vettori, ne segue che le funzioni che compaiono nel sistema di equazioni in posti corrispondenti devono coincidere a meno di un fattore $\psi(v)$ unico per tutte le funzioni di un sistema di equazioni complessivo, indipendente da ξ, η, ζ e τ, eventualmente dipendente da v. Valgono quindi le relazioni

$$X' = \psi(v)X, \ L' = \psi(v)L,$$
$$Y' = \psi(v)\beta\left(Y - \frac{v}{V}N\right), \ M' = \psi(v)\beta\left(M + \frac{v}{V}Z\right),$$
$$Z' = \psi(v)\beta\left(Z + \frac{v}{V}M\right), \ N' = \psi(v)\beta\left(N - \frac{v}{V}Y\right).$$

Se si costruisce l'inverso di questo sistema di equazioni, prima mediante soluzione delle equazioni or ora ottenute, poi sviluppando le equazioni per la trasformazione inversa (da k a K) che è caratterizzata dalla velocità $-v$, segue, tenendo conto che i due sistemi di equazioni così ottenuti devono essere identici:

$$\psi(v).\psi(-v) = 1.$$

Segue inoltre per ragioni di simmetria[5]

$$\psi(v) = \psi(-v);$$

quindi

$$\psi(v) = 1,$$

e le nostre equazioni assumono la forma:

$$X' = X, \ L' = L,$$
$$Y' = \beta\left(Y - \frac{v}{V}N\right), \ M' = \beta\left(M + \frac{v}{V}Z\right),$$
$$Z' = \beta\left(Z + \frac{v}{V}M\right), \ N' = \beta\left(N - \frac{v}{V}Y\right).$$

Per l'interpretazione di queste equazioni notiamo quanto segue. Si abbia una quantità puntiforme di elettricità che misurata nel sistema a riposo K sia del valore "uno", cioè a riposo nel sistema a riposo eserciti su di una quantità di elettricità uguale alla distanza di 1 centimetro la forza di una dina. Secondo il principio di relatività questa massa elettrica anche quando è misurata nel sistema in moto ha il

[5]Se per esempio $X = Y = Z = L = M = 0$ e $N \neq 0$, è chiaro per ragioni di simmetria, che per lo scambio del segno di v senza variazione del valore numerico anche Y' deve cambiare di segno, senza cambiare il suo valore numerico.

valore “uno”. Se questa quantità di elettricità è a riposo relativamente al sistema a riposo, per definizione il vettore (X, Y, Z) è uguale alla forza esercitata da essa. Se la quantità di elettricità è a riposo nel sistema in moto (almeno all'istante considerato), allora la forza esercitata da essa, misurata nel sistema in moto, è uguale al vettore (X', Y', Z'). le prime tre delle equazioni su scritte si possono dunque esprimere a parole nei seguenti due modi:

1. Se un polo elettrico puntiforme unitario si muove in un campo elettromagnetico, su di esso opera oltre alla forza elettrica una “forza elettromotrice” che, tralasciando termini moltiplicati per la seconda potenza e per potenze più alte di v/V, è il prodotto vettore, diviso per la velocità della luce, della velocità del moto del polo unitario e della forza magnetica (vecchio modo di esprimersi).

2. Se un polo elettrico puntiforme unitario si muove in un campo elettromagnetico, la forza che agisce su di esso è uguale alla forza elettrica che si manifesta nella posizione del polo unitario, che si ottiene mediante trasformazione del campo in un sistema di coordinate a riposo relativamente al polo unitario elettrico (nuovo modo di esprimersi).

Una situazione analoga vale per la “forza magnetomotrice”. Si vede che nella teoria sviluppata la forza elettromotrice gioca soltanto il ruolo di un concetto ausiliario, che deve la sua introduzione alla circostanza che le forze elettrica e magnetica non possiedono un'esistenza indipendente dallo stato di moto del sistema di coordinate.

È inoltre chiaro che l'asimmetria menzionata nell'Introduzione riguardo alla trattazione della corrente generata mediante il moto relativo di un magnete e di un conduttore sparisce. Anche le questioni relative alla “sede” della forza elettromotrice elettrodinamica (macchine unipolari) sono infondate.

§7. Teoria del principio di Doppler e dell'aberrazione.

Nel sistema K si trovi assai lontano dall'origine delle coordinate una sorgente di onde elettromagnetiche, che in una parte dello spazio che comprende l'origine delle coordinate siano rappresentate con sufficiente approssimazione dalle equazioni:

$$\begin{aligned}
&X = X_0 \sin\Phi,\ L = L_0 \sin\Phi,\\
&Y = Y_0 \sin\Phi,\ M = M_0 \sin\Phi,\ \Phi = \omega\left(t - \frac{ax+by+cz}{V}\right).\\
&Z = Z_0 \sin\Phi,\ N = N_0 \sin\Phi,
\end{aligned}$$

Qui (X_0, Y_0, Z_0) e (L_0, M_0, N_0) sono i vettori che determinano l'ampiezza del treno d'onde, a, b, c sono i coseni direttori della normale d'onda.

Ci chiediamo ora quali siano le caratteristiche di queste onde, quando le stesse siano indagate da un osservatore a riposo nel sistema in moto k. - Applicando le equazioni di trasformazione trovate nel §6 per le forze elettrica e magnetica e le equazioni di trasformazione trovate nel §3 per le coordinate ed il tempo otteniamo immediatamente:

$$\begin{aligned}
X' &= X_0 \sin\Phi',\ L' = L_0 \sin\Phi',\\
Y' &= \beta\left(Y_0 - \frac{v}{V}N_0\right)\sin\Phi',\ M' = \beta\left(M_0 + \frac{v}{V}Z_0\right)\sin\Phi',\\
Z' &= \beta\left(Z_0 + \frac{v}{V}M_0\right)\sin\Phi',\ N' = \beta\left(N_0 - \frac{v}{V}Y_0\right)\sin\Phi',
\end{aligned}$$

$$\Phi' = \omega' \left(\tau - \frac{a'\xi + b'\eta + c'\zeta}{V} \right),$$

dove si è posto

$$\omega' = \omega\beta \left(1 - a\frac{v}{V} \right),$$

$$a' = \frac{a - \frac{v}{V}}{1 - a\frac{v}{V}},$$

$$b' = \frac{b}{\beta \left(1 - a\frac{v}{V} \right)},$$

$$c' = \frac{c}{\beta \left(1 - a\frac{v}{V} \right)}.$$

Dall'equazione per ω' segue: se un osservatore si muove con la velocità v rispetto ad una sorgente luminosa di frequenza ν infinitamente lontana in modo tale che la linea congiungente "sorgente luminosa-osservatore" individui l'angolo φ con la velocità dell'osservatore che si manifesta in un sistema di coordinate in quiete relativamente alla sorgente di luce, allora la frequenza ν' della luce avvertita dall'osservatore è data dall'equazione:

$$\nu' = \nu \frac{1 - \frac{v}{V}\cos\varphi}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{V}\right)^2}}.$$

Questo è il principio di Doppler per velocità arbitrarie. Per $\varphi = 0$ l'equazione assume la forma perspicua:

$$\nu' = \nu \sqrt{\frac{1 - \frac{v}{V}}{1 + \frac{v}{V}}}.$$

Si vede che - in contrasto con la concezione consueta - per $v = -\infty$, risulta $\nu = \infty$.

Se si chiama φ' l'angolo tra la normale d'onda (direzione del raggio) nel sistema in moto e la linea congiungente "sorgente luminosa - osservatore", l'equazione per a' assume la forma:

$$\cos\varphi' = \frac{\cos\varphi - \frac{v}{V}}{1 - \frac{v}{V}\cos\varphi}.$$

Questa equazione esprime la legge dell'aberrazione nella sua forma più generale. Se $\varphi = \pi/2$, l'equazione assume la forma semplice:

$$\cos\varphi' = -\frac{v}{V}.$$

Dobbiamo ora cercare l'ampiezza delle onde, come appare nel sistema in moto. Se si chiamano A e rispettivamente A' l'ampiezza della forza elettrica o magnetica misurata nel sistema a riposo o rispettivamente nel sistema in moto, si ottiene:

$$A'^2 = A^2 \frac{\left[1 - \frac{v}{V}\cos\varphi\right]^2}{1 - \left(\frac{v}{V}\right)^2},$$

equazione che per $\varphi = 0$ diventa quella più semplice:

$$A'^2 = A^2 \frac{1 - \frac{v}{V}}{1 + \frac{v}{V}}.$$

Segue dalle equazioni sviluppate che per un osservatore che si avvicini con la velocità V ad una sorgente di luce, questa sorgente di luce deve apparire infinitamente intensa.

§8. Trasformazione dell'energia dei raggi di luce. Teoria della pressione di radiazione esercitata su uno specchio perfetto.

Poiché $A^2/8\pi$ è uguale all'energia della luce per unità di volume, secondo il principio di relatività dobbiamo considerare $A'^2/8\pi$ come l'energia della luce nel sistema in moto. Quindi A'^2/A^2 sarebbe il rapporto dell'energia "misurata in moto" con quella "misurata in quiete" di un certo complesso luminoso, se il volume di un complesso luminoso misurato in K e misurato in k fosse lo stesso. Non è tuttavia questo il caso. Siano a, b, c i coseni direttori della normale d'onda della luce nel sistema a riposo, allora attraverso l'elemento di superficie della superficie sferica che si muove con la velocità della luce

$$(x-Vat)^2 + (y-Vbt)^2 + (z-Vct)^2 = R^2;$$

non transita alcuna energia; possiamo dire quindi che questa superficie racchiude permanentemente lo stesso complesso luminoso. Ci chiediamo ora quale sia la quantità d'energia che questa superficie racchiude quando la si consideri nel sistema k, cioè quale sia l'energia del complesso luminoso relativamente al sistema k.

La superficie sferica è - considerata nel sistema in moto - una superficie ellissoidale, che al tempo $\tau = 0$ possiede l'equazione:

$$\left(\beta\xi - a\beta\frac{v}{V}\xi\right)^2 + \left(\eta - b\beta\frac{v}{V}\xi\right)^2 + \left(\zeta - c\beta\frac{v}{V}\xi\right)^2 = R^2.$$

Se si chiama S il volume della sfera, S' quello dell'ellissoide, risulta, come mostra un semplice calcolo:

$$\frac{S'}{S} = \frac{\sqrt{1-\left(\frac{v}{V}\right)^2}}{1-\frac{v}{V}\cos\varphi}.$$

Se si chiama quindi E l'energia misurata nel sistema a riposo, E' quella misurata nel sistema in moto, che sia racchiusa dalla superficie considerata, si trova:

$$\frac{E'}{E} = \frac{A'^2 S'/8\pi}{A^2 S/8\pi} = \frac{1-\frac{v}{V}\cos\varphi}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{V}\right)^2}},$$

formula che per $\varphi = 0$ si riduce a quella più semplice:

$$\frac{E'}{E} = \sqrt{\frac{1-\frac{v}{V}}{1+\frac{v}{V}}}.$$

È notevole che l'energia e la frequenza di un complesso luminoso variino con la stessa legge al variare dello stato di moto dell'osservatore. Sia ora il piano coordinato $\xi = 0$ una superficie riflettente perfetta, sulla quale vengano riflesse le onde piane considerate nell'ultimo paragrafo. Ci chiediamo quale sia la pressione di radiazione esercitata sulla superficie riflettente e quali siano la direzione, la frequenza e l'intensità della luce dopo la riflessione.

La luce incidente sia definita mediante le quantità A, $\cos\varphi$, ν (misurate nel sistema K). Le corrispondenti quantità considerate da k sono:

$$A' = A\frac{1-\frac{v}{V}\cos\varphi}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{V}\right)^2}},$$

$$\cos\varphi' = \frac{\cos\varphi-\frac{v}{V}}{1-\frac{v}{V}\cos\varphi},$$

$$\nu' = \nu\frac{1-\frac{v}{V}\cos\varphi}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{V}\right)^2}}.$$

Per la luce riflessa otteniamo, quando riferiamo il processo al sistema k:

$$A'' = A',$$

$$\cos\varphi'' = \cos\varphi',$$

$$\nu'' = \nu'.$$

Infine ritrasformando al sistema a riposo K si ottiene per la luce riflessa:

$$A''' = A''\frac{1+\frac{v}{V}\cos\varphi''}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{V}\right)^2}} = A\frac{1-2\frac{v}{V}\cos\varphi+\left(\frac{v}{V}\right)^2}{1-\left(\frac{v}{V}\right)^2},$$

$$\cos\varphi''' = \frac{\cos\varphi''+\frac{v}{V}}{1+\frac{v}{V}\cos\varphi''} = -\frac{\left[1+\left(\frac{v}{V}\right)^2\right]\cos\varphi-2\frac{v}{V}}{1-2\frac{v}{V}\cos\varphi+\left(\frac{v}{V}\right)^2},$$

$$\nu''' = \nu''\frac{1+\frac{v}{V}\cos\varphi''}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{V}\right)^2}} = \nu\frac{1-2\frac{v}{V}\cos\varphi+\left(\frac{v}{V}\right)^2}{\left(1-\frac{v}{V}\right)^2}.$$

L'energia che incide sull'unità di superficie dello specchio nell'unità di tempo (misurata nel sistema a riposo) è evidentemente $A^2/8\pi\,(V\cos\varphi - v)$. L'energia che si allontana dall'unità di superficie dello specchio nell'unità di tempo è

$$A'''^2/8\pi\,(-V\cos\varphi'''+v).$$

La differenza di queste due espressioni è secondo il principio dell'energia il lavoro esercitato dalla pressione di radiazione nell'unità di tempo. Se si pone quest'ultimo uguale al prodotto $P.v$, dove P è la pressione della luce, si ottiene:

$$P = 2\frac{A^2}{8\pi}\frac{\left(\cos\varphi-\frac{v}{V}\right)^2}{1-\left(\frac{v}{V}\right)^2}.$$

In prima approssimazione si ottiene in accordo con l'esperienza e con altre teorie

$$P = 2\frac{A^2}{8\pi}\cos^2\varphi.$$

Con i metodi qui utilizzati si possono risolvere tutti i problemi dell'ottica dei corpi in movimento. L'essenziale è che la forza elettrica e magnetica della luce, che viene subita da un corpo in moto, sia trasformata a un sistema di coordinate in quiete relativamente al corpo. In tal modo ogni problema dell'ottica dei corpi in moto sarà ricondotto ad una sequenza di problemi dell'ottica dei corpi in quiete.

§9. Trasformazione delle equazioni di Maxwell-Hertz tenendo conto della corrente di convezione.

Partiamo dalle equazioni:

$$\frac{1}{V}\left\{u_x\rho+\frac{\partial X}{\partial t}\right\}=\frac{\partial N}{\partial y}-\frac{\partial M}{\partial z},\ \frac{1}{V}\frac{\partial L}{\partial t}=\frac{\partial Y}{\partial z}-\frac{\partial Z}{\partial y},$$

$$\frac{1}{V}\left\{u_y\rho+\frac{\partial Y}{\partial t}\right\}=\frac{\partial L}{\partial z}-\frac{\partial N}{\partial x},\ \frac{1}{V}\frac{\partial M}{\partial t}=\frac{\partial Z}{\partial x}-\frac{\partial X}{\partial z},$$

$$\frac{1}{V}\left\{u_z\rho+\frac{\partial Z}{\partial t}\right\}=\frac{\partial M}{\partial x}-\frac{\partial L}{\partial y},\ \frac{1}{V}\frac{\partial N}{\partial t}=\frac{\partial X}{\partial y}-\frac{\partial Y}{\partial x},$$

dove

$$\rho=\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}+\frac{\partial Z}{\partial z}$$

indica la densità dell'elettricità moltiplicata per 4π e (u_x,u_y,u_z) indica il vettore velocità dell'elettricità. Se si pensano le masse elettriche invariabilmente legate a piccoli corpi rigidi (ioni, elettroni), queste equazioni sono il fondamento elettromagnetico dell'elettrodinamica e dell'ottica dei corpi in movimento di Lorentz.

Se si trasformano queste equazioni, che valgano nel sistema K, al sistema k per mezzo delle equazioni di trasformazione del §3 e del §6, si ottengono le equazioni:

$$\frac{1}{V}\left\{u_\xi\rho'+\frac{\partial X'}{\partial \tau}\right\}=\frac{\partial N'}{\partial \eta}-\frac{\partial M'}{\partial \zeta},\ \frac{1}{V}\frac{\partial L'}{\partial \tau}=\frac{\partial Y'}{\partial \zeta}-\frac{\partial Z'}{\partial \eta},$$

$$\frac{1}{V}\left\{u_\eta\rho'+\frac{\partial Y'}{\partial \tau}\right\}=\frac{\partial L'}{\partial \zeta}-\frac{\partial N'}{\partial \xi},\ \frac{1}{V}\frac{\partial M'}{\partial \tau}=\frac{\partial Z'}{\partial \xi}-\frac{\partial X'}{\partial \zeta},$$

$$\frac{1}{V}\left\{u_\zeta\rho'+\frac{\partial Z'}{\partial \tau}\right\}=\frac{\partial M'}{\partial \xi}-\frac{\partial L'}{\partial \eta},\ \frac{1}{V}\frac{\partial N'}{\partial \tau}=\frac{\partial X'}{\partial \eta}-\frac{\partial Y'}{\partial \xi},$$

dove

$$\frac{u_x-v}{1-u_x\frac{v}{V^2}}=u_\xi,$$

$$\frac{u_y}{\beta\left(1-u_x\frac{v}{V^2}\right)}=u_\eta,\ \rho'=\frac{\partial X'}{\partial \xi}+\frac{\partial Y'}{\partial \eta}+\frac{\partial Z'}{\partial \zeta}=\beta\left(1-u_x\frac{v}{V^2}\right)\rho.$$

$$\frac{u_z}{\beta\left(1-u_x\frac{v}{V^2}\right)}=u_\zeta,$$

Poiché - come segue dal teorema di addizione delle velocità (§5) - il vettore (u_ξ,u_η,u_ζ) non è altro che la velocità delle masse elettriche misurate nel sistema k, risulta perciò dimostrato che, prendendo a base i nostri principi cinematici, i fondamenti elettrodinamici della teoria di Lorentz dell'elettrodinamica dei corpi in movimento sono conformi al principio di relatività.

È possibile ancora notare in breve che dalle equazioni sviluppate si può facilmente derivare la legge seguente: se un corpo elettricamente carico si muove arbitrariamente nello spazio e la sua carica non muta, quando la si consideri da un sistema di coordinate in moto con il corpo, la sua carica - considerata dal sistema "a riposo" K - risulta pure costante.

§10. Dinamica dell'elettrone (lentamente accelerato).

In un campo elettromagnetico si muova una particella puntiforme (nel seguito chiamata "elettrone") provvista di una carica elettrica ζ, riguardo al moto della quale assumiamo quanto segue:

Se l'elettrone è in quiete ad un certo istante, il moto dell'elettrone nell'intervallino temporale subito successivo segue le equazioni

$$\mu \frac{d^2x}{dt^2} = \varepsilon X,\ \mu \frac{d^2y}{dt^2} = \varepsilon Y,\ \mu \frac{d^2z}{dt^2} = \varepsilon Z,$$

dove x, y, z sono le coordinate dell'elettrone, μ indica la massa dell'elettrone, finché lo stesso si muova piano.

Possieda ora l'elettrone in secondo luogo ad un dato istante la velocità v. Cerchiamo la legge secondo la quale l'elettrone si muove nell'intervallo temporale immediatamente successivo.

Senza influire sulla generalità dell'argomento, possiamo e vogliamo assumere che l'elettrone, nell'istante che stiamo prendendo in considerazione, si trovi nell'origine delle coordinate e si muova lungo l'asse X del sistema K con la velocità v. È allora chiaro che l'elettrone nell'istante sunnominato ($t = 0$) è in quiete rispetto ad un sistema di coordinate k in moto parallelo con la velocità costante v lungo l'asse X.

Dall'ipotesi prima fatta riguardo al principio di relatività è chiaro che l'elettrone nel tempo immediatamente successivo (per piccoli valori di t) considerato dal sistema k si muove secondo le equazioni:

$$\mu \frac{d^2\xi}{d\tau^2} = \varepsilon X',\ \mu \frac{d^2\eta}{d\tau^2} = \varepsilon Y',\ \mu \frac{d^2\zeta}{d\tau^2} = \varepsilon Z',$$

dove i simboli ξ, η, ζ, τ, X', Y', Z' si riferiscono al sistema k. Stabiliamo che per $t = x = y = z = 0$ debba essere $\tau = \xi = \eta = \zeta = 0$; così valgono le equazioni di trasformazione dei §§3 e 6, e si ottiene:

$$\begin{aligned}
&\tau = \beta \left(t - \frac{v}{V^2} x \right), \\
&\xi = \beta \left(x - vt \right),\ X' = X, \\
&\eta = y,\ Y' = \beta \left(Y - \frac{v}{V} N \right), \\
&\zeta = z,\ Z' = \beta \left(Z + \frac{v}{V} M \right).
\end{aligned}$$

Per mezzo di queste equazioni trasformiamo le equazioni di moto su scritte dal sistema k al sistema K e otteniamo:

$$\text{(A)} \qquad \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{\varepsilon}{\mu\beta^3} X,\ \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{\varepsilon}{\mu\beta} \left(Y - \frac{v}{V} N \right),\ \frac{d^2z}{dt^2} = \frac{\varepsilon}{\mu\beta} \left(Z + \frac{v}{V} M \right).$$

Accostandoci alla trattazione consueta ci interroghiamo ora sulle masse "longitudinale" e "trasversale". Scriviamo le equazioni (A) nella forma

$$\begin{aligned}
\mu\beta^3 \frac{d^2x}{dt^2} &= \varepsilon X = \varepsilon X',\\
\mu\beta^2 \frac{d^2y}{dt^2} &= \varepsilon\beta\left(Y - \frac{v}{V}N\right) = \varepsilon Y',\\
\mu\beta^2 \frac{d^2z}{dt^2} &= \varepsilon\beta\left(Z + \frac{v}{V}M\right) = \varepsilon Z',
\end{aligned}$$

e notiamo immediatamente che $\varepsilon X'$, $\varepsilon Y'$, $\varepsilon Z'$ sono le componenti della forza ponderomotrice che agisce sull'elettrone, e più precisamente osservate in un sistema di riferimento che si muova in questo istante con l'elettrone con la stessa velocità di questo. (Questa forza potrebbe per esempio essere misurata con una bilancia a molla a riposo nell'ultimo sistema considerato). Ora, se chiamiamo questa forza semplicemente "la forza che agisce sull'elettrone" e manteniamo l'equazione

$$\text{massa} \times \text{accelerazione} = \text{forza}$$

e se inoltre assumiamo che le accelerazioni devono essere misurate nel sistema a riposo K, otteniamo dalle equazioni precedenti:

$$\text{massa longitudinale} = \frac{\mu}{\left(\sqrt{1-\left(\frac{v}{V}\right)^2}\right)^3},$$

$$\text{massa trasversale} = \frac{\mu}{1-\left(\frac{v}{V}\right)^2}.$$

Naturalmente con un'altra definizione della forza e dell'accelerazione si ottengono valori diversi per le masse; si vede quindi che si deve procedere molto cautamente nel confronto di teorie diverse del moto dell'elettrone.

Osserviamo che questi risultati per la massa valgono anche per il punto materiale ponderabile; infatti un punto materiale ponderabile può essere fatto ponendo su un elettrone (nel nostro senso) una carica elettrica *arbitrariamente piccola*.

Valutiamo l'energia cinetica dell'elettrone. Un elettrone si muova dall'origine delle coordinate del sistema K con la velocità iniziale 0 lungo l'asse X costantemente sotto l'azione di una forza elettrostatica X; è chiaro allora che l'energia sottratta al campo elettromagnetico ha il valore $\int \varepsilon X dx$. Poiché l'elettrone dev'essere lentamente accelerato e di conseguenza non può cedere alcuna energia sotto forma di radiazione, l'energia ceduta dal campo elettromagnetico dev'essere posta uguale all'energia di moto W dell'elettrone. Si ottiene pertanto, tenendo conto che durante l'intero processo di moto considerato vale la prima delle equazioni (A):

$$W = \int \varepsilon X dx = \mu \int_0^v \beta^3 v dv = \mu V^2 \left\{ \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{V}\right)^2}} - 1 \right\}.$$

Pertanto W per $v = V$ sarà infinitamente grande. Velocità superluminali - in accordo con i nostri risultati precedenti - non hanno alcuna possibilità di esistenza.

In conseguenza dell'argomento prima avanzato questa espressione per l'energia cinetica deve valere anche per masse ponderabili.

Elencheremo ora le proprietà del moto dell'elettrone accessibili all'esperimento che risultano dal sistema di equazioni (A).

1. Dalla seconda equazione del sistema (A) segue che una forza elettrica Y ed una forza magnetica N operano con la stessa forza deviatrice su di un elettrone che si muova con la velocità v quando $Y = N \cdot v/V$. Si vede anche che la determinazione della velocità dell'elettrone dal rapporto tra la capacità di deviazione magnetica A_m e la capacità di deviazione elettrica A_e è possibile secondo la nostra teoria per velocità arbitrarie applicando la legge:

$$\frac{A_m}{A_e} = \frac{v}{V}.$$

La dimostrazione di questa relazione è accessibile sperimentalmente, poiché la velocità dell'elettrone si può misurare anche direttamente, per esempio mediante campi elettrici e magnetici oscillanti rapidamente.

2. Dalla derivazione dell'energia cinetica dell'elettrone segue che tra la differenza di potenziale attraversata e la velocità v raggiunta dall'elettrone deve valere la relazione:

$$P = \int X dx = \frac{\mu V^2}{\varepsilon} \left\{ \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{V}\right)^2}} - 1 \right\}.$$

3. Calcoliamo il raggio di curvatura R della traiettoria, quando si abbia a che fare con una forza magnetica agente N (come sola forza deviante) ortogonale alla velocità dell'elettrone. Dalla seconda delle equazioni (A) otteniamo:

$$-\frac{d^2 y}{dt^2} = \frac{v^2}{R} = \frac{\varepsilon v}{\mu V} N \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{v}{V}\right)^2}$$

ovvero

$$R = \frac{V^2 \mu}{\varepsilon} \frac{\frac{v}{V}}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{V}\right)^2}} \cdot \frac{1}{N}.$$

Queste tre relazioni sono un'espressione completa delle leggi secondo le quali si deve muovere l'elettrone per la presente teoria.

Osservo in conclusione che nei lavori sul problema qui trattato l'amico e collega M. Besso mi è stato accanto fedelmente e che gli sono debitore di molti suggerimenti preziosi.

Berna, giugno 1905

(ricevuto il 30 giugno 1905)

I fondamenti della teoria della relatività generale[1]

A. Einstein

La teoria esposta nel seguito costituisce l'estensione più vasta pensabile della teoria indicata in generale al giorno d'oggi come "teoria della relatività"; quest'ultima la chiamo nel seguito "relatività speciale" per distinguerla dalla prima, e la assumo per nota. La generalizzazione della teoria della relatività è assai facilitata dalla forma che è stata data alla teoria della relatività speciale da Minkowski, il matematico che ha per primo riconosciuto chiaramente l'equivalenza formale delle coordinate spaziali e di quella temporale, e l'ha resa utilizzabile per la costruzione della teoria. Lo strumento matematico necessario per la teoria della relatività generale stava lì bell'e pronto nel "calcolo differenziale assoluto" che deriva dalle ricerche di Gauss, Riemann e Christoffel sulle varietà non euclidee, che è stato portato in un sistema da Ricci e Levi-Civita, ed è già stato applicato ai problemi della fisica teorica. Nella sezione B della presente dissertazione ho sviluppato nel modo più facile e diretto possibile tutti gli strumenti matematici per noi necessari, che non si possano presumere noti al fisico, di modo che per la comprensione della presente dissertazione non è necessario uno studio della letteratura matematica. Un pensiero riconoscente va infine a questo punto al mio amico, il matematico Grossmann, il quale con il suo aiuto non solo mi ha risparmiato lo studio della letteratura matematica relativa, ma mi ha anche sostenuto nelle ricerche sulle equazioni di campo della gravitazione.

A. Considerazioni di principio sul postulato della relatività

§1. Osservazioni sulla teoria della relatività speciale.

La teoria della relatività speciale si fonda sul seguente postulato, soddisfatto anche dalla meccanica di Galilei-Newton: se un sistema di coordinate K è scelto in modo tale che relativamente ad esso le leggi fisiche valgono nella loro forma più semplice, le *stesse* leggi valgono anche relativamente ad ogni altro sistema di coordinate K', assunto in moto di traslazione uniforme rispetto a K. Chiamiamo questo postulato "principio di relatività speciale". Attraverso la parola "speciale" si allude al fatto che il principio è ristretto al caso che K' compia un *moto di traslazione uniforme* rispetto a K, ma che l'equivalenza di K' e di K non si estende al caso di moto *non uniforme* di K' rispetto a K.

La teoria della relatività speciale si discosta quindi dalla meccanica classica non per il postulato di relatività, ma soltanto per il postulato della costanza della velocità della luce nel vuoto, dal quale, in congiunzione con il principio della relatività speciale, discendono in modo noto la relatività della simultaneità, come pure la trasformazione di Lorentz e le leggi con questa associate sul comportamento in moto dei corpi rigidi e degli orologi.

La modificazione che la teoria dello spazio e del tempo ha subito a causa della teoria della relatività speciale è veramente profonda; ma *un* punto importante rimane intatto. Infatti anche secondo la teoria della relatività speciale le leggi della geometria si devono interpretare direttamente come le leggi sulle possibili posizioni

[1] Die Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie, Annalen der Physik **49**, 769-822 (1916).

relative di corpi rigidi (a riposo), più in generale le leggi della cinematica come leggi che descrivono il comportamento di regoli e orologi. A due punti materiali prefissati di un corpo (rigido) a riposo corrisponde perciò sempre un segmento di lunghezza completamente determinata, indipendente dalla posizione e dall'orientamento del corpo, come pure dal tempo; a due prefissate posizioni delle lancette di un orologio a riposo rispetto ad un sistema di riferimento (consentito) corrisponde sempre un intervallo temporale di lunghezza determinata, indipendente dalla posizione e dal tempo. Si mostrerà subito che la teoria della relatività generale non può attenersi a questa semplice interpretazione fisica dello spazio e del tempo.

§2. Sulle ragioni che raccomandano un'estensione del postulato della relatività.

La meccanica classica e non meno la teoria della relatività speciale contengono un difetto epistemologico, che forse per la prima volta è stato esposto chiaramente da E. Mach. Lo spieghiamo con l'esempio seguente. Due corpi fluidi di uguale grandezza e tipo sono liberamente sospesi nello spazio vuoto a così grande distanza l'uno dall'altro (e da tutte le restanti masse) che si deve tener conto soltanto di quelle forze gravitazionali che le parti di *uno per volta* di questi corpi esercitano l'una sull'altra. La separazione dei corpi sia invariabile. Non compariranno moti relativi delle parti di uno dei corpi l'una rispetto all'altra. Ciascuna delle masse, però - giudicata da un osservatore a riposo relativamente all'altra massa - potrà ruotare con velocità angolare costante attorno alla linea congiungente delle masse (si tratta di un moto relativo constatabile delle due masse). Pensiamo ora di misurare le superfici dei due corpi S_1 ed S_2 per mezzo di un regolo (relativamente a riposo); risulta che la superficie di S_1 è una sfera, quella di S_2 un ellissoide di rotazione.

Chiediamo ora: per quale ragione i corpi S_1 ed S_2 si comportano diversamente? Una risposta a questa domanda può essere epistemologicamente soddisfacente[2] quando il fatto indicato come causa sia una *fatto sperimentale osservabile*; la legge di causalità ha il significato di un'asserzione riguardo al mondo dell'esperienza solo quando come cause ed effetti si hanno in ultima analisi soltanto *fatti osservabili.*

La meccanica di Newton non dà a questa domanda alcuna risposta soddisfacente. Essa dice infatti quanto segue. Le leggi della meccanica valgono ben per uno spazio R_1, rispetto al quale il corpo S_1 è a riposo, ma non rispetto ad uno spazio R_2, rispetto al quale S_2 è a riposo. Il legittimo spazio galileiano R_1, che viene così introdotto, è tuttavia una causa *del tutto fittizia*, non una cosa osservabile. E' quindi chiaro che la meccanica di Newton nel caso considerato soddisfa il requisito della causalità non realmente, ma solo in modo apparente, poiché rende responsabile la causa puramente fittizia R_1 per i comportamenti osservabili distinti dei corpi S_1 ed S_2.

Una risposta soddisfacente alla domanda su enunciata può soltanto suonare così: il sistema fisico costituito da S_1 e S_2 non mostra di per sè solo alcuna causa pensabile, alla quale si possa ricondurre il diverso comportamento di S_1 ed S_2. La causa deve quindi stare *fuori* da questo sistema. Si arriva all'idea che le leggi del moto generali, che determinano in particolare le forme di S_1 ed S_2, devono essere di tipo tale che il comportamento meccanico di S_1 ed S_2 dev'essere condizionato

[2]Una siffatta risposta epistemologicamente soddisfacente può sempre naturalmente rivelarsi *fisicamente* infondata, nel caso che essa sia in contraddizione con altre esperienze.

in modo del tutto essenziale dalle masse lontane, delle quali non abbiamo tenuto conto nel sistema trattato. Queste masse lontane (ed i loro moti relativi rispetto ai corpi considerati) vanno quindi viste come portatrici di cause in linea di principio osservabili per il comportamento diverso dei corpi da noi trattati; esse assumono il ruolo della causa fittizia R_1. Di tutti gli spazi pensabili in moto relativo arbitrario R_1, R_2 eccetera, non se ne deve considerare alcuno come privilegiato, per non far rinascere la suddetta obiezione epistemologica. Le *leggi della fisica devono essere di natura tale da valere rispetto ad un sistema di riferimento in moto arbitrario.* Giungiamo per questa via ad un allargamento del postulato della relatività.

Ma oltre a questo grave argomento epistemologico anche un ben noto fatto fisico parla a favore di un'estensione della teoria della relatività. Sia K un sistema di riferimento galileiano, cioè tale che rispetto ad esso (per lo meno nella regione tetradimensionale considerata) una massa abbastanza lontana dalle altre si muova di moto rettilineo ed uniforme. Sia K' un secondo sistema di coordinate, che sia rispetto a K in moto di traslazione *uniformemente accelerato.* Relativamente a K' una massa sufficientemente separata dalle altre esegue un moto accelerato in modo tale che la sua accelerazione, e la direzione dell'accelerazione, sono indipendenti dalla sua costituzione materiale e dal suo stato fisico.

Può un osservatore in quiete rispetto a K' trarre da qui la conclusione che egli si trova in un sistema di riferimento "realmente" accelerato? A questa domanda si deve rispondere negativamente; infatti il suddetto comportamento di una massa in moto libero relativamente a K' si può interpretare anche nel modo seguente. Il sistema di riferimento K' è non accelerato; nella regione spaziotemporale considerata regna tuttavia un campo di gravitazione, che provoca il moto accelerato del corpo relativamente a K'.

Quest'idea è resa possibile dal fatto che l'esperienza ci ha insegnato l'esistenza di un campo di forze (ossia del campo gravitazionale) il quale possiede la proprietà notevole di impartire a tutti i corpi la stessa accelerazione[3]. Il comportamento meccanico del corpo relativamente a K' è identico a come si presenta l'esperienza rispetto a sistemi, che siamo abituati a considerare come "in quiete" ovvero come "legittimi"; perciò anche dal punto di vista fisico è naturale assumere che i due sistemi K e K' si possono considerare entrambi con lo stesso diritto come "a riposo", ossia che essi sono ugualmente legittimi come sistemi di riferimento per la descrizione fisica dei processi.

Da queste riflessioni si vede che l'introduzione della relatività generale deve condurre parimenti ad una teoria della gravitazione; si può infatti "generare" un campo di gravitazione con il puro cambiamento del sistema di coordinate. E si vede anche immediatamente che il principio della costanza della velocità della luce nel vuoto deve subire una modificazione. Si riconosce infatti facilmente che il cammino di un raggio di luce rispetto a K' in generale dev'essere curvo, mentre la luce si propaga rispetto a K in linea retta e con velocità costante determinata.

§3. Il continuo spaziotemporale. Postulato della covarianza generale per le equazioni che devono esprimere le leggi naturali generali.

Nella meccanica classica e anche nella teoria della relatività speciale le coordinate dello spazio e del tempo hanno un significato fisico immediato. Che un

[3] Che il campo gravitazionale possieda questa proprietà con grande precisione, l'ha dimostrato sperimentalmente Eötvös.

evento puntuale abbia x_1 per la coordinata X_1 significa: la proiezione sull'asse X_1 dell'evento puntuale eseguita per mezzo di regoli rigidi secondo le regole della geometria euclidea si ottiene riportando x_1 volte un regolo determinato, il regolo unitario, dall'origine delle coordinate lungo l'asse X_1 (positivo). Che un punto abbia $x_4 = t$ per coordinata X_4 significa: un orologio campione, che sia costruito secondo prescrizioni determinate, posto a riposo rispetto al sistema di coordinate, che (in pratica) coincida spazialmente con l'evento puntuale, ha accumulato $x_4 = t$ periodi al verificarsi dell'evento puntuale[4].

Quest'idea dello spazio e del tempo è sempre presente ai fisici, anche se per lo più in modo inconscio, com'è riconoscibile chiaramente dal ruolo che questi concetti giocano nella fisica sperimentale; quest'idea il lettore la deve porre a fondamento anche della seconda considerazione dell'ultimo paragrafo, affinché si possa associare un senso a queste argomentazioni. Ma mostreremo ora che bisogna abbandonarla e sostituirla con una più generale per poter introdurre il postulato della relatività generale quando vale la relatività speciale, per il caso limite dell'assenza di un campo di gravitazione.

Introduciamo in uno spazio che sia libero da campi gravitazionali un sistema di riferimento galileiano $K(x, y, z, t)$, e inoltre un sistema di coordinate $K'(x', y', z', t')$ che ruoti uniformemente rispetto a K. Le origini dei due sistemi e i loro assi Z coincidano permanentemente. Mostreremo che per una misura spaziotemporale nel sistema K' la precedente determinazione del significato fisico di lunghezze e tempi non può stare più in piedi. Per ragioni di simmetria è chiaro che un cerchio attorno all'origine nel piano $X - Y$ di K può ugualmente essere considerato un cerchio nel piano $X' - Y'$ di K'. Pensiamo ora che la circonferenza e il diametro di questo cerchio siano misurati con un regolo unitario (infinitamente piccolo rispetto al raggio) e che si faccia il rapporto dei due risultati delle misure. Sa si compie questo esperimento con un regolo a riposo relativamente al sistema galileiano K, si ottiene come rapporto il numero π. *Il* risultato della determinazione compiuto con un regolo a riposo rispetto a K' sarà un numero maggiore di π. Lo si riconosce facilmente, quando si giudichi l'intero processo di misura dal sistema "a riposo" K e si consideri che il regolo disposto lungo la periferia subisce una contrazione di Lorentz, il regolo disposto radialmente invece no. Rispetto a K' non vale quindi la geometria euclidea; il concetto di coordinate prima fissato, che presuppone la validità della geometria euclidea, fa quindi cilecca rispetto al sistema K'. Altrettanto poco si può introdurre in K' un tempo che corrisponda alle necessità fisiche, che sia indicato da orologi a riposo in K', costruiti in modo uguale. Per riconoscerlo, si pensi di disporre rispettivamente nell'origine delle coordinate e sulla periferia del cerchio due orologi costruiti in modo uguale e di osservarli dal sistema "a riposo" K. Secondo un risultato noto della relatività speciale l'orologio disposto sulla periferia del cerchio - giudicato da K - ritarda rispetto all'orologio disposto nell'origine, poiché il primo orologio è in moto, il secondo no. Un osservatore che si trovi nell'origine comune delle coordinate, che sia in grado di osservare anche l'orologio che si trova sulla periferia mediante la luce, vedrà quindi ritardare l'orologio disposto sulla periferia rispetto a quello disposto presso di lui. Poiché egli non può risolversi a lasciar dipendere esplicitamente dal tempo la velocità della luce sul

[4]Assumiamo la constatabilità della "simultaneità" per eventi immediatamente prossimi in senso spaziale, ovvero - detto più precisamente - per l'immediata prossimità spaziotemporale (coincidenza), senza dare una definizione di questo concetto fondamentale.

cammino considerato, interpreterà la sua osservazione nel senso che l'orologio sulla periferia rallenta "davvero" rispetto a quello disposto nell'origine. Egli non potrà quindi fare a meno di definire il tempo in modo tale che la velocità d'avanzamento di un orologio dipenda dalla posizione.

Arriviamo quindi alla conclusione: nella teoria della relatività generale le quantità spaziali e temporali non sono definite in modo tale che le differenze di coordinate spaziali possano essere misurate immediatamente con il regolo campione unitario, e quelle temporali con l'orologio standard.

Il mezzo precedente per introdurre delle coordinate nel continuo spaziotemporale in una maniera definita quindi fallisce, e non pare che si offra alcun'*altra* via che permetta di adattare delle coordinate al mondo tetradimensionale in modo tale che con il loro impiego ci si debba aspettare una formulazione particolarmente semplice delle leggi naturali. Non resta quindi altra possibilità che assumere tutti i sistemi di coordinate pensabili[5] come in linea di principio ugualmente legittimi per la descrizione della natura. Si arriva così al postulato:

Le leggi generali della natura sono da esprimersi con equazioni che valgano per tutti i sistemi di coordinate, cioè che siano covarianti rispetto alle sostituzioni arbitrarie (generalmente covarianti).

E' chiaro che una fisica che obbedisce a questo postulato soddisfa il postulato di relatività generale. Infatti fra *tutte* le sostituzioni sono senz'altro comprese anche quelle che corrispondono a tutti i moti relativi del sistema di coordinate (tridimensionale). Che questo postulato della covarianza generale, che sottrae allo spazio ed al tempo l'ultimo residuo di oggettività fisica, sia un postulato naturale, risulta dalla seguente considerazione. Tutte le nostre constatazioni spaziotemporali derivano sempre dalla determinazione di coincidenze spaziotemporali. Se per esempio gli accadimenti consistessero soltanto nel moto di punti materiali, in ultima analisi non sarebbe osservabile nient'altro che gli incontri di due o più di questi punti. Anche i risultati delle nostre misure non sarebbero nient'altro che la constatazione di incontri siffatti di punti materiali del nostro regolo con altri punti materiali, ovvero coincidenze tra lancette di orologio e cifre sul quadrante, e considerati come eventi puntuali che si verificano nello stesso posto ed allo stesso tempo.

L'introduzione di un sistema di coordinate non serve a nient'altro che ad una descrizione più facile della totalità di tali coincidenze. Si associano all'universo quattro variabili spaziotemporali x_1, x_2, x_3, x_4 in modo tale che ad ogni evento puntuale corrisponda un sistema di valori delle variabili $x_1 \dots x_4$. A due eventi puntuali coincidenti corrisponde lo stesso sistema di valori delle variabili $x_1 \dots x_4$; cioè la coincidenza è caratterizzata dalla concordanza delle coordinate. Se al posto delle variabili $x_1 \dots x_4$ si introducono funzioni arbitrarie delle stesse x'_1, x'_2, x'_3, x'_4 come nuovo sistema di coordinate, in modo che i sistemi di valori si corrispondano univocamente, l'uguaglianza di tutte e quattro le coordinate è anche nel nuovo sistema l'espressione della coincidenza spaziotemporale di due eventi puntuali. Poiché tutte le nostre esperienze fisiche si possono ricondurre in fin dei conti a coincidenze siffatte, non esiste nessuna ragione per preferire certi sistemi di coordinate ad altri, quindi arriviamo al postulato della covarianza generale.

[5]Di certe restrizioni, che corrispondono al requisito di un coordinamento univoco e a quello della continuità, qui non diremo nulla.

§4. Relazione delle quattro coordinate con i risultati delle misure spaziali e temporali. Espressione analitica per il campo gravitazionale.

Non è mio scopo in questa dissertazione presentare la teoria della relatività generale con un minimo di assiomi come un sistema logico il più semplice possibile. È invece mio scopo principale sviluppare questa teoria in modo tale che il lettore avverta la naturalezza psicologica della via intrapresa, e che i postulati scelti a fondamento appaiano il più possibile confermati dall'esperienza. In questo senso si introduce ora il postulato:

Per regioni tetradimensionali infinitamente piccole la teoria della relatività nel senso ristretto dev'esser vera in un opportuno sistema di coordinate.

Lo stato di accelerazione del sistema di coordinate infinitamente piccolo ("locale") va scelto in modo tale che non compaia un campo di gravitazione; ciò è possibile per una regione infinitamente piccola. Siano X_1, X_2, X_3 le coordinate spaziali; sia X_4 la corrispondente coordinata temporale misurata con un opportuno campione[6]. Per una determinata orientazione del sistema di coordinate queste coordinate hanno, quando si pensi dato un piccolo regolo rigido come regolo di misura unitario, un significato fisico immediato nel senso della teoria della relatività speciale. L'espressione

$$ds^2 = -dX_1^2 - dX_2^2 - dX_3^2 + dX_4^2 \tag{1}$$

ha allora secondo la teoria della relatività speciale un valore, accertabile mediante misura dello spazio e del tempo, indipendente dall'orientazione del sistema di coordinate locali. Chiamiamo ds la lunghezza dell'elemento di linea che appartiene a due punti infinitamente vicini dello spazio tetradimensionale. Se il ds^2 che corrisponde all'elemento $(dX_1 \ldots .dX_4)$ è positivo, chiamiamo quest'ultimo con Minkowski temporale, nel caso contrario spaziale.

All'"elemento di linea" considerato, ovvero ai due eventi puntuali infinitamente vicini corrispondono anche determinati differenziali $dx_1 \ldots .dx_4$ delle coordinate tetradimensionali del sistema di riferimento scelto. Se a questo, nella posizione considerata, si associa anche un sistema "locale" del tipo di cui sopra, i dX_ν si potranno rappresentare con certe espressioni lineari omogenee dei dx_σ:

$$dX_\nu = \sum_\sigma \alpha_{\nu\sigma} dx_\sigma. \tag{2}$$

Se si sostituiscono queste espressioni nella (1), si ottiene

$$ds^2 = \sum_{\sigma\tau} g_{\sigma\tau} dx_\sigma dx_\tau, \tag{3}$$

dove le $g_{\sigma\tau}$ saranno funzioni delle x_σ, che non possono più dipendere dall'orientazione e dallo stato di moto del sistema di coordinate "locale"; dunque ds^2 è una quantità definita indipendentemente da ogni scelta particolare delle coordinate, accertabile mediante misure con regoli e orologi, che appartiene agli eventi puntuali

[6] L'unità temporale va scelta in modo tale che la velocità della luce nel vuoto - misurata nel sistema di coordinate "locale" - sia uguale ad 1.

considerati, infinitamente vicini in senso spaziotemporale. Le $g_{\sigma\tau}$ sono da scegliersi in modo tale che $g_{\sigma\tau} = g_{\tau\sigma}$; la sommatoria va estesa a tutti i valori di σ e τ, di modo che la somma consiste di 4×4 addendi, dei quali 12 sono a coppie uguali.

Il caso della teoria della relatività consueta risulta da quello trattato qui quando, grazie al comportamento particolare di $g_{\sigma\tau}$ in una regione finita, sia possibile scegliere in questa il sistema di riferimento in modo tale che le $g_{\sigma\tau}$ assumano i valori costanti

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{4}$$

Vedremo in seguito che la scelta di tali coordinate per regioni finite in generale non è possibile.

Dalle considerazioni dei §§2 e 3 risulta che le quantità $g_{\sigma\tau}$ sono da intendersi dal punto di vista fisico come quelle quantità che descrivono il campo di gravitazione rispetto al sistema di riferimento scelto. Assumiamo infatti che la teoria della relatività speciale valga con un'opportuna scelta delle coordinate per una certa regione tetradimensionale considerata. Le $g_{\sigma\tau}$ hanno pertanto i valori dati nella (4). Un punto materiale libero si muove allora rispetto a questo sistema di moto rettilineo uniforme. Se si introducono mediante una sostituzione arbitraria nuove coordinate spaziotemporali $x_1 \ldots . x_4$, le $g_{\mu\nu}$ in questo nuovo sistema non saranno più costanti, ma funzioni dello spazio e del tempo. Parimenti il moto del punto materiale libero si rappresenterà nelle nuove coordinate come curvilineo e non uniforme, e la legge di moto sarà indipendente dalla natura del punto materiale che si muove. Interpreteremo quindi questo moto come un moto sotto l'influenza di un campo di gravitazione. Vediamo l'apparire di un campo di gravitazione associato alla variabilità spaziotemporale delle $g_{\sigma\tau}$. Anche nel caso generale, quando non possiamo ottenere con un'opportuna scelta delle coordinate la validità della teoria della relatività speciale in una regione finita, ci atterremo all'ipotesi che le $g_{\sigma\tau}$ descrivano il campo gravitazionale.

La gravitazione, secondo la teoria della relatività generale, gioca pertanto un ruolo eccezionale rispetto alle restanti forze, in particolare a quelle elettromagnetiche, poiché le 10 funzioni $g_{\sigma\tau}$ che rappresentano il campo gravitazionale determinano allo stesso tempo le proprietà metriche dello spazio misurabile tetradimensionale.

B. Sussidi matematici per la costruzione di equazioni generalmente covarianti.

Poiché abbiamo visto in precedenza che il postulato di relatività generale porta all'ingiunzione che i sistemi di equazioni della fisica debbano essere covarianti rispetto a sostituzioni arbitrarie delle coordinate $x_1 \ldots . x_4$, dobbiamo considerare come si possano ottenere equazioni generalmente covarianti di questo tipo. Ci dedichiamo ora a questo problema puramente matematico; si mostrerà che per la sua soluzione l'invariante ds definito nell'equazione (3), che per analogia con la teoria di Gauss delle superfici abbiamo designato come "elemento di linea", gioca un ruolo fondamentale.

L'idea di base di questa teoria generalmente covariante è la seguente. Esistono certi oggetti ("tensori") definiti rispetto a ciascun sistema di coordinate mediante un certo numero di funzioni dello spazio, che saranno chiamate le "componenti" del tensore. Esistono certe regole secondo le quali queste componenti vengono calcolate in un nuovo sistema di coordinate, quando esse siano note per il sistema originario, e quando la trasformazione che collega i due sistemi sia nota. Gli oggetti designati come tensori sono inoltre caratterizzati dal fatto che le equazioni di trasformazione per le loro componenti sono lineari ed omogenee. Di conseguenza tutte le componenti si annullano nel sistema nuovo se si annullano tutte nel sistema originario. Se quindi una legge naturale viene formulata uguagliando a zero tutte le componenti di un tensore, essa è generalmente covariante; studiando le leggi di formazione dei tensori otterremo il mezzo per costruire tutte le leggi covarianti in senso generale.

§5. Tetravettore controvariante e covariante.

Tetravettore controvariante. L'elemento di linea è definito mediante le quattro "componenti" dx_ν la cui legge di trasformazione è espressa dall'equazione

$$dx'_\sigma = \sum_\nu \frac{\partial x'_\sigma}{\partial x_\nu} dx_\nu. \tag{5}$$

I dx'_σ si scrivono mediante un'espressione lineare ed omogenea in dx_ν; possiamo quindi considerare questi differenziali dx_ν delle coordinate come le componenti di un "tensore", che designamo in particolare come tetravettore controvariante. Ogni oggetto definito rispetto al sistema di coordinate mediante quattro quantità A^ν, che si trasformano con la stessa legge

$$A^{\sigma\prime} = \sum_\nu \frac{\partial x'_\sigma}{\partial x_\nu} A^\nu \tag{5a}$$

lo chiameremo sempre tetravettore controvariante. Dalla (5a) discende anche che le somme $(A^\sigma \pm B^\sigma)$ sono sempre componenti di un tetravettore, se A^σ e B^σ lo sono. Il risultato corrispondente vale per tutti i sistemi che si introdurranno in seguito come "tensori" (regola dell'addizione e sottrazione dei tensori).

Tetravettore covariante. Chiamiamo quattro quantità A_ν le componenti di un tetravettore covariante quando con scelta arbitraria del tetravettore controvariante B^ν si ha

$$\sum_\nu A_\nu B^\nu = \mathit{invariante}. \tag{6}$$

Da questa definizione discende la legge di trasformazione dei tetravettori covarianti. Se infatti al secondo membro dell'equazione

$$\sum_\sigma A'_\sigma B^{\sigma\prime} = \sum_\nu A_\nu B^\nu$$

si sostituisce B^ν con l'espressione che si ottiene invertendo l'equazione (5a)

$$\sum_\nu \frac{\partial x_\nu}{\partial x'_\sigma} B^{\sigma\prime},$$

risulta

$$\sum_\sigma B^{\sigma\prime} \sum_\nu \frac{\partial x_\nu}{\partial x'_\sigma} A_\nu = \sum_\sigma B^{\sigma\prime} A'_\sigma.$$

Poiché in questa equazione i $B^{\sigma\prime}$ si possono scegliere liberamente in modo indipendente l'uno dall'altro, da qui risulta la legge di trasformazione

$$A'_\sigma = \sum \frac{\partial x_\nu}{\partial x'_\sigma} A_\nu. \tag{7}$$

Osservazione sulla semplificazione del modo di scrivere l'espressione.

Un'occhiata alle equazioni di questo paragrafo mostra che si somma sempre su indici che compaiano due volte sotto un segno di sommatoria, per esempio l'indice ν nella (5), e *soltanto* su indici che compaiano due volte. È quindi possibile, senza pregiudicare la chiarezza, lasciar perdere il segno di sommatoria. Introduciamo perciò la regola: se un indice compare due volte in un termine di un'espressione, bisogna sempre eseguire la somma su di esso, a meno che non si indichi espressamente l'opposto.

La distinzione tra il tetravettore covariante e quello controvariante sta nella legge di trasformazione [rispettivamente (7) e (5)]. Entrambe le forme sono tensori nel senso dell'osservazione generale precedente; in ciò sta il loro significato. In conformità con Ricci e Levi-Civita si denoterà il carattere controvariante con l'indice in alto, quello covariante con l'indice in basso.

§6. Tensori di rango secondo e più alto.

Tensore controvariante. Formiamo tutti i 16 prodotti $A^{\mu\nu}$ delle componenti A^μ e B^ν di due tetravettori controvarianti

$$A^{\mu\nu} = A^\mu B^\nu; \tag{8}$$

allora per le (8) e (5a) $A^{\mu\nu}$ soddisfa la legge di trasformazione

$$A^{\sigma\tau\prime} = \frac{\partial x'_\sigma}{\partial x_\mu} \frac{\partial x'_\tau}{\partial x_\nu} A^{\mu\nu}. \tag{9}$$

Chiamiamo tensore controvariante di rango secondo un oggetto che rispetto ad un sistema di riferimento si scrive con 16 quantità (funzioni), che soddisfino la legge di trasformazione (9). Non tutti i tensori siffatti si possono formare da due tetravettori secondo la (8). Ma è facile dimostrare che 16 $A^{\mu\nu}$ dati arbitrariamente si possono rappresentare come la somma degli $A^\mu B^\nu$ di quattro coppie di tetravettori opportunamente scelte. Perciò quasi tutte le regole che valgono per un tensore di secondo rango definito dalla (9) si possono dimostrare nel modo più semplice a partire dal fatto che esse valgano per tensori particolari del tipo (8).

Tensore controvariante di rango qualsiasi. È chiaro che secondo le (8) e (9) si possono anche definire tensori controvarianti di rango terzo e superiore con 4^3 o più componenti. Risulta pure chiaro dalle (8) e (9) che in questo senso il tetravettore controvariante si può intendere come tensore controvariante di rango uno.

Tensore covariante. Se si formano invece i 16 prodotti $A_{\mu\nu}$ di due tetravettori *covarianti* A_μ e B_ν

$$A_{\mu\nu} = A_\mu B_\nu, \tag{10}$$

per essi vale la legge di trasformazione

$$A'_{\sigma\tau} = \frac{\partial x_\mu}{\partial x'_\sigma} \frac{\partial x_\nu}{\partial x'_\tau} A_{\mu\nu}. \tag{11}$$

Il tensore covariante di rango secondo è definito da questa legge di trasformazione. Tutte le osservazioni che sono state fatte precedentemente sui tensori controvarianti valgono anche per i tensori covarianti.

Osservazione. È conveniente trattare lo scalare (invariante) come un tensore di rango zero sia controvariante che covariante.

Tensore misto. Si può anche definire un tensore di rango secondo del tipo

$$A_\mu^\nu = A_\mu B^\nu, \tag{12}$$

che sia covariante rispetto all'indice μ, e controvariante rispetto all'indice ν. La sua legge di trasformazione è

$$A_\sigma^{\tau\,\prime} = \frac{\partial x'_\tau}{\partial x_\beta} \frac{\partial x_\alpha}{\partial x'_\sigma} A_\alpha^\beta. \tag{13}$$

Naturalmente esistono tensori misti con un numero a piacere di indici di carattere covariante e rispettivamente controvariante. Il tensore covariante e quello controvariante possono essere considerati come casi particolari di quello misto.

Tensori simmetrici. Un tensore controvariante o covariante di rango secondo o più alto si chiama *simmetrico* quando siano uguali due componenti che vanno l'una nell'altra per scambio di due indici qualsiansi. Il tensore $A^{\mu\nu}$ o $A_{\mu\nu}$ è quindi simmetrico, se per ogni combinazione degli indici si ha

$$A^{\mu\nu} = A^{\nu\mu}, \tag{14}$$

ovvero

$$A_{\mu\nu} = A_{\nu\mu}. \tag{14a}$$

Va osservato che la simmetria così definita è una proprietà indipendente dal sistema di riferimento. (Infatti, tenendo conto della (14), dalla (9) discende

$$A^{\sigma\tau\,\prime} = \frac{\partial x'_\sigma}{\partial x_\mu} \frac{\partial x'_\tau}{\partial x_\nu} A^{\mu\nu} = \frac{\partial x'_\sigma}{\partial x_\mu} \frac{\partial x'_\tau}{\partial x_\nu} A^{\nu\mu} = \frac{\partial x'_\tau}{\partial x_\mu} \frac{\partial x'_\sigma}{\partial x_\nu} A^{\mu\nu} = A^{\tau\sigma\,\prime}.$$

La penultima uguaglianza deriva dallo scambio degli indici di somma μ e ν (cioè da un puro cambio di notazione).

Tensori antisimmetrici. Un tensore controvariante di rango secondo, terzo o quarto si dice antisimmetrico quando due componenti, che vanno l'una nell'altra per scambio di due indici qualsiansi, siano *uguali* ed *opposte*. Il tensore $A^{\mu\nu}$ o $A_{\mu\nu}$ è quindi antisimmetrico, se si ha sempre

$$A^{\mu\nu} = -A^{\nu\mu}, \tag{15}$$

ovvero

$$A_{\mu\nu} = -A_{\nu\mu}. \tag{15a}$$

Delle 16 componenti $A^{\mu\nu}$ le quattro componenti $A^{\mu\mu}$ sono nulle; le rimanenti sono a coppie uguali ed opposte, sicché solo 6 componenti sono numericamente diverse (esavettore). Si vede parimenti che il tensore antisimmetrico $A^{\mu\nu\sigma}$ (rango terzo) ha solo quattro componenti numericamente distinte, e che il tensore antisimmetrico $A^{\mu\nu\sigma\tau}$ ne ha una sola. Tensori antisimmetrici di rango superiore al quarto non esistono in un continuo con quattro dimensioni.

§7. Moltiplicazione dei tensori.

Moltiplicazione esterna dei tensori. Dalle componenti di un tensore di rango z e di un tensore di rango z' si ottengono le componenti di un tensore di rango $z + z'$ se si moltiplicano a coppie tutte le componenti del primo per tutte le componenti del secondo. Si ottengono per esempio i tensori T dai tensori A e B di tipo diverso

$$T_{\mu\nu\sigma} = A_{\mu\nu} B_\sigma,$$

$$T^{\alpha\beta\gamma\delta} = A^{\alpha\beta} B^{\gamma\delta},$$

$$T^{\gamma\delta}_{\alpha\beta} = A_{\alpha\beta} B^{\gamma\delta}.$$

La dimostrazione del carattere tensoriale di T si ottiene immediatamente dalle rappresentazioni (8), (10), (12) ovvero dalle regole di trasformazione (9), (11), (13). Le equazioni (8), (10), (12) sono loro stesse esempi di moltiplicazione esterna (di tensori di rango primo).

"*Contrazione*" *di un tensore misto.* Da ogni tensore misto si può formare un tensore d'un rango di due più piccolo, se si pongono uguali un indice covariante ed un indice controvariante e si somma su questo indice ("contrazione"). Per esempio dal tensore misto di rango quarto $A^{\gamma\delta}_{\alpha\beta}$ si ottiene il tensore misto di rango secondo

$$A^{\delta}_{\beta} = A^{\alpha\delta}_{\alpha\beta} \left(= \sum_\alpha A^{\alpha\delta}_{\alpha\beta} \right)$$

e da questo, ancora per contrazione, il tensore di rango nullo $A = A^{\beta}_{\beta} = A^{\alpha\beta}_{\alpha\beta}$.

La dimostrazione del fatto che il risultato della contrazione ha davvero carattere tensoriale si ottiene o dalla rappresentazione tensoriale secondo la generalizzazione della (12) assieme alla (6), o dalla generalizzazione della (13).

Moltiplicazione interna e mista dei tensori. Esse consistono nella combinazione della moltiplicazione esterna con la contrazione.

Esempi. - Dal tensore covariante di rango due $A_{\mu\nu}$ e dal tensore controvariante di rango uno B^σ formiamo mediante moltiplicazione esterna il tensore misto

$$D^{\sigma}_{\mu\nu} = A_{\mu\nu} B^\sigma$$

Per contrazione relativa agli indici ν, σ risulta il tetravettore covariante

$$D_\mu = D^\nu_{\mu\nu} = A_{\mu\nu}B^\nu.$$

Questo lo si chiama anche prodotto interno dei tensori $A_{\mu\nu}$ e B^σ. Analogamente dai tensori $A_{\mu\nu}$ e $B^{\sigma\tau}$ per moltiplicazione esterna e doppia contrazione si forma il prodotto interno $A_{\mu\nu}B^{\mu\nu}$. Mediante prodotto esterno e contrazione semplice si ottiene da $A_{\mu\nu}$ e $B^{\sigma\tau}$ il tensore misto di rango secondo $D^\tau_\mu = A_{\mu\nu}B^{\nu\tau}$. Si può opportunamente designare questa operazione come mista; infatti essa è esterna rispetto agli indici μ e τ, interna rispetto agli indici ν e σ.

Dimostriamo ora un teorema che è spesso utile per la verifica del carattere tensoriale. Per quanto mostrato prima $A_{\mu\nu}B^{\mu\nu}$ è uno scalare se $A_{\mu\nu}$ e $B^{\mu\nu}$ sono tensori. Ma affermiamo anche quanto segue. Se $A_{\mu\nu}B^{\mu\nu}$ è un invariante per ogni scelta del *tensore* $B^{\mu\nu}$, $A_{\mu\nu}$ ha carattere tensoriale.

Dimostrazione. - Per ipotesi per una sostituzione arbitraria si ha

$$A'_{\sigma\tau}B^{\sigma\tau\prime} = A_{\mu\nu}B^{\mu\nu}.$$

Ma per l'inversa della (9) si ha

$$B^{\mu\nu} = \frac{\partial x_\mu}{\partial x'_\sigma}\frac{\partial x_\nu}{\partial x'_\tau}B^{\sigma\tau\prime}.$$

Questa, sostituita nell'equazione precedente, dà

$$\left(A'_{\sigma\tau} - \frac{\partial x_\mu}{\partial x'_\sigma}\frac{\partial x_\nu}{\partial x'_\tau}A_{\mu\nu}\right)B^{\sigma\tau\prime} = 0.$$

Per una scelta arbitraria di $B^{\sigma\tau\prime}$ questa equazione può essere soddisfatta solo se la parentesi è uguale a zero, e da qui tenendo conto della (11) segue l'asserto.

Questo teorema vale analogamente per tensori di rango e carattere arbitrari; la dimostrazione si esegue sempre in modo analogo.

Il teorema si può dimostrare anche nella forma: se B^μ e C^ν sono vettori arbitrari, e se per ogni scelta di questi il prodotto interno

$$A_{\mu\nu}B^\mu C^\nu$$

è uno scalare, $A_{\mu\nu}$ è un tensore covariante. Quest'ultimo teorema vale anche quando si ha a che fare con l'enunciato particolare, che per scelta arbitraria del tetravettore B^μ il prodotto scalare

$$A_{\mu\nu}B^\mu B^\nu$$

è uno scalare, purché si sappia che $A_{\mu\nu}$ soddisfi la condizione di simmetria $A_{\mu\nu} = A_{\nu\mu}$. Infatti per la via data prima si dimostra il carattere tensoriale di $(A_{\mu\nu}+A_{\nu\mu})$, e da qui per la proprietà di simmetria discende il carattere tensoriale dello stesso $A_{\mu\nu}$. Anche questo teorema si generalizza agevolmente al caso di tensori covarianti e controvarianti di rango arbitrario.

Discende infine da quanto provato prima il teorema parimenti estendibile a tensori arbitrari: se la quantità $A_{\mu\nu}B^\nu$ per scelta arbitraria del tetravettore B^ν è un tensore di rango primo, $A_{\mu\nu}$ è un tensore di rango secondo. Se infatti C^ν è un tetravettore arbitrario, per il carattere tensoriale di $A_{\mu\nu}B^\nu$ il prodotto interno

$A_{\mu\nu}C^\mu B^\nu$ è uno scalare per scelta arbitraria dei due tetravettori C^μ e B^ν, e da qui segue l'asserto.

§8. Alcune proprietà del tensore fondamentale $g_{\mu\nu}$.

Il *tensore fondamentale covariante.* Nell'espressione invariante del quadrato dell'elemento di linea

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx_\mu dx_\nu$$

dx_μ gioca il ruolo di un vettore controvariante arbitrario. Poiché inoltre $g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}$, dalle considerazioni dell'ultimo paragrafo discende che $g_{\mu\nu}$ è un tensore covariante di rango secondo. Lo chiamiamo "tensore fondamentale". Nel seguito deriviamo alcune proprietà di questo tensore, che sono proprie di ogni tensore di rango secondo; tuttavia il ruolo particolare del tensore fondamentale nella nostra teoria, che ha la sua base fisica nella peculiarità delle azioni gravitazionali, porta con sè che le relazioni che s'otterranno siano per noi significative solo per il tensore fondamentale.

Il *tensore fondamentale controvariante.* Se nello schema del determinante dei $g_{\mu\nu}$ si forma il minore corrispondente ad ogni $g_{\mu\nu}$ e lo si divide per il determinante $g = |g_{\mu\nu}|$ dei $g_{\mu\nu}$, si ottengono certe quantità $g^{\mu\nu} (= g^{\nu\mu})$, riguardo alle quali dimostreremo che costituiscono un tensore controvariante.

Per una nota proprietà dei determinanti si ha

$$g_{\mu\sigma} g^{\nu\sigma} = \delta^\nu_\mu, \tag{16}$$

dove il simbolo δ^ν_μ significa 1 o 0, a seconda che sia $\mu = \nu$ oppure $\mu \neq \nu$. Al posto dell'espressione precedente per ds^2 possiamo anche scrivere

$$g_{\mu\sigma} \delta^\sigma_\nu dx_\mu dx_\nu,$$

ovvero per la (16) anche

$$g_{\mu\sigma} g_{\nu\tau} g^{\sigma\tau} dx_\mu dx_\nu.$$

Ma per le regole di moltiplicazione del paragrafo precedente le quantità

$$d\xi_\sigma = g_{\mu\sigma} dx_\mu$$

costituiscono un tetravettore covariante, e in particolare (poiché i dx_μ si possono scegliere a piacere) un tetravettore arbitrario. Sostituendolo nella nostra espressione otteniamo

$$ds^2 = g^{\sigma\tau} d\xi_\sigma d\xi_\tau.$$

Poiché questo è uno scalare per scelta arbitraria del vettore $d\xi_\sigma$ e $g^{\sigma\tau}$ è per definizione simmetrico negli indici σ e τ, dai risultati del paragrafo precedente discende che $g^{\sigma\tau}$ è un tensore controvariante. Dalla (16) discende ancora che anche δ^ν_μ è un tensore, che possiamo chiamare il tensore fondamentale misto.

Determinante del tensore fondamentale. Per la legge di moltiplicazione dei determinanti si ha

$$|g_{\mu\alpha} g^{\alpha\nu}| = |g_{\mu\alpha}||g^{\alpha\nu}|.$$

D'altra parte

$$|g_{\mu\alpha}g^{\alpha\nu}| = |\delta_\mu^\nu| = 1.$$

Ne discende quindi

$$|g_{\mu\nu}||g^{\mu\nu}| = 1. \tag{17}$$

Invariante di volume. Studiamo in primo luogo la legge di trasformazione del determinante $g = |g_{\mu\nu}|$. Per la (11) si ha

$$g' = \left| \frac{\partial x_\mu}{\partial x'_\sigma} \frac{\partial x_\nu}{\partial x'_\tau} g_{\mu\nu} \right|.$$

Da qui applicando due volte la regola di moltiplicazione dei determinanti s'ottiene

$$g' = \left|\frac{\partial x_\mu}{\partial x'_\sigma}\right| \left|\frac{\partial x_\nu}{\partial x'_\tau}\right| |g_{\mu\nu}| = \left|\frac{\partial x_\mu}{\partial x'_\sigma}\right|^2 g,$$

ovvero

$$\sqrt{g'} = \left|\frac{\partial x_\mu}{\partial x'_\sigma}\right| \sqrt{g}.$$

D'altra parte la legge di trasformazione dell'elemento di volume

$$d\tau' = \int dx_1 dx_2 dx_3 dx_4$$

è

$$d\tau' = \left|\frac{\partial x'_\sigma}{\partial x_\mu}\right| d\tau$$

per il noto teorema di Jacobi. Moltiplicando le ultime due equazioni si ottiene

$$\sqrt{g'} d\tau' = \sqrt{g} d\tau. \tag{18}$$

Al posto di $\sqrt{g}$ si introdurrà nel seguito la quantità $\sqrt{-g}$, che per il carattere iperbolico del continuo spaziotemporale ha sempre un valore reale. L'invariante $\sqrt{-g}d\tau$ è uguale alla grandezza dell'elemento di volume tetradimensionale misurato con regolo rigido e orologio nel senso della teoria della relatività speciale nel "sistema di riferimento locale".

Osservazione sul carattere del continuo spaziotemporale. La nostra ipotesi, che nell'infinitamente piccolo valga la teoria della relatività speciale porta con sè che ds^2 si possa sempre esprimere secondo la (1) mediante le quantità reali $dX_1 \ldots . dX_4$. Chiamiamo $d\tau_0$ l'elemento di volume "naturale" $dX_1 dX_2 dX_3 dX_4$; allora si ha

$$d\tau_0 = \sqrt{-g} d\tau. \tag{18a}$$

Se $\sqrt{-g}$ si annullasse in un punto del continuo tetradimensionale, ciò significherebbe che lì ad un volume finito in coordinate corrisponderebbe un volume "naturale" infinitamente piccolo. Ciò non può mai accadere. Infatti g non può cambiare di segno; assumeremo in conformità alla relatività speciale che g ha sempre un valore finito negativo. Questa è un'ipotesi sulla natura fisica del continuo considerato ed insieme una condizione sulla scelta delle coordinate.

Ma se $-g$ è sempre finito e positivo, è evidente che si può arrangiare a posteriori la scelta delle coordinate in modo che questa quantità sia uguale ad 1. Vedremo in seguito che con questa restrizione della scelta delle coordinate si può ottenere una considerevole semplificazione delle leggi di natura. Al posto della (18) compare semplicemente

$$d\tau' = d\tau,$$

e quindi, tenendo conto del teorema di Jacobi, risulta

$$\left| \frac{\partial x'_\sigma}{\partial x_\mu} \right| = 1. \tag{19}$$

Con questa scelta delle coordinate sono ammissibili solo sostituzioni delle coordinate di determinante 1.

Sarebbe tuttavia sbagliato credere che questa prescrizione significhi una parziale rinuncia al postulato della relatività generale. Noi non chiediamo: "Come sono le leggi di natura che siano covarianti rispetto a tutte le trasformazioni di determinante 1?". Chiediamo invece: "Come sono le leggi di natura a covarianza *generale*"? Solo dopo che queste sono state enunciate semplifichiamo la nostra espressione mediante una scelta particolare del sistema di riferimento.

Formazione di nuovi tensori con il tensore fondamentale. Per moltiplicazione interna, esterna e mista di un tensore per il tensore fondamentale si ottengono tensori di carattere e rango diversi. Esempio:

$$A^\mu = g^{\mu\sigma} A_\sigma,$$

$$A = g_{\mu\nu} A^{\mu\nu}.$$

In particolare si accennerà alle seguenti formazioni:

$$A^{\mu\nu} = g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} A_{\alpha\beta},$$

$$A_{\mu\nu} = g_{\mu\alpha} g_{\nu\beta} A^{\alpha\beta}$$

("complemento" del tensore covariante, o controvariante), e

$$B_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} g^{\alpha\beta} A_{\alpha\beta}.$$

Chiamiamo $B_{\mu\nu}$ il tensore ridotto appartenente ad $A_{\mu\nu}$. Analogamente

$$B^{\mu\nu} = g^{\mu\nu} g^{\alpha\beta} A_{\alpha\beta}$$

Si noti che $g^{\mu\nu}$ non è altro che il complemento di $g_{\mu\nu}$. Si ha infatti

$$g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} g_{\alpha\beta} = g^{\mu\alpha} \delta_\alpha^\nu = g^{\mu\nu}.$$

§9. Equazione della linea geodetica (ovvero del moto del punto).

Poiché l'"elemento di linea" ds è una quantità definita in modo indipendente dalla scelta delle coordinate, anche la linea tracciata tra due punti P_1 e P_2 del continuo tetradimensionale, per la quale $\int ds$ è un estremo (linea geodetica) ha un significato indipendente dalla scelta delle coordinate. La sua equazione è

$$\delta\left\{\int_{P_1}^{P_2} ds\right\} = 0. \tag{20}$$

Da questa equazione si trovano in modo noto eseguendo la variazione quattro equazioni differenziali totali, che determinano questa linea geodetica; questa derivazione troverà posto qui per completezza. Sia λ una funzione delle coordinate x_ν; questa definisca una famiglia di superfici, attraversate dalla linea geodetica cercata e da tutte le linee ad essa infinitamente vicine, tracciate tra i punti P_1 e P_2. Ognuna di queste curve si può quindi pensare definita in modo tale che le sue coordinate x_ν siano espresse in funzione di λ. Il simbolo δ corrisponda al passaggio da un punto della curva geodetica cercata a quel punto di una curva vicina, che corrisponde allo stesso λ. Allora la (20) si può sostituire con

$$\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \delta w d\lambda = 0,\ w^2 = g_{\mu\nu}\frac{dx_\mu}{d\lambda}\frac{dx_\nu}{d\lambda}. \tag{20a}$$

Poiché

$$\delta w = \frac{1}{w}\left\{\frac{1}{2}\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma}\frac{dx_\mu}{d\lambda}\frac{dx_\nu}{d\lambda}\delta x_\sigma + g_{\mu\nu}\frac{dx_\mu}{d\lambda}\delta\left(\frac{dx_\nu}{d\lambda}\right)\right\},$$

sostituendo δw nella (20a) e tenendo conto che

$$\delta\left(\frac{dx^\nu}{d\lambda}\right) = \frac{d\delta x_\nu}{d\lambda},$$

si ottiene con integrazione per parti

$$\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} d\lambda \kappa_\sigma \delta x_\sigma = 0,\ \kappa_\sigma = \frac{d}{d\lambda}\left\{\frac{g^{\mu\nu}}{w}\frac{dx^\mu}{d\lambda}\right\} - \frac{1}{2w}\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma}\frac{dx_\mu}{d\lambda}\frac{dx_\nu}{d\lambda}. \tag{20b}$$

Poiché δx_σ può esser scelto in modo arbitrario, da qui discende l'annullarsi di κ_σ. Quindi

$$\kappa_\sigma = 0 \tag{20c}$$

sono le equazioni della linea geodetica. Se sulla linea geodetica considerata non si ha $ds = 0$, possiamo utilizzare come parametro λ la "lunghezza dell'arco" s misurata lungo la linea geodetica. Allora sarà $w = 1$, e al posto della (20c) si ottiene

$$g_{\mu\nu}\frac{d^2 x_\mu}{ds^2} + \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma}\frac{dx_\sigma}{ds}\frac{dx_\mu}{ds} - \frac{1}{2}\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma}\frac{dx_\mu}{ds}\frac{dx_\nu}{ds} = 0,$$

ovvero per puro cambio di notazione

$$g_{\alpha\sigma}\frac{d^2x_\alpha}{ds^2}+\begin{bmatrix}\mu\nu\\ \sigma\end{bmatrix}\frac{dx_\mu}{ds}\frac{dx_\nu}{ds}=0, \tag{20d}$$

dove con Christoffel si è posto

$$\begin{bmatrix}\mu\nu\\ \sigma\end{bmatrix}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{\mu\sigma}}{\partial x_\nu}+\frac{\partial g_{\nu\sigma}}{\partial x_\mu}-\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma}\right). \tag{21}$$

Se si moltiplica infine la (20d) per $g^{\sigma\tau}$ (moltiplicazione esterna rispetto a τ, interna rispetto a σ), si ottiene in conclusione come forma finale dell'equazione della linea geodetica

$$\frac{d^2x_\tau}{ds^2}+\begin{Bmatrix}\mu\nu\\ \tau\end{Bmatrix}\frac{dx_\mu}{ds}\frac{dx_\nu}{ds}=0. \tag{22}$$

Qui si è posto con Christoffel

$$\begin{Bmatrix}\mu\nu\\ \tau\end{Bmatrix}=g^{\tau\alpha}\begin{bmatrix}\mu\nu\\ \alpha\end{bmatrix}. \tag{23}$$

§10. La formazione di tensori per derivazione.

Appoggiandoci all'equazione della linea geodetica possiamo derivare facilmente le leggi secondo le quali da tensori si possono formare nuovi tensori per derivazione. In tal modo saremo finalmente in grado di enunciare equazioni differenziali generalmente covarianti. Raggiungiamo lo scopo per applicazione ripetuta del seguente semplice teorema.

Sia data nel nostro continuo una curva, i punti della quale siano caratterizzati dalla distanza s lungo l'arco da un punto fisso sulla curva, e sia inoltre φ una funzione invariante dello spazio, sicché anche $d\varphi/ds$ è un invariante. La dimostrazione dipende dal fatto che sia $d\varphi$ che ds sono invarianti. Poiché

$$\frac{d\varphi}{ds}=\frac{\partial\varphi}{\partial x_\mu}\frac{dx_\mu}{ds},$$

anche

$$\psi=\frac{\partial\varphi}{\partial x_\mu}\frac{dx_\mu}{ds}$$

è un invariante, e ciò per tutte le curve che escono da un punto del continuo, cioè per scelta arbitraria del vettore dx_μ. Da qui discende immediatamente che

$$A_\mu=\frac{\partial\varphi}{\partial x_\mu} \tag{24}$$

è un tetravettore covariante (gradiente di φ).

Per il nostro teorema anche la derivata eseguita lungo una curva

$$\chi=\frac{d\psi}{ds}$$

è un invariante. Sostituendo ψ otteniamo immediatamente

$$\chi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_\mu \partial x_\nu} \frac{dx_\mu}{ds} \frac{dx_\nu}{ds} + \frac{\partial \varphi}{\partial x_\mu} \frac{d^2 x_\mu}{ds^2}.$$

Da qui non si può derivare subito l'esistenza di un tensore. Ma se stabiliamo che la curva, rispetto alla quale abbiamo eseguito la derivazione, sia una curva geodetica, otteniamo dalla (22) sostituendo d^2x_ν/ds^2:

$$\chi = \left\{ \frac{\partial^2_\varphi}{\partial x_\mu \partial x_\mu} - \left\{ \begin{matrix} \mu\nu \\ \tau \end{matrix} \right\} \frac{\partial \varphi}{\partial x_\tau} \right\} \frac{dx_\mu}{ds} \frac{dx_\nu}{ds}.$$

Dall'invertibilità dell'ordine di derivazione rispetto a μ e ν, e per il fatto che secondo le (23) e (21) la parentesi $\left\{ \begin{matrix} \mu\nu \\ \tau \end{matrix} \right\}$ è simmetrica rispetto a μ e ν, discende che l'espressione entro la parentesi è simmetrica in μ e ν. Poiché da un punto del continuo si può tracciare una linea geodetica in direzione arbitraria, e quindi dx_μ/ds è un tetravettore con rapporto tra le componenti determinabile a piacere, discende per i risultati del §7 che

$$A_{\mu\nu} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_\mu \partial x_\nu} - \left\{ \begin{matrix} \mu\nu \\ \tau \end{matrix} \right\} \frac{\partial \varphi}{\partial x_\tau} \tag{25}$$

è un tensore covariante di rango secondo. Abbiamo quindi ottenuto il risultato: dal tensore covariante di rango primo

$$A_\mu = \frac{\partial \varphi}{\partial x_\mu}$$

possiamo costruire per derivazione un tensore covariante di rango secondo

$$A_{\mu\nu} = \frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu} - \left\{ \begin{matrix} \mu\nu \\ \tau \end{matrix} \right\} A_\tau. \tag{26}$$

Chiamiamo il tensore $A_{\mu\nu}$ l'"*estensione*" del tensore A_μ. Possiamo dimostrare immediatamente che questa forma produce un tensore anche se il vettore A_μ non è rappresentabile come un gradiente. Per veder ciò osserviamo in primo luogo che

$$\psi \frac{\partial \varphi}{\partial x_\mu}$$

è un tetravettore covariante se ψ e φ sono scalari. Ciò è vero anche per la somma che consiste di quattro termini siffatti

$$S_\mu = \psi^{(1)} \frac{\partial \varphi^{(1)}}{\partial x_\mu} + . + . + \psi^{(4)} \frac{\partial \varphi^{(4)}}{\partial x_\mu},$$

nel caso che $\psi^{(1)}\varphi^{(1)} \ldots . \psi^{(4)}\varphi^{(4)}$ siano degli scalari. Ma ora è chiaro che ogni tetravettore covariante si può rappresentare nella forma S_μ. Se infatti A_μ è un tetravettore, le componenti del quale siano funzioni di x_ν date a piacere, basta porre (rispetto al sistema di coordinate scelto)

$$\psi^{(1)} = A_1, \varphi^{(1)} = x_1,$$
$$\psi^{(2)} = A_2, \varphi^{(2)} = x_2,$$
$$\psi^{(3)} = A_3, \varphi^{(3)} = x_3,$$
$$\psi^{(4)} = A_4, \varphi^{(4)} = x_4,$$

per ottenere che S_μ sia uguale ad A_μ.

Per dimostrare che $A_{\mu\nu}$ è un tensore anche se al secondo membro si sostituisce al posto di A_μ un tetravettore covariante arbitrario ci basta ora dimostrare che ciò accade per il tetravettore S_μ. Ma per quest'ultimo basta, come c'insegna uno sguardo al secondo membro della (26), eseguire la dimostrazione per il caso

$$A_\mu = \psi \frac{\partial \varphi}{\partial x_\mu}.$$

Il secondo membro della (25) moltiplicato per ψ

$$\psi \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_\mu \partial x_\nu} - \left\{ \begin{matrix} \mu\nu \\ \tau \end{matrix} \right\} \psi \frac{\partial \varphi}{\partial x_\tau}$$

ha carattere tensoriale. Parimenti

$$\frac{\partial \psi}{\partial x_\mu} \frac{\partial \varphi}{\partial x_\nu}$$

è un tensore (prodotto esterno di due tetravettori). Per addizione discende il carattere tensoriale di

$$\frac{\partial}{\partial x_\nu} \left(\psi \frac{\partial \varphi}{\partial x_\mu} \right) - \left\{ \begin{matrix} \mu\nu \\ \tau \end{matrix} \right\} \psi \frac{\partial \varphi}{\partial x_\tau}.$$

Pertanto, come insegna uno sguardo alla (26), si è ottenuta la dimostrazione richiesta per il tetravettore

$$\psi \frac{\partial \varphi}{\partial x_\mu},$$

e quindi per quanto mostrato prima per ogni tetravettore A_μ. - Per mezzo dell'estensione del tetravettore si può ottenere facilmente l'"estensione" di un tensore covariante di rango arbitrario; questa forma è una generalizzazione dell'estensione del tetravettore. Ci limitiamo ad esporre l'estensione del tensore di rango secondo, poiché la legge di formazione di questa si può già comprendere chiaramente.

Come già osservato, ogni tensore covariante di rango secondo si può rappresentare[7] come una somma di tensori del tipo $A_\mu B_\nu$. Sarà quindi sufficiente derivare

[7]Per moltiplicazione esterna di vettori con le componenti (scelte arbitrariamente) A_{11}, A_{12}, A_{13}, A_{14} e 1, 0, 0, 0 si ottiene il tensore con le componenti

$$\begin{matrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}$$

Per addizione di quattro tensori di questo tipo si ottiene il tensore $A_{\mu\nu}$ con componenti assegnate a piacere.

l'espressione dell'estensione per un siffatto tensore speciale. Per la (26) le espressioni

$$\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\sigma} - \left\{ \begin{matrix} \sigma\mu \\ \tau \end{matrix} \right\} A_\tau,$$

$$\frac{\partial B_\mu}{\partial x_\sigma} - \left\{ \begin{matrix} \sigma\mu \\ \tau \end{matrix} \right\} B_\tau$$

hanno carattere tensoriale. Per moltiplicazione esterna della prima per B_ν e della seconda per A_μ si ottiene ogni volta un tensore di rango terzo; la loro somma dà il tensore di rango terzo

$$A_{\mu\nu\sigma} = \frac{\partial A_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma} - \left\{ \begin{matrix} \sigma\mu \\ \tau \end{matrix} \right\} A_{\tau\nu} - \left\{ \begin{matrix} \sigma\nu \\ \tau \end{matrix} \right\} A_{\mu\tau}, \tag{27}$$

ove si è posto $A_{\mu\nu} = A_\mu B_\nu$. Poiché il secondo membro della (27) è lineare ed omogeneo rispetto ad $A_{\mu\nu}$ ed alle sue derivate prime, una tale legge di formazione non porta ad un tensore solo per un tensore del tipo $A_\mu B_\nu$ ma anche per una somma di tensori siffatti, e quindi per un tensore covariante arbitrario di secondo rango. Chiamiamo $A_{\mu\nu\sigma}$ l'estensione del tensore $A_{\mu\nu}$.

E' chiaro che la (26) e la (24) sono solo casi particolari della (27) (estensione del tensore di rango primo e di rango zero). Tutte le leggi di formazione particolari si possono riassumere nella (27) unita a moltiplicazioni tensoriali.

§11. Alcuni casi particolari di rilevante importanza.

Alcune leggi ausiliarie riguardanti il tensore fondamentale. Deriviamo ora alcune equazioni ausiliarie molto usate in seguito. Per la regola di derivazione dei determinanti si ha

$$dg = g^{\mu\nu} g dg_{\mu\nu} = -g_{\mu\nu} g dg^{\mu\nu}. \tag{28}$$

La seconda forma si giustifica mediante la precedente, se si tien conto che $g_{\mu\nu} g^{\mu'\nu} = \delta_\mu^{\mu'}$, che quindi $g_{\mu\nu} g^{\mu\nu} = 4$, e di conseguenza

$$g_{\mu\nu} dg^{\mu\nu} + g^{\mu\nu} dg_{\mu\nu} = 0.$$

Dalla (28) discende

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial \sqrt{-g}}{\partial x_\sigma} = \frac{1}{2} \frac{\partial \lg(-g)}{\partial x_\sigma} = \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma} = -\frac{1}{2} g_{\mu\nu} \frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x_\sigma}. \tag{29}$$

Da

$$g_{\mu\sigma} g^{\nu\sigma} = \delta_\mu^\nu$$

discende inoltre per derivazione

$$g_{\mu\sigma} dg^{\nu\sigma} = -g^{\nu\sigma} dg_{\mu\sigma}, \text{ ovvero } g_{\mu\sigma} \frac{\partial g^{\nu\sigma}}{\partial x_\lambda} = -g^{\nu\sigma} \frac{\partial g_{\mu\sigma}}{\partial x_\lambda}. \tag{30}$$

Per moltiplicazione mista con $g^{\sigma\tau}$ ovvero $g_{\nu\lambda}$ si ottiene da qui (con cambiamento di nome di indici)

$$dg^{\mu\nu} = -g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta}dg_{\alpha\beta}, \; \frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x_\sigma} = -g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta}\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x_\sigma} \tag{31}$$

ovvero

$$dg_{\mu\nu} = -g_{\mu\alpha}g_{\nu\beta}dg^{\alpha\beta}, \; \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma} = -g_{\mu\alpha}g_{\nu\beta}\frac{\partial g^{\alpha\beta}}{\partial x_\sigma}. \tag{32}$$

La relazione (31) consente una trasformazione della quale dobbiamo fare un uso anche più frequente. Per la (21) si ha

$$\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x_\sigma} = \begin{bmatrix} \alpha\sigma \\ \beta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta\sigma \\ \alpha \end{bmatrix}. \tag{33}$$

Se questa si sostituisce nella seconda delle formule (31), si ottiene tenendo conto della (23)

$$\frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x_\sigma} = -\left(g^{\mu\tau}\begin{Bmatrix} \tau\sigma \\ \nu \end{Bmatrix} + g^{\nu\tau}\begin{Bmatrix} \tau\sigma \\ \mu \end{Bmatrix} \right). \tag{34}$$

Per sostituzione del secondo membro della (34) nella (29) si ottiene

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial\sqrt{-g}}{\partial x_\sigma} = \begin{Bmatrix} \mu\sigma \\ \mu \end{Bmatrix}. \tag{29a}$$

Divergenza del tetravettore covariante. Se si moltiplica la (26) per il tensore fondamentale controvariante $g^{\mu\nu}$ (moltiplicazione interna), il secondo membro dopo trasformazione del primo termine assume la forma

$$\frac{\partial}{\partial x_\nu}\left(g^{\mu\nu}A_\mu\right) - A_\mu\frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x_\nu} - \frac{1}{2}g^{\tau\alpha}\left(\frac{\partial g_{\mu\alpha}}{\partial x_\nu} + \frac{\partial g_{\nu\alpha}}{\partial x_\mu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\alpha}\right)g^{\mu\nu}A_\tau.$$

L'ultimo termine di questa espressione secondo la (31) e la (29) si può portare nella forma

$$\frac{1}{2}\frac{\partial g^{\tau\nu}}{\partial x_\nu}A_\tau + \frac{1}{2}\frac{\partial g^{\tau\mu}}{\partial x_\mu}A_\tau + \frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial\sqrt{-g}}{\partial x_\alpha}g^{\tau\alpha}A_\tau.$$

Poiché il nome degli indici non conta, i primi due termini di questa espressione si elidono con il secondo della precedente; l'ultimo si può unire al primo dell'espressione precedente. Si ponga ora

$$g^{\mu\nu}A_\mu = A^\nu,$$

dove A^ν come A_μ è un vettore arbitrario, e si ottiene infine

$$\Phi = \frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial}{\partial x_\nu}\left(\sqrt{-g}A^\nu\right). \tag{35}$$

Questo scalare è la *divergenza* del vettore controvariante A^ν.

“*Rotazione*” *del tetravettore (covariante).* Il secondo termine nella (26) è simmetrico negli indici μ e ν. Pertanto $A_{\mu\nu} - A_{\nu\mu}$ è un tensore (antisimmetrico) particolarmente facile a costruirsi. Si ottiene

$$B_{\mu\nu} = \frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu} - \frac{\partial A_\nu}{\partial x_\mu}. \tag{36}$$

Estensione antisimmetrica di un esavettore. Se si applica la (27) ad un tensore antisimmetrico di rango secondo $A_{\mu\nu}$ e si formano le espressioni che s'ottengono per permutazione ciclica degli indici μ, ν, σ, e si sommano queste tre espressioni, si ottiene il tensore di rango terzo

$$B_{\mu\nu\sigma} = A_{\mu\nu\sigma} + A_{\nu\sigma\mu} + A_{\sigma\mu\nu} = \frac{\partial A_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma} + \frac{\partial A_{\nu\sigma}}{\partial x_\mu} + \frac{\partial A_{\sigma\mu}}{\partial x_\nu}, \tag{37}$$

per il quale è facile dimostrare che è antisimmetrico.

Divergenza dell'esavettore. Se si moltiplica la (27) per $g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta}$ (moltiplicazione mista) si ottiene ancora un tensore. Il primo termine al secondo membro della (27) si può scrivere nella forma

$$\frac{\partial}{\partial x_\sigma}\left(g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta}A_{\mu\nu}\right) - g^{\mu\alpha}\frac{\partial g^{\nu\beta}}{\partial x_\sigma}A_{\mu\nu} - g^{\nu\beta}\frac{\partial g^{\mu\alpha}}{\partial x_\sigma}A_{\mu\nu}.$$

Se si sostituiscono $g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta}A_{\mu\nu\sigma}$ con $A^{\alpha\beta}_\sigma$, $g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta}A_{\mu\nu}$ con $A^{\alpha\beta}$, e si sostituiscono nello sviluppo del primo termine

$$\frac{\partial g^{\nu\beta}}{\partial x_\sigma} \text{ e } \frac{\partial g^{\mu\alpha}}{\partial x_\sigma}$$

con la (34), risulta al secondo membro della (27) un'espressione di sette termini, dei quali quattro si elidono. Rimane

$$A^{\alpha\beta}_\sigma = \frac{\partial A^{\alpha\beta}}{\partial x_\sigma} + \left\{ \begin{matrix} \sigma\kappa \\ \alpha \end{matrix} \right\} A^{\kappa\beta} + \left\{ \begin{matrix} \sigma\kappa \\ \beta \end{matrix} \right\} A^{\alpha\kappa}. \tag{38}$$

Questa è l'espressione per l'estensione di un tensore controvariante di rango secondo, che analogamente si può formare anche per tensori di rango più alto e più basso.

Osserviamo che in modo analogo si può formare l'estensione di un tensore misto A^α_μ:

$$A^\alpha_{\mu\sigma} = \frac{\partial A^\alpha_\mu}{\partial x_\sigma} - \left\{ \begin{matrix} \sigma\mu \\ \tau \end{matrix} \right\} A^\alpha_\tau + \left\{ \begin{matrix} \sigma\tau \\ \alpha \end{matrix} \right\} A^\tau_\mu. \tag{39}$$

Per contrazione della (38) rispetto agli indici β e σ (moltiplicazione interna per δ^σ_β) si ottiene il tetravettore covariante

$$A^\alpha = \frac{\partial A^{\alpha\beta}}{\partial x_\beta} + \left\{ \begin{matrix} \beta\kappa \\ \beta \end{matrix} \right\} A^{\alpha\kappa} + \left\{ \begin{matrix} \beta\kappa \\ \alpha \end{matrix} \right\} A^{\kappa\beta}.$$

Per la simmetria di $\left\{ \begin{matrix} \beta\kappa \\ \alpha \end{matrix} \right\}$ rispetto agli indici β e κ il terzo termine a secondo membro è nullo se $A^{\alpha\beta}$ è un tensore antisimmetrico, come assumeremo; il secondo termine si può trasformare con la (29a). Si ottiene così

$$A^\alpha = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial \left(\sqrt{-g} A^{\alpha\beta}\right)}{\partial x_\beta}. \tag{40}$$

Questa è l'espressione della divergenza di un esavettore controvariante.

Divergenza del tensore misto di rango secondo. Se eseguiamo la contrazione della (39) rispetto agli indici α e σ, tenendo conto della (29a) otteniamo

$$\sqrt{-g} A_\mu = \frac{\partial \left(\sqrt{-g} A_\mu^\sigma\right)}{\partial x_\sigma} - \left\{ \begin{matrix} \sigma\mu \\ \tau \end{matrix} \right\} \sqrt{-g} A_\tau^\sigma. \tag{41}$$

Se si introduce nell'ultimo termine il tensore controvariante $A^{\rho\sigma} = g^{\rho\tau} A_\tau^\sigma$, esso assume la forma

$$-\left[\begin{matrix} \sigma\mu \\ \rho \end{matrix} \right] \sqrt{-g} A^{\rho\sigma}.$$

Se poi il tensore $A^{\rho\sigma}$ è simmetrico, il termine si riduce a

$$-\frac{1}{2} \sqrt{-g} \frac{\partial g_{\rho\sigma}}{\partial x_\mu} A^{\rho\sigma}.$$

Se al posto di $A^{\rho\sigma}$ si fosse introdotto il tensore covariante parimenti simmetrico $A_{\rho\sigma} = g_{\rho\alpha} g_{\sigma\beta} A^{\alpha\beta}$, per la (31) l'ultimo termine avrebbe assunto la forma

$$\frac{1}{2} \sqrt{-g} \frac{\partial g^{\rho\sigma}}{\partial x_\mu} A_{\rho\sigma}.$$

Nel caso della simmetria considerata la (41) si può sostituire con entrambe le forme

$$\sqrt{-g} A_\mu = \frac{\partial \left(\sqrt{-g} A_\mu^\sigma\right)}{\partial x_\sigma} - \frac{1}{2} \frac{\partial g_{\rho\sigma}}{\partial x_\mu} \sqrt{-g} A^{\rho\sigma} \tag{41a}$$

e

$$\sqrt{-g} A_\mu = \frac{\partial \left(\sqrt{-g} A_\mu^\sigma\right)}{\partial x_\sigma} + \frac{1}{2} \frac{\partial g^{\rho\sigma}}{\partial x_\mu} \sqrt{-g} A_{\rho\sigma} \tag{41b}$$

delle quali faremo uso in seguito.

§12. Il tensore di Riemann-Christoffel.

Chiediamo ora quali tensori si possano ottenere dal tensore fondamentale dei $g_{\mu\nu}$ *unicamente* per derivazione. La risposta appare sulle prime a portata di mano. Si sostituisce nella (27) al posto del tensore $A_{\mu\nu}$ dato arbitrariamente il tensore fondamentale dei $g_{\mu\nu}$ e si ottiene così un nuovo tensore, l'estensione del tensore fondamentale. Si verifica tuttavia facilmente che quest'ultimo s'annulla identicamente. Si giunge tuttavia allo scopo nel modo seguente. Nella (27) si ponga

$$A_{\mu\nu} = \frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu} - \left\{ \begin{matrix} \mu\nu \\ \rho \end{matrix} \right\} A_\rho,$$

cioè l'estensione del tetravettore A_ν. Si ottiene allora il tensore di rango terzo

$$\begin{aligned} A_{\mu\sigma\tau} &= \frac{\partial^2 A_\mu}{\partial x_\sigma \partial x_\tau} \\ &- \left\{ \begin{matrix} \mu\sigma \\ \rho \end{matrix} \right\} \frac{\partial A_\rho}{\partial x_\tau} - \left\{ \begin{matrix} \mu\tau \\ \rho \end{matrix} \right\} \frac{\partial A_\rho}{\partial x_\sigma} - \left\{ \begin{matrix} \sigma\tau \\ \rho \end{matrix} \right\} \frac{\partial A_\mu}{\partial x_\rho} \\ &+ \left[-\frac{\partial}{\partial x_\tau} \left\{ \begin{matrix} \mu\sigma \\ \rho \end{matrix} \right\} + \left\{ \begin{matrix} \mu\tau \\ \alpha \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} \alpha\sigma \\ \rho \end{matrix} \right\} + \left\{ \begin{matrix} \sigma\tau \\ \alpha \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} \alpha\mu \\ \rho \end{matrix} \right\} \right] A_\rho. \end{aligned}$$

Quest'espressione invita a formare il tensore $A_{\mu\sigma\tau} - A_{\mu\tau\sigma}$. Allora i seguenti termini dell'espressione di $A_{\mu\sigma\tau}$ si elidono con quelli di $A_{\mu\tau\sigma}$: il primo termine, il quarto, ed anche l'ultimo termine entro le parentesi quadre; essi sono infatti simmetrici in σ e τ. Altrettanto vale per la somma del secondo e del terzo termine. Otteniamo quindi

$$A_{\mu\sigma\tau} - A_{\mu\tau\sigma} = B^\rho_{\mu\sigma\tau} A_\rho, \tag{42}$$

$$B^\rho_{\mu\sigma\tau} = -\frac{\partial}{\partial x_\tau} \left\{ \begin{matrix} \mu\sigma \\ \rho \end{matrix} \right\} + \frac{\partial}{\partial x_\sigma} \left\{ \begin{matrix} \mu\tau \\ \rho \end{matrix} \right\} - \left\{ \begin{matrix} \mu\sigma \\ \alpha \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} \alpha\tau \\ \rho \end{matrix} \right\} + \left\{ \begin{matrix} \mu\tau \\ \alpha \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} \alpha\sigma \\ \rho \end{matrix} \right\}. \tag{43}$$

Essenziale per questo risultato è il fatto che al secondo membro della (42) compaia soltanto A_ρ e non le sue derivate. Dal carattere tensoriale di $A_{\mu\sigma\tau} - A_{\mu\tau\sigma}$ assieme al fatto che A_ρ è un tetravettore arbitrario discende, per i risultati del §7, che $B^\rho_{\mu\sigma\tau}$ è un tensore (il tensore di Riemann-Christoffel).

Il significato matematico di questo risultato è il seguente. Quando il continuo è così fatto che vi è un sistema di coordinate rispetto al quale le $g_{\mu\nu}$ siano costanti, tutte le $R^\rho_{\mu\sigma\tau}$ sono nulle. Se invece del sistema di coordinate originario se ne sceglie uno nuovo a piacere, le $g_{\mu\nu}$ riferite a quest'ultimo non saranno costanti. Tuttavia il carattere tensoriale di $R^\rho_{\mu\sigma\tau}$ porta con sè che queste componenti si annullino tutte anche nel sistema di riferimento scelto a piacere. L'annullarsi del tensore di Riemann è quindi una condizione necessaria per provocare la costanza delle $g_{\mu\nu}$ con una scelta opportuna del sistema di riferimento[8].

Nel nostro problema ciò corrisponde al caso che per opportuna scelta del sistema di coordinate valga la teoria della relatività speciale in una regione finita. Per contrazione della (43) relativamente agli indici τ e ρ si ottiene il tensore covariante di rango secondo

$$\begin{aligned} B_{\mu\nu} &= R_{\mu\nu} + S_{\mu\nu}, \\ R_{\mu\nu} &= \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left\{ \begin{matrix} \mu\nu \\ \alpha \end{matrix} \right\} + \left\{ \begin{matrix} \mu\alpha \\ \beta \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} \nu\beta \\ \alpha \end{matrix} \right\}, \\ S_{\mu\nu} &= \frac{\partial \lg \sqrt{-g}}{\partial x_\mu \partial x_\nu} - \left\{ \begin{matrix} \mu\nu \\ \alpha \end{matrix} \right\} \frac{\partial \lg \sqrt{-g}}{\partial x_\alpha}. \end{aligned} \tag{44}$$

[8] I matematici hanno dimostrato che questa condizione è anche *sufficiente*.

Osservazione sulla scelta delle coordinate. Si è già osservato nel §8 in relazione all'equazione (18a) che si può aggiustare vantaggiosamente la scelta delle coordinate in modo che sia $\sqrt{-g} = 1$. Un'occhiata alle equazioni ottenute nei due paragrafi precedenti mostra che con una scelta siffatta le regole di formazione dei tensori conseguono una semplificazione significativa. Ciò vale in particolare per il tensore $B_{\mu\nu}$ or ora sviluppato, che gioca un ruolo fondamentale nella teoria che esporremo. La specializzazione della scelta delle coordinate considerata porta infatti con sè l'annullarsi di $S_{\mu\nu}$, sicché il tensore $B_{\mu\nu}$ si riduce ad $R_{\mu\nu}$.

Nel seguito darò tutte le relazioni nella forma semplificata che la suddetta specializzazione della scelta delle coordinate produce. È facile infatti ricondursi alle equazioni *generalmente* covarianti, se ciò appare richiesto in un caso particolare.

C. Teoria del campo gravitazionale.

§13. Equazione del moto d'un punto materiale nel campo di gravitazione. Espressione per le componenti di campo della gravitazione.

Un corpo in moto libero, non soggetto a forze esterne, secondo la teoria della relatività speciale si muove di moto rettilineo ed uniforme. Ciò vale anche nella teoria della relatività generale per una parte dello spazio tetradimensionale nella quale il sistema di coordinate K_0 si possa scegliere e venga scelto in modo che le $g_{\mu\nu}$ abbiano i valori costanti particolari dati nella (4).

Consideriamo ora proprio questo moto da un sistema di coordinate K_1 scelto a piacere. Il moto in K_1 viene giudicato, secondo le considerazioni del §2, avvenire in un campo gravitazionale. La legge del moto rispetto a K_1 si ottiene facilmente con l'argomento che segue. Riferita a K_0 la legge del moto è una retta tetradimensionale, quindi una linea geodetica. Poiché la linea geodetica è definita indipendentemente dal sistema di riferimento, la sua equazione sarà anche l'equazione del moto del punto materiale riferita a K_1. Se poniamo

$$\Gamma^{\tau}_{\mu\nu} = -\left\{ \begin{matrix} \mu\nu \\ \tau \end{matrix} \right\}, \tag{45}$$

l'equazione del moto del punto rispetto a K_1 si scrive

$$\frac{d^2 x_\tau}{ds^2} = \Gamma^{\tau}_{\mu\nu} \frac{dx_\mu}{ds} \frac{dx_\nu}{ds}. \tag{46}$$

Facciamo ora l'ipotesi molto naturale, che questo sistema di equazioni generalmente covariante determini il moto del punto nel campo gravitazionale anche quando non esista un sistema di riferimento K_0 rispetto al quale la teoria della relatività speciale valga in uno spazio finito. A quest'ipotesi siamo tanto più autorizzati, in quanto la (46) contiene solo derivate *prime* delle $g_{\mu\nu}$, tra le quali anche nel caso dell'esistenza di K_0 non sussiste alcuna relazione[9].

Se le $\Gamma^{\tau}_{\mu\nu}$ si annullano il punto si muove di moto rettilineo ed uniforme; queste quantità provocano quindi la deviazione del moto dall'uniformità. Esse sono le componenti del campo gravitazionale.

[9]Secondo il §12, solo tra le derivate seconde (e prime) sussistono le relazioni $B^{\rho}_{\mu\sigma\tau} = 0$.

§14. Le equazioni di campo della gravitazione in assenza di materia.

Distinguiamo nel seguito tra "gravitazione" e "materia" nel senso che tutto fuorché il campo gravitazionale si indicherà come "materia", quindi non solo la "materia" nel senso ordinario, ma anche il campo elettromagnetico.

Il nostro problema immediato è cercare le equazioni di campo della gravitazione in assenza di materia. Nel far ciò applicheremo ancora lo stesso metodo usato nel paragrafo precedente per determinare l'equazione di moto del punto materiale. Un caso particolare, nel quale le equazioni di campo cercate devono comunque essere soddisfatte è quello della teoria della relatività originaria, nella quale le $g_{\mu\nu}$ hanno certi valori costanti. Sia questo il caso in una certa regione finita rispetto ad un certo sistema di coordinate K_0. Rispetto a questo sistema sono nulle tutte le componenti $B^{\rho}_{\mu\sigma\tau}$ del tensore di Riemann [equazione (43)]. Esse si annullano quindi nella regione considerata anche rispetto ad ogni altro sistema di coordinate. Le equazioni cercate per il campo di gravitazione in assenza di materia devono quindi essere soddisfatte comunque quando tutte le $B^{\rho}_{\mu\sigma\tau}$ si annullano. Ma questa è comunque una condizione che si spinge troppo in là. E' chiaro infatti che per esempio il campo gravitazionale generato da un punto materiale nel suo circondario non si può "trasformar via" mediante nessuna scelta del sistema di coordinate, come accade invece nel caso di $g_{\mu\nu}$ costanti. Perciò è naturale richiedere per il campo di gravitazione privo di materia l'annullarsi del tensore simmetrico $B_{\mu\nu}$ derivato dal tensore $B^{\rho}_{\mu\sigma\tau}$. Si ottengono 10 equazioni per le 10 quantità $g_{\mu\nu}$, che sono soddisfatte in particolare quando tutte le $B^{\rho}_{\mu\sigma\tau}$ si annullano. Con la scelta del sistema di coordinate adottata da noi, tenendo conto della (44), queste equazioni per il campo privo di materia si scrivono

$$\frac{\partial \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}}{\partial x_{\alpha}} + \Gamma^{\alpha}_{\mu\beta}\Gamma^{\beta}_{\nu\alpha} = 0, \ \sqrt{-g} = 1. \tag{47}$$

Si deve osservare in proposito che la scelta di queste equazioni comporta il minimo di arbitrarietà. Infatti oltre a $B_{\mu\nu}$ non esiste nessun tensore di rango secondo che sia formato con $g_{\mu\nu}$ e con le sue derivate, che non contenga derivate superiori alle seconde e che sia lineare rispetto a queste ultime[10].

Il fatto che queste equazioni che derivano per via puramente matematica dal postulato di relatività generale assieme alle equazioni di moto (46) producano in prima approssimazione la legge di attrazione di Newton, in seconda approssimazione la spiegazione dell'anomalia nel moto del perielio scoperta da Leverrier (che rimane dopo l'applicazione delle correzioni perturbative), deve secondo me persuadere della correttezza fisica della teoria.

§15. Funzione di Hamilton per il campo gravitazionale, legge dell'energia e dell'impulso.

Per dimostrare che le equazioni di campo rispondono alla legge dell'energia e dell'impulso, la maniera più comoda è di scriverle nella forma hamiltoniana seguente:

$$\delta\left\{\int H d\tau\right\} = 0, \ H = g^{\mu\nu}\Gamma^{\alpha}_{\mu\beta}\Gamma^{\beta}_{\nu\alpha}, \ \sqrt{-g} = 1. \tag{47a}$$

[10]Propriamente ciò può essere sostenuto soltanto per il tensore $B_{\mu\nu} + \lambda g_{\mu\nu}(g^{\alpha\beta}B_{\alpha\beta})$, dove λ è una costante. Ma se si pone questo tensore uguale a zero si ritorna alle equazioni $B_{\mu\nu} = 0$.

Le variazioni si annullano ai confini dello spazio d'integrazione tetradimensionale considerato. Dobbiamo dimostrare in primo luogo che la forma (47a) è equivalente alle equazioni (47). A tale scopo consideriamo H come funzione di $g^{\mu\nu}$ e di

$$g_\sigma^{\mu\nu} \left(= \frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x_\sigma} \right)$$

Si ha

$$\delta H = \Gamma_{\mu\beta}^\alpha \Gamma_{\nu\alpha}^\beta \delta g^{\mu\nu} + 2 g^{\mu\nu} \Gamma_{\mu\beta}^\alpha \delta \Gamma_{\nu\alpha}^\beta = -\Gamma_{\mu\beta}^\alpha \Gamma_{\nu\alpha}^\beta \delta g^{\mu\nu} + 2 \Gamma_{\mu\beta}^\alpha \delta \left(g^{\mu\nu} \Gamma_{\nu\alpha}^\beta \right).$$

Ma

$$\delta \left(g^{\mu\nu} \Gamma_{\nu\alpha}^\beta \right) = -\frac{1}{2} \delta \left[g^{\mu\nu} g^{\beta\lambda} \left(\frac{\partial g_{\nu\lambda}}{\partial x_\alpha} + \frac{\partial g_{\alpha\lambda}}{\partial x_\nu} - \frac{\partial g_{\alpha\nu}}{\partial x_\lambda} \right) \right].$$

I termini che originano dai due ultimi addendi della parentesi tonda sono di segno opposto e vanno l'uno nell'altro (poiché il nome degli indici di somma è irrilevante) per scambio degli indici μ e β. Essi si cancellano tra loro nell'espressione per δH, poiché essi sono moltiplicati per la quantità $\Gamma_{\mu\beta}^\alpha$ simmetrica rispetto agli indici μ e β. Rimane da considerare soltanto il primo termine della parentesi tonda, sicché tenendo conto della (31) si ottiene

$$\delta H = -\Gamma_{\mu\beta}^\alpha \Gamma_{\nu\alpha}^\beta \delta g^{\mu\nu} - \Gamma_{\mu\beta}^\alpha \delta g_\alpha^{\mu\beta}.$$

Si ha quindi

$$\frac{\partial H}{\partial g^{\mu\nu}} = -\Gamma_{\mu\beta}^\alpha \Gamma_{\nu\alpha}^\beta, \ \frac{\partial H}{\partial g_\sigma^{\mu\nu}} = \Gamma_{\mu\nu}^\sigma. \tag{48}$$

L'esecuzione della variazione nella (47a) produce il sistema di equazioni

$$\frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left(\frac{\partial H}{\partial g_\alpha^{\mu\nu}} \right) - \frac{\partial H}{\partial g^{\mu\nu}} = 0, \tag{47b}$$

che per la (48) coincide con la (47), come volevasi dimostrare. - Se si moltiplica la (47b) per $g_\sigma^{\mu\nu}$, poiché

$$\frac{\partial g_\sigma^{\mu\nu}}{\partial x_\alpha} = \frac{\partial g_\alpha^{\mu\nu}}{\partial x_\sigma}$$

e di conseguenza

$$g_\sigma^{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left(\frac{\partial H}{\partial g_\alpha^{\mu\nu}} \right) = \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left(g_\sigma^{\mu\nu} \frac{\partial H}{\partial g_\alpha^{\mu\nu}} \right) - \frac{\partial H}{\partial g_\alpha^{\mu\nu}} \frac{\partial g_\alpha^{\mu\nu}}{\partial x_\sigma},$$

si ottiene l'equazione

$$\frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left(g_\sigma^{\mu\nu} \frac{\partial H}{\partial g_\alpha^{\mu\nu}} \right) - \frac{\partial H}{\partial x_\sigma} = 0$$

ossia[11]

$$\frac{\partial t_\sigma{}^\alpha}{\partial x_\alpha} = 0, \ -2\kappa t_\sigma{}^\alpha = g_\sigma^{\mu\nu} \frac{\partial H}{\partial g_\alpha^{\mu\nu}} - \delta_\sigma^\alpha H, \tag{49}$$

[11]La ragione dell'introduzione del fattore -2κ sarà evidente in seguito.

ovvero, per la (48), la seconda delle equazioni (47) e la (34)

$$\kappa t_\sigma{}^\alpha = \frac{1}{2}\delta_\sigma^\alpha g^{\mu\nu}\Gamma^\alpha_{\mu\beta}\Gamma^\beta_{\nu\alpha} - g^{\mu\nu}\Gamma^\alpha_{\mu\beta}\Gamma^\beta_{\nu\sigma}. \tag{50}$$

Va osservato che $t_\sigma{}^\alpha$ non è un tensore; tuttavia la (49) vale in ogni sistema di coordinate per il quale sia $\sqrt{-g} = 1$. Questa equazione esprime la legge di conservazione dell'impulso e dell'energia per il campo gravitazionale. Infatti l'integrazione di questa equazione su un volume V *tridimensionale* produce le quattro equazioni

$$\frac{d}{dx_4}\left\{\int t_\sigma{}^4 dV\right\} = \int \left(t_\sigma{}^1\alpha_1 + t_\sigma{}^2\alpha_2 + t_\sigma{}^3\alpha_3\right) dS \tag{49a}$$

dove α_1, α_2, α_3 indicano i coseni direttori della normale interna di un elemento della superficie di contorno di area dS (nel senso della geometria euclidea). Si riconosce qui l'espressione delle leggi di conservazione nella forma consueta. Chiamiamo le quantità $t_\sigma{}^\alpha$ le "componenti dell'energia" del campo gravitazionale.

Darò le equazioni (47) ancora in una terza forma, che si presta particolarmente ad una comprensione vivida del nostro oggetto. Per moltiplicazione delle equazioni di campo (47) con $g^{\nu\sigma}$ queste si ottengono nella forma "mista". Si osservi che

$$g^{\nu\sigma}\frac{\partial\Gamma^\alpha_{\mu\nu}}{\partial x_\alpha} = \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(g^{\nu\sigma}\Gamma^\alpha_{\mu\nu}\right) - \frac{\partial g^{\nu\sigma}}{\partial x_\alpha}\Gamma^\alpha_{\mu\nu},$$

quantità che per la (34) è uguale a

$$\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(g^{\nu\sigma}\Gamma^\alpha_{\mu\nu}\right) - g^{\nu\beta}\Gamma^\sigma_{\alpha\beta}\Gamma^\alpha_{\mu\nu} - g^{\sigma\beta}\Gamma^\nu_{\beta\alpha}\Gamma^\alpha_{\mu\nu}$$

ovvero (cambiando i nomi degli indici di somma)

$$\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(g^{\sigma\beta}\Gamma^\alpha_{\mu\beta}\right) - g^{\nu\beta}\Gamma^\sigma_{\alpha\beta}\Gamma^\alpha_{\mu\nu} - g^{\nu\sigma}\Gamma^\alpha_{\mu\beta}\Gamma^\beta_{\nu\alpha}.$$

Il terzo termine di questa espressione si cancella con il secondo addendo delle equazioni di campo (47); al posto del secondo termine di questa espressione, per la relazione (50), si può porre

$$\kappa\left(t_\mu{}^\sigma - \frac{1}{2}\delta_\mu^\sigma t\right),$$

ove $t = t_\alpha^\alpha$. Al posto delle equazioni (47) si ottiene

$$\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(g^{\sigma\beta}\Gamma^\alpha_{\mu\beta}\right) = -\kappa\left(t_\mu{}^\sigma - \frac{1}{2}\delta_\mu^\sigma t\right), \ \sqrt{-g} = 1. \tag{51}$$

§16. Forma generale delle equazioni di campo della gravitazione.

Le equazioni di campo per lo spazio privo di materia vanno paragonate alle equazioni

$$\Delta\varphi = 0$$

della teoria di Newton. Dobbiamo cercare le equazioni che corrispondono all'equazione di Poisson

$$\Delta\varphi = 4\pi\kappa\rho,$$

dove ρ indica la densità di materia.

La teoria della relatività speciale ha condotto al risultato che la massa inerziale non è nient'altro che energia, che trova la sue espressione matematica completa in un tensore simmetrico di rango secondo, il tensore dell'energia. Dovremo quindi introdurre anche nella teoria della relatività generale un tensore $T_\sigma{}^\alpha$ dell'energia della materia, che come le componenti dell'energia $t_\sigma{}^\alpha$ [equazioni (49) e (50)] del campo gravitazionale avranno carattere misto, ma che corrisponderanno ad un tensore covariante simmetrico[12].

Come questo tensore d'energia (analogamente alla densità ρ nell'equazione di Poisson) vada introdotto nelle equazioni di campo della gravitazione lo insegna il sistema di equazioni (51). Se si tratta infatti un sistema completo (per esempio il sistema solare), la massa totale del sistema, quindi anche la sua azione gravitazionale complessiva, dipenderà dall'energia totale del sistema, quindi dall'energia ponderabile e gravitazionale insieme. Ciò si potrà esprimere con il fatto che nella (51) al posto delle componenti dell'energia $t_\mu{}^\sigma$ del solo campo gravitazionale si introduca la somma delle componenti dell'energia della materia e del campo gravitazionale $t_\mu{}^\sigma + T_\mu{}^\sigma$. Si ottiene quindi invece della (51) l'equazione tensoriale

$$\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(g^{\sigma\beta}\Gamma^\alpha_{\mu\beta}\right) = -\kappa\left[\left(t_\mu{}^\sigma + T_\mu{}^\sigma\right) - \frac{1}{2}\delta^\sigma_\mu\,(t+T)\right],\ \sqrt{-g}=1, \tag{52}$$

dove si è posto $T = T^\mu_\mu$ (scalare di Laue). Queste sono, in forma mista, le equazioni di campo generali della gravitazione che si cercavano. Al posto della (47) risulta a ritroso il sistema

$$\frac{\partial\Gamma^\alpha_{\mu\nu}}{\partial x_\alpha} + \Gamma^\alpha_{\mu\beta}\Gamma^\beta_{\nu\alpha} = -\kappa\left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}T\right),\ \sqrt{-g}=1. \tag{53}$$

Si deve aggiungere che questa introduzione del tensore d'energia della materia non è giustificata mediante il solo postulato della relatività; infatti l'abbiamo ricavata dal requisito che l'energia del campo gravitazionale abbia un'azione gravitazionale, come ogni energia di tipo diverso. Ma il fondamento più solido per la scelta delle equazioni di cui sopra sta nel fatto che esse hanno per conseguenza che per le componenti dell'energia totale valgono delle equazioni di conservazione (dell'impulso e dell'energia), che sono in tutto analoghe alle (49) e (49*a*). Questo sarà dimostrato nel seguito.

[12] $g_{\alpha\tau}T_\sigma{}^\alpha = T_{\sigma\tau}$ e $g^{\sigma\beta}T_\sigma{}^\alpha = T^{\alpha\beta}$ dovranno essere tensori simmetrici.

§17. Le leggi di conservazione nel caso generale.

E' facile trasformare l'equazione (52) in modo che al secondo membro il secondo termine sparisca. Si contragga la (52) rispetto agli indici μ e σ e si sottragga dalla (52) l'equazione così ottenuta, moltiplicata per $1/2\delta_\mu^\sigma$. Risulta

$$\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(g^{\sigma\beta}\Gamma^\alpha_{\mu\beta}-\frac{1}{2}\delta^\sigma_\mu g^{\lambda\beta}\Gamma^\alpha_{\lambda\beta}\right)=-\kappa\left(t_\mu^{\ \sigma}+T_\mu^{\ \sigma}\right). \tag{52a}$$

Applichiamo a questa equazione l'operazione $\partial/\partial x_\sigma$. Risulta

$$\frac{\partial^2}{\partial x_\alpha \partial x_\sigma}\left(g^{\sigma\beta}\Gamma^\alpha_{\mu\beta}\right)=-\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x_\alpha \partial x_\sigma}\left[g^{\sigma\beta}g^{\alpha\lambda}\left(\frac{\partial g_{\mu\lambda}}{\partial x_\beta}+\frac{\partial g_{\beta\lambda}}{\partial x_\mu}-\frac{\partial g_{\mu\beta}}{\partial x_\lambda}\right)\right].$$

Il primo ed il terzo termine delle parentesi tonde danno contributi che si cancellano, come si riconosce se nel contributo del terzo termine si scambiano tra loro sia gli indici di somma α e σ, che β e λ. Il secondo termine si può trasformare con la (31) e si ottiene

$$\frac{\partial^2}{\partial x_\alpha \partial x_\sigma}\left(g^{\sigma\beta}\Gamma^\alpha_{\mu\beta}\right)=\frac{1}{2}\frac{\partial^3 g^{\alpha\beta}}{\partial x_\alpha \partial x_\beta \partial x_\mu}. \tag{54}$$

Il secondo termine a primo membro della (52a) dà

$$-\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x_\alpha \partial x_\mu}\left(g^{\lambda\beta}\Gamma^\alpha_{\lambda\beta}\right)$$

ovvero

$$\frac{1}{4}\frac{\partial^2}{\partial x_\alpha \partial x_\mu}\left[g^{\lambda\beta}g^{\alpha\delta}\left(\frac{\partial g_{\delta\lambda}}{\partial x_\beta}+\frac{\partial g_{\delta\beta}}{\partial x_\lambda}-\frac{\partial g_{\lambda\beta}}{\partial x_\delta}\right)\right].$$

Il termine che deriva dall'ultimo addendo delle parentesi tonde si annulla per la (29) con la scelta delle coordinate da noi adottata. Gli altri due si possono raccogliere e insieme danno per la (31)

$$-\frac{1}{2}\frac{\partial^3 g^{\alpha\beta}}{\partial x_\alpha \partial x_\beta \partial x_\mu},$$

sicché tenendo conto della (54) vale l'identità

$$\frac{\partial^2}{\partial x_\alpha \partial x_\sigma}\left(g^{\sigma\beta}\Gamma^\alpha_{\mu\beta}-\frac{1}{2}\delta^\sigma_\mu g^{\lambda\beta}\Gamma^\alpha_{\lambda\beta}\right)\equiv 0. \tag{55}$$

Dalle (55) e (52*a*) discende

$$\frac{\partial\left(t_\mu^{\ \sigma}+T_\mu^{\ \sigma}\right)}{\partial x_\sigma}=0. \tag{56}$$

Dalle nostre equazioni di campo della gravitazione risulta quindi che le leggi di conservazione dell'impulso e dell'energia sono soddisfatte. Lo si vede nel modo più semplice dall'argomento che porta all'equazione (49a); solo si hanno da introdurre qui al posto delle componenti dell'energia t_μ^σ del campo gravitazionale le componenti dell'energia complessiva della materia e del campo gravitazionale.

§18. La legge di conservazione dell'energia e dell'impulso per la materia come conseguenza delle equazioni di campo.

Se si moltiplica la (53) per $\partial g^{\mu\nu}/\partial x_\sigma$ si ottiene per la via intrapresa nel §15, tenendo conto dell'annullarsi di

$$g_{\mu\nu}\frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x_\sigma}$$

l'equazione

$$\frac{\partial t_\sigma{}^\alpha}{\partial x_\alpha}+\frac{1}{2}\frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x_\sigma}T_{\mu\nu}=0,$$

ovvero tenendo conto della (56)

$$\frac{\partial T_\sigma{}^\alpha}{\partial x_\alpha}+\frac{1}{2}\frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x_\sigma}T_{\mu\nu}=0. \tag{57}$$

Un confronto con la (41b) mostra che questa equazione con la scelta adottata del sistema di coordinate non afferma altro che l'annullarsi della divergenza del tensore delle componenti d'energia della materia. Dal punto di vista fisico la comparsa del secondo termine a primo membro mostra che per la sola materia non valgono in senso proprio leggi di conservazione dell'energia e dell'impulso, o meglio valgono solo quando le $g^{\mu\nu}$ sono costanti, cioè quando le intensità di campo della gravitazione si annullano. Questo secondo termine è un'espressione per l'impulso e rispettivamente per l'energia che vengono trasmessi dal campo gravitazionale alla materia per unità di volume e di tempo. Ciò risulta più chiaro se al posto della (57) tenendo conto della (41) si scrive

$$\frac{\partial T_\sigma{}^\alpha}{\partial x_\alpha}=-\Gamma^\alpha_{\sigma\beta}T_\alpha{}^\beta. \tag{57a}$$

Il secondo membro esprime l'azione energetica del campo gravitazionale sulla materia.

Le equazioni di campo della gravitazione implicano quindi quattro equazioni che il processo materiale deve soddisfare. Esse producono interamente le equazioni del processo materiale quando quest'ultimo sia caratterizzabile mediante quattro equazioni differenziali mutuamente indipendenti[13].

D. I processi "materiali".

Gli strumenti matematici sviluppati in B ci pongono senz'altro in condizione di generalizzare le leggi fisiche della materia (idrodinamica, elettrodinamica di Maxwell) come risultano formulate nella teoria della relatività speciale in modo tale da adeguarsi alla teoria della relatività generale. Il principio di relatività generale non produce alcuna ulteriore restrizione delle possibilità; esso insegna invece

[13] Vedasi in proposito Hilbert, Nachr. d. K. Gesellsch. d. Wiss. zu Göttingen, Math.-Phys. Klasse, p. 3. 1915.

a conoscere esattamente l'influenza del campo gravitazionale su tutti i processi, senza che si debba introdurre alcuna nuova ipotesi di qualche tipo.

Questo stato di cose porta con sè che sulla natura fisica della materia (in senso stretto) non debbano introdursi ipotesi necessariamente definite. In particolare può restare aperta la questione, se le teorie del campo elettromagnetico e del campo gravitazionale costituiscano o no insieme una base sufficiente per la teoria della materia. Il postulato della relatività generale in proposito non può in linea di principio insegnare nulla. Deve risultare dallo sviluppo della teoria se l'elettromagnetismo e la gravitazione insieme possano produrre ciò che prima da soli non potevano ottenere.

§19. Equazioni di Eulero per fluidi adiabatici non viscosi.

Siano p e ρ due scalari, dei quali chiameremo il primo "pressione", il secondo "densità" di un fluido; tra di essi sussista un'equazione. Il tensore simmetrico controvariante

$$T^{\alpha\beta} = -g^{\alpha\beta} p + \rho \frac{dx_\alpha}{ds}\frac{dx_\beta}{ds} \tag{58}$$

è il tensore controvariante dell'energia di un fluido. Da esso deriva il tensore covariante

$$T_{\mu\nu} = -g_{\mu\nu} p + g_{\mu\alpha}\frac{dx_\alpha}{ds} g_{\mu\beta}\frac{dx_\beta}{ds}\rho, \tag{58a}$$

ed anche il tensore misto[14]

$$T_\sigma{}^\alpha = -\delta_\sigma^\alpha p + g_{\sigma\beta}\frac{dx_\beta}{ds}\frac{dx_\alpha}{ds}\rho. \tag{58b}$$

Se si sostituisce il secondo membro della (58b) nella (57a) si ottengono le equazioni idrodinamiche euleriane della teoria della relatività generale. Queste in linea di principio risolvono completamente il problema del moto; infatti le quattro equazioni (57a) assieme con la data equazione tra p e ρ e all'equazione

$$g_{\alpha\beta}\frac{dx_\alpha}{ds}\frac{dx_\beta}{ds} = 1$$

bastano, per $g_{\alpha\beta}$ dato, a determinare le 6 incognite

$$p,\ \rho, \frac{dx_1}{ds},\ \frac{dx_2}{ds},\ \frac{dx_3}{ds},\ \frac{dx_4}{ds}.$$

Se anche le $g_{\alpha\beta}$ sono incognite, si aggiungono le equazioni (53). Queste sono 11 equazioni per la determinazione di 10 funzioni $g_{\mu\nu}$, sicché esse appaiono sovradeterminate. Va però osservato che le equazioni (57a) sono già contenute nelle (53), e quindi queste ultime rappresentano solo 7 equazioni indipendenti. Questa indeterminazione ha la sua buona ragione nel fatto che l'accresciuta libertà nella scelta

[14] Per un osservatore comovente, che nell'infinitamente piccolo utilizzi un sistema di riferimento come nella relatività speciale, la densità d'energia $T_4{}^4$ è uguale a $\rho - p$. Da qui deriva la definizione di ρ. Quindi per un fluido incomprimibile ρ non è costante.

delle coordinate porta con sè che il problema resta matematicamente indeterminato in modo tale che si possono scegliere arbitrariamente tre funzioni dello spazio[15].

§20. Equazioni di campo elettromagnetiche di Maxwell per il vuoto.

Siano φ_ν le componenti di un tetravettore covariante, il tetravettore del potenziale elettromagnetico. Da esse formiamo secondo la (36) le componenti $F_{\rho\sigma}$ dell'esavettore covariante del campo elettromagnetico secondo il sistema di equazioni

$$F_{\rho\sigma} = \frac{\partial \varphi_\rho}{\partial x_\sigma} - \frac{\partial \varphi_\sigma}{\partial x_\rho}. \tag{59}$$

Dalla (59) segue che il sistema di equazioni

$$\frac{\partial F_{\rho\sigma}}{\partial x_\tau} + \frac{\partial F_{\sigma\tau}}{\partial x_\rho} + \frac{\partial F_{\tau\rho}}{\partial x_\sigma} = 0 \tag{60}$$

è soddisfatto; il suo primo membro, per la (37), è un tensore antisimmetrico di rango terzo. Il sistema (60) contiene essenzialmente 4 equazioni, che scritte come segue sono:

$$\begin{gathered}\frac{\partial F_{23}}{\partial x_4} + \frac{\partial F_{34}}{\partial x_2} + \frac{\partial F_{42}}{\partial x_3} = 0, \ \frac{\partial F_{34}}{\partial x_1} + \frac{\partial F_{41}}{\partial x_3} + \frac{\partial F_{13}}{\partial x_4} = 0, \\ \frac{\partial F_{41}}{\partial x_2} + \frac{\partial F_{12}}{\partial x_4} + \frac{\partial F_{24}}{\partial x_1} = 0, \ \frac{\partial F_{12}}{\partial x_3} + \frac{\partial F_{23}}{\partial x_1} + \frac{\partial F_{31}}{\partial x_2} = 0.\end{gathered} \tag{60a}$$

Queste equazioni corrispondono al secondo sistema di equazioni di Maxwell. Lo si riconosce immediatamente ponendo

$$F_{23} = \mathfrak{h}_x, F_{31} = \mathfrak{h}_y, F_{12} = \mathfrak{h}_z, F_{14} = \mathfrak{e}_x, F_{24} = \mathfrak{e}_y, F_{34} = \mathfrak{e}_z. \tag{61}$$

Allora al posto delle (60a) si può porre, nella consueta notazione dell'analisi vettoriale tridimensionale

$$\frac{\partial \mathfrak{h}}{\partial t} + \operatorname{rot} \mathfrak{e} = 0, \operatorname{div} \mathfrak{h} = 0. \tag{60b}$$

Otteniamo il primo sistema di Maxwell per generalizzazione della forma data da Minkowski. Introduciamo l'esavettore controvariante corrispondente a $F_{\alpha\beta}$

$$F^{\mu\nu} = g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} F_{\alpha\beta} \tag{62}$$

ed il tetravettore controvariante J^μ della densità di corrente elettrica nel vuoto; allora tenendo conto della (40) scriviamo il sistema di equazioni invarianti rispetto a sostituzioni arbitrarie di determinante 1 (in conformità con la scelta delle coordinate adottata da noi):

[15]Rinunciando alla scelta delle coordinate secondo $g = -1$ si possono scegliere a piacere *quattro* funzioni dello spazio, corrispondenti alle quattro funzioni arbitrarie delle quali si può disporre liberamente nella scelta delle coordinate.

$$\frac{\partial F^{\mu\nu}}{\partial x_\nu} = J^\mu. \tag{63}$$

Se infatti poniamo

$$F^{23} = \mathfrak{h}'_x,\ F^{31} = \mathfrak{h}'_y,\ F^{12} = \mathfrak{h}'_z,\ F^{14} = -\mathfrak{e}'_x,\ F^{24} = -\mathfrak{e}'_y,\ F^{34} = -\mathfrak{e}'_z, \tag{64}$$

quantità che nel caso particolare della teoria della relatività speciale sono uguali ad $\mathfrak{h}_x \ldots . \mathfrak{e}_z$, ed inoltre

$$J^1 = \mathfrak{i}_x,\ J^2 = \mathfrak{i}_y,\ J^3 = \mathfrak{i}_z,\ J^4 = \rho,$$

si ottiene al posto della (63)

$$\operatorname{rot} \mathfrak{h}' - \frac{\partial \mathfrak{e}'}{\partial t} = \mathfrak{i},\ \operatorname{div} \mathfrak{e}' = \rho. \tag{63a}$$

Le equazioni (60), (62) e (63) costituiscono quindi la generalizzazione delle equazioni di Maxwell del vuoto per la determinazione da noi usata della scelta delle coordinate.

Le *componenti dell'energia del campo elettromagnetico.* Formiamo il prodotto interno

$$\kappa_\sigma = F_{\sigma\mu} J^\mu. \tag{65}$$

Con notazione tridimensionale le sue componenti per le (61) si scrivono

$$\kappa_1 = \rho \mathfrak{e}_x + [\mathfrak{i}, \mathfrak{h}]_x \ldots \kappa_4 = -(\mathfrak{i}, \mathfrak{e}). \tag{65a}$$

κ_σ è un tetravettore covariante le cui componenti sono uguali a meno l'impulso e rispettivamente l'energia per unità di volume e di tempo che vengono trasmessi dal campo elettromagnetico alle masse elettriche. Se le masse elettriche sono libere, cioè sotto la sola influenza del campo elettromagnetico, il tetravettore covariante κ_σ è nullo.

Per ottenere le componenti ${T_\sigma}^\nu$ del campo elettromagnetico abbiamo solo bisogno di dare all'equazione $\kappa_\sigma = 0$ la forma dell'equazione (57). Dalle (63) e (65) si ottiene

$$\kappa_\sigma = F_{\sigma\mu} \frac{\partial F^{\mu\nu}}{\partial x_\nu} = \frac{\partial}{\partial x_\nu} \left(F_{\sigma\mu} F^{\mu\nu}\right) - F^{\mu\nu} \frac{\partial F_{\sigma\mu}}{\partial x_\nu}.$$

Per la (60) il secondo termine a secondo membro ammette la trasformazione

$$F^{\mu\nu} \frac{\partial F_{\sigma\mu}}{\partial x_\nu} = -\frac{1}{2} F^{\mu\nu} \frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma} = -\frac{1}{2} g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} F_{\alpha\beta} \frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma},$$

espressione che per ragioni di simmetria si può anche scrivere

$$-\frac{1}{4} \left[g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} F_{\alpha\beta} \frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma} + g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} \frac{\partial F_{\alpha\beta}}{\partial x_\sigma} F_{\mu\nu} \right].$$

Ma quindi si può porre

$$-\frac{1}{4}\frac{\partial}{\partial x_\sigma}\left(g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta}F_{\alpha\beta}F_{\mu\nu}\right)+\frac{1}{4}F_{\alpha\beta}F_{\mu\nu}\frac{\partial}{\partial x_\sigma}\left(g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta}\right).$$

Il primo di questi termini si può scrivere in forma abbreviata

$$-\frac{1}{4}\frac{\partial}{\partial x_\sigma}\left(F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}\right);$$

eseguendo la derivazione, con qualche trasformazione, il secondo dà

$$-\frac{1}{2}F^{\mu\tau}F_{\mu\nu}g^{\nu\rho}\frac{\partial g_{\sigma\tau}}{\partial x_\sigma}.$$

Se si raccolgono insieme i tre termini calcolati si ottiene la relazione

$$\kappa_\sigma=\frac{\partial T_\sigma{}^\nu}{\partial x_\nu}-\frac{1}{2}g^{\tau\mu}\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma}T_\tau{}^\nu, \tag{66}$$

dove si è posto

$$T_\sigma{}^\nu=-F_{\sigma\alpha}F^{\nu\alpha}+\frac{1}{4}\delta_\sigma^\nu F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}. \tag{66a}$$

Quando κ_σ è nullo l'equazione (66) per la (30) è equivalente alla (57) ovvero (57a). Le $T_\sigma{}^\nu$ sono quindi le componenti d'energia del campo elettromagnetico. Per mezzo delle (61) e (64) si mostra facilmente che queste componenti dell'energia del campo elettromagnetico nel caso della teoria della relatività speciale danno le ben note espressioni di Maxwell-Poynting.

Abbiamo ora derivato le leggi più generali che soddisfano il campo gravitazionale e la materia, se si utilizza in modo coerente un sistema di coordinate per il quale $\sqrt{-g}=1$. Otteniamo in tal modo una semplificazione consistente delle formule e dei calcoli, senza dover rinunciare al requisito della covarianza generale: infatti troviamo le nostre equazioni specializzando il sistema di coordinate a partire da equazioni generalmente covarianti.

E' pur sempre non priva d'interesse formale la questione, se secondo la definizione generalizzata delle componenti dell'energia del campo gravitazionale e della materia valgano anche senza specializzazione del sistema di coordinate delle leggi di conservazione della forma dell'equazione (56) e anche equazioni di campo della forma (52) ovvero (52a), di modo che a primo membro vi sia una divergenza (nel senso consueto), a secondo membro la somma delle componenti dell'energia della materia e della gravitazione. Ho trovato che succedono tutte e due le cose. Credo tuttavia che non valga la pena di comunicare la mia trattazione abbastanza ponderosa su questo fatto, poiché non ne viene nulla di sostanzialmente nuovo.

E. §21. Teoria di Newton come prima approssimazione.

Come già più volte ricordato, la teoria della relatività speciale come caso particolare di quella generale è caratterizzata dal fatto che le $g_{\mu\nu}$ abbiano i valori costanti (4). Per quanto detto prima ciò significa trascurare completamente le azioni gravitazionali. Otteniamo un'approssimazione più vicina alla realtà se consideriamo il caso che le $g_{\mu\nu}$ si discostino dai valori (4) solo per quantità piccole (rispetto ad 1), mentre trascuriamo le quantità piccole di ordine secondo e più alto. (Primo punto di vista dell'approssimazione).

Assumeremo inoltre che nella regione spaziotemporale considerata le $g_{\mu\nu}$ con opportuna scelta delle coordinate tendano all'infinito spaziale verso i valori (4); trattiamo cioè campi gravitazionali che possono essere trattati come generati esclusivamente da materia che si trovi al finito.

Si potrebbe assumere che queste approssimazioni debbano condurre alla teoria di Newton. Si ha tuttavia bisogno ancora della trattazione approssimata delle equazioni fondamentali da un secondo punto di vista. Prendiamo in considerazione il moto di un punto materiale secondo le equazioni (46). Nel caso della teoria della relatività speciale le componenti

$$\frac{dx_1}{ds}, \frac{dx_2}{ds}, \frac{dx_3}{ds}$$

possono assumere valori arbitrari; ciò significa che si possono avere velocità arbitrarie

$$v = \left[\left(\frac{dx_1}{dx^4}\right)^2 + \left(\frac{dx_2}{dx^4}\right)^2 + \left(\frac{dx_3}{dx^4}\right)^2\right]^{1/2},$$

che devono essere inferiori alla velocità della luce nel vuoto ($v < 1$) . Se ci si restringe al caso che quasi esclusivamente si verifica nell'esperienza, che v sia piccola rispetto alla velocità della luce, ciò significa che le componenti

$$\frac{dx_1}{ds}, \frac{dx_2}{ds}, \frac{dx_3}{ds}$$

si devono trattare come quantità piccole, mentre dx_4/ds è uguale ad 1 a meno di quantità del second'ordine (secondo punto di vista dell'approssimazione).

Osserviamo ora che secondo il primo punto di vista dell'approssimazione le quantità $\Gamma^\tau_{\mu\nu}$ sono tutte quantità piccole almeno del prim'ordine. Un'occhiata alla (46) rivela quindi che in questa equazione per il secondo punto di vista dell'approssimazione si devono condiderare solo termini per i quali sia $\mu = \nu = 4$. Limitandosi ai termini di ordine più basso al posto della (46) si ottengono le equazioni

$$\frac{d^2x_\tau}{dt^2} = \Gamma^\tau_{44},$$

dove si è posto $ds = dx_4 = dt$, ovvero limitandosi ai termini che per il primo punto di vista dell'approssimazione sono del prim'ordine:

$$\frac{d^2x_\tau}{dt^2} = \begin{bmatrix} 44 \\ \tau \end{bmatrix} \ (\tau = 1,2,3)\,, \ \frac{d^2x_4}{dt^2} = -\begin{bmatrix} 44 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Se si presuppone inoltre che il campo gravitazionale sia quasi statico, perché ci si restringe al caso che la materia che genera il campo gravitazionale si muova solo lentamente (in confronto alla velocità di propagazione della luce), si possono trascurare al secondo membro le derivate rispetto al tempo se confrontate con quelle rispetto alle coordinate spaziali, e si ottiene quindi

$$\frac{d^2x_\tau}{dt^2} = -\frac{1}{2}\frac{\partial g_{44}}{\partial x_\tau} \ (\tau = 1,2,3)\,. \tag{67}$$

Questa è la legge del moto del punto materiale secondo la teoria di Newton, purché g_{44} giochi il ruolo del potenziale gravitazionale. È notevole in questo risultato che in prima approssimazione solo la componente g_{44} del tensore fondamentale determini il moto del punto materiale.

Utilizziamo ora le equazioni di campo (53). Va osservato in proposito che il tensore d'energia della "materia" sarà quasi esclusivamente determinato dalla densità ρ della materia in senso stretto, cioè dal secondo termine al secondo membro della (58) [rispettivamente (58a) o (58b)] . Se si forma l'approssimazione che ci interessa, tutte le componenti si annullano, meno la componente

$$T_{44} = \rho = T.$$

Al primo membro della (53) il secondo termine è piccolo del second'ordine; il primo dà nell'approssimazione che c'interessa

$$+\frac{\partial}{\partial x_1}\begin{bmatrix}\mu\nu\\1\end{bmatrix} + \frac{\partial}{\partial x_2}\begin{bmatrix}\mu\nu\\2\end{bmatrix} + \frac{\partial}{\partial x_3}\begin{bmatrix}\mu\nu\\3\end{bmatrix} - \frac{\partial}{\partial x_4}\begin{bmatrix}\mu\nu\\4\end{bmatrix}.$$

Per $\mu = \nu = 4$, trascurando i termini derivati rispetto al tempo, questo dà

$$-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 g_{44}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 g_{44}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 g_{44}}{\partial x_3^2}\right) = -\frac{1}{2}\Delta g_{44}.$$

L'ultima delle equazioni (53) dà quindi

$$\Delta g_{44} = \kappa\rho. \tag{68}$$

Le equazioni (67) e (68) insieme sono equivalenti alla legge della gravitazione di Newton.

Per il potenziale gravitazionale risulta per le (67) e (68) l'espressione

$$-\frac{\kappa}{8\pi}\int\frac{\rho d\tau}{r}, \tag{68a}$$

mentre la teoria di Newton, con l'unità di tempo scelta da noi, dà

$$-\frac{K}{c^2}\int\frac{\rho d\tau}{r},$$

dove K è la costante $6,7.10^{-8}$ chiamata di solito costante di gravitazione. Per confronto si ha

$$\kappa = \frac{8\pi K}{c^2} = 1,87.10^{-27}. \tag{69}$$

§22. Comportamento dei regoli e degli orologi in campi gravitazionali statici. Curvatura dei raggi di luce. Moto del perielio delle orbite planetarie.

Per ottenere la teoria di Newton come prima approssimazione, delle 10 componenti $g_{\mu\nu}$ del potenziale gravitazionale ci basta calcolare g_{44}, poiché solo questa componente interviene nella prima approssimazione (67) dell'equazione di moto del punto materiale in un campo di gravitazione. Ma che anche altre componenti di $g_{\mu\nu}$ debbano scostarsi in prima approssimazione dai valori dati nella (4) lo si vede già dal fatto che queste sono soggette alla condizione $g = -1$.

Per un punto materiale generatore del campo che si trovi nell'origine del sistema di coordinate si ottiene in prima approssimazione la soluzione a simmetria radiale

$$\begin{aligned} g_{\rho\sigma} &= -\delta_{\rho\sigma} - \alpha \frac{x_\rho x_\sigma}{r^3} \ (\rho \text{ e } \sigma \text{ tra 1 e 3}) \\ g_{\rho 4} &= g_{4\rho} = 0 \ (\rho \text{ tra 1 e 3}) \\ g_{44} &= 1 - \frac{\alpha}{r}. \end{aligned} \tag{70}$$

$\delta_{\rho\sigma}$ è 1 o 0 a seconda che sia $\rho = \sigma$ o $\rho \neq \sigma$, r è la quantità

$$+\sqrt{(x_1^2 + x_2^2 + x_3^3}.$$

Per la (68a)

$$\alpha = \frac{\kappa M}{8\pi}, \tag{70a}$$

dove con M si indica la massa che genera il campo. È facile verificare che con questa soluzione le equazioni di campo sono soddisfatte in prima approssimazione (fuori dalla massa).

Studiamo ora l'influenza che le proprietà metriche dello spazio subiscono da parte del campo della massa M. Tra le lunghezze e i tempi ds misurati "localmente" (§4) e le differenze di coordinate sussiste sempre la relazione

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx_\mu dx_\nu.$$

Per un regolo campione disposto "parallelamente" all'asse x si deve porre per esempio

$$ds^2 = -1; \ dx_2 = dx_3 = dx_4 = 0,$$

quindi

$$-1 = g_{11} dx_1^2.$$

Se il regolo giace lungo l'asse x la prima delle equazioni (70) dà

$$g_{11} = -\left(1 + \frac{\alpha}{r}\right).$$

Dalle due relazioni discende in prima approssimazione

$$dx_1 = 1 - \frac{\alpha}{2r}. \tag{71}$$

Per la presenza del campo gravitazionale il regolo campione appare quindi accorciato dell'ammontare trovato rispetto al sistema di coordinate, quando esso sia disposto radialmente.

Analogamente si ottiene la sua lunghezza in coordinate nella direzione tangenziale, ponendo per esempio

$$ds^2 = -1;\ dx_1 = dx_3 = dx_4 = 0,\ x_1 = r,\ x_2 = x_3 = 0.$$

Si ottiene

$$-1 = g_{22} dx_2^2 = -dx_2^2. \tag{71a}$$

Per giacitura tangenziale il campo gravitazionale del punto materiale non ha quindi influenza sulla lunghezza del regolo.

Pertanto la geometria euclidea non vale neppure in prima approssimazione, se si assume un certo regolo come realizzazione dello stesso intervallo indipendentemente dalla sua posizione e dal suo orientamento. Un'occhiata alle (70a) e (69) mostra altresì come le deviazioni attese siano troppo piccole per poterle rendere osservabili nella misura della superficie terrestre.

Studiamo poi la velocità di avanzamento rispetto alla coordinata temporale di un orologio campione, che sia posto a riposo in un campo statico. Per un periodo dell'orologio si ha

$$ds = 1;\ dx_1 = dx_2 = dx_3 = 0.$$

Si ha quindi

$$dx_4 = \frac{1}{\sqrt{g_{44}}} = \frac{1}{\sqrt{1 + (g_{44} - 1)}} = 1 - \frac{g_{44} - 1}{2}$$

ovvero

$$dx_4 = 1 + \frac{\kappa}{8\pi} \int \frac{\rho d\tau}{r}. \tag{72}$$

L'orologio cammina più lentamente quando è posto in prossimità di masse ponderabili. Ne consegue che le righe spettrali della luce che ci arriva dalla superficie di stelle grandi ci devono apparire spostate verso l'estremo rosso dello spettro[16].

Studiamo inoltre il cammino dei raggi luminosi in un campo gravitazionale statico. Secondo la teoria della relatività speciale la velocità della luce è data dall'equazione

$$-dx_1^2 - dx_2^2 - dx_3^2 + dx_4^2 = 0,$$

e quindi nella teoria delle relatività generale dall'equazione

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx_\mu dx_\nu = 0. \tag{73}$$

Se la direzione, cioè il rapporto $dx_1 : dx_2 : dx_3$ è dato, l'equazione (73) fornisce le quantità

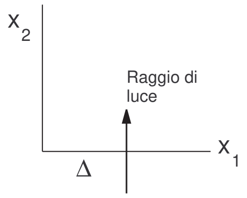
$$\frac{dx_1}{dx_4},\ \frac{dx_2}{dx_4},\ \frac{dx_3}{dx_4}$$

e quindi la velocità

$$\sqrt{\left(\frac{dx_1}{dx^4}\right)^2 + \left(\frac{dx_2}{dx^4}\right)^2 + \left(\frac{dx_3}{dx^4}\right)^2} = \gamma,$$

[16]A favore dell'esistenza di un effetto di questo tipo depongono secondo E. Freundlich le osservazioni su stelle fisse d'un certo tipo. Si attende una conferma definitiva di questo risultato.

definita nal senso della geometria euclidea. Si riconosce facilmente che i raggi di luce devono procedere curvi rispetto al sistema di coordinate nel caso che le $g_{\mu\nu}$ non siano costanti. Se n è una direzione perpendicolare alla propagazione della luce, il principio di Huygens dà che il raggio di luce [considerato nel piano (γ, n)] possiede



la curvatura $-\partial\gamma/\partial n$.

Studiamo la curvatura che subisce un raggio che passi alla distanza Δ da una massa M. Se si sceglie il sistema di coordinate secondo il disegno, la deflessione complessiva del raggio di luce (considerata positiva quando è concavo rispetto alla sorgente) è data con sufficiente approssimazione da

$$B = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial\gamma}{\partial x_1} dx_2,$$

mentre la (73) e la (70) danno

$$\gamma = \sqrt{-\frac{g_{44}}{g_{22}}} = 1 - \frac{\alpha}{2r}\left(1 + \frac{x_2^2}{r^2}\right).$$

Il calcolo dà

$$B = \frac{2\alpha}{\Delta} = \frac{\kappa M}{4\pi\Delta}. \tag{74}$$

Un raggio di luce che passi rasente al sole subisce quindi una deflessione di 1,7", uno rasente al pianeta Giove una deflessione di 0,02".

Se si calcola il campo gravitazionale con approssimazione superiore di un ordine, e quindi con la precisione corrispondente il moto orbitale di un punto materiale di massa infinitesima, si ottiene rispetto alle leggi di Keplero-Newton del moto dei pianeti una deviazione del tipo seguente. L'ellisse dell'orbita di un pianeta subisce nel verso del moto orbitale una lenta rotazione che ammonta a

$$\varepsilon = 24\pi^3 \frac{a^2}{T^2 c^2 (1 - e^2)} \tag{75}$$

per rivoluzione. In questa formula a indica il semiasse maggiore, c la velocità della luce nelle consuete unità, e l'eccentricità, T il periodo orbitale in secondi[17].

Il calcolo dà per il pianeta Mercurio una rotazione dell'orbita di 43" per secolo, che corrisponde esattamente alla constatazione degli astronomi (Leverrier); essi trovano infatti nel moto del perielio di questo pianeta un residuo della suddetta entità, non spiegabile con le perturbazioni dovute agli altri pianeti.

(Ricevuto il 20 marzo 1916.)

[17]Riguardo al calcolo rimando alle dissertazioni originali: A. Einstein, Sitzsungsber. d. Preuss. Akad. d. Wiss. **47**, p. 831. 1915. - K. Schwarzschild, Sitzsungsber. d. Preuss. Akad. d. Wiss. **7**, p. 189. 1916.

Sulla dissertazione di Friedrich Kottler "L'ipotesi di equivalenza di Einstein e la gravitazione[1]"[2]

A. Einstein

Tra i lavori che si occupano criticamente della teoria della relatività generale sono particolarmente degni di nota quelli di Kottler, poiché questo collega è realmente entrato nello spirito della teoria. Considererò qui a fondo l'ultimo di questi lavori.

Kottler afferma che nei miei lavori successivi io ho abbandonato il "principio di equivalenza" da me proposto, mediante il quale cercavo di riunire in un unico concetto le idee di "massa inerte" e di "massa gravitazionale". Questa opinione deve discendere dal fatto che noi due non indichiamo come "principio di equivalenza" la stessa cosa; infatti secondo il mio punto di vista la mia teoria si fonda esclusivamente su questo principio. Perciò si ripete quanto segue:

1. Il *caso limite della teoria della relatività speciale.* Una regione spaziotemporale finita sia libera da campi di gravitazione, cioè sia possibile costruire un sistema di riferimento K ("sistema galileiano") rispetto al quale nella regione anzidetta valga quanto segue. Nel modo noto le coordinate siano misurabili direttamente con il regolo unitario, i tempi con l'orologio campione, come si ha cura che sia predisposto nella teoria della relatività speciale. Rispetto a questo sistema un punto materiale isolato si muove di moto rettilineo ed uniforme, come è stato ipotizzato da Galilei.

2. *Principio di equivalenza.* Uscendo da questo caso limite della teoria della relatività speciale ci si può chiedere se nella regione considerata un osservatore che sia uniformemente accelerato rispetto a K debba considerare il suo stato come accelerato, ovvero se con le note leggi di natura (approssimate) gli rimanga possibile un'interpretazione secondo la quale il suo stato si possa indicare come "quiete". Espresso più esattamente: ci consentono le leggi naturali conosciute in una certa approssimazione di trattare come in quiete un sistema di riferimento K' che sia uniformemente accelerato rispetto a K? Oppure, un po' più in generale: si può estendere il principio di relatività anche al caso di sistemi di riferimento accelerati (uniformemente) l'uno rispetto all'altro? La risposta è: per quanto realmente conosciamo le leggi di natura, nulla ci impedisce di considerare il sistema K' come in quiete, purché assumiamo che relativamente a K' si abbia un campo di gravitazione (in prima approssimazione omogeneo); infatti come in un campo di gravitazione omogeneo anche rispetto al nostro sistema K' tutti i corpi indipendentemente dalla loro natura fisica cadono con la stessa accelerazione. L'ipotesi che con tutto rigore si possa trattare K' come a riposo senza che una qualche legge di natura non sia soddisfatta rispetto a K', io la chiamo "principio di equivalenza".

3. *Il campo di gravitazione non è determinato solo cinematicamente.* La considerazione precedente si può anche rovesciare. Il sistema K' predisposto con il campo di gravitazione su considerato sia quello originario. Si può allora introdurre un nuovo sistema di riferimento K, accelerato rispetto a K', rispetto al quale masse (isolate) si muovano di moto rettilineo e uniforme (nella regione considerata). Ma *non* si può andare oltre e dire: se K' è un sistema di riferimento dotato di un campo di gravitazione *arbitrario*, si può sempre trovare un sistema di riferimento K rispetto

[1]Annalen der Physik **50**, 955 (1916).

[2]Über Friedrich Kottlers Abhandlung "Über Einsteins Äquivalentzhypothese und die Gravitation", Annalen der Physik **51**, 639-642 (1916).

al quale masse isolate si muovano di moto rettilineo ed uniforme, cioè rispetto al quale non esista alcun campo di gravitazione. L'assurdità di una tale ipotesi è subito evidente. Se per esempio il campo di gravitazione rispetto a K' è quello di un punto materiale a riposo, questo campo non si può eliminare per trasformazione nell'intero circondario del punto materiale con nessuna trasformazione per quanto ingegnosa. Non si può affatto pretendere di spiegare il campo di gravitazione in modo per così dire puramente cinematico; un' "interpretazione cinematica, non dinamica della gravitazione" non è possibile. Mediante una pura trasformazione con accelerazione da un sistema di Galilei ad un altro impariamo quindi a conoscere non campi di gravitazione *arbitrari*, ma solo quelli di un tipo del tutto particolare, i quali tuttavia devono soddisfare alle stesse leggi di tutti gli altri campi di gravitazione. Questa è solo di nuovo un'altra formulazione del principio di equivalenza (in particolare nella sua applicazione alla gravitazione).

Una teoria della gravitazione infrange quindi il principio di equivalenza nel senso inteso da me solo quando le equazioni della gravitazione non siano soddisfatte in *nessun* sistema di riferimento K' che si muova di moto non uniforme rispetto ad un sistema di riferimento galileiano. Che questo rimprovero non si possa muovere contro la mia teoria con equazioni *generalmente* covarianti è evidente; infatti in questa le equazioni sono soddisfatte rispetto ad un qualsiasi sistema di riferimento. *L'imposizione della covarianza generale delle equazioni comprende quella del principio di equivalenza come un caso del tutto particolare.*

4. Le *forze del campo gravitazionale sono forze "reali"?* Kottler rimprovera che nelle equazioni di moto

$$\frac{d^2x_\nu}{ds^2} + \sum_{\alpha\beta} \left\{ \begin{matrix} \alpha\beta \\ \nu \end{matrix} \right\} \frac{dx_\alpha}{ds}\frac{dx_\beta}{ds} = 0$$

io interpreti il secondo termine come l'espressione dell'azione del campo di gravitazione sul punto materiale, e il primo termine per così dire come l'espressione dell'inerzia galileiana. In tal modo sarebbero introdotte "forze reali del campo di gravitazione", cosa che non corrisponde allo spirito del principio di equivalenza. A ciò rispondo che quell'equazione come un tutto è generalmente covariante, quindi senz'altro conforme all'ipotesi di equivalenza. La denominazione delle parti da me introdotta è in linea di principio priva di significato, e determinata solo dal venire incontro alle nostre abitudini di pensiero in fisica. Questo vale anche in particolare per i concetti

$$\Gamma^\nu_{\alpha\beta} = -\left\{ \begin{matrix} \alpha\beta \\ \nu \end{matrix} \right\}$$

(componenti del campo di gravitazione) e $t_\sigma^{\ \nu}$ (componenti dell'energia del campo di gravitazione). L'introduzione di questa nomenclatura non è necessaria in linea di principio, ma mi pare per lo meno temporaneamente non priva di valore per il mantenimento della continuità di pensiero; perciò ho introdotto queste quantità, sebbene esse non abbiano carattere tensoriale. Il principio di equivalenza è tuttavia sempre soddisfatto, poiché le equazioni sono covarianti.

5. E' vero che io ho dovuto acquisire la covarianza generale delle equazioni mediante l'abbandono della consueta misura del tempo e della misura euclidea dello spazio. Kottler crede che si possa riuscire senza questo sacrificio. Ma già nel caso da lui trattato del sistema K' accelerato nel senso di Born rispetto ad un

sistema galileiano, si deve rinunciare alla consueta misura del tempo. Dal punto di vista della teoria della relatività è quindi assai naturale che si debba abbandonare anche la consueta misura dello spazio. Di questa necessità Kottler si persuaderà sicuramente da sè, quando cercherà di sviluppare in generale il piano teorico che si propone.

Ottobre 1916.

(Ricevuto il 19 ottobre 1916)

Le onde gravitazionali[1][2]

A. Einstein

L'importante problema, come avvenga la propagazione del campo gravitazionale, è già stato da me trattato un anno e mezzo fa in un lavoro dell'Accademia[3]. Poichè tuttavia la mia esposizione di allora dell'argomento non è abbastanza chiara e inoltre è deturpata da un deplorevole errore di calcolo, devo ritornare qui sulla questione.

Come allora, anche qui mi limiterò a trattare il caso in cui il continuo spazio-temporale considerato differisca solo assai poco da un continuo "galileiano". Al fine di porre per tutti gli indici

$$g_{\mu\nu} = -\delta_{\mu\nu} + \gamma_{\mu\nu}, \tag{1}$$

scegliamo, come è usuale nella teoria della relatività speciale, la variabile tempo immaginaria pura, ponendo

$$x_4 = it,$$

dove t designa il "tempo-luce". Nella (1) si ha $\delta_{\mu\nu} = 1$ o rispettivamente $\delta_{\mu\nu} = 0$ a seconda che sia $\mu = \nu$ oppure $\mu \neq \nu$. I $\gamma_{\mu\nu}$ sono quantità piccole rispetto a 1, che rappresentano lo scostamento del continuo da quello in assenza di campo; essi costituiscono un tensore di rango due rispetto a trasformazioni di Lorentz.

§1. Soluzione delle equazioni approssimate del campo gravitazionale mediante i potenziali ritardati.

Partiamo dalle equazioni di campo valide per un sistema di coordinate arbitrario[4]

$$\begin{aligned} & -\sum_\alpha \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\begin{Bmatrix}\mu\nu\\ \alpha\end{Bmatrix} + \sum_\alpha \frac{\partial}{\partial x_\nu}\begin{Bmatrix}\mu\alpha\\ \alpha\end{Bmatrix} \\ & +\sum_{\alpha\beta}\begin{Bmatrix}\mu\alpha\\ \beta\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}\nu\beta\\ \alpha\end{Bmatrix} - \sum_{\alpha\beta}\begin{Bmatrix}\mu\nu\\ \alpha\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}\alpha\beta\\ \beta\end{Bmatrix} \\ & = -\kappa\left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}T\right). \end{aligned} \tag{2}$$

$T_{\mu\nu}$ è il tensore d'energia-impulso della materia, T il corrispondente scalare $\sum_{\alpha\beta} g^{\alpha\beta}T_{\alpha\beta}$. Se indichiamo come grandezze piccole di ordine n quelle che siano di grado n in $\gamma_{\mu\nu}$, quando nel calcolo dei due membri dell'equazione (2) ci si limiti ai termini di ordine più basso, si ottiene il sistema di equazioni approssimate

(2a)
$$\sum_\alpha \left(\frac{\partial^2\gamma_{\mu\nu}}{\partial x_\alpha^2} + \frac{\partial^2\gamma_{\alpha\alpha}}{\partial x_\mu \partial x_\nu} - \frac{\partial^2\gamma_{\mu\alpha}}{\partial x_\nu \partial x_\alpha} - \frac{\partial^2\gamma_{\nu\alpha}}{\partial x_\mu \partial x_\alpha}\right) = 2\kappa\left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\delta_{\mu\nu}\sum_\alpha T_{\alpha\alpha}\right).$$

---

[1] Über Gravitationswellen, Sitz. Preuss. Akad. Wiss. **8**, 154-167 (1918).
[2] Tradotto in collaborazione con L. Mihich.
[3] Queste Sitzungsber. 1916, p. 688 e segg..
[4] Prescindiamo qui dall'introduzione del "termine λ" (vedi queste Sitzungsber. 1916, p. 142 e segg.).

Se si moltiplica questa equazione per $-(1/2)\,\delta_{\mu\nu}$ e si somma su μ e ν, si ottiene subito (cambiando nome agli indici) l'equazione scalare

$$\sum_{\alpha\beta}\left(-\frac{\partial^2\gamma_{\alpha\alpha}}{\partial x_\beta^2}+\frac{\partial^2\gamma_{\alpha\beta}}{\partial x_\alpha \partial x_\beta}\right)=\kappa\sum_\alpha T_{\alpha\alpha}.$$

Se sommiamo questa equazione, moltiplicata per $\delta_{\mu\nu}$, all'equazione (2a), si elimina subito il secondo termine del secondo membro di quest'ultima. Il primo membro si può scrivere in modo chiaro, quando si introducano al posto dei $\gamma_{\mu\nu}$ le funzioni

$$\gamma'_{\mu\nu}=\gamma_{\mu\nu}-\frac{1}{2}\delta_{\mu\nu}\sum_\alpha \gamma_{\alpha\alpha}. \tag{3}$$

L'equazione assume allora la forma:

$$\sum_\alpha \frac{\partial^2\gamma'_{\mu\nu}}{\partial x_\alpha^2}-\sum_\alpha \frac{\partial^2\gamma'_{\mu\alpha}}{\partial x_\nu \partial x_\alpha}-\sum_\alpha \frac{\partial^2\gamma'_{\nu\alpha}}{\partial x_\mu \partial x_\alpha}+\delta_{\mu\nu}\sum_{\alpha\beta}\frac{\partial^2\gamma'_{\alpha\beta}}{\partial x_\alpha \partial x_\beta}=2\kappa T_{\mu\nu}. \tag{4}$$

Queste equazioni però si possono semplificare notevolmente imponendo ai $\gamma'_{\mu\nu}$ che essi, oltre alle equazioni (4), debbano soddisfare le relazioni

$$\sum_\alpha \frac{\partial \gamma'_{\mu\alpha}}{\partial x_\alpha}=0. \tag{5}$$

A prima vista può sembrare strano che le 10 equazioni (4) per le 10 funzioni $\gamma'_{\mu\nu}$ possano essere affiancate arbitrariamente da altre quattro, senza che intervenga una sovradeterminazione. Ma la giustificazione di questo procedimento risulta chiara da quanto segue. Le equazioni (2) sono covarianti rispetto a sostituzioni arbitrarie, vale a dire sono soddisfatte per una scelta arbitraria del sistema di coordinate. Se introduco un nuovo sistema di coordinate i $g_{\mu\nu}$ del nuovo sistema dipendono dalle 4 funzioni arbitrarie che definiscono la trasformazione delle coordinate. Ora queste 4 funzioni possono essere scelte in modo tale che i $g_{\mu\nu}$ del nuovo sistema soddisfino quattro relazioni prescritte arbitrariamente. Pensiamole scelte in modo tale che nel caso dell'approssimazione che ci interessa coincidano con le equazioni (5). Queste ultime significano quindi una prescrizione da noi scelta secondo la quale va scelto il sistema di coordinate. Grazie alla (5) si ottengono in luogo delle (4) le semplici equazioni

$$\sum_\alpha \frac{\partial^2\gamma'_{\mu\nu}}{\partial x_\alpha^2}=2\kappa T_{\mu\nu}. \tag{6}$$

Dalle (6) si riconosce che il campo gravitazionale si propaga con la velocità della luce. I $\gamma_{\mu\nu}$ si possono calcolare, dati i $T_{\mu\nu}$, a partire da questi ultimi con il metodo dei potenziali ritardati. Siano x, y, z, x_4/i le coordinate reali del punto potenziato, per il quale si debbano calcolare i $\gamma'_{\mu\nu}$, x_0, y_0, z_0 le coordinate spaziali di un elemento di spazio dV_0, r la distanza spaziale tra quest'ultimo e il punto potenziato; si ha allora

$$\gamma'_{\mu\nu}=-\frac{\kappa}{2\pi}\int \frac{T_{\mu\nu}\,(x_0,y_0,z_0,t-r)}{r}dV_0. \tag{7}$$

§2. Le componenti dell'energia del campo gravitazionale.

Ho precedentemente[5] dato in forma esplicita le componenti dell'energia del campo gravitazionale nel caso in cui la scelta delle coordinate soddisfi la condizione

$$g = |g_{\mu\nu}| = 1,$$

che nel caso dell'approssimazione qui trattata si scriverebbe

$$\gamma = \sum_{\alpha} \gamma_{\alpha\alpha} = 0.$$

Questa però nel caso della nostra attuale scelta delle coordinate non è in generale soddisfatta. È perciò più semplice ottenere qui le componenti dell'energia con una trattazione a parte.

Occorre però tener presente la seguente difficoltà. Le nostre equazioni di campo (6) sono corrette solo al primo ordine, mentre le equazioni dell'energia - come è facile concludere - sono piccole al secondo ordine. Arriviamo però comodamente allo scopo con il procedimento seguente. Le componenti d'energia $\mathfrak{T}_\mu^\tau$ (della materia) e $\mathfrak{t}_\mu^\tau$ (del campo gravitazionale) secondo la teoria generale soddisfano le relazioni

$$\sum_{\sigma} \frac{\partial \mathfrak{T}_\mu^\sigma}{\partial x_\sigma} + \frac{1}{2} \sum_{\rho\sigma} \frac{\partial g^{\rho\sigma}}{\partial x_\mu} \mathfrak{T}_{\rho\sigma} = 0$$

$$\sum_{\sigma} \frac{\partial \left(\mathfrak{T}_\mu^\sigma + \mathfrak{t}_\mu^\sigma \right)}{\partial x_\sigma} = 0.$$

Da queste segue

$$\sum_{\sigma} \frac{\partial \mathfrak{t}_\mu^\sigma}{\partial x_\sigma} = \frac{1}{2} \sum_{\rho\sigma} \frac{\partial g^{\rho\sigma}}{\partial x_\mu} \mathfrak{T}_{\rho\sigma}.$$

Se portiamo il secondo membro, nel quale traiamo $\mathfrak{T}_{\rho\sigma}$ dalle equazioni di campo, nella forma del primo membro, otterremo i $\mathfrak{t}_\mu^\sigma$. Al secondo membro di questa equazione, nel caso dell'approssimazione trattata da noi, ambedue i fattori sono quantità piccole al primo ordine. Quindi per ottenere i $\mathfrak{t}_\mu^\sigma$ come quantità del secondo ordine, basta sostituire i due fattori al secondo membro con quantità del prim'ordine. Si possono quindi sostituire

$$\frac{\partial g^{\rho\sigma}}{\partial x_\mu} \text{ con } -\frac{\partial \gamma_{\rho\sigma}}{\partial x_\mu}$$

$$\text{e } \mathfrak{T}_{\rho\sigma} \text{ con } T_{\rho\sigma}.$$

Invece dei $\mathfrak{t}_\mu^\sigma$, introduciamo poi le quantità $t_{\rho\sigma}$, analoghe per quanto riguarda i caratteri degli indici a $T_{\rho\sigma}$, che per il grado di approssimazione qui richiesta differiscono dai $\mathfrak{t}_\sigma^\rho$ solo per il segno. Dobbiamo allora calcolare i $t_{\mu\sigma}$ con l'equazione

$$\sum_{\sigma} \frac{\partial t_{\mu\sigma}}{\partial x_\sigma} = \frac{1}{2} \sum_{\rho\sigma} \frac{\partial \gamma_{\rho\sigma}}{\partial x_\mu} T_{\rho\sigma}. \tag{8}$$

[5] Ann. d. Phys. **49**, 1916. Equazione (50).

Per sviluppare il secondo membro teniamo conto che per la (3) si deve porre

$$\gamma_{\mu\nu} = \gamma'_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\delta_{\mu\nu}\sum_\alpha \gamma'_{\alpha\alpha} = \gamma'_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\delta_{\mu\nu}\gamma', \tag{3a}$$

ed esprimiamo $T_{\rho\sigma}$ mediante i $\gamma'_{\rho\sigma}$ secondo la (6). Con una semplice sviluppo risulta[6]

$$\sum_\sigma \frac{\partial t_{\mu\sigma}}{\partial x_\sigma} = \sum_\sigma \frac{\partial}{\partial x_\sigma}\left[\frac{1}{4\kappa}\left(\sum_{\alpha\beta}\left(\frac{\partial\gamma'_{\alpha\beta}}{\partial x_\mu}\frac{\partial\gamma'_{\alpha\beta}}{\partial x_\sigma}\right) - \frac{1}{2}\frac{\partial\gamma'}{\partial x_\mu}\frac{\partial\gamma'}{\partial x_\sigma}\right)\right]$$
$$- \frac{1}{8\kappa}\sum_\sigma \frac{\partial}{\partial x_\sigma}\left[\delta_{\mu\sigma}\left(\sum_{\alpha\beta\lambda}\left(\frac{\partial\gamma'_{\alpha\beta}}{\partial x_\lambda}\right)^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\gamma'}{\partial x_\lambda}\right)^2\right)\right].$$

Da ciò segue che possiamo soddisfare la legge dell'energia se poniamo

$$\begin{aligned} 4\kappa t_{\mu\sigma} = &\left(\sum_{\alpha\beta}\left(\frac{\partial\gamma'_{\alpha\beta}}{\partial x_\mu}\frac{\partial\gamma'_{\alpha\beta}}{\partial x_\sigma}\right) - \frac{1}{2}\frac{\partial\gamma'}{\partial x_\mu}\frac{\partial\gamma'}{\partial x_\sigma}\right) \\ &- \frac{1}{2}\delta_{\mu\sigma}\left(\sum_{\alpha\beta\lambda}\left(\frac{\partial\gamma'_{\alpha\beta}}{\partial x_\lambda}\right)^2 - \frac{1}{2}\sum_\lambda\left(\frac{\partial\gamma'}{\partial x_\lambda}\right)^2\right). \end{aligned} \tag{9}$$

Ci si chiarisce il significato fisico di $t_{\mu\sigma}$ nel modo più semplice con il seguente ragionamento. I $t_{\mu\sigma}$ sono per il campo di gravitazione ciò che i $T_{\mu\sigma}$ sono per la materia. Ma per la materia ponderabile incoerente si ha, limitandosi a quantità del primo ordine:

$$T_{\mu\sigma} = T^{\mu\sigma} = \rho\frac{dx_\mu}{ds}\frac{dx_\sigma}{ds} \quad \left(ds^2 = -\sum_\nu dx_\nu^2\right), \tag{10}$$

dove ρ è lo scalare densità della materia. T_{11}, $T_{12} \ldots T_{33}$ esprimono quindi componenti degli sforzi; T_{14}, T_{24}, T_{34} e rispettivamente T_{41}, T_{42}, T_{43} sono il vettore densità di impulso ovvero densità della corrente d'energia moltiplicato per $\sqrt{-1}$, T_{44} la densità di energia cambiata di segno. Analoga è l'interpretazione dei $t_{\mu\sigma}$ che si riferiscono al campo gravitazionale.

Come esempio si tratti in primo luogo il campo di una massa puntiforme M a riposo. Dalla (7) e dalla (10) discende

$$\gamma'_{44} = \frac{\kappa}{2\pi}\frac{M}{r}, \tag{11}$$

mentre tutti gli altri $\gamma'_{\mu\nu}$ si annullano. Si ottengono per i $g_{\mu\nu}$ secondo le (11), (3a) e (1) i valori determinati per primo da De Sitter

$$\begin{pmatrix} -1 - \frac{\kappa}{4\pi}\frac{M}{r} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 - \frac{\kappa}{4\pi}\frac{M}{r} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 - \frac{\kappa}{4\pi}\frac{M}{r} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 + \frac{\kappa}{4\pi}\frac{M}{r} \end{pmatrix}. \tag{11a}$$

[6] L'errore prima menzionato nella mia precedente dissertazione consiste nel fatto che al secondo membro della (8) avevo posto $\frac{\partial\gamma'_{\rho\sigma}}{\partial x_\mu}$ invece di $\frac{\partial\gamma_{\rho\sigma}}{\partial x_\mu}$ Questo errore rende necessaria una rielaborazione del §2 e del §3 di quel lavoro.

La velocità della luce c, che in generale è data dall'equazione

$$0 = ds^2 = \sum_{\mu\nu} g_{\mu\nu} dx_\mu dx_\nu,$$

risulta qui dalla relazione

$$\left(1 + \frac{\kappa}{4\pi}\frac{M}{r}\right)\left(dx^2 + dy^2 + dz^2\right) - \left(1 - \frac{\kappa}{4\pi}\frac{M}{r}\right) dt^2 = 0.$$

Quindi la velocità della luce

$$c = \sqrt{\frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{dt^2}} = 1 - \frac{\kappa}{4\pi}\frac{M}{r} \tag{12}$$

con la scelta delle coordinate da noi fatta dipende solo dalla posizione, non dalla direzione. Inoltre risulta dalla (11a) che piccoli corpi rigidi per variazione della posizione rimangono simili a se stessi, mentre la loro estensione lineare misurata in coordinate varia come $\left(1 - \frac{\kappa}{8\pi}\frac{M}{r}\right)$.

L'equazione (9) dà per i $t_{\mu\sigma}$ nel nostro caso

$$\begin{aligned} t_{\mu\sigma} &= \frac{\kappa M^2}{32\pi^2}\left(\frac{x_\mu x_\sigma}{r^6} - \frac{1}{2}\delta_{\mu\sigma}\frac{1}{r^4}\right) \text{ (per gli indici 1 - 3)} \\ t_{14} &= t_{24} = t_{34} = 0 \\ t_{44} &= -\frac{\kappa M^2}{64\pi^2}\cdot\frac{1}{r^4} \end{aligned} \tag{13}$$

I valori per i $t_{\mu\sigma}$ dipendono completamente dalla scelta delle coordinate, cosa che mi ha fatto notare già da tempo per lettera il sig. G . Nordström[7]. Con scelta delle coordinate conforme alla condizione $|g| = 1$, per la quale io nel caso della massa puntiforme ho precedentemente ottenuto le espressioni

$$\begin{aligned} g_{\mu\sigma} &= -\delta_{\mu\sigma} - \frac{\kappa M}{4\pi}\frac{x_\mu x_\sigma}{r^3} \text{ (indici 1 - 3)} \\ g_{14} &= g_{24} = g_{34} = 0 \\ g_{44} &= 1 - \frac{\kappa}{4\pi}\frac{M}{r}, \end{aligned}$$

tutte le componenti dell'energia del campo gravitazionale si annullano, se si calcolano fino al second'ordine con la formula

$$\kappa t_\sigma^\alpha = \frac{1}{2}\delta_\sigma^\alpha \sum_{\mu\nu\lambda\beta} g^{\mu\nu} \left\{ \begin{matrix} \mu\lambda \\ \beta \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} \nu\beta \\ \lambda \end{matrix} \right\} - \sum_{\mu\nu\lambda} g^{\mu\nu} \left\{ \begin{matrix} \mu\lambda \\ \alpha \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} \nu\sigma \\ \lambda \end{matrix} \right\}.$$

Si potrebbe sospettare che con opportuna scelta del sistema di riferimento sarebbe forse possibile portare a zero tutte le componenti dell'energia del campo gravitazionale, cosa che sarebbe assai notevole. Ma si può dimostrare facilmente che ciò non è vero in generale.

[7] Vedi anche E. Schrödinger, Phys. Zeitschr. 1918, I. p. 4.

§3. L'onda gravitazionale piana.

Per trovare le onde gravitazionali piane proponiamo di soddisfare le equazioni di campo (6) con

$$\gamma'_{\mu\nu} = \alpha_{\mu\nu} f\,(x_1 + ix_4)\,. \tag{14}$$

Gli $\alpha_{\mu\nu}$ rappresentano costanti reali, f una funzione reale di $(x_1 + ix_4)$. Le equazioni (5) danno le relazioni

$$\begin{aligned} \alpha_{11} + i\alpha_{14} &= 0 \\ \alpha_{21} + i\alpha_{24} &= 0 \\ \alpha_{31} + i\alpha_{34} &= 0 \\ \alpha_{41} + i\alpha_{44} &= 0 \end{aligned}\,. \tag{15}$$

Se le condizioni (15) sono soddisfatte, la (14) rappresenta una possibile onda gravitazionale. Per capire più a fondo la sua natura fisica, calcoliamo la sua densità di corrente d'energia t_{41}/i. Sostituendo i $\gamma'_{\mu\nu}$ dati dalla (15) nell'equazione (9) si ottiene

$$\frac{t_{41}}{i} = \frac{1}{4\kappa} f'^2 \left[\left(\frac{\alpha_{22} - \alpha_{33}}{2} \right)^2 + \alpha_{23}^2 \right]. \tag{16}$$

La singolarità di questo risultato consiste nel fatto che delle sei costanti arbitrarie che (tenendo conto della (15)) intervengono nella (14), solo due compaiono nella (16). Un'onda per la quale $\alpha_{22} - \alpha_{33}$ e α_{23} siano nulli non trasporta alcuna energia. Questa circostanza si può ricondurre al fatto che una tale onda in un certo senso non ha nessuna esistenza reale, come risulta nel modo più semplice dal ragionamento seguente.

Notiamo in primo luogo che, tenendo conto della (15), lo schema dei coefficienti degli $\alpha_{\mu\nu}$ per un'onda priva di energia è il seguente:

$$(\alpha_{\mu\nu} =) \begin{matrix} \alpha & \beta & \gamma & i\alpha \\ \beta & \delta & 0 & i\beta \\ \gamma & 0 & \delta & i\gamma \\ i\alpha & i\beta & i\gamma & -\alpha \end{matrix}\,, \tag{17}$$

dove α, β, γ, δ indicano quattro numeri che si possono scegliere indipendentemente l'uno dall'altro.

Si consideri ora uno spazio privo di campi, il cui elemento di linea ds riferito a un sistema di coordinate scelto opportunamente (x'_1, x'_2, x'_3, x'_4) si possa scrivere nella forma

$$-ds^2 = dx'^2_1 + dx'^2_2 + dx'^2_3 + dx'^2_4. \tag{18}$$

Introduciamo ora nuove coordinate x_1, x_2, x_3, x_4 sulla base della sostituzione

$$x'_\nu = x_\nu - \lambda_\nu \phi\,(x_1 + ix_4)\,. \tag{19}$$

I λ_ν indicano quattro costanti reali infinitesime, ϕ_ν una funzione reale dell'argomento $(x_1 + ix_4)$. Dalla (18) e dalla (19) segue, quando si trascurino quantità del secondo ordine rispetto a λ,

$$ds^2 = -\sum_\nu dx'^2_\nu = -\sum_\nu dx^2_\nu + 2\phi'(dx_1 + idx_4)\sum_\nu \lambda_\nu dx_\nu.$$

Da qui risultano per i corrispondenti $\gamma_{\mu\nu}$ i valori

$$\left(\frac{1}{\phi'}\gamma_{\mu\nu} =\right) \begin{matrix} 2\lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & i\lambda_1 + \lambda_4 \\ \lambda_2 & 0 & 0 & i\lambda_2 \\ \lambda_3 & 0 & 0 & i\lambda_3 \\ i\lambda_1 + \lambda_4 & i\lambda_2 & i\lambda_3 & 2i\lambda_4 \end{matrix}$$

e quindi per i $\gamma'_{\mu\nu}$

$$\left(\frac{1}{\phi'}\gamma'_{\mu\nu} =\right) \begin{matrix} \lambda_1 - i\lambda_4 & \lambda_2 & \lambda_3 & i\lambda_1 + \lambda_4 \\ \lambda_2 & -\lambda_1 - i\lambda_4 & 0 & i\lambda_2 \\ \lambda_3 & 0 & -\lambda_1 - i\lambda_4 & i\lambda_3 \\ i\lambda_2 + \lambda_4 & i\lambda_2 & i\lambda_3 & -\lambda_1 + i\lambda_4 \end{matrix}. \tag{20}$$

Se inoltre imponiamo che la funzione ϕ nella (19) sia legata alla funzione f nella (14) dalla relazione

$$\phi' = f, \tag{21}$$

risulta che, a meno del segno delle costanti, i $\gamma'_{\mu\nu}$ della (20) coincidono con i $\gamma'_{\mu\nu}$ delle (14) e (17).

Le onde gravitazionali che non trasportano energia si possono quindi generare a partire da un sistema privo di campi mediante una pura trasformazione di coordinate; la loro esistenza è (in questo senso) solo apparente. In senso proprio sono quindi reali solo quelle onde che procedono lungo l'asse x, che corrispondono a una propagazione delle quantità $\frac{\gamma'_{22}-\gamma'_{33}}{2}$ e γ'_{23} (ovvero delle quantità $\frac{\gamma_{22}-\gamma_{33}}{2}$ e γ_{23}). Questi due tipi non si differenziano tra di loro per la natura, ma solo per l'orientazione. Il campo d'onda dà luogo a deformazioni degli angoli nel piano ortogonale alla direzione di propagazione. Le densità della corrente d'energia, dell'impulso e dell'energia sono dati dalla (16).

§4. L'emissione di onde gravitazionali da parte di un sistema meccanico.

Consideriamo un sistema meccanico isolato, il cui baricentro coincida permanentemente con l'origine delle coordinate. Le variazioni che si verificano nel sistema siano così lente e la sua estensione spaziale sia così piccola, che il tempo-luce corrispondente alla distanza tra due punti materiali qualsiasi del sistema possa essere considerato infinitamente piccolo. Studiamo le onde gravitazionali inviate dal sistema nella direzione dell'asse x positivo.

L'ultima delle condizioni suddette comporta che per una distanza R abbastanza grande del punto potenziato dall'origine delle coordinate possiamo sostituire al posto della (7) l'equazione

$$\gamma'_{\mu\nu} = -\frac{\kappa}{2\pi R}\int T_{\mu\nu}(x_0, y_0, z_0, t - R)\, dV_0. \tag{7a}$$

Possiamo limitarci a considerare onde che trasportino energia; dobbiamo quindi, secondo i risultati del §3, costruire solo le componenti γ'_{23} e $(1/2)(\gamma'_{22} - \gamma'_{33})$. Gli integrali spaziali che compaiono al secondo membro della (7a) si possono sviluppare in un modo escogitato da M. Laue. Daremo qui esplicitamente solo il calcolo dell'integrale

$$\int T_{23} dV_0.$$

Se moltiplichiamo le due equazioni dell'impulso

$$\frac{\partial T_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial T_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial T_{23}}{\partial x_3} + \frac{\partial T_{24}}{\partial x_4} = \sigma,$$
$$\frac{\partial T_{31}}{\partial x_1} + \frac{\partial T_{32}}{\partial x_2} + \frac{\partial T_{33}}{\partial x_3} + \frac{\partial T_{34}}{\partial x_4} = \sigma$$

rispettivamente per $x_3/2$ e per $x_2/2$, le integriamo su tutto il sistema materiale e le sommiamo, si ottiene dopo una semplice trasformazione con integrazione per parti

$$-\int T_{23} dV_0 + \frac{1}{2}\frac{d}{dx_4}\left\{\int (x_3 T_{24} + x_2 T_{34})\, dV_0\right\} = 0.$$

Trasformiamo di nuovo l'ultimo integrale mediante l'equazione dell'energia

$$\frac{\partial T_{41}}{\partial x_1} + \frac{\partial T_{42}}{\partial x_2} + \frac{\partial T_{43}}{\partial x_3} + \frac{\partial T_{44}}{\partial x_4} = 0,$$

moltiplicando questa per $\frac{1}{2} x_2 x_3$, integrando e sviluppando con integrazione per parti. Otteniamo

$$-\frac{1}{2}\int (x_3 T_{42} + x_2 T_{43})\, dV_0 + \frac{1}{2}\frac{d}{dx_4}\left\{\int x_2 x_3 T_{44} dV_0\right\} = 0.$$

Se si sostituisce questa nell'equazione precedente si ottiene

$$\int T_{23} dV_0 = \frac{1}{2}\frac{d^2}{dx_4^2}\left\{\int x_2 x_3 T_{44} dV_0\right\},$$

ovvero, poiché $\frac{d^2}{dx_4^2}$ va sostituito da $-\frac{d^2}{dt^2}$, T_{44} dalla densità cambiata di segno $(-\rho)$ della materia:

(22) $$\int T_{23} dV_0 = \frac{1}{2}\ddot{\mathfrak{J}}_{23}.$$

Si è introdotta l'abbreviazione

(23) $$\mathfrak{J}_{\mu\nu} = \int x_\mu x_\nu \rho dV_0;$$

$\mathfrak{J}_{\mu\nu}$ sono le componenti del momento d'inerzia (variabile nel tempo) del sistema materiale. In modo analogo si ottiene

(24) $$\int (T_{22} - T_{33})\, dV_0 = \frac{1}{2}\left(\ddot{\mathfrak{J}}_{22} - \ddot{\mathfrak{J}}_{33}\right).$$

Dalla (7a) risulta, tenendo conto delle (22) e (24)

$$\gamma'_{23} = -\frac{\kappa}{4\pi R}\ddot{\mathfrak{J}}_{23}, \tag{25}$$

$$\frac{\gamma'_{22}-\gamma'_{33}}{2} = -\frac{\kappa}{4\pi R}\left(\frac{\ddot{\mathfrak{J}}_{22}-\ddot{\mathfrak{J}}_{33}}{2}\right). \tag{26}$$

Per le (7a), (22), (24) gli $\mathfrak{J}_{\mu\nu}$ vanno presi al tempo $t-R$, quindi come funzioni di $t-R$, o per R grandi in vicinanza dell'asse x anche come funzioni di $t-x$. La (25) e la (26) rappresentano perciò onde gravitazionali, il cui flusso d'energia lungo l'asse x possiede per la (16) la densità

$$\frac{t_{41}}{i} = \frac{\kappa}{64\pi^2 R^2}\left[\left(\frac{\dddot{\mathfrak{J}}_{22}-\dddot{\mathfrak{J}}_{33}}{2}\right)^2 + \dddot{\mathfrak{J}}_{23}^{\,2}\right]. \tag{27}$$

Occupiamoci ora del problema di calcolare la radiazione totale emessa dal sistema mediante onde gravitazionali. Per risolvere questo problema, ci domandiamo dapprima quale sia l'irraggiamento di energia del sistema meccanico considerato lungo la direzione fissata dai coseni direttori α_ν. Questo problema si può risolvere per trasformazione o più in breve riconducendosi al seguente problema formale.

Sia $A_{\mu\nu}$ un tensore simmetrico (in tre dimensioni), α_ν un vettore. Cerchiamo uno scalare S che sia una funzione omogenea di secondo grado di $A_{\mu\nu}$ e di α_ν, che si riduca per $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = \alpha_3 = 0$ alla forma

$$\left(\frac{A_{22}-A_{33}}{2}\right)^2 + A_{23}^2.$$

Lo scalare cercato sarà una funzione degli scalari $\sum_\mu A_{\mu\mu}$, $\sum_{\mu\nu} A_{\mu\nu}^2$, $\sum_{\mu\nu} A_{\mu\nu}\alpha_\mu\alpha_\nu$, $\sum_{\mu\sigma\tau} A_{\mu\sigma}A_{\mu\tau}\alpha_\sigma\alpha_\tau$. Tenendo conto del fatto che gli ultimi due scalari si riducono per $\alpha_\nu = (1,0,0)$ ad A_{11} e rispettivamente a $\sum_\mu A_{1\mu}^2$, si trova, dopo qualche ragionamento, che lo scalare cercato è

$$\begin{aligned} S = &-\frac{1}{4}\left(\sum A_{\mu\mu}\right)^2 + \frac{1}{2}\sum_\mu A_{\mu\mu}\sum_{\rho\sigma} A_{\rho\sigma}\alpha_\rho\alpha_\sigma + \frac{1}{4}\left(\sum_{\rho\sigma} A_{\rho\sigma}\alpha_\rho\alpha_\sigma\right)^2 \\ &+ \frac{1}{2}\sum_{\mu\nu} A_{\mu\nu}^2 - \sum_{\mu\sigma\tau} A_{\mu\sigma}A_{\mu\tau}\alpha_\sigma\alpha_\tau. \end{aligned} \tag{28}$$

È chiaro che S è la densità della radiazione gravitazionale uscente radialmente nella direzione $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$, quando si ponga

$$A_{\mu\nu} = \frac{\sqrt{\kappa}}{8\pi R}\dddot{\mathfrak{J}}_{\mu\nu}. \tag{29}$$

Se, tenendo fissi gli $A_{\mu\nu}$, si esegue la media di S lungo tutte le direzioni dello spazio, si ottiene la densità media $\bar{S}$ della radiazione emessa. $\bar{S}$ moltiplicata per

$4\pi R^2$ è infine la perdita di energia per unità di tempo del sistema meccanico mediante onde gravitazionali. Il calcolo dà

$$4\pi R^2 \bar{S} = \frac{\kappa}{80\pi} \left[\sum_{\mu\nu} \dddot{\mathfrak{J}}_{\mu\nu}^2 - \frac{1}{3} \left(\sum_{\mu} \dddot{\mathfrak{J}}_{\mu\mu} \right)^2 \right]. \tag{30}$$

Si vede da questo risultato che un sistema meccanico che conservi permanentemente la simmetria sferica non può irraggiare, in contrasto con il risultato raggiunto per un errore di calcolo della precedente nota.

Dalla (27) è chiaro che la radiazione uscente non può diventare negativa in nessuna direzione, quindi certamente anche la radiazione totale. Già nella precedente dissertazione è stato sottolineato come il risultato finale di questa trattazione, che consentirebbe una perdita di energia dei corpi a causa dell'agitazione termica, debba suscitare il dubbio sulla validità generale della teoria. Pare che una teoria quantistica compiuta dovrebbe portare a una modifica anche della teoria della gravitazione.

§5. Effetto di onde gravitazionali su sistemi meccanici

Per completezza considereremo anche brevemente in che senso l'energia di onde gravitazionali possa trasferirsi a sistemi meccanici. Si riconsideri un sistema meccanico del tipo studiato nel §4. Lo stesso subisca l'azione di un'onda gravitazionale di lunghezza d'onda grande rispetto all'estensione del sistema. Per poter determinare l'incremento di energia del sistema ci riallacciamo all'equazione dell'energia-impulso della materia

$$\sum_{\sigma} \frac{\partial \mathfrak{T}_\mu^\sigma}{\partial x_\sigma} + \frac{1}{2} \sum_{\rho\sigma} \frac{\partial g^{\rho\sigma}}{\partial x_\mu} \mathfrak{T}_{\rho\sigma} = 0.$$

Integriamo quest'equazione su tutto il sistema per x_4 costante e otteniamo per $\mu = 4$ (legge dell'energia)

$$\frac{d}{dx_4} \left\{ \int \mathfrak{T}_4^4 dV \right\} = -\frac{1}{2} \int dV \sum_{\rho\sigma} \frac{\partial g^{\rho\sigma}}{\partial x_4} \mathfrak{T}_{\rho\sigma}.$$

L'integrale del primo membro è l'energia E dell'intero sistema materiale. A primo membro compare quindi l'incremento temporale di questa energia. Se si esegue la derivazione rispetto al tempo reale, e al secondo membro ci si limita a ritenere i termini del secondo ordine di grandezza, si ottiene

$$\frac{dE}{dt} = \frac{1}{2} \int dV \sum_{\rho\sigma} \left(\frac{\partial \gamma_{\rho\sigma}}{\partial t} T_{\rho\sigma} \right). \tag{31}$$

Ora possiamo suddividere i $\gamma_{\rho\sigma}$ che rappresentano il campo gravitazionale in una parte corrispondente all'onda entrante $(\gamma_{\rho\sigma})_w$ e in una parte costante $(\gamma_{\rho\sigma})_v$, secondo l'equazione

$$\gamma_{\rho\sigma} = (\gamma_{\rho\sigma})_w + (\gamma_{\rho\sigma})_v\,. \tag{32}$$

In questo modo l'integrale del secondo membro della (31) si suddivide in una somma di due integrali, dei quali il primo esprime l'incremento di energia che deriva dall'onda. Solo di questo ci interessiamo qui; pertanto, per non complicare la notazione, interpreteremo la (31) nel senso che $\frac{dE}{dt}$ indicherà solo l'incremento di energia che deriva dall'onda e $\gamma_{\rho\sigma}$ la parte indicata sopra con $(\gamma_{\rho\sigma})_w$. Poichè $\gamma_{\rho\sigma}$ è una funzione della posizione lentamente variabile si può porre

$$\frac{dE}{dt} = \frac{1}{2} \sum_{\rho\sigma} \frac{\partial \gamma_{\rho\sigma}}{\partial t} \cdot \int T_{\rho\sigma} dV. \tag{33}$$

Sia l'onda agente una che trasporti energia, nella quale solo la componente $\gamma_{23} (= \gamma'_{23})$ del campo gravitazionale sia diversa da zero. Allora si ha per la (22)

$$\frac{dE}{dt} = \frac{1}{2} \frac{\partial \gamma_{23}}{\partial t} \frac{d^2 \mathfrak{J}_{23}}{dt^2}. \tag{34}$$

Per una determinata onda e per un determinato processo meccanico si può quindi calcolare per integrazione l'energia ceduta dall'onda.

§6. Risposta a un'obiezione sollevata dal sig. Levi-Civita.

Negli ultimi tempi in una serie di studi interessanti il sig. Levi-Civita ha contribuito al chiarimento di problemi della teoria della relatività generale. In uno di questi lavori[8] egli sostiene riguardo alle leggi di conservazione un punto di vista che si discosta dal mio e contesta sulla base di questo suo punto di vista la correttezza delle mie conclusioni circa l'irraggiamento di energia tramite onde gravitazionali. Sebbene nel frattempo con uno scambio di lettere abbiamo chiarito il problema in un modo sufficiente per entrambi, ritengo tuttavia opportuno, per l'interesse della questione, aggiungere qui alcune osservazioni generali sulle leggi di conservazione.

Si ammette in generale che, in conformità ai fondamenti della teoria della relatività generale, esista una tetraequazione valida per una scelta arbitraria del sistema di riferimento della forma

$$\sum_{\nu} \frac{\partial \left(\mathfrak{T}_\sigma^\nu + \mathfrak{t}_\sigma^\nu \right)}{\partial x_\nu} = 0 \ (\sigma = 1{,}2{,}3{,}4), \tag{35}$$

dove i $\mathfrak{T}_\sigma^\nu$ sono le componenti dell'energia della materia, i $\mathfrak{t}_\sigma^\nu$ sono funzioni dei $g_{\mu\nu}$ e delle loro derivate prime. Ma sussistono divergenze d'opinione sul fatto che si debbano assumere i $\mathfrak{t}_\sigma^\nu$ come le componenti dell'energia del campo gravitazionale. Questa divergenza la considero irrilevante, una pura questione di parole. Sostengo tuttavia che l'equazione anzidetta e non controversa comporti quelle semplificazioni della visione d'assieme, che costituiscono il pregio delle leggi di conservazione. Questo è evidente nel caso della quarta equazione ($\sigma = 4$), che io uso indicare come equazione dell'energia.

Sia dato un sistema materiale limitato spazialmente, fuori dal quale densità di materia e intensità dei campi elettromagnetici siano nulle. Raffiguriamoci una

[8] Accademia dei Lincei, Vol. XXVI, seduta del 1° aprile 1917.

superficie a riposo S che racchiuda l'intero sistema materiale. Si ottiene allora per integrazione della quarta equazione sullo spazio racchiuso da S:

$$(36)\quad -\frac{d}{dx_4}\left\{\int \left(\mathfrak{T}_4^4 + \mathfrak{t}_4^4\right) dV\right\} = \int \left(\mathfrak{t}_4^1 \cos(nx_1) + \mathfrak{t}_4^2 \cos(nx_2) + \mathfrak{t}_4^3 \cos(nx_3)\right) d\sigma.$$

Nessuno può essere costretto per un qualche motivo a designare $\mathfrak{t}_4^4$ come densità d'energia del campo gravitazionale e $(\mathfrak{t}_4^1, \mathfrak{t}_4^2, \mathfrak{t}_4^3)$ come componenti del flusso d'energia gravitazionale. Ma si può sostenere quanto segue: quando l'integrale spaziale di $\mathfrak{t}_4^4$ è piccolo rispetto a quello della densità di energia "materiale" $\mathfrak{T}_4^4$, il secondo membro rappresenta sicuramente la perdita in energia materiale del sistema. Solo questo è ciò che è stato usato nella dissertazione presente sulle onde gravitazionali, e nella mia precedente.

Il sig. Levi-Civita (e prima di lui con minor forza anche H. A. Lorentz) ha proposto una formulazione delle leggi di conservazione che si discosta dalla (35). Egli (e con lui anche altri colleghi) è contrario a dare rilevanza all'equazione (35) e contrario alla suddetta interpretazione, poiché i $\mathfrak{t}_\sigma^\mu$ non costituiscono un tensore. Questo lo si ammette; ma non capisco perché si debba attribuire significato fisico solo a quelle quantità che abbiano le proprietà di trasformazione delle componenti di un tensore. Necessario è soltanto che il sistema di equazioni valga per ogni scelta del sistema di riferimento, come succede per il sistema di equazioni (35). Levi-Civita propone la seguente formulazione della legge d'energia-impulso. Egli scrive le equazioni di campo della gravitazione nella forma

$$(37)\qquad T_{im} + A_{im} = 0,$$

dove T_{im} è il tensore d'energia della materia e A_{im} è un tensore covariante, che dipende dai $g_{\mu\nu}$ e dalle loro prime due derivate rispetto alle coordinate. Gli A_{im} sono designati come le componenti dell'energia del campo gravitazionale.

Una obiezione logica contro una siffatta denominazione non può naturalmente essere sollevata. Ma trovo che dall'equazione (37) non possano esser tratte conclusioni del tipo di quelle che siamo abituati a trarre dalle leggi di conservazione. Ciò dipende dal fatto che per la (37) le componenti dell'energia totale sono nulle ovunque. Le equazioni (37) non escludono per esempio (a differenza delle equazioni (35)) che un sistema materiale si dissolva completamente nel nulla, senza lasciare una traccia. Infatti la sua energia totale è per la (37) (ma non per la (35)) uguale a zero sin dall'inizio; la conservazione di questi valori dell'energia non richiede l'esistenza permanente del sistema in una qualche forma.

Comunicato il 21 Febbraio.

Principî della teoria della relatività generale[1]

A. Einstein

Una serie di pubblicazioni degli ultimi tempi, in particolare l'acuto lavoro di Kretschmann apparso di recente su questi Annali nel volume 53, fascicolo 16, mi inducono a ritornare ancora una volta sui fondamenti della relatività generale. Il mio scopo è perciò di esporre esclusivamente le idee di base, assumendo la teoria come nota.

La teoria, come ora mi sta dinnanzi, si fonda su tre punti di vista principali, che d'altronde non sono affatto indipendenti tra loro. Essi sono riportati e caratterizzati in breve nel seguito, e in quanto segue illustrati sotto alcuni aspetti:

a) *Principio di relatività:* Le leggi di natura sono solo affermazioni su coincidenze spaziotemporali; esse trovano quindi la loro sola espressione naturale in equazioni generalmente covarianti.

b) *Principio di equivalenza:* L' inerzia e la gravitazione sono della stessa natura. Da qui e dai risultati della teoria della relatività speciale segue necessariamente che il "tensore fondamentale" simmetrico $(g_{\mu\nu})$ determina le proprietà metriche dello spazio, il comportamento inerziale dei corpi in esso, come pure le azioni gravitazionali. Designeremo come "campo G" la condizione dello spazio descritta dal tensore fondamentale.

c) *Principio di Mach:*[2] il campo G è *completamente* determinato dalle masse dei corpi. Poiché massa ed energia sono secondo i risultati della teoria della relatività speciale la stessa cosa, e l'energia è descritta formalmente dal tensore d'energia simmetrico $(T_{\mu\nu})$, ciò significa che il campo G è fissato e determinato dal tensore d'energia della materia.

Riguardo ad a) Kretschmann osserva come il principio di relatività così formulato non sia alcuna affermazione sulla realtà fisica, cioè sul *contenuto* delle leggi naturali, ma solo un postulato relativo alla *formulazione* matematica. Poiché infatti l'esperienza fisica complessiva si riferisce solo a coincidenze, dev'essere sempre possibile rappresentare esperienze sul complesso stabilito da leggi di queste coincidenze mediante equazioni generalmente covarianti. Risulta pertanto necessario collegare un altro significato al postulato di relatività. Ritengo che l'argomento di Kretschmann sia giusto, tuttavia non ritengo raccomandabile l'innovazione da lui proposta. Sebbene infatti sia giusto che si debba poter portare ogni legge empirica in forma generalmente covariante, tuttavia il principio a) possiede una forza euristica significativa, che si è dimostrata splendidamente nel problema della gravitazione e che si fonda su quanto segue. Tra due sistemi teorici associabili con l'esperienza si dovrà preferire quello che dal punto di vista del calcolo differenziale assoluto sia il più facile e il più chiaro. Si provi a portare la meccanica della gravitazione di Newton nella forma di equazioni assolutamente covarianti (tetradimensionali) e ci si persuaderà sicuramente che il principio a) esclude questa teoria non teoricamente, ma in pratica!

Il principio b) ha costituito il punto di partenza dell'intera teoria e in primo luogo ha portato con sè l'affermazione del principio a); sicuramente non può essere

[1]Prinzipielles zur allgemeinen Relativitätstheorie, Annalen der Physik **55**, 241-244 (1918).

[2]Finora non ho tenuti distinti i due principi a) e c), cosa che tuttavia provocava confusione. Ho scelto il nome "Principio di Mach", poiché questo principio rappresenta un'estensione del postulato di Mach, che l'inerzia si debba poter ricondurre ad un'interazione dei corpi.

lasciato perdere, se ci si vuole attenere alle idee fondamentali del sistema teorico.

Altrimenti succede con il “principio di Mach” c); la necessità di attenersi ad esso non è affatto condivisa dagli altri colleghi, ma per mio conto io trovo il suo soddisfacimento incondizionatamente necessario. Per c) non dovrà esser possibile secondo le equazioni di campo della gravitazione alcun campo G senza materia. Il postulato c) si collega evidentemente nel modo più stretto al problema della struttura spaziotemporale dell'universo; all'instaurazione del campo G prenderan parte tutte le masse dell'universo.

Come equazioni generalmente covarianti della gravitazione ho proposto

$$G_{\mu\nu} = -k\left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}T\right), \tag{1}$$

dove si è posto per brevità

$$G_{\mu\nu} = \sum_{\sigma\tau} g^{\sigma\tau}\,(\mu\sigma, \tau\nu)\,.$$

Ma queste equazioni non soddisfano il postulato c); infatti esse consentono la soluzione

$$g_{\mu\nu} = \text{cost.}\quad (\text{per tutti i } \mu \text{ e } \nu),$$

$$T_{\mu\nu} = 0\quad (\text{per tutti i } \mu \text{ e } \nu).$$

Secondo le equazioni (1) sarebbe quindi pensabile, in contraddizione con il postulato di Mach, un campo G senza alcuna materia che lo generi.

Ma il postulato c) - per quanto mi consentono di capire gli studi finora fatti - è soddisfatto dalle equazioni di campo[3] costruite dalle (1) con l'introduzione del “termine λ”

$$G_{\mu\nu} - \lambda g_{\mu\nu} = -k\left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}T\right). \tag{2}$$

Un continuo spaziotemporale privo di singolarità, con un tensore d'energia della materia ovunque nullo, secondo la (2) non appare possibile. La soluzione della (2) più semplice pensabile è statica, un universo sferico ovvero ellittico nelle coordinate spaziali, con materia a riposo uniformemente distribuita. Si può così non solo *costruire con il pensiero* un universo che si conforma al postulato di Mach; ci si può immaginare anzi che il nostro universo reale sia approssimato dal suddetto universo sferico. In verità nel nostro universo la materia non è distribuita uniformemente, ma è concentrata in singoli corpi celesti non a riposo, ma impegnati in moti relativi (lenti rispetto alla velocità della luce). Tuttavia è ben possibile che la densità spaziale media della materia (“misurata naturalmente”), presa su spazi che comprendano moltissime stelle fisse, sia nell'universo una quantità pressoché costante. In questo caso le equazioni (1) *devono* essere completate mediante un termine aggiuntivo del carattere del termine λ; allora l'universo dev'essere chiuso in sé , e la sua geometria si discosta solo di poco e solo localmente da quella di uno spazio sferico ovvero ellittico, all'incirca come la forma della superficie terrestre si discosta da quella di un ellissoide.

(Ricevuto il 6 marzo 1918)

[3]Kosmologische Betrachtungen zur allgemeinen Relativitätstheorie. Berl. Ber. 1917, p. 142.

Discussione generale sulla teoria della relatività[1]

Lenard: mi ha fatto piacere che oggi in una teoria della gravitazione si debba parlare di etere. Ma devo dire che quando si passa dalla teoria della gravitazione a qualcosa d'altro rispetto alle forze proporzionali alle masse, la semplice intelligenza di uno studioso della natura si ribella alla teoria. Rimando all'esempio del treno frenato. Se vale il principio di relatività i campi gravitazionali devono essere estesi concettualmente con l'uso di forze non proporzionali alle masse. Vorrei dire che nel pensiero fisico ci si può servire di due modelli, che io ho indicato come modelli del primo e del secondo tipo. Con modelli del primo tipo parla per esempio Weyl, poiché egli esprime tutti i processi mediante equazioni. I modelli del secondo tipo interpretano le equazioni come processi nello spazio. Preferirei i modelli del secondo tipo, mentre Einstein resta attaccato a quelli del primo tipo. Nei modelli del secondo tipo l'etere è indispensabile. Esso è sempre stato uno degli strumenti più importanti per il progresso nello studio della natura, e la sua soppressione significa la soppressione delle idee di tutti coloro che studiano la natura con modelli del secondo tipo. Vorrei anzitutto porre la domanda: com'è, che secondo la teoria della relatività non dev'essere distinguibile, nel caso del treno frenato, se sia frenato il treno oppure se sia frenato il mondo circostante?

Einstein: è certo che noi possiamo osservare forze relativamente al treno e, se lo vogliamo, possiamo interpretarle come forze inerziali. La teoria della relatività le può interpretare egualmente bene come forze di un campo gravitazionale. Da dove viene ora il campo? Lei è dell'opinione che esso sia un'invenzione dei signori teorici della relatività. Ma non è affatto un'invenzione gratuita, poiché esso soddisfa le stesse leggi differenziali di quei campi che siamo abituati a comprendere come forze dovute alle masse. È giusto che qualcosa della soluzione rimanga arbitrario, quando si considera una parte limitata dell'universo. Il campo di gravitazione che agisce relativamente al treno frenato corrisponde a una forza di induzione che è prodotta dalle masse lontane. Posso quindi dire riassumendo in breve: il campo non è inventato arbitrariamente, poiché soddisfa le equazioni differenziali generali, e poiché si può ricondurre alle forze dovute a tutte le masse lontane.

Lenard: Le argomentazioni di Einstein non m'han detto niente di nuovo; inoltre esse non hanno superato l'abisso tra i modelli del primo tipo e i modelli intuitivi del secondo tipo. Ritengo che al campo gravitazionale esteso concettualmente debbano corrispondere dei processi, e questi processi non si sono presentati nell'esperienza.

Einstein: direi che ciò che l'uomo ritiene o non ritiene intuitivo è stato soggetto a cambiamenti. L'opinione sulla intuibilità è per così dire una funzione del tempo. Penso che la fisica sia concettuale e non intuitiva. Come esempio dei mutevoli punti di vista sull'intuibilità le ricordo le opinioni sull'intuibilità della meccanica di Galilei in tempi diversi.

Lenard: ho dato espressione nel lavoro a stampa "Principio di relatività, etere, gravitazione" alla mia opinione, che l'etere ha fallito in certe circostanze, poiché non lo si è ancora trattato nel modo giusto. Il principio di relatività lavora con uno spazio non euclideo, che ammette proprietà diverse da punto a punto e nel tempo; ma ci può ben essere nello spazio un qualcosa, lo stato del quale determina queste diverse proprietà, e questo qualcosa è proprio l'etere. Vedo l'utilità del principio

[1] Allgemeine Diskussion über Relativitätstheorie, Physik. Zeitschr. **21**, 666-668 (1920).

di relatività finché lo si applica soltanto alle forze gravitazionali. Per forze non proporzionali alle masse non lo ritengo valido.

Einstein: sta nella natura della cosa che si possa parlare di una validità del principio di relatività solo quando esso valga rispetto a *tutte* le leggi di natura.

Lenard: solo quando si ammettono campi appropriati. Intendo dire che il principio di relatività può dire cose nuove anche solo sulla gravitazione, mentre i campi di gravitazione che intervengono nel caso delle forze non proporzionali alle masse non introducono nessun nuovo punto di vista, ma consentono soltanto che il principio appaia valido. Ma l'equivalenza di tutti i sistemi di riferimento crea delle difficoltà al principio.

Einstein: non esiste nessun sistema di coordinate in linea di principio privilegiato per la sua semplicità; perciò non esiste nessun metodo per distinguere tra campi di gravitazione "reali" e "non reali". La mia seconda questione è: che cosa dice il principio di relatività riguardo all'esperimento concettuale non consentito, che consiste nel fatto che per esempio la terra sia ferma e il restante universo ruoti attorno all'asse terrestre, in modo che risultino velocità superiori a quelle della luce?

La prima affermazione non è un'asserzione gratuita, ma una definizione di tipo nuovo del concetto "etere".

Un esperimento concettuale è un esperimento realizzabile in linea di principio, anche se non di fatto. Esso serve a raccogliere in una visione d'insieme esperienze reali, in modo da trarre da queste conseguenze teoriche. Non consentito un esperimento concettuale lo è solo quando la sua esecuzione è *in linea di principio* impossibile.

Lenard: credo di poter riepilogare: 1. Che si farebbe meglio a smetterla di annunciare la "eliminazione dell'etere". 2. Che io ritengo pur sempre appropriata la restrizione del principio di relatività ad un principio di gravitazione, e 3., che le velocità superluminali appaiono procurare una difficoltà al principio di relatività; infatti esse appaiono nella relazione tra corpi qualsiansi, quando non si voglia descrivere solo quelli, ma l'intero universo, cosa che tuttavia il principio di relatività nella sua forma più semplice e precedente ammetteva come equivalente.

Rudolph: Il fatto che la teoria della relatività generale si sia brillantemente dimostrata vera non è una prova contro l'etere. La teoria di Einstein è giusta, è solo la sua opinione sull'etere che è sbagliata. E ciò vale anche con il completamento di Weyl; risulta infatti dall'ipotesi dell'etere, purché nel fluire di diverse correnti d'etere restino dei buchi, che a causa della forza centrifuga in seguito al mutamento della direzione delle [...] sono tenuti vuoti.

Palagyi: la discussione tra Einstein e Lenard mi ha fatto un'impressione profonda. Si riincontrano qui le vecchie contrapposizioni storiche tra fisica sperimentale e fisica matematica, come per esempio esistono già tra Faraday e Maxwell. Einstein afferma che non esiste un sistema di coordinate privilegiato. Ne esiste uno. Consentitemi di pensare in termini biologici. Allora ogni uomo porta in sé il suo sistema di coordinate. Nello sviluppo di questa idea è contenuta una confutazione della teoria della relatività.

Einstein sostiene che non esiste contrasto tra teoria ed esperimento.

Born: anche la teoria della relatività preferisce modelli del secondo tipo. Considero come esempio la terra ed il sole. Se non ci fosse l'attrazione, la terra camminerebbe di moto rettilineo rispetto ad esso e via dicendo.

Mie: Il fatto che l'idea che l'etere sia di materia percettibile debba essere riconosciuta come impossibile a causa della teoria della relatività, io non ho mai potuto capirlo. Ciò è stato mostrato già molto tempo fa da Lorentz nel suo libro "Fenomeni elettrici ed ottici nei corpi in movimento". Anche Abraham ha detto nel suo manuale già allora, quando si confrontava, rifiutandola, con la teoria della relatività: "L'etere è lo spazio vuoto".

Sono dell'idea che anche accettando la teoria della gravitazione di Einstein si debba distinguere nettamente tra i campi di gravitazione puramente fittizi che si introducono nel modello dell'universo mediante la scelta delle coordinate, e i campi di gravitazione reali, che sono dati da stati di fatto obbiettivi. Ho mostrato da poco una via per giungere ad un sistema di coordinate "privilegiato", nel quale fin dall'inizio tutti i campi di gravitazione puramente fittizi sono esclusi.

Einstein: non posso capire come debba esserci un sistema di coordinate privilegiato. Al più si potrebbe pensare di preferire quei sistemi di coordinate rispetto ai quali valga approssimativamente l'espressione di Minkowski di ds^2. Ma a prescindere dal fatto che per spazi grandi tali sistemi proprio non possono esistere, questi sistemi di coordinate sicuramente non sono definibili in modo esatto, ma solo approssimato.

Kraus indica una differenza epistemologica tra i modelli di primo e di secondo tipo, per la quale egli ritiene che i modelli del primo tipo abbiano più valore di quelli del secondo.

Lenard: si dovrebbe introdurre il principio del baricentro; credo tuttavia che ciò sulle questioni di principio non possa avere alcuna influenza.

Geometria ed esperienza[1]

A. Einstein

La matematica gode rispetto a tutte le altre scienze di una particolare considerazione rispetto ad un punto; le sue leggi sono assolutamente certe e incontestabili, mentre tutte le altre scienze sono in una certa misura discutibili e sempre in pericolo di essere sovvertite dalla scoperta di nuovi fatti. D'altra parte i ricercatori di uno o di un altro campo non sogliono invidiare i matematici, quando essi ottengono le loro leggi non dal confronto con la realtà, ma solo da quello con la loro pura immaginazione. Non c'è da stupirsi, che si arrivi a conseguenze logiche tra loro in accordo, quando ci si è accordati sulle leggi fondamentali (assiomi) e sui metodi per mezzo dei quali da queste leggi fondamentali si debbano derivare altre leggi. Ma una grande considerazione per la matematica viene dal fatto che essa procura alle scienze esatte della natura una qualche misura di certezza, che non si potrebbe raggiungere senza la matematica.

A questo punto salta fuori un enigma, che ha assai disturbato i ricercatori di tutti i tempi. Com'è possibile che la matematica, che è un prodotto del pensiero umano indipendente da ogni altra esperienza, se la cavi così bene al confronto con l'esperienza? Può quindi la ragione umana senza l'esperienza mediante il puro pensiero penetrare a fondo nelle proprietà delle cose reali?

Su questo punto secondo me si deve rispondere in breve: laddove le leggi della matematica corrispondono alla realtà, esse non sono certe, e laddove sono certe, esse non corrispondono alla realtà. Piena chiarezza su questo stato dei fatti mi pare derivi in primo luogo da quella linea di pensiero sulla proprietà generali della matematica che è conosciuta sotto il nome di "assiomatica". Il progresso raggiunto dall'assiomatica sta nel fatto che con essa si separa nettamente il contenuto logico-formale da quello empirico o intuitivo; solo quello logico formale costituisce secondo l'assiomatica l'oggetto della matematica, e non il contenuto intuitivo o d'altro tipo accoppiato a quello logico-formale.

Trattiamo da questo punto di vista un qualunque assioma della geometria, per esempio il seguente: per due punti dello spazio passa sempre una e una sola retta. Come va interpretato questo assioma nel vecchio e nel nuovo senso?

Vecchia interpretazione. Tutti sanno che cosa è una retta e che cosa è un punto. Che questa conoscenza derivi da una facoltà dello spirito umano o dall'esperienza, da una cooperazione di entrambi o in qualche altro modo, il matematico non si cura di distinguere, ma lascia questa distinzione al filosofo. Fondato su questa conoscenza scontata per tutti i matematici, il suddetto assioma (come tutti gli altri assiomi) è evidente, cioè esso è l'espressione di una parte di questa conoscenza a priori.

Nuova interpretazione. La geometria tratta di oggetti, contrassegnati con le parole retta, punto, eccetera. Non si presuppone una qualche conoscenza o intuizione di questi oggetti, ma solo la validità, in ogni caso puramente formale, cioè liberata da ogni contenuto intuitivo ed empirico, di assiomi da assumersi, dei quali il suddetto è un esempio. Questi assiomi sono libere creazioni dello spirito umano. Tutte le altre leggi geometriche sono conseguenze logiche degli assiomi (assunti nominalisticamente). Gli assiomi definiscono primariamente gli oggetti, di cui la geometria

[1]Geometrie und Erfahrung, S.B. Preuss. Akad. Wiss. **5**, 1-8 (1921).

tratta. Schlick ha perciò assai appropriatamente definito gli assiomi nel suo libro sulla teoria della conoscenza come “definizioni implicite”.

Questa concezione degli assiomi introdotta dalla moderna assiomatica depura la matematica da tutti gli altri elementi che non le appartengono, ed elimina così l'oscurità mistica, che prima circondava i fondamenti della matematica. Una tale concezione depurata rende tuttavia anche evidente che la matematica in quanto tale non è capace di dir nulla sia riguardo agli oggetti della rappresentazione intuitiva, sia riguardo agli oggetti della realtà. Per “punto”, “retta”, eccetera si devono intendere nella geometria assiomatica solo degli schemi concettuali privi di contenuto. Ciò che dà loro contenuto non appartiene alla matematica.

D'altra parte è certo che la matematica in generale, e in particolare la geometria, devono ringraziare per il loro sviluppo la necessità di sperimentare il comportamento delle cose reali. La parola geometria, che significa proprio “misurazione della terra”, lo prova chiaramente. La misurazione della terra riguarda le possibilità delle posizioni relative di dati corpi naturali, cioè di parti del corpo della terra, nastri metrici, aste metriche, eccetera. È chiaro che il sistema di concetti della geometria assiomatica da solo non può fare alcuna affermazione sul comportamento di siffatti oggetti della realtà, che designeremo come i corpi rigidi della pratica. Per poter fare tali asserzioni, la geometria deve essere spogliata del suo carattere esclusivamente logico-formale, in modo che i vuoti schemi concettuali della geometria assiomatica siano subordinati ai fatti sperimentabili della realtà. Per realizzare ciò, occorre solo aggiungere la legge:

I corpi rigidi si comportano rispetto alle loro possibilità di posizionamento come corpi della geometria euclidea in tre dimensioni: quindi le leggi della geometria euclidea contengono affermazioni sul comportamento dei corpi rigidi della pratica.

La geometria così completata è evidentemente una scienza naturale; la possiamo a buon diritto considerare la più antica branca della fisica. Le sue affermazioni si fondano essenzialmente sull'induzione dall'esperienza, e non solamente su scelte logiche. Chiameremo la geometria così completata “geometria pratica” e la distingueremo nel seguito dalla “geometria assiomatica pura”. La domanda, se la geometria pratica del mondo sia euclidea o meno, ha un significato preciso, e la sua risposta va ottenuta mediante l'esperienza. Tutte le misure di lunghezza della fisica sono geometria pratica in questo senso, ed anche le misure di lunghezza geodetiche ed astronomiche, purché si prenda in aiuto la legge sperimentale, che la luce si propaga in linea retta, e in linea retta nel senso della geometria pratica.

Alla concezione qui descritta della geometria attribuisco un significato particolare, perché senza di essa non sarebbe possibile fondare la teoria della relatività. Senza di essa risulterebbe impossibile il seguente ragionamento: in un sistema di riferimento rotante rispetto ad un sistema inerziale a causa della contrazione di Lorentz le leggi sulla configurazione di un corpo rigido non corrispondono alle regole della geometria euclidea; quindi ammettendo i sistemi non inerziali come sistemi ugualmente consentiti si deve abbandonare la geometria euclidea. Il passo distintivo nella transizione ad equazioni generalmente covarianti rimarrebbe sicuramente oscuro, se non si fosse scelta per fondamento la suddetta interpretazione. Se si respinge la corrispondenza tra i corpi della geometria assiomatica euclidea e i corpi rigidi della pratica, si perviene facilmente alla seguente concezione, che H. Poincaré ha sostenuto in modo particolarmente netto e profondo: tra tutte le geometrie assiomatiche pensabili la geometria euclidea si distingue per semplicità. Poiché la geometria assiomatica non comporta alcuna affermazione circa la realtà sperimentabile, ma ciò avviene solo per la geometria assiomatica congiunta a leggi fisiche, risulta possibile e ragionevole, come anche la realtà può mostrare, attenersi alla geometria euclidea. Pertanto si dovrebbe preferire una modificazione delle leggi fisiche ad una modificazione nella scelta della geometria assiomatica, nel caso che si mostri una contraddizione tra teoria ed esperienza. Se si respinge una corrispondenza tra i corpi rigidi della pratica e la geometria, non è possibile liberarsi facilmente dalla convenzione, che ci si debba attenere alla geometria euclidea come la più facile.

Perché Poincaré ed altri ricercatori rifiutano la naturale corrispondenza dei corpi rigidi della pratica e dei corpi della geometria? È ovvio, perché i corpi rigidi possibili in natura ad un esame più accurato si rivelano non rigidi, perché le loro proprietà geometriche, cioè le loro possibilità di configurazione relativa dipendono dalla temperatura, da forze esterne, eccetera. Così la corrispondenza originaria e immediata tra geometria e realtà fisica appare distrutta, e ci si sente ricondotti alla seguente concezione generale, che caratterizza il punto di vista di Poincaré. La geometria (G) non dice nulla riguardo al comportamento delle cose reali, ma questo accade solo per la geometria con il completamento (P) delle leggi fisiche. Simbolicamente possiamo dire che solo la somma $(G) + (P)$ soggiace al controllo dell'esperienza. Si possono quindi scegliere a piacimento (G), come pure parti di (P); tutte queste leggi sono convenzioni. È solo necessario, per evitare contraddizioni, scegliere il resto di (P) in modo tale che (G) e la totalità di (P) nel loro insieme dian conto correttamente dell'esperienza. Secondo questa concezione la geometria assiomatica e la parte delle leggi di natura assunte per convenzione sono epistemologicamente equivalenti.

Secondo me Poincaré con questa concezione ha ragione *sub specie aeterni*: l'idea di regolo di misura e anche l'idea di orologio ad essa coordinata nella teoria della relatività non trovano nel mondo reale un oggetto esattamente corrispondente. È chiaro anche che i corpi rigidi e l'orologio non giocano nell'edificio concettuale della fisica il ruolo di elementi irriducibili, ma solo il ruolo di immagini composte, che nella costruzione della fisica teorica non possono giocare alcun ruolo indipendente. È tuttavia mio convincimento che questi elementi concettuali allo stadio attuale di sviluppo della fisica teorica possono essere introdotti solo come concetti indipendenti; siamo infatti troppo lontani da una conoscenza dei fondamenti teorici della fisica atomica, da poter dare costruzioni teoriche esatte di quelle immagini.

Per quanto concerne poi l'obiezione, che in natura non si danno corpi realmente rigidi, e che quindi le proprietà da questi possedute non riguardano la realtà fisica, essa non è così profonda, come può apparire a un esame superficiale. Non è infatti così difficile definire lo stato fisico di un corpo di misura così precisamente, che il suo comportamento rispetto alle posizioni relative su altri corpi di misura sia abbastanza univoco, da poterlo prendere per corpo "rigido". Le asserzioni circa i corpi rigidi devono essere verificate con tali corpi.

Tutta la geometria pratica si fonda su una legge fondamentale derivante dall'esperienza, che ora ricorderemo. Chiameremo intervallo l'estensione tra due segni incisi su un corpo rigido della pratica. Pensiamo a due corpi rigidi della pratica e segnamo su ciascuno un intervallo. I due intervalli si diranno "uguali l'uno all'altro", quando i segni dell'uno possono essere mantenuti costantemente in coincidenza con i segni dell'altro. Introdurremo ora l'ipotesi:

Quando due intervalli si sono trovati uguali una volta e in qualche posto, essi sono uguali sempre e ovunque.

Non solo la geometria euclidea pratica, ma anche la sua generalizzazione più immediata, la geometria riemanniana pratica, e pertanto la teoria della relatività generale, si fondano su questa ipotesi. Dei fondamenti empirici, che parlano a favore dell'introduzione di questa ipotesi, ne ricorderò uno. Il fenomeno della propagazione della luce nello spazio vuoto associa ad ogni intervallo temporale locale un intervallo spaziale, ossia il corrispondente cammino percorso dalla luce avanti e indietro. Ne discende perciò che l'ipotesi prima introdotta per gli intervalli nella teoria della relatività deve valere anche per gli intervalli temporali dell'orologio. Essa può essere allora così formulata: dati due orologi ideali che camminano allo stesso modo a un qualche tempo e in qualche luogo (ove siano immediatamente contigui), essi camminano sempre allo stesso modo, indipendentemente da dove e da quando essi vengano confrontati in uno stesso luogo. Se questa legge per gli orologi naturali non fosse valida, le frequenze proprie dei singoli atomi di uno stesso elemento chimico non coinciderebbero così precisamente come risulta dall'esperienza. L'esistenza di righe spettrali nette costituisce una prova sperimentale convincente per l'anzidetta legge della geometria pratica. Proprio da queste righe risulta che possiamo parlare in modo sensato di una metrica nel senso di Riemann nel continuo spazio-temporale a quattro dimensioni.

La domanda, se questo continuo sia euclideo, o sia strutturato secondo lo schema generale riemanniano o altrimenti, è secondo la concezione qui trattata un'autentica domanda fisica, alla quale si deve rispondere mediante l'esperienza, non una domanda puramente sull'utilità di una convenzione da scegliersi. Le leggi della geometria riemanniana saranno valide quando le leggi delle posizioni di un corpo rigido della pratica tanto più esattamente coincideranno con quelle dei corpi della geometria euclidea, quanto più piccole siano le dimensioni della regione spazio-temporale considerata.

L'interpretazione fisica della geometria qui trattata non consente un'applicazione immediata a spazi dell'ordine di grandezza submolecolare. Una parte del suo significato si conserva tuttavia anche rispetto alle domande sulla costituzione delle particelle elementari. Si può cercare allora quali delle idee di campo, che sono state definite fisicamente per la descrizione del comportamento geometrico di corpi grandi rispetto alla molecola, abbiano ancora significato fisico quando si tratta di descrivere le particelle elementari elettriche che costituiscono la materia. Solo il risultato potrà decidere la correttezza del tentativo di attribuire alle idee fondamentali della geometria riemanniana una realtà fisica al di là del loro dominio di definizione fisico. Forse si potrà mostrare che questa estrapolazione è altrettanto poco appropriata quanto l'idea di temperatura per parti di un corpo di dimensioni molecolari.

Meno problematica appare l'estensione dell'idea di geometria pratica a spazi di ordine di grandezza cosmico. Si può invero obiettare, che una costruzione fatta con regoli fissi si discosta tanto più dall'ideale di rigidità, quanto più grande è la sua estensione spaziale. Ma a questa obiezione ben difficilmente si può attribuire un significato di principio. Inoltre mi pare che anche la domanda, se l'universo sia spazialmente finito o no, sia una domanda del tutto sensata dal punto di vista della geometria pratica. Non ritengo affatto escluso che queste domande trovino una risposta da parte dell'astronomia in un tempo non troppo lontano. Ricordiamo a questo proposito che cosa insegna la teoria della relatività generale. Per essa esistono due possibilità.

1. L'universo è spazialmente infinito. Ciò è possibile solo se la densità media

spaziale della materia concentrata in stelle nello spazio dell'universo si annulla, cioè se il rapporto tra la massa totale delle stelle e il volume dello spazio nel quale essa è distribuita tanto più si approssima al valore zero, quanto più grande è lo spazio preso in considerazione.

2. L'universo è spazialmente finito. Ciò deve accadere quando si abbia una densità media di materia ponderabile diversa da zero. Il volume dello spazio dell'universo è tanto più grande, quanto più piccola è quella densità media.

Non voglio tralasciare di ricordare che si possono far valere argomenti teorici per la finitezza dell'universo. La teoria della relatività insegna che l'inerzia di un dato corpo è tanto più grande, quanto più massa ponderabile si trovi nelle sue vicinanze; appare perciò assai naturale ricondurre l'inerzia complessiva di un corpo all'interazione tra di esso e i restanti corpi dell'universo, come anche il peso secondo Newton va ricondotto interamente all'interazione tra i corpi. Si può derivare dalle equazioni della relatività generale che questa totale riduzione dell'inerzia all'interazione tra le masse - come ha proposto per esempio E. Mach - è possibile solo se il mondo è spazialmente finito.

A molti fisici e astronomi questo argomento non fà nessuna impressione. In fin dei conti solo l'esperienza può di fatto distinguere, quale delle due possibilità sia realizzata in natura; come può l'esperienza produrre una risposta? Sulle prime si può pensare che la densità media della materia si possa determinare dall'osservazione della parte dell'universo accessibile alla nostra percezione. Questa speranza è ingannevole. La distribuzione delle stelle osservabili è terribilmente irregolare, di modo che non possiamo in alcun modo tentare di porre la densità media della materia stellare dell'universo circa uguale alla densità media della Via Lattea. Inoltre si può - per quanto grande possa essere lo spazio esplorato - sempre supporre che al di là di questo spazio non ci siano più stelle. Una stima della densità media appare quindi esclusa.

Esiste tuttavia una seconda strada che mi pare più facilmente percorribile, sebbene anche questa comporti grosse difficoltà. Se ci chiediamo quali siano gli scostamenti che le conseguenze della relatività generale accessibili all'osservazione astronomica offrono rispetto alle conseguenze della teoria di Newton, notiamo che esiste uno scostamento che si dà in prossimità di una massa gravitazionale, come si è potuto confermare nel caso di Mercurio. Nel caso che l'universo sia spazialmente finito, si dà una secondo scostamento dalla teoria di Newton, che nel linguaggio della teoria di Newton si esprime così: il campo gravitazionale si comporta come se oltre alle masse ponderabili esistesse una densità di massa di segno negativo, distribuita uniformemente nello spazio. Poiché questa densità di massa fittizia dev'essere straordinariamente piccola, essa può essere osservabile solo in sistemi gravitanti di estensione molto grande.

Assumiamo di conoscere la distribuzione statistica delle stelle nella Via Lattea e le loro masse. Allora possiamo calcolare il campo gravitazionale secondo la legge di Newton, ed anche la velocità media che le stelle devono avere perché la Via Lattea, a causa delle interazioni tra le sue stelle, non collassi su se stessa, ma mantenga la sua estensione. Se ora le velocità medie reali delle stelle, che possiamo ben misurare, risultassero più piccole di quelle calcolate, si sarebbe ottenuta la prova che le attrazioni reali su grandi distanze sono più piccole che secondo la legge di Newton. Da una tale deviazione si potrebbe dimostrare indirettamente la finitezza dell'universo e stimare la sua estensione spaziale.

La teoria di campo offre delle possibilità per la soluzione del problema dei quanti?[1]

A. Einstein

§1. Considerazioni generali

Il grande successo, che la teoria dei quanti ha mostrato nel suo sviluppo in meno di un quarto di secolo, non ci deve far dimenticare che per ora manca un fondamento logico di questa teoria. Sappiamo inoltre che tale fondamento cercato non può consistere semplicemente in un completamento della meccanica e dell'elettrodinamica classica; ciò perché le leggi dell'equipartizione dell'energia derivanti dalla meccanica classica e le leggi derivanti dall'elettrodinamica classica sulle proprietà energetiche della radiazione si trovano in una contraddizione insolubile con i fatti. Basti ricordare la degenerazione del calore specifico a basse temperature e i processi secondari, che si manifestano per l'assorbimento e per la diffusione (effetto Compton) di radiazione di corta lunghezza d'onda.

Davanti ai fatti riassunti dalle regole quantiche si può ben dubitare che con uno sviluppo ulteriore conseguente delle attuali teorie si possano risolvere le difficoltà. L'essenza dello sviluppo teorico attuale, che si riconosce nella meccanica del punto, nell'elettrodinamica di Maxwell-Lorentz, nella teoria della relatività, sta nel fatto che si lavora con equazioni differenziali, che fissano univocamente gli eventi in un continuo spaziotemporale a quattro dimensioni, una volta che essi siano noti su una sezione spaziale. Nella determinazione univoca dello sviluppo temporale degli eventi mediante equazioni differenziali alle derivate parziali consiste il metodo, mediante il quale si soddisfa la legge di causalità. Di fronte alle difficoltà esistenti si è dubitata la descrivibilità dei fatti osservati mediante equazioni differenziali. Si è messa in dubbio inoltre la possibilità della adozione senza eccezioni della legge di causalità sotto l'ipotesi del continuo spaziotemporale tetradimensionale. Tutti questi dubbi sono consentiti dal punto di vista della teoria della conoscenza, e assai comprensibili di fronte alle profonde difficoltà che ci stanno davanti. Ma, prima di tirare sul serio nell'ambito della discussione possibilità così remote, dobbiamo dimostrare che veramente dai tentativi attuali e dai fatti segue che è impossibile riuscire con equazioni differenziali alle derivate parziali. Di fronte alla meravigliosa precisione con la quale la teoria ondulatoria esprime i fenomeni geometricamente così complicati dell'interferenza e della diffrazione della luce, è difficile credere che l'equazione differenziale alle derivate parziali in ultima istanza sia inadatta a render conto dei fatti.

Se si considera criticamente le teoria di Maxwell-Lorentz, si riconosce che il suo fondamento consiste di due parti che formalmente sono poco dipendenti l'una dall'altra, ossia delle equazioni differenziali del campo elettromagnetico e delle equazioni di moto dell'elettrone (positivo e negativo). I fenomeni della diffrazione e dell'interferenza, così brillantemente confermati dall'esperienza, essenzialmente sono governati dal punto di vista formale dalle equazioni di campo, i processi di assorbimento, che la teoria non può riprodurre conformemente all'esperienza, sono invece principalmente determinati dalla legge di moto dell'elettrone. È quindi un pensiero naturale (frequentemente espresso) che si debbano mantenere le equazioni di

[1] Bietet die Feldtheorie Möglichkeiten für die Lösung des Quantenproblems?, S.B. Preuss. Akad. Wiss. **33**, 359-364 (1923).

campo, ma abbandonare le equazioni di moto dell'elettrone.[2] Ciò comporterà certamente che non si potrà mantenere la consueta teoria della localizzazione dell'energia nel campo. Questa possibilità teorica non si sviluppa oltre su terreno facile, perché finora non si è vista nessuna via percorribile per raggiungere delle leggi di moto diverse per l'elettrone. Il tentativo di Mie, di completare le equazioni di campo in modo che esse valgano anche all'interno dell'elettrone, non ha prodotto finora alcun risultato utile. Questi metodi potrebbero portare a una unificazione dei fondamenti, poiché essi renderebbero superflue leggi particolari di moto per l'elettrone. Perché anche questa strada non possa contribuire decisivamente alla soluzione del problema dei quanti risulterà dalle considerazioni che seguono, che a mio avviso ci portano al punto essenziale dell'intero problema.

Secondo le teorie attuali lo stato iniziale di un sistema può essere scelto liberamente; le equazioni differenziali danno poi l'evoluzione temporale. Secondo le nostre conoscenze sugli stati quantici, come esse si sono sviluppate in particolare negli ultimi dieci anni in connessione con la teoria di Bohr, la realtà non corrisponde a questa concatenazione della teoria. Lo stato iniziale di un elettrone che si muova attorno a un nucleo di idrogeno non può essere scelto liberamente, ma questa scelta deve corrispondere alle condizioni quantiche. In generale: non solo l'evoluzione temporale, ma anche lo stato iniziale obbedisce a leggi.

È possibile dar conto di questa conoscenza sui processi naturali, che dobbiamo ben ritenere di significato generale, in una teoria fondata su equazioni differenziali alle derivate parziali? Ma certo; dobbiamo solo "sovradeterminare" le variabili di campo mediante delle equazioni. Ciò significa che il numero delle equazioni differenziali deve essere più grande del numero delle variabili di campo da esse determinate. (Nel caso della relatività generale il numero delle equazioni indipendenti deve essere più grande solo del numero delle variabili di campo diminuito di 4 poiché in essa, a causa della libera scelta delle coordinate, le variabili di campo sono fissate dalle equazioni solo a meno di 4 tra esse.) La geometria di Riemann ci mostra un bell'esempio di sovradeterminazione, che appare anche in concreto rapporto con il nostro problema. Si assuma che tutte le componenti $R_{ik,lm}$ del tensore di curvatura di Riemann si annullino, di modo che il continuo sia euclideo, che quindi sia completamente determinato e soprattutto non consenta "condizioni iniziali". Nel continuo a 4 dimensioni si tratta allora di 20 equazioni algebricamente indipendenti l'una dall'altra, che i 10 coefficienti $g_{\mu\nu}$ della forma metrica quadratica devono soddisfare.

Analogamente cerchiamo di sovradeterminare gli eventi nel campo elettromagnetico e gravitazionale, ove le possibilità sono ristrette dalle seguenti condizioni:

1. Le equazioni devono essere generalmente covarianti, e in esse devono comparire solo le componenti $g_{\mu\nu}$ del campo metrico e $\phi_{\mu\nu}$ del campo elettrico.

2. Il sistema di equazioni cercato deve in ogni caso contenere quelle equazioni che secondo le teoria della gravitazione e la teoria di Maxwell sono soddisfatte, ossia il sistema di equazioni

$$R_{il} = -kT_{il}$$
$$T_{il} = -\phi_{i\alpha}\phi_l^{\alpha} + \frac{1}{4}g_{il}\phi_{\alpha\beta}\phi^{\alpha\beta},$$

[2] I fondamenti della meccanica contraddicono da soli i fatti quantistici (fallimento del principio di equipartizione). Le equazioni del moto del punto materiale devono quindi essere abbandonate, totalmente a prescindere dalla questione, se si debba o meno mantenere la teoria di campo.

dove R_{il} indica il tensore di curvatura di rango due.

3. Il sistema di equazioni cercato, che sovradetermina il campo, deve sempre ammettere una soluzione statica sferosimmetrica, che secondo le equazioni anzidette descrive l'elettrone positivo ovvero negativo.

Qualora si riesca, con il soddisfacimento di queste tre condizioni, a sovradeterminare abbastanza con equazioni differenziali il campo totale, possiamo sperare che mediante queste equazioni sia determinato anche il comportamento meccanico dei punti singolari (elettroni) in modo tale che anche lo stato iniziale del campo e dei punti singolari soddisfi a condizioni restrittive.

Se è in generale possibile risolvere il problema dei quanti mediante equazioni differenziali, possiamo sperare di raggiungere la meta per questa via. Nel seguito mostrerò ciò che io ho tentato in questa direzione, senza poter sostenere che le equazioni da me presentate possiedano un significato fisico reale. Le mie proposte avranno raggiunto il loro scopo, se stimoleranno i matematici a collaborare e mostreranno che la via qui intrapresa è percorribile e va pensata senza riserve fino alla fine. Come sempre accade in relatività generale, anche in questo caso è difficile trarre dalle equazioni delle conclusioni circa le loro soluzioni, che possano essere confrontate con i risultati assodati dell'esperienza, qui in particolar modo della teoria dei quanti.

§2. Derivazione di un sistema di equazioni sovradeterminate

Partiamo dal sistema di equazioni sovradeterminate

$$R_{ik,lm} = \Psi_{ik,lm} \tag{1}$$

In questo sistema

$$R_{ik,lm} = g_{ij} R^{j}{}_{k,lm} = g_{ij} \left(\frac{\partial \Gamma^{j}_{kl}}{\partial x_m} - \frac{\partial \Gamma^{j}_{km}}{\partial x_l} - \Gamma^{j}_{\sigma l} \Gamma^{\sigma}_{km} + \Gamma^{j}_{\sigma m} \Gamma^{\sigma}_{kl} \right)$$

denota il tensore di curvatura di Riemann (con il segno cambiato, come al solito), e $\Psi_{ik,lm}$ un tensore, che è omogeneo e di secondo grado nelle componenti del campo elettrico $\phi_{\mu\nu} \left(= \frac{\partial \phi_\mu}{\partial x_\nu} - \frac{\partial \phi_\nu}{\partial x_\mu} \right)$, e che possiede le stesse proprietà di simmetria di $R_{ik,lm}$. Lo otteniamo se poniamo $\Psi_{ik,lm}$ uguale ad una combinazione lineare di tensori:

$$\Phi'{}_{ik,lm} = \phi_{ik}\phi_{lm} + \frac{1}{2} \left(\phi_{il}\phi_{km} - \phi_{im}\phi_{kl} \right)$$

$$\Phi''{}_{ik,lm} = g_{il}\Phi'{}_{km} + g_{km}\Phi'{}_{il} - g_{im}\Phi'{}_{kl} - g_{kl}\Phi'{}_{im} \tag{3}$$

$$\Phi'''{}_{ik,lm} = \left(g_{il}g_{km} - g_{im}g_{kl} \right) \Phi' \tag{4}$$

dove si è posto per abbreviazione nella (3)

$$g^{km}\Phi'{}_{ik,lm} = \Phi'{}_{il} \tag{5}$$

e nella (4)

$$g^{il}\Phi'_{il} = \Phi'. \tag{6}$$

Deve quindi essere

$$\Psi_{ik,lm} = A'\Phi'_{ik,lm} + A''\Phi''_{ik,lm} + A'''\Phi'''_{ik,lm}. \tag{7}$$

In base a considerazioni che saranno tra poco evidenti, attribuiamo alle costanti A', A'', A''' i valori

$$A' = -2,\ A'' = +\frac{2}{3},\ A''' = -\frac{1}{6}. \tag{7a}$$

Sulle proprietà del sistema (1) osserviamo quanto segue. Se lo si moltiplica per g^{il} e si somma sugli indici i ed l, si ottengono le equazioni

$$R_{km} = -\left(\frac{1}{4}g_{km}\phi_{\alpha\beta}\phi^{\alpha\beta} - \phi_{k\alpha}\phi_m^{\ \alpha}\right). \tag{8}$$

Queste sono le note equazioni, che assieme alle equazioni di Maxwell contengono la relatività generale, quando oltre al campo di gravitazione esista solo il campo elettromagnetico. È noto che il sistema (8) ha la soluzione statica sferosimmetrica[3]

$$ds^2 = f^2dt^2 - \left[h^2dr^2 + r^2\left(d\vartheta^2 + \cos^2\vartheta d\psi^2\right)\right],$$

$$f^2 = 1/h^2 = 1 - \frac{2m}{r} + \frac{\varepsilon^2}{(2r^2)},$$

$$\phi_{4\alpha} = \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(\frac{\pm\varepsilon}{r}\right),$$

$$\phi_{23} = \phi_{31} = \phi_{12} = 0. \tag{9}$$

Questa soluzione, la quale presenta un punto singolare (o meglio una linea d'universo singolare), e che rappresenta l'elettrone negativo o positivo, noi la indicheremo simbolicamente mediante le costanti che in essa appaiono m (massa ponderabile) ed ε (massa elettrica) come

$$L(m,\varepsilon). \tag{10}$$

Il sistema da noi cercato di equazioni di campo sovradeterminate deve comunque contenere la soluzione $L(m,\varepsilon)$. Le equazioni (1) stesse non possono essere il sistema di equazioni da noi cercato. Secondo queste il campo metrico nel caso di campo elettrico nullo è necessariamente euclideo. Ciò significa che già la soluzione di Schwarzschild $l(m,0)$ non corrisponde al sistema di equazioni (1). D'altra parte ho mostrato con un calcolo che l'elettrone "privo di massa" rappresenta una soluzione delle (1), cioè $L(0,\varepsilon)$ soddisfa al sistema (1). In base a ciò mi pare che le equazioni cercate, che producano la sovradeterminazione dei campi, siano da ottenersi dalle (1) per

[3]vedi H. Weyl, "Raum, Zeit, Materie" §32.

generalizzazione. Si offre per questo una via più naturale. Mediante l'introduzione di un sistema di coordinate localmente "geodetico" si dimostra infatti facilmente che le derivate covarianti del tensore di Riemann $R_{ik,lm;n}$ soddisfano all'identità (trovata da Bianchi)

$$0 = R_{ik,lm;n} + R_{ik,mn;l} + R_{ik,nl;m}. \tag{11}$$

Da ciò segue che nelle (1) sono comprese le equazioni più generali

$$\Psi_{ik,lmn} = \Psi_{ik,lm;n} + \Psi_{ik,mn;l} + \Psi_{ik,nl;m} = 0. \tag{12}$$

Non ritengo per nulla improbabile che le equazioni (12) assieme alle equazioni (8) della attuale teoria della relatività generale che parimenti sono conseguenza delle (1) siano il sistema cercato di equazioni per la sovradeterminazione del campo totale.

La dimostrazione con il calcolo, che $L\,(m, \varepsilon)$ soddisfa al sistema di equazioni (12), non mi è possibile invero darla, a causa della grande complicazione. Ma appare assolutamente plausibile, poiché sia $L\,(0, \varepsilon)$ che $L\,(m, 0)$ soddisfano al sistema (12). Il secondo caso si verifica quando si annulla l'intensità del campo elettrico, ed il primo perché $L\,(0, \varepsilon)$ è una soluzione delle (1). Moltiplicando la (12) per $g^{il}g^{km}$ e sommando sugli indici $iklm$ si ottengono le equazioni di Maxwell.

Esiste quindi una certa probabilità che l'unione dei sistemi (12) e (8) provveda la cercata sovradeterminazione del campo totale. Si pongono le seguenti domande:

$L\,(m, \varepsilon)$ soddisfa al sistema di equazioni (12)?

Il doppio sistema (12), (8) determina il comportamento meccanico delle singolarità?

Il comportamento secondo le (12) e (8) corrisponde a quanto sappiamo dalla teoria dei quanti?

Le ultime due questioni pretendono assai dal matematico che le voglia risolvere; si devono trovare metodi di approssimazione per risolvere il problema del moto. Ma il fatto che in questo modo paia offrirsi una possibilità per un reale fondamento scientifico della teoria dei quanti giustifica grandi sforzi. Sia consentito sottolineare ancora una volta in conclusione, che per me in questa comunicazione l'idea della sovradeterminazione è la principale; concedo volentieri che la derivazione delle equazioni (12) non è così stringente come si potrebbe desiderare.

Nota aggiunta in correzione. La prima delle domande su proposte ha nel frattempo trovato risposta. Il Dr. Grommer ha dimostrato con un calcolo diretto che la soluzione $L\,(m, \varepsilon)$ soddisfa al sistema (12).

Sull'etere[1]

Prof. Dr. A. Einstein (Berlin)

Quando qui si parla dell'etere, non si tratta naturalmente dell'etere materiale della teoria meccanica delle onde, che obbedisce alle leggi della meccanica di Newton, e ai singoli punti del quale si attribuisce una velocità. Questa struttura teorica, secondo il mio convincimento, dall'enunciazione della teoria della relatività speciale ha esaurito definitivamente il suo ruolo. Si tratta assai più in generale di quella cosa pensata come fisicamente reale che, accanto alla materia ponderabile costituita da particelle elementari elettriche, gioca un ruolo nel nesso causale della fisica. Invece che di "etere" si può parlare altrettanto bene di "qualità fisiche dello spazio". Si potrebbe altresì sostenere l'opinione che sotto questo concetto cadano tutti gli oggetti della fisica, poiché in una teoria di campo conseguente anche la materia ponderabile, ossia le particelle elementari che la costituiscono, si possono considerare come "campi" di un tipo particolare, ovvero come particolari "stati dello spazio". Tuttavia si deve ammettere che allo stato attuale della fisica una siffatta interpretazione sarebbe prematura, poiché finora tutti gli sforzi dei fisici teorici diretti a questo scopo sono falliti. Pertanto allo stato attuale delle cose siamo costretti a distinguere tra "materia" e "campi", ma possiamo sperare che le future generazioni supereranno questa concezione dualistica e la sostituiscano con una unitaria, come la teoria di campo nei nostri giorni ha tentato inutilmente.

Si crede abitualmente che la fisica di Newton non abbia riconosciuto alcun etere, e che invece per prima la teoria ondulatoria della luce abbia introdotto un mezzo onnipresente che contribuisce a determinare i fenomeni fisici. Tuttavia le cose non stanno così. La meccanica di Newton ha il suo "etere", nel senso implicito, che si indica altrimenti come "spazio assoluto". Per riconoscerlo chiaramente e contemporaneamente per elaborare un po' più precisamente l'idea di etere, dobbiamo prendere le mosse un poco più da lontano.

Consideriamo prima di tutto una branca della fisica che fa a meno dell'etere, cioè la geometria di Euclide, intesa come la scienza dei modi possibili di portare tra loro in contatto i corpi praticamente rigidi. (Prescindiamo qui dai raggi luminosi, che parimenti possono intervenire nella formazione dei concetti e delle leggi della geometria.) Le leggi sulle configurazioni dei corpi solidi con l'esclusione degli effetti dei moti relativi, della temperatura e delle deformazioni, da cui idealmente si astrae nella geometria di Euclide, danno luogo all'idea di corpo rigido; quegli effetti del mezzo, che esistono indipendentemente dai corpi, che agiscono sui corpi e che si possono pensare influenzino le loro leggi di configurazione, la geometria euclidea non li riconosce. La stessa cosa vale per le geometrie non euclidee a curvatura costante, quando le si assumano come (pensabili) leggi di natura sulle configurazioni dei corpi. Altrimenti accadrebbe, se si trovasse necessario introdurre una geometria con curvatura variabile; ciò significherebbe che le possibili posizioni di contatto di corpi rigidi della pratica sarebbero diverse in casi diversi, sarebbero condizionate dall'influenza del mezzo. Nel senso di questa esposizione si dovrebbe qui dire che una siffatta teoria si serve di un'ipotesi dell'etere. Il suo etere sarebbe altrettanto fisicamente reale quanto la materia. Nel caso che le leggi delle configurazioni non fossero influenzabili da fattori fisici, come la concentrazione e lo stato di moto dei

[1] Über den Äther, Verh. d. Schweiz. Naturf. Ges. **105**, 85-93 (1924).

corpi nei dintorni etc., ma fossero immutabili, si indicherebbe questo etere come "assoluto" (cioè indipendente dall'influenza di un qualche altro oggetto).

Altrettanto poco, quanto la geometria euclidea (interpretata fisicamente) adopera un etere, ne ha bisogno di uno la cinematica ovvero foronomia della meccanica classica; le sue leggi hanno un significato fisico chiaro solo quando si assuma che gli effetti del moto sui regoli e sugli orologi introdotti dalla teoria della relatività speciale non esistano.

Le cose stanno diversamente nella dinamica di Galilei e Newton. La legge del moto "massa $\times$ accelerazione $=$ forza" non implica solo un'affermazione sui sistemi materiali, neppure quando secondo la legge astronomica fondamentale di Newton la forza è espressa in funzione della distanza, e quindi per mezzo di quantità, la cui definizione reale si può fondare su misure compiute con regoli rigidi. Infatti la definizione reale dell'accelerazione non si può fondare completamente su osservazioni condotte con corpi rigidi e orologi. Essa non può essere ricondotta alle distanze misurabili tra i punti che costituiscono il sistema meccanico. Per la sua definizione si ha bisogno di un sistema di coordinate, cioè di un corpo di riferimento in un opportuno stato di moto. Se lo stato di moto del sistema di coordinate fosse scelto diversamente, rispetto a questo le equazioni di Newton non varrebbero. In quelle equazioni entra per così dire il mezzo, nel quale i corpi si muovono, implicitamente come fattore reale nelle leggi del moto accanto ai corpi reali e alle loro distanze definibili con regoli. Nella teoria del moto di Newton lo "spazio" possiede realtà fisica - in contrasto con quanto avviene nella geometria e nella cinematica. Indicheremo questa realtà fisica, che interviene nella legge del moto di Newton accanto ai corpi ponderabili osservabili, come "etere della meccanica". La comparsa della forza centrifuga in un corpo (rotante), i cui punti materiali non mutino le distanze tra loro, mostra che questo etere non va interpretato come una costruzione fantastica della teoria di Newton, ma che esso corrisponde a qualcosa di reale della natura.

Vediamo che per Newton lo "spazio" era qualcosa di fisicamente reale, malgrado il modo singolarmente indiretto in cui questa realtà giunge alla nostra conoscenza. Ernst Mach, che per primo dopo Newton ha sottoposto i fondamenti della meccanica ad una analisi profonda, lo ha riconosciuto chiaramente. Egli tentò di evitare l'ipotesi dell' "etere della meccanica", cercando di ridurre l'inerzia all'interazione immediata tra la massa considerata e tutte le restanti masse dell'universo. Questa concezione è logicamente possibile, ma come teoria dell'azione a distanza per noi oggi non si può più prendere seriamente in considerazione. L' etere meccanico, da Newton designato come "spazio assoluto", dev'essere quindi da noi considerato come una realtà fisica. Ma naturalmente l'espressione "etere" non deve indurre a credere che con essa si pensi come nella fisica del diciannovesimo secolo a qualcosa di analogo alla materia ponderabile.

Quando Newton designa lo spazio della fisica come "assoluto", pensa ad un'altra proprietà di quello che qui chiamiamo "etere". Ogni entità fisica influisce su altre e in generale è viceversa influenzata dalle altre. Ma quest'ultima proprietà non vale per l'etere della meccanica newtoniana. La proprietà di procurare inerzia di quest'ultimo infatti secondo la meccanica classica non è influenzabile da nulla, nè dalla configurazione della materia, nè da qualcosa d'altro; per questo lo si può designare come "assoluto".

Che per il carattere privilegiato del sistema inerziale rispetto ai sistemi non inerziali si dovesse assumere una cosa reale come origine fu chiaro per la prima volta ai fisici negli ultimi anni. Storicamente l'ipotesi dell'etere nella sua forma attuale è derivata dall'ipotesi meccanica dell'etere dell'ottica per sublimazione. Dopo lunghi sforzi infruttuosi si è giunti al convincimento che la luce non si dovesse interpretare come moto di un mezzo dotato di inerzia e di elasticità, che in particolare i campi elettromagnetici della teoria di Maxwell non potessero essere interpretati meccanicamente. Sotto l'impressione di questo insuccesso i campi elettromagnetici sono stati considerati gradualmente come realtà fisiche ultime, irriducibili, come uno stato non ulteriormente spiegabile dell'etere. Ciò che resterebbe ancora dell'etere della teoria meccanica sarebbe il suo stato di moto determinato; esso identificherebbe in un certo senso una "quiete assoluta". Mentre nella meccanica di Newton per lo meno tutti i sistemi inerziali erano ugualmente legittimi, nella teoria di Maxwell-Lorentz lo stato di moto dei sistemi di coordinate ammessi (quiete rispetto all'etere) risulta essere completamente determinato. Si assume tacitamente che il sistema di coordinate privilegiato sia allo stesso tempo un sistema inerziale, cioè che rispetto all'etere elettromagnetico valga il principio d'inerzia.

La concezione di fondo dei fisici cambiò ancora in un secondo modo sotto l'influenza della teoria di Maxwell-Lorentz. Poiché i campi elettromagnetici erano stati assunti come entità fondamentali, irriducibili, pareva che li si dovesse chiamare a sottrarre alle masse inerziali ponderabili il loro significato fondamentale anche in meccanica. Si concludeva dalle equazioni di Maxwell che un corpo elettricamente carico in moto è circondato da un campo magnetico, la cui energia in prima approssimazione dipende quadraticamente dalla velocità. Che cosa vi è di più immediato dell'interpretare tutte le energie cinetiche come energia elettromagnetica? Si poteva così sperare di ridurre la meccanica all'elettromagnetismo, dal momento che precedentemente la riduzione dei fenomeni elettromagnetici a quelli meccanici era fallita. Ciò appare tanto più promettente, dal momento che sembra sempre più probabile che tutta la materia ponderabile sia costituita da particelle elementari elettriche. Tuttavia non si possono superare due difficoltà. In primo luogo infatti le equazioni di Maxwell-Lorentz non permettono di capire come possa esistere in equilibrio la carica elettrica che costituisce una particella elementare elettrica malgrado la forza di repulsione elettrostatica. In secondo luogo la teoria elettromagnetica non permetterebbe di spiegare la gravitazione in maniera in qualche misura naturale e soddisfacente. Tuttavia i successi che la teoria elettromagnetica della fisica otterrebbe sarebbero così importanti, che essa sarebbe considerata come un dominio della fisica completamente sicuro, come quello la cui acquisizione sarebbe la meglio fondata.

La teoria di Maxwell-Lorentz ha influito infine sulla nostra formulazione del problema dei fondamenti teorici, che ha condotto all'enunciazione della teoria della relatività speciale. Si è riconosciuto che le equazioni elettromagnetiche in verità non individuano nessuno stato di moto determinato, e che invece per queste equazioni come per la meccanica classica è ugualmente ammissibile una molteplicità infinita di sistemi di coordinate in moto uniforme, purché solo si usino formule di trasformazione opportune per le coordinate spaziali e per il tempo. E' ben noto come questa conoscenza abbia avuto per conseguenza una modificazione profonda della cinematica e della dinamica. All'etere dell'elettrodinamica non si doveva più attribuire uno stato di moto determinato. Esso causava ora - come l'etere della meccanica classica - non il carattere privilegiato di un determinato stato di moto, ma solo il carattere privilegiato di un determinato stato di accelerazione. Inoltre, poiché non si poteva più parlare in senso assoluto di eventi contemporanei in posizioni diverse dell'etere, l'etere risultava in un certo senso tetradimensionale, e non si aveva alcun ordine obbiettivo dei suoi eventi in funzione soltanto del tempo. Anche nella teoria della relatività speciale l'etere era assoluto, la sua influenza sull'inerzia e sulla propagazione delle luce andava pensata come indipendente da effetti fisici d'ogni sorta. Mentre nella fisica classica la geometria dei corpi era assunta come indipendente dallo stato di moto, secondo la teoria della relatività speciale le leggi della geometria euclidea sono competenti a descrivere le posizioni di corpi in quiete l'uno rispetto all'altro soltanto quando questi corpi siano in quiete rispetto ad un sistema inerziale[2] : ciò si può facilmente concludere dalla cosidetta contrazione di Lorentz. Pertanto la geometria dei corpi come la dinamica è condizionata dall'etere.

La teoria della relatività generale elimina un inconveniente della dinamica classica: in quest'ultima inerzia e gravità appaiono come fenomeni del tutto distinti e indipendenti, malgrado il fatto che entrambi siano determinati mediante la stessa costante del corpo, la massa. La teoria della relatività generale supera questo difetto, poiché fissa il comportamento dinamico del punto materiale elettricamente neutro mediante la legge della linea geodetica, nella quale le azioni dell'inerzia e della gravità non sono più tenute separate. L'etere ha in essa proprietà variabili da punto a punto, che fissano la metrica e il comportamento dinamico dei punti materiali, e che a loro volta sono determinate da fattori fisici, cioè dalla distribuzione della massa ovvero dell'energia. L'etere della teoria della relatività generale si distingue quindi da quelli della meccanica classica e della teoria della relatività speciale perché non è "assoluto", ma nelle sue proprietà dipendenti dalla posizione è determinato dalla materia ponderabile. Questa determinazione è poi completa, se l'universo è spazialmente finito e chiuso in sè. Che nella teoria della relatività generale non esistano coordinate spaziotemporali privilegiate, univocamente associate alla metrica, è più caratteristico della forma matematica della teoria che del suo contenuto fisico.

Anche con lo sviluppo dell'apparato formale della teoria della relatività generale non si riesce a ridurre tutta l'inerzia delle masse a campi elettromagnetici, in generale a campi. Inoltre a parer mio per il momento non siamo andati oltre un inserimento superficiale della forza elettromagnetica nello schema della teoria della relatività generale. Il tensore metrico che determina assieme i fenomeni della gravitazione e dell'inerzia da un lato, e il tensore del campo elettromagnetico dall'altro, appaiono come espressioni essenzialmente distinte dello stato dell'etere, la cui indipendenza logica si tende a mettere assai più in conto all'incompletezza della nostra costruzione teorica che in conto alla complessa struttura della realtà.

Invero Weyl ed Eddington per generalizzazione della geometria riemanniana hanno trovato un sistema matematico che fa apparire i due tipi di campo congiunti sotto un punto di vista unitario. Ma le leggi di campo semplicissime che una tale teoria produce non mi paiono portare ad un progresso della conoscenza fisica. In generale mi pare oggi che siamo assai più lontani da una conoscenza delle leggi elementari elettromagnetiche di quanto apparisse all'inizio di questo secolo. A fondamento di questa opinione posso qui brevemente accennare al *problema dei campi magnetici terrestre e solare* ed al *problema dei quanti di luce*, problemi che per così dire riguardano la struttura su grande scala e su piccola scala del campo

[2]Per corpi, che siano in quiete l'uno rispetto all'altro, ma che nel loro insieme ruotino rispetto ad un sistema inerziale, per esempio, non vale (secondo la teoria della relatività speciale) la geometria euclidea.

elettromagnetico.

La terra ed il sole possiedono campi elettromagnetici la cui orientazione e il cui verso coincidono approssimativamente con l'asse di rotazione di questi corpi celesti. Secondo la teoria di Maxwell questi campi possono derivare da correnti elettriche che fluiscano in senso opposto alla rotazione del corpo celeste attorno all'asse. Anche le macchie solari, che con buona ragione si possono intendere come vortici, possiedono campi magnetici analoghi, molto forti. Ma non è pensabile che in tutti questi casi vi siano davvero delle correnti elettriche di conduzione o di convezione di sufficiente intensità. La cosa appare piuttosto come se moti ciclici di masse neutre producessero campi magnetici. Nè la teoria di Maxwell nella sua forma originaria nè la teoria di Maxwell estesa nel senso della relatività generale consentono di prevedere una siffatta generazione di campi. Ci pare qui che la natura indichi una relazione fondamentale fino ad oggi non compresa teoricamente[3].

Se or ora si è trattato di un caso che la teoria di campo nella sua forma attuale non appare in grado di trattare, i fatti e le idee raccolti nella *teoria dei quanti* minacciano in generale di far saltare l'edificio della teoria di campo. Crescono infatti gli argomenti secondo i quali i quanti di luce si devono intendere come realtà fisiche, e il campo elettromagnetico non può essere considerato come una realtà ultima, alla quale si possono ridurre le altre realtà fisiche. Dopo che la teoria della formula di Planck ha mostrato chiaramente che il trasferimento dell'energia e dell'impulso tramite la radiazione avviene come se quest'ultima consistesse di atomi che si muovono con la velocità della luce c, di energia $h\nu$ e d'impulso $h\nu/c$, Compton, mediante esperimenti sulla diffusione dei raggi Röntgen da parte della materia, ha mostrato che avvengono processi di diffusione nei quali quanti di luce urtano gli elettroni e trasferiscono ad essi una parte della loro energia, di modo che i quanti di luce mutano energia e direzione. Il fatto è per lo meno che i raggi Röntgen sperimentano a seguito della loro diffusione variazioni di frequenza (previste da Debye e da Compton) come le richiede l'ipotesi dei quanti. Tra poco apparirà inoltre un lavoro dell'indiano Bose sulla derivazione della formula di Planck, che per il seguente motivo è di particolare significato per la nostra concezione teorica: finora in tutte le derivazioni complete della formula di Planck si è fatto uso in qualche modo dell'ipotesi della struttura ondulatoria della radiazione. Così per esempio il fattore $8\pi h\nu^3/c^3$ di questa formula risulterebbe, secondo la nota derivazione di Ehrenfest-Debye, dal conteggio del numero di oscillazioni proprie della cavità, che appartengono all'intervallo di frequenza $d\nu$. Bose sostituisce questo conteggio fondato sulla rappresentazione della teoria ondulatoria con un calcolo della teoria dei gas, che egli applica al quanto di luce che si trova nella cavità, pensato alla maniera di una molecola. Si impone la domanda, se non si possano incorporare nella teoria dei quanti anche i fenomeni di diffrazione e di interferenza in modo tale che i concetti di campo della teoria rappresentino solo espressioni delle interazioni tra quanti,

[3]È naturale secondo l'analogia elettrodinamica proporre una relazione della forma $d\mathfrak{H} = -Cdm\,[\mathfrak{v},\mathfrak{r}]\,/r^3$, dove dm è una massa che si muove con la velocità $\mathfrak{v}$, $\mathfrak{r}$ ovvero $r = |\mathfrak{r}|$ indica la distanza del punto d'osservazione da questa massa (La formula può tuttavia considerarsi al massimo per moti ciclici e come prima approssimazione). In questo modo il rapporto tra il campo solare e il campo terrestre viene dell'ordine di grandezza giusto. La costante C ha la dimensione (costante gravitazionale)$^{1/2}$/velocità della luce. Da qui si può ricavare tentativamente l' ordine di grandezza della costante C. Se si sostituisce questo valore numerico nella formula precedente essa dà - applicata alla terra rotante - il corretto ordine di grandezza per il campo magnetico della terra. Questa coincidenza merita considerazione, ma può derivare dal caso.

mentre al campo non si attribuirebbe più alcuna realtà fisica indipendente. La circostanza importante, che nella teoria di Bohr la frequenza della radiazione emessa non è determinata da masse elettriche che eseguano moti periodici della stessa frequenza, può solo rafforzarci in questo dubbio sulla realtà indipendente del campo ondulatorio.

Ma perfino qualora queste possibilità maturassero in vere teorie non potremmo fare a meno in fisica teorica dell'etere, cioè del continuo dotato di proprietà fisiche; la relatività generale, al punto di vista fondamentale della quale i fisici si atterranno sempre, esclude un'interazione immediata a distanza; ogni teoria di azione per prossimità presuppone campi continui, e quindi anche l'esistenza di un "etere".

Teoria unitaria della gravitazione e dell'elettricità[1]

A. Einstein

Il convincimento circa l'unità di essenza del campo di gravitazione e del campo elettromagnetico si può oggi ritenere saldo tra i fisici teorici che lavorano nel'ambito della teoria della relatività generale. Tuttavia mi pare che non sia stata finora raggiunta una formulazione convincente di questa connessione. Anche riguardo alla mia dissertazione apparsa in questi Rendiconti (XVII, p.137, 1923) che era fondata interamente su idee di Eddington, sono del parere che non dia la vera soluzione del problema. Dopo incessanti ricerche negli ultimi due anni credo ora d'aver trovato la vera soluzione. La comunico nel seguito.

Il metodo utilizzato si può delineare come segue. Ho cercato prima di tutto l'espressione formale più semplice per la legge del campo gravitazionale in assenza del campo elettromagnetico, e poi la generalizzazione più naturale di questa legge. Di essa si mostra che contiene in prima approssimazione la teoria di Maxwell. Nel seguito propongo lo schema della teoria generale (§1) e mostro in che senso siano contenute in esso la legge del campo gravitazionale puro (§2) e la teoria di Maxwell (§3).

§1. La teoria generale.

Sia data nel continuo a quattro dimensioni una connessione affine, cioè un campo $\Gamma^{\mu}_{\alpha\beta}$, che definisca il trasporto infinitesimo di un vettore secondo la relazione

$$dA^{\mu} = -\Gamma^{\mu}_{\alpha\beta} A^{\alpha} dx^{\beta}. \tag{1}$$

Non si presupporrà la simmetria di $\Gamma^{\mu}_{\alpha\beta}$ rispetto ad α e β. Da queste quantità Γ si possono poi costruire in modo noto i tensori (di Riemann)

$$R^{\alpha}_{\mu,\nu\beta} = -\frac{\partial \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}}{\partial x_{\beta}} + \Gamma^{\alpha}_{\sigma\nu}\Gamma^{\sigma}_{\mu\beta} + \frac{\partial \Gamma^{\alpha}_{\mu\beta}}{\partial x_{\nu}} - \Gamma^{\sigma}_{\mu\nu}\Gamma^{\alpha}_{\sigma\beta}$$

e

$$R_{\mu\nu} = R^{\alpha}_{\mu,\nu\alpha} = -\frac{\partial \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}}{\partial x_{\alpha}} + \Gamma^{\alpha}_{\mu\beta}\Gamma^{\beta}_{\alpha\nu} + \frac{\partial \Gamma^{\alpha}_{\mu\alpha}}{\partial x_{\nu}} - \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}\Gamma^{\beta}_{\alpha\beta}. \tag{2}$$

Indipendentemente da questa connessione affine introduciamo una densità tensoriale controvariante $\mathfrak{g}^{\mu\nu}$, le cui proprietà di simmetria ugualmente lasciamo libere. Da entrambe costruiamo la densità scalare

$$\mathfrak{H} = \mathfrak{g}^{\mu\nu} R_{\mu\nu} \tag{3}$$

e postuliamo che le variazioni complete dell'integrale

$$\mathfrak{I} = \int \mathfrak{H} dx_1 dx_2 dx_3 dx_4$$

[1] Einheitliche Feldtheorie von Gravitation und Elektrizität, S.B. Preuss. Akad. Wiss. **22**, 414-419 (1925).

rispetto a $\mathfrak{g}^{\mu\nu}$ ed a $\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}$ come variabili indipendenti (non variate al contorno) si annullino.

La variazione rispetto a $\mathfrak{g}^{\mu\nu}$ produce le 16 equazioni

$$R_{\mu\nu} = 0, \tag{4}$$

la variazione rispetto a $\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}$ le 64 equazioni

$$\frac{\partial \mathfrak{g}^{\mu\nu}}{\partial x_\alpha} + \mathfrak{g}^{\beta\nu}\Gamma^{\mu}_{\beta\alpha} + \mathfrak{g}^{\mu\beta}\Gamma^{\nu}_{\alpha\beta} - \delta^{\nu}_{\alpha}\left(\frac{\partial \mathfrak{g}^{\mu\beta}}{\partial x_\beta} + \mathfrak{g}^{\sigma\beta}\Gamma^{\mu}_{\sigma\beta}\right) - \mathfrak{g}^{\mu\nu}\Gamma^{\beta}_{\alpha\beta} = 0. \tag{5}$$

Eseguiremo ora alcuni passaggi che ci permettono di sostituire le equazioni (5) con altre più semplici. Contraiamo il primo membro della (5) rispetto agli indici ν, α e rispettivamente μ, α; otteniamo le equazioni

$$3\left(\frac{\partial \mathfrak{g}^{\mu\alpha}}{\partial x_\alpha} + \mathfrak{g}^{\alpha\beta}\Gamma^{\mu}_{\alpha\beta}\right) + \mathfrak{g}^{\mu\alpha}\left(\Gamma^{\beta}_{\alpha\beta} - \Gamma^{\beta}_{\beta\alpha}\right) = 0, \tag{6}$$

$$\frac{\partial \mathfrak{g}^{\nu\alpha}}{\partial x_\alpha} - \frac{\partial \mathfrak{g}^{\alpha\nu}}{\partial x_\alpha} = 0. \tag{7}$$

Introduciamo inoltre le quantità $\mathfrak{g}_{\mu\nu}$, che siano i minori normalizzati di $\mathfrak{g}^{\mu\nu}$, e quindi soddisfino le equazioni

$$\mathfrak{g}_{\mu\alpha}\mathfrak{g}^{\nu\alpha} = \mathfrak{g}_{\alpha\mu}\mathfrak{g}^{\alpha\nu} = \delta^{\nu}_{\mu},$$

e moltiplichiamo la (5) per $\mathfrak{g}_{\mu\nu}$; otteniamo un'equazione che con l'innalzamento di un indice possiamo scrivere come segue

$$2\mathfrak{g}^{\mu\alpha}\left(\frac{\partial \lg\sqrt{\mathfrak{g}}}{\partial x_\alpha} + \Gamma^{\beta}_{\alpha\beta}\right) + \mathfrak{g}^{\mu\alpha}\left(\Gamma^{\beta}_{\alpha\beta} - \Gamma^{\beta}_{\beta\alpha}\right) + \delta^{\mu}_{\beta}\left(\frac{\partial \mathfrak{g}^{\beta\alpha}}{\partial x_\alpha} + \mathfrak{g}^{\alpha\sigma}\Gamma^{\beta}_{\alpha\sigma}\right) = 0, \tag{8}$$

dove si indica con $\mathfrak{g}$ il determinante di $\mathfrak{g}_{\mu\nu}$. Scriviamo le equazioni (6) e (8) nella forma

$$\mathfrak{f}^{\mu} = \frac{1}{3}\mathfrak{g}^{\mu\alpha}\left(\Gamma^{\beta}_{\alpha\beta} - \Gamma^{\beta}_{\beta\alpha}\right) = -\left(\frac{\partial \mathfrak{g}^{\mu\alpha}}{\partial x_\alpha} + \mathfrak{g}^{\alpha\beta}\Gamma^{\mu}_{\alpha\beta}\right) = -\mathfrak{g}^{\mu\alpha}\left(\frac{\partial \lg\sqrt{\mathfrak{g}}}{\partial x_\alpha} + \Gamma^{\beta}_{\alpha\beta}\right), \tag{9}$$

dove $\mathfrak{f}^{\mu}$ indica una certa densità tensoriale. È facile dimostrare che il sistema di equazioni (5) è equivalente al sistema di equazioni

$$\frac{\partial \mathfrak{g}^{\mu\nu}}{\partial x_\alpha} + \mathfrak{g}^{\beta\nu}\Gamma^{\mu}_{\beta\alpha} + \mathfrak{g}^{\mu\beta}\Gamma^{\nu}_{\alpha\beta} - \mathfrak{g}^{\mu\nu}\Gamma^{\beta}_{\alpha\beta} + \delta^{\nu}_{\alpha}\mathfrak{f}^{\mu} = 0 \tag{10}$$

assieme alla (7). Per abbassamento degli indici superiori, tenendo conto delle relazioni

$$\mathfrak{g}_{\mu\nu} = \frac{g_{\mu\nu}}{\sqrt{-g}} = g_{\mu\nu}\sqrt{-\mathfrak{g}},$$

dove $g_{\mu\nu}$ indica un tensore covariante, si ottiene:

$$-\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\alpha} + g_{\sigma\nu}\Gamma^{\sigma}_{\mu\alpha} + g_{\mu\sigma}\Gamma^{\sigma}_{\alpha\nu} + g_{\mu\nu}\phi_\alpha + g_{\mu\alpha}\phi_\nu = 0 \tag{10a}$$

dove ϕ_τ è un vettore covariante. Questo sistema assieme con i due dati precedentemente

$$\frac{\partial \mathfrak{g}^{\nu\alpha}}{\partial x_\alpha} - \frac{\partial \mathfrak{g}^{\alpha\nu}}{\partial x_\alpha} = 0 \tag{7}$$

e

$$0 = R_{\mu\nu} = -\frac{\partial \Gamma^\alpha_{\mu\nu}}{\partial x_\alpha} + \Gamma^\alpha_{\mu\beta}\Gamma^\beta_{\alpha\nu} + \frac{\partial \Gamma^\alpha_{\mu\alpha}}{\partial x_\nu} - \Gamma^\alpha_{\mu\nu}\Gamma^\beta_{\alpha\beta} \tag{4}$$

sono il risultato del procedimento di variazione nella forma più semplice. Sorprendente in questo risultato è la comparsa di un vettore ϕ_τ oltre al tensore $(g_{\mu\nu})$ e alle quantità $\Gamma^\alpha_{\mu\nu}$. Per ottenere accordo con le leggi note finora della gravitazione e dell'elettricità, secondo le quali la parte simmetrica di $g_{\mu\nu}$ va assunta come tensore metrico, e la parte antisimmetrica come campo elettromagnetico, si deve presupporre l'annullarsi di ϕ_τ, come faremo nel seguito. Si deve tuttavia tener presente per ulteriori ricerche (per esempio il problema dell'elettrone) che il principio di Hamilton non dà alcun sostegno all'annullarsi di ϕ_τ. Il porre a zero ϕ_τ porta ad una sovradeterminazione del campo, poiché per 16+64 variabili abbiamo 16+64+4 equazioni differenziali mutuamente indipendenti dal punto di vista algebrico.

§2. Il campo di gravitazione puro come caso particolare.

I $g_{\mu\nu}$ siano simmetrici. Le equazioni (7) sono soddisfatte identicamente. Per scambio di μ e ν nella (10a) e sottrazione si ottiene allora, con notazione trasparente:

$$\Gamma_{\nu,\mu\alpha} + \Gamma_{\mu,\alpha\nu} - \Gamma_{\mu,\nu\alpha} - \Gamma_{\nu,\alpha\mu} = 0. \tag{11}$$

Si indichi con Δ la componente di Γ antisimmetrica negli ultimi due indici, allora la (11) prende la forma

$$\Delta_{\nu,\mu\alpha} + \Delta_{\mu,\alpha\nu} = 0$$

ovvero

$$\Delta_{\nu,\mu\alpha} = \Delta_{\mu,\nu\alpha}. \tag{11a}$$

Questa proprietà di simmetria nei primi due indici è tuttavia incompatibile con l'antisimmetria negli ultimi due, come insegna la seguente serie di equazioni

$$\Delta_{\mu,\nu\alpha} = -\Delta_{\mu,\alpha\nu} = -\Delta_{\alpha,\mu\nu} = \Delta_{\alpha,\nu\mu} = \Delta_{\nu,\alpha\mu} = -\Delta_{\nu,\mu\alpha}.$$

Questa assieme alla (11a) richiede l'annullarsi di tutti i Δ. I Γ sono quindi simmetrici negli ultimi due indici come nella geometria riemanniana.

Le equazioni (10a) si possono allora risolvere in maniera nota, e si ottiene

$$\Gamma^\alpha_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} \left(\frac{\partial g_{\mu\beta}}{\partial x_\nu} + \frac{\partial g_{\nu\beta}}{\partial x_\mu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\beta} \right). \tag{12}$$

L'equazione (12) assieme alla (4) è la nota legge della gravitazione. Se nel §1 avessimo presupposto dall'inizio la simmetria di $g_{\mu\nu}$ avremmo ottenuto direttamente la (12) e la (4). Mi pare che questa sia la derivazione più semplice e più compatta delle equazioni della gravitazione per il vuoto. Il tentativo di comprendere la legge dell'elettromagnetismo con la generalizzazione, proprio di questa trattazione, dev'essere pertanto considerato come assai naturale.

Se non avessimo presupposto l'annullarsi di ϕ_τ, dall'imposizione della simmetria di $g_{\mu\nu}$ non avremmo potuto derivare la nota legge del campo gravitazionale puro nel modo prima dato. Se avessimo invece presupposto la simmetria di $g_{\mu\nu}$ e di $\Gamma^\alpha_{\mu\nu}$, l'annullarsi di ϕ_α sarebbe stato una conseguenza della (9) ovvero della (10a) e della (7); si sarebbe arrivati parimenti alla legge del campo gravitazionale puro.

§3. Relazione con la teoria di Maxwell.

Nel caso che vi sia un campo elettromagnetico, cioè che i $\mathfrak{g}^{\mu\nu}$ ovvero i $g_{\mu\nu}$ contengano una componente antisimmetrica, non si raggiunge una soluzione dell'equazione (10a) rispetto alle quantità $\Gamma^\alpha_{\mu\nu}$, cosa che rende significativamente più difficile la comprensione dell'intero sistema. La soluzione si raggiunge tuttavia quando ci restringiamo allo studio della prima approssimazione. Ci proponiamo di far questo, e di nuovo supponiamo l'annullarsi di ϕ_μ.

Facciamo quindi l'ipotesi che sia

$$g_{\mu\nu} = -\delta_{\mu\nu} + \gamma_{\mu\nu} + \phi_{\mu\nu}, \tag{13}$$

dove i $\gamma_{\mu\nu}$ sono simmetrici, i $\phi_{\mu\nu}$ antisimmetrici. I $\gamma_{\mu\nu}$ e i $\phi_{\mu\nu}$ sono infinitamente piccoli del prim'ordine. Quantità del second'ordine e di ordine superiore saranno trascurate. Allora anche i $\Gamma^\alpha_{\mu\nu}$ sono infinitamente piccoli del prim'ordine.

In queste circostanze il sistema di equazioni (10a) assume la forma più semplice

$$+\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\alpha} + \Gamma^\nu_{\mu\alpha} + \Gamma^\mu_{\alpha\nu} = 0. \tag{10b}$$

Con permutazione ciclica doppia degli indici μ, ν, α si ottengono altre due equazioni. Dalle tre equazioni i Γ si possono calcolare in modo analogo al caso simmetrico. Si ottiene

$$-\Gamma^\alpha_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{\alpha\nu}}{\partial x_\mu} + \frac{\partial g_{\mu\alpha}}{\partial x_\nu} - \frac{\partial g_{\nu\mu}}{\partial x_\alpha}\right). \tag{14}$$

L'equazione (4) si riduce al primo e al terzo termine. Se si sostituisce in essa l'espressione per $\Gamma^\alpha_{\mu\nu}$ data dalla (14) si ottiene

$$-\frac{\partial^2 g_{\nu\mu}}{\partial x_\alpha^2} + \frac{\partial^2 g_{\alpha\mu}}{\partial x_\nu \partial x_\alpha} + \frac{\partial^2 g_{\alpha\nu}}{\partial x_\mu \partial x_\alpha} - \frac{\partial^2 g_{\alpha\alpha}}{\partial x_\mu \partial x_\nu} = 0. \tag{15}$$

Prima di trattare ulteriormente la (15), sviluppiamo l'equazione (7). Dalla (13) segue immediatamente che con l'approssimazione che ci interessa si ha

$$\mathfrak{g}^{\mu\nu} = -\delta_{\mu\nu} - \gamma_{\mu\nu} - \phi_{\mu\nu}. \tag{16}$$

Tenendo conto di questo la (7) diventa

$$\frac{\partial \phi_{\mu\nu}}{\partial x_\nu} = 0. \tag{17}$$

Ora sostituiamo nella (15) l'espressione data nella (13) e tenendo conto della (17) otteniamo

$$-\frac{\partial^2\gamma_{\mu\nu}}{\partial x_\alpha^2}+\frac{\partial^2\gamma_{\mu\alpha}}{\partial x_\nu\partial x_\alpha}+\frac{\partial^2\gamma_{\nu\alpha}}{\partial x_\mu\partial x_\alpha}-\frac{\partial^2\gamma_{\alpha\alpha}}{\partial x_\mu\partial x_\nu}=0, \tag{18}$$

$$\frac{\partial^2\phi_{\mu\nu}}{\partial x_\alpha^2}=0. \tag{19}$$

Le equazioni (18), che notoriamente si possono semplificare mediante una scelta opportuna delle coordinate, sono le stesse di quelle in assenza di un campo elettromagnetico. Parimenti le equazioni (17), (19) per il campo elettromagnetico non contengono le quantità $\gamma_{\mu\nu}$ relative al campo gravitazionale. I due campi sono quindi - in accordo con l'esperienza - in prima approssimazione mutuamente indipendenti.

Le equazioni (17), (19) sono quasi completamente equivalenti alle equazioni di Maxwell per lo spazio vuoto. La (17) costituisce un sistema di Maxwell. L'espressione

$$\frac{\partial\phi_{\mu\nu}}{\partial x_\alpha}+\frac{\partial\phi_{\nu\alpha}}{\partial x_\mu}+\frac{\partial\phi_{\alpha\mu}}{\partial x_\nu},$$

che secondo Maxwell deve annullarsi, per la (17) e la (19) non si annulla necessariamente, ma ciò accade per la sua divergenza:

$$\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(\frac{\partial\phi_{\mu\nu}}{\partial x_\alpha}+\frac{\partial\phi_{\nu\alpha}}{\partial x_\mu}+\frac{\partial\phi_{\alpha\mu}}{\partial x_\nu}\right).$$

Le (17) e (19) sono pertanto essenzialmente identiche alle equazioni di Maxwell dello spazio vuoto.

Riguardo alla corrispondenza di $\phi_{\mu\nu}$ con i vettori elettrico e magnetico (rispettivamente $\mathfrak{e}$ e $\mathfrak{h}$) farò un'osservazione che pretende una validità indipendente dalla teoria qui esposta. Secondo la meccanica classica, che lavora con forze centrali, assieme ad ogni processo di moto V si dà il processo inverso $\bar{V}$, nel quale le stesse configurazioni vengono percorse con sequenza opposta. Questo processo di moto inverso $\bar{V}$ si ottiene anche formalmente dall'originario V se si esegue in quest'ultimo la sostituzione

$$x'=x,\ y'=y,\ z'=z,\ t'=-t.$$

Analogamente accade secondo la relatività generale nel caso di un campo di gravitazione puro. Per ottenere da una soluzione V la corrispondente soluzione $\bar{V}$ bisogna sostituire in tutte le funzioni di campo $t'=-t$ e oltre a ciò rovesciare il segno delle componenti di campo g_{14}, g_{24}, g_{34} e delle componenti dell'energia T_{14}, T_{24}, T_{34}. Il cambio di segno di g_{14}, g_{24}, g_{34} e di T_{14}, T_{24}, T_{34} avviene spontaneamente per la legge di trasformazione dei tensori.

Questa producibilità del processo inverso mediante trasformazione della coordinata temporale ($t'=-t$) la si deve considerare come una legge generale, la cui validità può essere richiesta anche per processi elettromagnetici. Per inversione del processo di moto degli elettroni cambia il segno delle componenti magnetiche, non di quelle elettriche. Si devono pertanto associare le componenti ϕ_{23}, ϕ_{31}, ϕ_{12}

all'intensità del campo elettrico, le componenti ϕ_{14}, ϕ_{24}, ϕ_{34} a quello magnetico. L'associazione invertita finora consueta dev'essere abbandonata. Si è finora evidentemente preferito, perché appare più comodo, esprimere la densità di corrente mediante un vettore (tensore di rango uno) piuttosto che con un tensore antisimmetrico di rango tre.

Nella teoria esposta qui la (7) ovvero la (17) è quindi l'espressione della legge dell'induzione magnetoelettrica. Ciò corrisponde anche al fatto che al secondo membro di questa equazione non compare alcuna espressione, che potrebbe essere interpretata come densità di corrente elettrica.

La prima domanda è ora se la teoria qui sviluppata lasci apparire in modo comprensibile l'esistenza di masse elettriche centrosimmetriche prive di singolarità. Ho affrontato questo problema assieme al Sig. Dr. J. Grommer, che in questi ultimi anni mi è stato fedelmente accanto in tutte le ricerche di calcolo nel campo della relatività generale. Egli e l'"International Education Board", che ha reso possibile la durevole collaborazione con il Sig. Grommer, sono qui sinceramente ringraziati.

(Comunicato il 4 settembre)

Teoria della relatività generale e legge del moto[1]

A. Einstein e J. Grommer

Introduzione

Se si considera la teoria di Newton della gravitazione come teoria di campo, si può scomporre il contenuto complessivo della teoria in due parti logicamente indipendenti: essa contiene infatti in primo luogo l'equazione di campo di Poisson (eventualmente estesa con un termine temporale), e in secondo luogo la legge del moto del punto materiale. La legge di Poisson prescrive il campo per un movimento dato della materia, l'equazione di moto di Newton il moto della materia sotto l'influenza di un campo dato.

Anche l'elettrodinamica di Maxwell-Lorentz riposa in modo analogo su due leggi fondamentali logicamente indipendenti l'una dall'altra, ossia in primo luogo sulle equazioni di campo di Maxwell-Lorentz, che determinano il campo a partire dal moto della materia elettricamente carica, e in secondo luogo sulla legge del moto per gli elettroni sotto l'influenza della forza di Lorentz del campo elettromagnetico.

Che le due leggi della teoria di Maxwell-Lorentz siano realmente indipendenti l'una dall'altra, può essere chiarito facilmente nel caso particolare di due elettroni a riposo. Il campo con il potenziale elettrostatico

$$\phi = \frac{\varepsilon_1}{r_1} + \frac{\varepsilon_2}{r_2}$$

soddisfa le equazioni di campo. Queste da sole non ci permettono di concludere che i due elettroni non possono stare in quiete (ma che sotto l'influenza della loro mutua interazione devono mettersi in moto).

Che le equazioni di campo di Maxwell-Lorentz non dicano nulla circa il moto degli elettroni, discende semplicemente dalla loro linearità. A un elettrone E_1 mosso a piacimento corrisponde infatti un campo generato da questi, determinato dalle equazioni di campo (f_1). Per un elettrone E_2 mosso parimenti in un qualsiasi altro modo, pure presente da solo, le equazioni di campo fissano il campo corrispondente (f_2). Se i due elettroni considerati sono presenti insieme e ad una distanza mutua finita, e se facciamo loro eseguire i moti considerati poc'anzi, essi determinano il campo ($f_1 + f_2$), che parimenti soddisfa le equazioni di campo. Quest'ultimo risultato discende dalla linearità delle equazioni di campo. Ma da qui scende pure che la legge del moto è logicamente indipendente dalle equazioni di campo.

Di questo dato di fatto del fondamento eterogeneo dell'elettrodinamica è particolarmente disturbante che, mentre il moto della particella carica è prescritto da un'equazione differenziale ordinaria, il comportamento del campo è descritto da un'equazione differenziale alle derivate parziali. Mie ha tentato di rimediare a questo difetto, cercando di costruire una teoria del continuo per la particella elettrica. In questa teoria le componenti della densità di corrente si dovrebbero trattare come funzioni continue che appartengono al "campo" come le componenti di campo elettromagnetiche, e mediante equazioni di campo aggiuntive si dovrebbe fissare anche il comportamento della densità di corrente in modo totalmente causale. Questo tentativo non ha portato finora ad alcun risultato, ma è rimasto un programma

[1]Allgemeine Relativitätstheorie und Bewegungsgesetz, S.B. Preuss. Akad. Wiss. **1**, 2-13 (1927).

imperativo (Weyl, Eddington) nell'ambito puramente elettrodinamico. L'idea che ne sta alla base è da intendere in generale così. L'intera realtà fisica è descritta da un campo privo di singolarità, che descrive non solo lo "spazio vuoto", ma anche le particelle materiali, e questa regolarità è governata per intero da equazioni differenziali alle derivate parziali. In questo modo Mie cercava di superare il dualismo summenzionato, che disturba ogni spirito sistematico.

Come appare la teoria della relatività generale, quando la si consideri da questo punto di vista? Esiste anche in essa il dualismo legge di campo - legge di moto? La situazione non è qui così semplice. Distingueremo diversi approcci.

Il primo approccio è ricalcato sulla teoria di Newton. Si accettano parimenti nella teoria della gravitazione

1. la legge di campo dello spazio vuoto ($\mathfrak{R}_i^k = 0$),
2. la legge del moto del punto materiale (legge della linea geodetica).

Il secondo approccio integra la legge di campo con l'introduzione del tensore energetico $\mathfrak{T}_i^k$ della materia (e del campo elettromagnetico):

$$(\mathfrak{R}_i^k - \frac{1}{2}\delta_i^k \mathfrak{R}) + \mathfrak{T}_i^k = 0.$$

Se si assume che non debba esistere alcuna singolarità, in questa equazione è contenuta una teoria che è l'analoga della teoria di Mie. La teoria richiede un completamento che non può essere ottenuto tramite il solo principio di relatività: occorre che i $\mathfrak{T}_i^k$ siano espressi mediante una qualche grandezza di campo (continua), e si dovranno enunciare le equazioni differenziali che determinano il comportamento di quest'ultima. Solo allora si avrebbe una teoria compiuta.

Ma anche senza quel completamento $\mathfrak{T}_i^k$ non è prescrivibile a piacere. Ciò deriva dal fatto che la divergenza (covariante) di $\mathfrak{R}_i^k - 1/2\delta_i^k\mathfrak{R}$ si annulla identicamente. $\mathfrak{T}_i^k$ deve quindi soddisfare alla condizione che la divergenza di questo tensore si annulli. Se si assume che la materia sia disposta entro "tubi d'universo" stretti, si ricava con una trattazione elementare il risultato che gli assi di tali "tubi d'universo" sono linee geodetiche (in assenza di campi elettromagnetici). Ciò significa: la legge del moto è conseguenza della legge di campo.

La cosa appare come se la teoria della relatività generale avesse già superato vittoriosamente quell'increscioso dualismo. Ciò sarebbe vero sia se noi avessimo già ottenuto la rappresentazione della materia con un campo continuo, o se per lo meno ci fossimo sincerati che si potrebbe ottenerla un giorno. Ma in proposito non si può proprio dir nulla. Tutti i tentativi dell'ultimo anno di rappresentare le particelle elementari della materia mediante campi continui sono falliti. Il sospetto che questa non sia affatto la strada giusta per la comprensione delle particelle materiali è divenuto in noi assai forte, dopo moltissimi tentativi inutili, dei quali non parlerò qui.

Ci si incammina così per la strada del considerare le particelle come punti singolari, ovvero come linee d'universo singolari. Ciò è suggerito anche dal fatto che tanto le equazioni del campo gravitazionale puro quanto le equazioni integrate dal campo elettromagnetico di Maxwell ($\mathfrak{T}_i^k$ =tensore dell'energia di Maxwell) possiedono semplici soluzioni a simmetria centrale, che contengono una singolarità.

Siamo condotti quindi ad un terzo approccio, che oltre al campo di gravitazione e al campo elettromagnetico non consente ulteriori variabili di campo (a prescindere forse dal "termine cosmologico") ma consente in cambio linee d'universo singolari.

Se accadesse che con questo approccio si dovessero prescrivere per le singolarità equazioni di moto apposite, indipendenti dalle equazioni di campo, come accade con la teoria di Maxwell-Lorentz, la strada si rivelerebbe poco attraente.

Invece è risultato verosimile che la legge del moto delle singolarità sia interamente fissata dalle equazioni di campo e dal carattere delle singolarità, senza che si debbano introdurre ulteriori ipotesi. Mostrar ciò è lo scopo della presente ricerca.

Alla possibilità che la legge del moto delle singolarità potesse esser contenuta nelle equazioni di campo della gravitazione avevamo pensato già da molto tempo. Ma il seguente argomento sembra opporsi e distoglierci. La legge di campo della gravitazione nei casi che capitano di fatto si lascia approssimare con grandissima accuratezza da una legge lineare. La legge lineare consente però, come quelle elettrodinamiche, singolarità in moto arbitrario. Appare naturale che si potrebbe procedere da tale soluzione approssimata mediante approssimazioni successive ad una soluzione esatta che differisse pochissimo da essa. Se ciò accadesse, sarebbe possibile un campo corrispondente alla soluzione esatta con un moto delle singolarità dato a piacere, e la legge del moto delle singolarità non sarebbe quindi contenuta nelle equazioni di campo. Che ciò tuttavia non possa accadere deriva da ricerche su campi di gravitazione statici a simmetria assiale, delle quali siamo debitori a Weyl, Levi Civita e Bach[2]. Questo si mostrerà subito, e subito dopo si tratterà il problema in generale. In questo lavoro ci limiteremo alla trattazione del campo gravitazionale puro, nonostante che l'introduzione del campo elettromagnetico non comporti nessuna difficoltà particolare.

§1. Singolarità in un campo (caso statico a simmetria assiale)

Secondo Weyl e Levi-Civita nel caso statico a simmetria assiale mediante l'introduzione delle "coordinate canoniche cilindriche" si può portare ds^2 nella forma

$$ds^2 = f^2 dt^2 - d\sigma^2,\ f^2 d\sigma^2 = r^2 d\vartheta^2 + e^{2\gamma}(dr^2 + dz^2), \tag{1}$$

dove f e γ dipendono solo da r e z, come pure la quantità ψ, legata ad f dall'equazione

$$f = e^{\psi}. \tag{2}$$

ψ soddisfa all'equazione del potenziale (di Poisson) in coordinate cilindriche

$$\Delta\psi = \frac{1}{r}\left(\frac{\partial(r\psi_z)}{\partial z} + \frac{\partial(r\psi_r)}{\partial r}\right) = 0, \tag{3}$$

dove gli indici significano derivazione rispetto a z e ad r rispettivamente. Se ψ è nota, da essa si può determinare γ mediante l'equazione

$$d\gamma = 2r\psi_z\psi_r dz + r(\psi_r^2 - \psi_z^2)dr, \tag{4}$$

dove $d\gamma$ per la (3) è sempre un differenziale totale.

[2] H. Weyl, Ann. d. Physik **54** (1918), pp. 117-145; Ann. d. Physik **59** (1919), pp. 185-188. Levi-Civita, ds^2 einsteiniani in campi newtoniani VIII Note, Rend. Acc. dei Lincei, 1919. R. Bach, Math Zeitschr. Vol. 13, fascicolo 1-2, 1922.

Perché il campo in un punto fuori dall'asse z sia regolare, basta la regolarità di ψ. Perché il campo metrico sia regolare anche sull'asse z, occorre inoltre che sull'asse z sia $\gamma = 0$; se ciò non accadesse, il rapporto tra la lunghezza della circonferenza e la lunghezza del diametro per un cerchio infinitamente piccolo tracciato attorno ad un punto dell'asse z e normale a tale asse si discosterebbe da π, e ciò significherebbe una singolarità della metrica. Questo si vede facilmente dalla (1).

Trattiamo ora la soluzione

$$\psi = -\frac{m}{\sqrt{r^2+z^2}}, \tag{5}$$

che soddisfa la (3). Come Weyl ha mostrato, questa soluzione non è rigorosamente a simmetria centrale; ma più m è piccolo, più essa approssima la simmetria centrale. L'uso della (4) dà

$$\gamma = -\frac{m^2}{2}\frac{r^2}{(r^2+z^2)^2}. \tag{6}$$

γ si annulla così sia sul semiasse positivo che sul semiasse negativo dell'asse z, come dev'essere. La metrica è euclidea all'infinito.

Trattiamo ora il caso in cui, oltre al campo che origina dalla singolarità ora considerata, sia presente anche un campo "esterno". Esprimiamo ciò ponendo

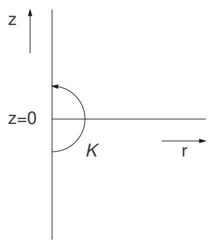
$$\psi = -\frac{m}{\sqrt{r^2+z^2}} + \overline{\psi}. \tag{5a}$$

$\overline{\psi}$ sia ugualmente funzione solo di r e di z, soddisfi all'equazione (3) e sia regolare nell'intorno di $r = z = 0$. A causa della simmetria assiale possiamo porre

$$\overline{\psi} = \alpha_0 + \alpha_1 z + G, \tag{7}$$

dove G raccoglie formalmente i termini di grado secondo e superiore in r e z. L'equazione (4) determina γ.

Risulta dalla (4) che γ è costante lungo l'asse z fintanto che ci si trova da un lato rispetto alla singolarità posta in $r = 0$. Possiamo pertanto porre $\gamma = 0$ sul semiasse z negativo, come è necessario secondo quanto detto prima. Perché la soluzione sia regolare eccetto che nel punto $r = z = 0$ occorre tuttavia che γ si annulli anche lungo il semiasse z positivo. Ciò accadrà se e solo se l'integrale $\int d\gamma$ esteso al semicerchio K ($r^2 + z^2$ =cost.) infinitamente piccolo mostrato nel disegno



qui accanto si annulla. Il calcolo conduce alla condizione[3]:

$$\alpha_1 = 0, \tag{8}$$

[3]Il valore di γ per z positivi è $4\alpha_1 m$. In ogni caso m e α_1 sono assai piccole rispetto all'unità. Se le consideriamo come quantità del primo "ordine", la grandezza che misura la violazione della regolarità della metrica che compare in generale è data da una quantità del second'ordine.

mentre per G non si dà alcuna restrizione.

Perché la metrica nell'intorno di un punto singolare rimanga regolare in presenza di un campo esterno occorre quindi che nel punto singolare l'intensità del campo esterno si annulli. In questo senso la condizione di equilibrio è contenuta nelle equazioni di campo. Sulla base di questo risultato si può ben giungere al convincimento che del tutto in generale la legge del moto delle singolarità sia contenuta nelle equazioni di campo. Lo si dimostrerà più in generale nel seguito.

§2. Una condizione di superficie equivalente alle equazioni di campo

L'idea generale, sulla quale si fondano i ragionamenti e i calcoli qui di seguito riportati, è la seguente. È ben noto che alle equazioni della gravitazione corrispondono equazioni differenziali lineari, le cui soluzioni differiscono assai poco, nei casi che si vengono di fatto a trattare, dalle soluzioni delle equazioni esatte. Ma d'altra parte abbiamo visto che non tutte le soluzioni delle equazioni approssimate corrispondono a soluzioni esatte. Per le equazioni approssimate esiste per esempio una soluzione, che descrive un punto materiale in quiete in un campo di gravitazione omogeneo; per le equazioni esatte una tale soluzione rigorosa non esiste, come abbiamo visto, almeno quando si richieda l'assenza di singolarità del campo metrico al di fuori del punto materiale. Dobbiamo cercare perciò condizioni aggiuntive che le soluzioni delle equazioni approssimate debbono soddisfare, perché siano approssimazioni di soluzioni esatte. Queste condizioni che derivano dalle equazioni di campo esatte devono riferirsi al campo nell'intorno immediato di una linea d'universo singolare. Perciò abbiamo bisogno di una condizione di superficie, analogamente a come già è stato proposto da Hilbert e Klein.

Consideriamo la funzione di Hamilton

$$\mathfrak{H} = \mathfrak{g}^{\mu\nu}\left(-\frac{\partial\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}}{\partial x_{\alpha}} + \frac{\partial\Gamma^{\alpha}_{\mu\alpha}}{\partial x_{\nu}} + \Gamma^{\alpha}_{\mu\beta}\Gamma^{\beta}_{\nu\alpha} - \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}\Gamma^{\beta}_{\alpha\beta}\right) = \mathfrak{g}^{\mu\nu}R_{\mu\nu} \tag{9}$$

e deriviamone le equazioni di campo, variandola indipendentemente rispetto a $\mathfrak{g}^{\mu\nu}$ e a $\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}$. Le equazioni di campo si scrivono allora

$$\frac{\partial\mathfrak{H}}{\partial\mathfrak{g}^{\mu\nu}} = 0, \tag{10}$$

$$\frac{\partial\mathfrak{H}}{\partial\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}} - \frac{\partial}{\partial x_{\tau}}\left(\frac{\partial\mathfrak{H}}{\partial\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu,\tau}}\right) = 0, \tag{11}$$

dove $\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu,\tau}$ indica la derivata $\partial\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}/\partial x_{\tau}$. Se si moltiplica la (10) per $\delta\mathfrak{g}^{\mu\nu}$, la (11) per $\delta\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}$, si ottiene dopo una trasformazione semplice l'equazione

$$\delta\mathfrak{H} - \frac{\partial}{\partial x_{\tau}}\left(\frac{\partial\mathfrak{H}}{\partial\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu,\tau}}\delta\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}\right) = 0. \tag{12}$$

Questa equazione vale per una variazione arbitraria di $\mathfrak{g}^{\mu\nu}$ e di $\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}$, quindi anche per una che si possa ottenere mediante una pura trasformazione infinitesima del sistema di coordinate (variazione per trasformazione). Per una tale variazione

$\delta\mathfrak{H}$ si annulla perché $\mathfrak{H}/\sqrt{-g}$ è un invariante, e perché per le equazioni di campo $\mathfrak{H}$ si annulla ovunque. Si ha inoltre

$$\delta\Gamma^\alpha_{\mu\nu} = -\Gamma^\alpha_{\sigma\nu}\xi^\sigma_{,\mu} - \Gamma^\alpha_{\mu\sigma}\xi^\sigma_{,\nu} + \Gamma^\sigma_{\mu\nu}\xi^\alpha_{,\sigma} - \Gamma^\alpha_{\mu\nu,\sigma}\xi^\sigma - \xi^\alpha_{,\mu\nu}, \tag{13}$$

dove ξ^σ è un vettore infinitesimo (assieme alle derivate $\xi^\sigma_{,\alpha}$ eccetera). Per la (9) si ha

$$\frac{\partial\mathfrak{H}}{\partial\Gamma^\alpha_{\mu\nu,\tau}} = -\mathfrak{g}^{\mu\nu}\delta^\tau_\alpha + \frac{1}{2}\left(\mathfrak{g}^{\mu\tau}\delta^\nu_\alpha + \mathfrak{g}^{\nu\tau}\delta^\mu_\alpha\right). \tag{14}$$

Tenendo conto delle (13) e (14) si ottiene dalla (12) l'equazione

$$0 = \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\begin{bmatrix} \left(\mathfrak{g}^{\mu\nu}\Gamma^\alpha_{\mu\nu,\tau} - \mathfrak{g}^{\mu\alpha}\Gamma^\nu_{\mu\nu,\tau}\right)\xi^\tau \\ -\mathfrak{g}^{\mu\nu}\left(-\Gamma^\alpha_{\tau\nu}\xi^\tau_{,\mu} - \Gamma^\alpha_{\mu\tau}\xi^\tau_{,\nu} + \Gamma^\tau_{\mu\nu}\xi^\alpha_{,\tau} - \xi^\alpha_{,\mu\nu}\right) \\ +\mathfrak{g}^{\mu\alpha}\left(-\Gamma^\nu_{\tau\nu}\xi^\tau_{,\mu} - \Gamma^\nu_{\mu\tau}\xi^\tau_{,\nu} + \Gamma^\tau_{\mu\nu}\xi^\nu_{,\tau} - \xi^\nu_{,\mu\nu}\right) \end{bmatrix}. \tag{15}$$

Questa equazione, che è equivalente alle equazioni di campo e che costituisce la base delle nostre considerazioni successive, la trasformeremo un po' in un modo che sarà presto chiaro. Trasformeremo la parte che deriva dal primo dei tre termini della parentesi nella (15) estraendo la derivazione rispetto ad x_τ in modo tale che compaiano $\Gamma^\alpha_{\mu\nu,\alpha}$ e $\Gamma^\nu_{\mu\nu,\alpha}$. Queste derivate dei Γ poi, con la relazione $\mathfrak{H} = 0$ valida a causa delle (9) e (10) le esprimeremo con le sole quantità Γ. La prima delle tre parti della (15) diventa quindi con trasformazioni semplici

$$\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\begin{bmatrix} \xi^\sigma\left\{(-\Gamma^\alpha_{\mu\nu}\mathfrak{g}^{\mu\nu}_{,\sigma} + \Gamma^\nu_{\mu\nu}\mathfrak{g}^{\mu\alpha}_{,\sigma}) - \delta^\alpha_\sigma(\mathfrak{g}^{\mu\nu}\Gamma^\tau_{\mu\rho}\Gamma^\rho_{\nu\tau} - \mathfrak{g}^{\mu\nu}\Gamma^\rho_{\mu\nu}\Gamma^\tau_{\rho\tau})\right\} \\ +\xi^\alpha_{,\sigma}(\mathfrak{g}^{\mu\nu}\Gamma^\sigma_{\mu\nu} - \mathfrak{g}^{\mu\sigma}\Gamma^\nu_{\mu\nu}) - \xi^\sigma_{,\sigma}(\mathfrak{g}^{\mu\nu}\Gamma^\alpha_{\mu\nu} - \mathfrak{g}^{\mu\alpha}\Gamma^\nu_{\mu\nu}) \end{bmatrix}. \tag{16}$$

La ragione di questa trasformazione sarà chiara al più presto.

Riassumiamo il nostro risultato nella forma seguente

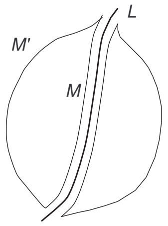
$$\frac{\partial\mathfrak{A}^\alpha}{\partial x_\alpha} = 0, \tag{15a}$$

$$\mathfrak{A}^\alpha = \mathfrak{t}^\alpha_\sigma\xi^\sigma + \mathfrak{B}^\alpha, \tag{15b}$$

$$\text{dove } \mathfrak{t}^\alpha_\sigma = (-\Gamma^\alpha_{\mu\nu}\mathfrak{g}^{\mu\nu}_{,\sigma} + \Gamma^\nu_{\mu\nu}\mathfrak{g}^{\mu\alpha}_{,\sigma}) - \delta^\alpha_\sigma(\mathfrak{g}^{\mu\nu}\Gamma^\tau_{\mu\rho}\Gamma^\rho_{\nu\tau} - \mathfrak{g}^{\mu\nu}\Gamma^\rho_{\mu\nu}\Gamma^\tau_{\rho\tau}) \tag{15c}$$

e $\mathfrak{B}^\alpha$ è una funzione lineare omogenea delle derivate prime e seconde di ξ^α rispetto alle coordinate, come segue dalle (15) e (16). $\mathfrak{t}^\alpha_\sigma$ è noto come "pseudotensore dell'energia" del campo gravitazionale; la legge di conservazione dell'energia del campo gravitazionale si ottiene dalla (15a), ponendo ξ^α costante.

L'integrazione della (15a) estesa ad una regione priva di singolarità dà una condizione di superficie. L'integrale di superficie di $\mathfrak{A}^\alpha$ sopra una tale ipersuperficie (tridimensionale) si annulla sempre, comunque sia scelto il vettore ausiliario (ξ^α) (a meno delle condizioni di continuità evidenti dalla derivazione). Si può anche far sì che $\mathfrak{A}^\alpha$ sia diverso da zero solo in una parte scelta a piacimento della superficie; da qui deriva in primo luogo il significato della condizione per lo studio dei



campi nell'immediata vicinanza di una linea singolare. Sia infatti L una linea di singolarità. Pensiamo che un tratto finito di questa sia avvolto in un "mantello" M infinitamente stretto, e anche in un mantello M' di ampiezza finita, congiunti tra loro agli estremi in modo tale da costituire insieme l'involucro di uno spazio duplicemente connesso, sul quale integriamo la (15a). Scegliamo gli ξ^σ in modo tale che essi si annullino assieme alle loro derivate ovunque sulla superficie al di là di una distanza assai piccola da L. Allora l'integrale di $\mathfrak{A}^\alpha$ esteso ad M' si annulla, eccetto che per i contributi che forniscono gli estremi che raggiungono M. Con una tale scelta di ξ^σ si ottiene un'asserzione circa il campo immediatamente prossimo ad L, cioè un'asserzione circa il moto del punto materiale.

§3. Conseguenze della condizione integrale

La più semplice conseguenza che possiamo trarre dalla (15a) riguarda l'equilibrio del punto singolare in un campo di gravitazione stazionario. Scegliamo questa linea singolare come asse x_4, e il vettore ξ in modo tale che le sue derivate prime e seconde si annullino sul mantello interno. Allora si può facilmente far sì che l'integrale esteso ai tratti terminali del mantello esterno si annulli, perché i due estremi danno contributi uguali ed opposti. L'integrale sul mantello interno si annulla da solo, e con esso l'integrale esteso ad una sezione spaziale x_4 =cost. Se chiamiamo $\mathfrak{t}_\sigma^\alpha$ la parentesi graffa nella (16), si annulla quindi l'integrale tridimensionale

$$(17) \qquad \int \left(\mathfrak{t}_\sigma^1 ds^{23} + \mathfrak{t}_\sigma^2 ds^{31} + \mathfrak{t}_\sigma^3 ds^{12}\right)$$

per ciascun σ, esteso ad una sezione del mantello M. Questa è proprio la condizione di equilibrio che si ottiene quando si sostituisca al punto singolare una distribuzione continua di flusso di energia-materia, come si è fatto finora nella ricerca in relatività generale. La consueta condizione per l'equilibrio di un punto materiale in un campo di gravitazione resta così immutata, qualora si sostituisca il punto materiale con una singolarità. Con l'aggiunta del termine elettromagnetico si potrebbe mostrare facilmente che questa vale anche per un punto materiale che possieda una carica elettrica e si trovi sotto l'azione di un campo di gravitazione e di un campo elettrico. Basta solo aggiungere nella (17) ai $\mathfrak{t}_\sigma^\nu$ le componenti del tensore d'energia elettromagnetico.

Per ottenere l'azione della forza sul punto singolare espressa mediante massa e intensità del campo esterno, dobbiamo fare una considerazione che è d'importanza per l'intero problema. Soluzioni rigorose delle equazioni della gravitazione si possono ottenere solo assai di rado con i nostri mezzi odierni, mentre si ottengono facilmente soluzioni per la prima approssimazione, poiché le equazioni differenziali corrispondenti sono lineari. Tale approssimazione è caratterizzata dal fatto che si pone

$$g_{\mu\nu} = -\delta_{\mu\nu} + \gamma_{\mu\nu}, \tag{18}$$

dove i $\gamma_{\mu\nu}$ sono piccoli rispetto ad 1 e i quadrati e i prodotti dei γ (e delle loro derivate) vengono trascurati; chiamiamo i $\gamma_{\mu\nu}$ quantità piccole del prim'ordine. Abbiamo ora visto che di certo non a tutte le soluzioni di quelle equazioni differenziali lineari corrispondono soluzioni esatte. Per esempio esiste una soluzione delle equazioni lineari che corrisponde ad una singolarità puntiforme a riposo in un campo di gravitazione omogeneo, mentre una soluzione rigorosa di questo tipo non esiste, perché le condizioni d'equilibrio derivanti dalle equazioni rigorose sono in questo caso violate. Davanti a questa situazione sorge la domanda: a quali condizioni aggiuntive deve soddisfare una soluzione approssimata, perché le corrisponda una soluzione esatta?

In ogni caso una tale condizione deve soddisfare al requisito che in essa la seconda approssimazione per le quantità $\gamma_{\mu\nu}$ e quelle più alte non intervengano, o comunque non intervengano allo stesso ordine che compete alla prima approssimazione di $\gamma_{\mu\nu}$. Qui sta la ragione del perché è stata fatta la trasformazione (16), ovvero del perché si deve fare, se si vuole arrivare ad una condizione di equilibrio utilizzabile. Siano infatti $\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}$ e $\mathfrak{g}^{\mu\nu}_{,\sigma}$ piccoli del prim'ordine, allora i $\mathfrak{t}^{\alpha}_{\sigma}$ sono piccoli del second'ordine. Se si pensa di aggiungere ai $g_{\mu\nu}$ un termine del second'ordine, i $\mathfrak{t}^{\nu}_{\sigma}$ saranno modificati per un termine del terz'ordine, che possiamo trascurare. Sebbene le (15)-(16) riguardino quantità del second'ordine, è consentito nel caso particolare dell'equilibrio trascurare in $g_{\mu\nu}$ le quantità del second'ordine. Possiamo pertanto introdurre per $\gamma_{\mu\nu}$ nelle (18) soluzioni delle equazioni approssimazione lineare delle equazioni di campo (10). Nell'ambito di questa approssimazione è permesso costruire additivamente il campo ($\gamma_{\mu\nu}$) nell'intorno di una singolarità con una parte "interna" $\overline{\gamma_{\mu\nu}}$ ed una parte "esterna" $\overline{\overline{\gamma_{\mu\nu}}}$, regolare nel punto singolare. Per $\overline{\gamma_{\mu\nu}}$ si può introdurre la soluzione statica, che scriviamo nella forma:

$$\begin{gathered} \overline{\gamma_{11}} = \overline{\gamma_{22}} = \overline{\gamma_{33}} = -\overline{\gamma_{44}} = -\frac{2m}{r} \left(= -\frac{2m}{\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}} \right), \\ \overline{\gamma_{\sigma\tau}} = 0 \quad (\text{per } \sigma \neq \tau). \end{gathered} \tag{19}$$

Per il calcolo della (17) si deve osservare inoltre che solo i prodotti di quantità del campo interno con quantità del campo esterno possono contribuire al risultato. I termini di secondo grado che riguardano solo il campo interno devono infatti cancellarsi per ragioni di simmetria; i termini che riguardano solo il campo esterno non danno alcun contributo all'integrale a causa della piccolezza della superficie d'integrazione.

Dal momento che abbiamo già adottato coordinate quasi euclidee, è conveniente scegliere come superficie d'integrazione una sfera ($r =$ cost.), di modo che la (17) prende la forma

$$\int \left(\mathfrak{t}^1_\sigma \frac{x_1}{r} + \mathfrak{t}^2_\sigma \frac{x_2}{r} + \mathfrak{t}^3_\sigma \frac{x_3}{r} \right) dS. \tag{17a}$$

Il calcolo dà $-8\pi m \frac{\partial \overline{\overline{\gamma_{44}}}}{\partial x_\sigma}$. Quindi come condizione di equilibrio del punto singolare si ha

$$\frac{\partial \overline{\overline{\gamma_{44}}}}{\partial x_\sigma} = 0. \tag{20}$$

È facile mostrare che l'equazione della linea geodetica nel caso dell'equilibrio in un campo stazionario porta, nell'approssimazione da noi considerata, alla stessa condizione.

Passiamo ora al caso che il punto singolare si trovi in un campo non stazionario. Anche in questo caso valgono l'equazione (15a) e la corrispondente condizione integrale. Trasformiamo a riposo il punto singolare, cosicché l'asse x_4 sia di nuovo la singolarità in quattro dimensioni. Scegliamo inoltre gli ξ^α in modo che siano diversi da zero lungo un tratto del mantello M, ma si annullino ovunque su M'. Siano inoltre gli ξ^α continui nell'intorno dell'asse x_4.

Poiché gli ξ^α devono annullarsi agli estremi temporali dell'integrale, non possiamo più sceglierli costanti. Pertanto $\mathfrak{B}^\alpha$ nella (15b) non si annulla. Si ha da qui una difficoltà particolare. Mentre infatti per $\mathfrak{t}_\sigma^\alpha$ la seconda approssimazione nei $g_{\mu\nu}$, come abbiamo visto, non ha importanza, quando ci si limiti nei $\mathfrak{t}_\sigma^\nu$ a termini del second'ordine, ciò non accade per $\mathfrak{B}^\alpha$. Per esempio, per valutare correttamente il termine $\mathfrak{g}^{\mu\nu}\Gamma^\alpha_{\tau\nu}\xi^\tau_{,\mu}$ fino a quantità del second'ordine, poiché $\mathfrak{g}_{\mu\nu}$ contiene un termine d'ordine zero $(\delta_{\mu\tau})$, occorre che $\Gamma^\alpha_{\tau\nu}$ sia noto esattamente fino a termini del second'ordine, e quindi anche i $g_{\mu\nu}$ devono esser noti fino al second'ordine. Non ci si potrebbe quindi accontentare di soluzioni delle equazioni di campo nell'approssimazione lineare.

Risulta tuttavia che questa difficoltà si può risolvere nel modo seguente. Si ponga

$$g_{\mu\nu} = -\delta_{\mu\nu} + \overline{\gamma_{\mu\nu}} + \overline{\overline{\gamma_{\mu\nu}}} + \epsilon_{\mu\nu}. \tag{18a}$$

I $\overline{\gamma_{\mu\nu}}$ sono ancora dati dalla (19), mentre i $\overline{\overline{\gamma_{\mu\nu}}}$ si riferiscono al campo esterno e sono continui nell'intorno della singolarità. $\epsilon_{\mu\nu}$ è una quantità del second'ordine, proporzionale alla "massa" m e al campo esterno. Appare ora che con una tale ipotesi le equazioni di campo possano essere corrette in seconda approssimazione, trascurando termini proporzionali a m^2 e trascurando termini quadratici nell'intensità del campo esterno $(\overline{\overline{\gamma_{\mu\nu}}})$, essendo la dipendenza degli $\epsilon_{\mu\nu}$ da r non del tipo r^{-1} (come accade per $\overline{\gamma_{\mu\nu}}$, ma del tipo r^0. Da ciò segue allora che il termine del second'ordine $\epsilon_{\mu\nu}$ non ha alcuna influenza sull'integrale di $\mathfrak{B}^\alpha$ esteso al mantello M infinitamente stretto.

Si può inoltre dimostrare facilmente che l'integrale di $\mathfrak{B}^\alpha$ esteso al mantello M si annulla con una scelta opportuna delle coordinate. Queste ultime possono infatti essere scelte chiaramente in modo tale che $(\overline{\overline{\gamma_{\mu\nu}}})$ si annulli sulla linea singolare (asse x_4) (assi x_1, x_2, x_3 perpendicolari alla linea singolare e unità delle coordinata uguale all'unità di lunghezza su tutti e quattro gli assi). Si assuma inoltre che per un tale sistema di coordinate (indistorto) la singolarità sia a simmetria centrale, cioè che il campo sia calcolabile con la (19). Questa non è propriamente affatto un'ipotesi necessaria. Ma così semplifichiamo molto il calcolo, e l'ipotesi è convalidata dal fatto che essa porta all'annullarsi dell'integrale di $\mathfrak{B}^\alpha$ esteso ad M per ogni scelta di ξ^α.

Si mostrerà lo sviluppo del conto per il primo termine di $\mathfrak{B}^\alpha$

$$\mathfrak{g}^{\mu\nu}\Gamma^\alpha_{\tau\nu}\xi^\tau_{,\mu}.$$

Sia $g_{\mu\nu}$ che $\mathfrak{g}^{\mu\nu}$ si comportano nell'intorno della singolarità, a prescindere da termini che rimangono finiti, come r^{-1}, e i Γ come r^{-2}. Solo la parte dei Γ proporzionale a r^{-2} può contribuire qualcosa al nostro integrale. Poiché inoltre i termini proporzionali ad m^2 e i termini quadratici in $\overline{\overline{\gamma}}$ non ci interessano, il termine di $\mathfrak{B}^\alpha$ di cui sopra può essere sostituito da

$$\overline{\overline{\mathfrak{g}^{\mu\nu}}}\,\overline{\overline{g^{\alpha\beta}}}\,\overline{\begin{bmatrix}\tau\nu\\ \beta\end{bmatrix}}\xi^\tau_{,\mu}.$$

Dobbiamo ritenere solo quei termini che per integrazione su una sfera infinitamente piccola diano qualcosa di finito.

Con la scelta delle coordinate di cui sopra, quest'espressione si può sostituire con

$$\overline{\begin{bmatrix}\tau\mu\\ \alpha\end{bmatrix}}\xi^\tau_{,\mu}$$

ovvero ulteriormente con

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\overline{\gamma_{\tau\alpha}}}{\partial x_\mu}+\frac{\partial\overline{\gamma_{\mu\alpha}}}{\partial x_\tau}-\frac{\partial\overline{\gamma_{\tau\mu}}}{\partial x_\alpha}\right)\xi^\tau_{,\mu}.$$

Questo va moltiplicato per x_α/r e integrato sulla superficie sferica. Il primo termine dà qualcosa di finito solo per $\alpha=\tau$, $\mu=\alpha$; il secondo per $\mu=\alpha$, $\tau=\alpha$; il terzo per $\tau=\mu$. Il risultato di questa integrazione è

$$\frac{8\pi m}{3}\xi^\alpha_{,\alpha}-4\pi m(\xi^\alpha_{,\alpha}-\xi^4_{,4}),$$

dove α va sommato da 1 a 3.

Se si esegue questo calcolo per tutti i termini di $\mathfrak{B}^\alpha$, si ottiene

$$\int\mathfrak{B}^\alpha\frac{x_\alpha}{r}dS=16\pi m\xi^4_{,4}.$$

Se si integra questa espressione su x_4 tra due estremi, ai quali ξ^α s'annulli, anche l'integrale si annulla completamente[4]. L'integrale sul mantello interno si riduce pertanto all'integrale su $\mathfrak{t}^\alpha_\sigma\xi^\sigma$, come nel caso stazionario. Da qui si conclude esattamente come prima che il moto del punto singolare è caratterizzato dalla linea geodetica determinata rispetto al campo "esterno" $\overline{\overline{\gamma_{\mu\nu}}}$.

Riepilogo

Se nel campo di gravitazione si assumono le masse come singolarità, la legge del moto è completamente determinata dalle equazioni di campo[5]. Se si approssima il campo totale con le soluzioni di equazioni lineari la legge del moto è quella della linea geodetica. In un lavoro successivo sarà dedotta dalle equazioni di campo la legge del moto per gli elettroni trattati come punti singolari.

È d'altra parte ben noto che in natura non si presentano masse atomiche elettricamente neutre, e quindi all'oggetto di questo lavoro non corrisponde direttamente un oggetto in natura. Il progresso qui conseguito sta nel fatto che si è dimostrato per la prima volta che una teoria di campo può contenere in sé una teoria del comportamento meccanico di discontinuità. Ciò può essere d'importanza per la teoria della materia, ovvero per la teoria dei quanti.

[4]Per il calcolo va notato solo che gli ultimi termini della riga 2 e della riga 3 della parentesi della (15) si annullano perché non danno alcun contributo del tipo r^{-2} all'integrando.

[5]Nel presente lavoro ciò è dimostrato completamente solo per il caso dell'equilibrio.

La propagazione della luce secondo la teoria della relatività[1]

W. Gordon

Nella prima parte di questo lavoro si mostra che l'influenza della materia sui processi elettromagnetici è equivalente all'influenza di un campo gravitazionale con il potenziale $ku_\mu u_\nu$ (k coefficiente di trasporto di Fresnel, u_μ tetravelocità). Con questa riduzione al vuoto si ottiene immediatamente il principio di minima azione e da qui in particolare il tensore dell'energia del campo elettromagnetico in corpi ponderabili. Si arriva così al tensore proposto da M. Abraham. Nella seconda parte si derivano le equazioni d'onda valide per tensori lineari arbitrari. Accanto alle espressioni che s'ottengono dalla teoria speciale per trasformazione (che secondo il principio di equivalenza varrebbero nei campi di gravitazione "artificiali" generati per trasformazione) intervengono inoltre dei termini che contengono il tensore di curvatura non contratto e contratto una volta. Malgrado ciò queste espressioni seguono le regole di calcolo delle quali si fa uso nella teoria speciale. Come si mostra nella terza parte, il campo, il tetrapotenziale e l'esapotenziale (tensore di Hertz) soddisfano quindi l'equazione delle onde generalizzata. Il vantaggio dell'esapotenziale consiste nel fatto che non si deve soddisfare oltre all'equazione d'onda nessun'altra condizione aggiuntiva. Esso sta rispetto all'esapolarizzazione esattamente nella stessa relazione del tetrapotenziale con la tetracorrente. Nella quarta parte si preciserà sotto quali ipotesi si può parlare di raggi di luce nel senso dell'ottica geometrica. Le linee d'universo dei raggi sono le linee geodetiche nulle in un campo di gravitazione che oltre a quello reale contiene quello che corrisponde alla tetravelocità della materia.

1.

Trasformazione delle equazioni elettromagnetiche. Le equazioni del campo elettromagnetico che costituiscono la base per lo studio della propagazione della luce, si scriveranno come al solito:

$$\frac{\partial F_{ik}}{\partial x_l}+\frac{\partial F_{kl}}{\partial x_i}+\frac{\partial F_{li}}{\partial x_k}=0, \tag{1}$$

$$\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial x_k}(\sqrt{g}H^{ik})=s^i, \tag{2}$$

$$H_i=\epsilon F_i, \tag{3}$$

$$u_iF_{kl}+u_kF_{li}+u_lF_{ik}=\mu\left(u_iH_{kl}+u_kH_{li}+u_lH_{ik}\right), \tag{4}$$

$$s_i+u_i\left(s^ku_k\right)=\sigma F_i, \tag{5}$$

[1] Zur Lichtfortpflanzung nach der Relativitätstheorie, Annalen der Physik **72**, 421-456 (1923).

dove per brevità si è posto

$$F_i = F_{ik} u^k, \ H_i = H_{ik} u^k. \tag{6}$$

u^i è la tetravelocità della materia

$$u^i = \frac{dx^i}{\sqrt{-ds^2}} \tag{7}$$

sicché

$$g_{ik} u^i u^k = u^i u_i = -1 \tag{8}$$

(l'elemento di linea ha una dimensione negativa e tre positive). Il significato delle restanti quantità è noto. Oltre a queste equazioni figurano le equazioni gravitazionali di Einstein disomogenee, nelle quali va introdotta la somma dei tensori dell'energia elastico ed elettromagnetico. Daremo nel seguito quest'ultimo.

Le equazioni (3) e (4) rappresentano insieme sei equazioni mutuamente indipendenti; esse esprimono che nel sistema a riposo (e per valori normali di g_{ik}) $\mathfrak{D} = \epsilon \mathfrak{E}$, $\mathfrak{B} = \mu \mathfrak{H}$. Risolviamole rispetto ad H_{ik}. Tenendo conto delle (3), (6) e (8), la moltiplicazione della (4) per u^i dà

$$\begin{aligned} -F_{kl} + u_k F_l - u_l F_k &= \mu \left(-H_{kl} + u_k H_l - u_l H_k \right) \\ &= \mu \left\{ -H_{kl} + \epsilon \left(u_k F_l - u_l F_k \right) \right\} \end{aligned}$$

ovvero

$$\mu H_{ik} = F_{ik} + (\epsilon\mu - 1)\left(u_i F_k - u_k F_i \right). \tag{9}$$

Dalla (9) si ritrovano a ritroso la (3) e la (4). Possiamo quindi sostituire la (3) e la (4) con la (9).

Nelle equazioni differenziali (1) e (2) non compare la tetravelocità. Le scriveremo in modo tale che anche il campo gravitazionale sparisca dalle equazioni aggiuntive. Sostituiamo le (1) e (2) con

$$\frac{\partial F_{ik}}{\partial x_l} + \frac{\partial F_{kl}}{\partial x_i} + \frac{\partial F_{li}}{\partial x_k} = 0, \tag{1'}$$

$$\frac{\partial \mathfrak{H}^{ik}}{\partial x^k} = \mathfrak{s}^i \tag{2'}$$

ed eseguiamo anche nelle equazioni restanti la sostituzione

$$\mathfrak{H}^{ik} = \sqrt{g} H^{ik}, \ \mathfrak{s}^i = \sqrt{g} s^i. \tag{10}$$

Quindi il campo elettromagnetico è caratterizzato da

$$F_{ik}, \ \mathfrak{H}^{ik}, \tag{11}$$

F_{ik} un tensore lineare, $\mathfrak{H}^{ik}$ una densità tensoriale lineare[2]; il campo gravitazionale da

$$g_{ik}; \tag{12}$$

lo stato elettrico della materia da

$$\epsilon,\ \mu,\ \sigma,\ \mathfrak{s}^i, \tag{13}$$

ϵ, μ, σ scalari, $\mathfrak{s}^i$ una densità vettoriale; lo stato meccanico della materia (mediante costanti meccaniche) e mediante le funzioni

$$x^i = x^i\left(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \tau\right), \tag{14}$$

che rappresentano le linee d'universo dei punti materiali (distinte tra loro mediante $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, mentre τ dà la posizione lungo la linea d'universo. Nelle equazioni elettriche e meccaniche compaiono solo le derivate di queste funzioni. La tetravelocità è una combinazione degli elementi determinanti (12) e (14)

$$u^i = \frac{\frac{\partial x^i}{\partial \tau}}{\sqrt{-g_{\mu\nu}\frac{\partial x^\mu}{\partial \tau}\frac{\partial x^\nu}{\partial \tau}}}. \tag{15}$$

Per la trasformazione da eseguirsi e per gli sviluppi ad essa associati è decisivo il fatto che nell'equazione "dielettrica" (9), determinante per la propagazione della luce in mezzi trasparenti, le quantità (12) e (15) compaiano solo nella combinazione

$$\gamma^{ik} = g^{ik} - \left(\epsilon\mu - 1\right) u^i u^k. \tag{16}$$

Per mostrarlo, scriviamo la (9) in forma controvariante

$$\mu H^{ik} = F^{ik} + \left(\epsilon\mu - 1\right)\left(u^i F^k - u^k F^i\right). \tag{9'}$$

Per la (10) il primo membro è $\mu\mathfrak{H}^{ik}/\sqrt{g}$; il primo termine a secondo membro $g^{ir}g^{ks}F_{rs}$. Per la (6) vale inoltre

$$F^k = g^{ks}F_{sr}u^r = -g^{ks}F_{rs}u^r, F^i = g^{ir}F_{rs}u^s,$$

sicché per il secondo membro della (9') otteniamo

$$F_{rs}\left\{g^{ir}g^{ks} - \left(\epsilon\mu - 1\right)\left(u^i u^r g^{ks} + u^k u^s g^{ir}\right)\right\}.$$

Se ora introduciamo nelle parentesi graffe anche il termine $(\epsilon\mu - 1)^2 u^i u^k u^r u^s$, che s'annulla per l'antisimmetria di F_{rs}, da questa parentesi s'avrà

$$\left(g^{ir} - \left(\epsilon\mu - 1\right) u^i u^r\right)\left(g^{ks} - \left(\epsilon\mu - 1\right) u^k u^s\right)$$

o per la (16) $\gamma^{ir}\gamma^{ks}$. Possiamo infine portare la (9') nella forma

$$\mu\mathfrak{H}^{ik} = \sqrt{g}\gamma^{ir}\gamma^{ks}F_{rs}. \tag{17}$$

[2]Secondo la terminologia di H. Weyl, Raum, Zeit, Materie, 4^a ed., pp. 51 e 98.

Per il seguito introduciamo le quantità γ_{ik} reciproche di γ^{ik}, che si determinano univocamente imponendo che sia $\gamma^{ir}\gamma_{kr} = \delta_k^i$:

$$\gamma_{ik} = g_{ik} + \left(1 - \frac{1}{\epsilon\mu}\right) u_i u_k. \tag{18}$$

In analogia con g, il negativo del determinante di γ_{ik} sarà indicato da γ. Il rapporto γ/g è un invariante (numeratore e denominatore vengono moltiplicati alla trasformazione per il quadrato del determinante funzionale). Possiamo quindi basarci sul caso $u_1 = u_2 = u_3 = 0$ e ottenere

$$-\gamma = \begin{vmatrix} g_{11} & \cdot & \cdot & g_{14} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ g_{41} & \cdot & \cdot & g_{44} + \left(1 - \frac{1}{\epsilon\mu}\right) u_4 u_4 \end{vmatrix} = -g - \left(1 - \frac{1}{\epsilon\mu}\right) g g^{44} u_4 u_4;$$

infatti $-gg^{44}$ è il minore relativo all'elemento (4,4) del determinante. Per la (8) è $g^{44}u_4u_4 = -1$; allora

$$\gamma = \frac{g}{\epsilon\mu}, \tag{19}$$

quindi la (17) assume la forma

$$\mathfrak{H}^{ik} = \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}}\sqrt{\gamma}\gamma^{ir}\gamma^{ks}F_{rs}, \tag{20}$$

e perciò la nostra asserzione è dimostrata.

Saremo quindi condotti ad introdurre al posto dell'elemento di linea ds con i coefficienti g_{ik} un nuovo elemento di linea $d\sigma$ con i coefficienti γ_{ik} dati dalla (18). Renderemo riconoscibili gli indici relativi a questo nuovo elemento di linea ponendoli entro parentesi (solo al posto di $g^{(i)(k)}$ ovvero di $g_{(i)(k)}$ scriviamo come prima γ^{ik} ovvero γ_{ik}). Gli elementi determinanti (11), (13), (14) restano naturalmente immodificati da questa trasformazione, e si ha

$$F_{(i)(k)} = F_{ik},\ \mathfrak{H}^{(i)(k)} = \mathfrak{H}^{ik},\ \mathfrak{s}^{(i)} = \mathfrak{s}^i. \tag{21}$$

Con queste quantità potremo quindi anche tralasciare le parentesi per gli indici. I tensori $H^{(i)(k)}$, $s^{(i)}$, che relativamente alla (18) corrispondono alle densità $\mathfrak{H}^{(i)(k)}$, $\mathfrak{s}^{(i)}$ secondo il modello (10), per la (19) saranno:

$$H^{(i)(k)} = \frac{\mathfrak{H}^{(i)(k)}}{\sqrt{\gamma}} = \frac{\sqrt{\epsilon\mu}\mathfrak{H}^{ik}}{\sqrt{g}} = \sqrt{\epsilon\mu}H^{ik},\ s^{(i)} = \sqrt{\epsilon\mu}s^i. \tag{22}$$

L'espressione $\gamma^{ir}\gamma^{ks}F_{rs}$ che compare nella (20), con le nostre definizioni si può evidentemente scrivere $F^{(i)(k)}$, e $\mathfrak{H}^{ik}/\sqrt{\gamma}$ è $H^{(i)(k)}$. La (20) appare allora nella forma simmetrica

$$\sqrt{\epsilon}F^{(i)(k)} = \sqrt{\mu}H^{(i)(k)}, \tag{23}$$

ovvero, quando si passa alle componenti covarianti relativamente alla metrica γ_{ik}

$$\sqrt{\epsilon}F_{(i)(k)} = \sqrt{\mu}H_{(i)(k)}. \tag{23'}$$

Si sostituisca nella (23) $H^{(i)(k)}$ secondo la (22) con $\sqrt{\epsilon\mu}H^{ik}$; si ottiene l'equazione $F^{(i)(k)} = \mu H^{ik}$ ed il confronto con la (9') mostra che per $F^{(i)(k)}$ vale la formula di trasformazione

$$F^{(i)(k)} = F^{ik} + (\epsilon\mu - 1)\left(u^i F^k - u^k F^i\right). \tag{24}$$

La (3) e la (4) vanno in se stesse quando si sostituiscono ϵ e μ con i loro valori reciproci, e contemporaneamente si scambiano F ed H. Con questi scambi l'equazione (9) equivalente alle (3) e (4) diverrà

$$\frac{F_{ik}}{\mu} = H_{ik} + \left(\frac{1}{\epsilon\mu} - 1\right)(u_i H_k - u_k H_i).$$

Se la si confronta con la (23') e si osserva che per la (21) $F_{(i)(k)} = F_{ik}$, s'ottiene per $H_{(i)(k)}$ la formula di trasformazione

$$H_{(i)(k)} = \sqrt{\epsilon\mu}\left[H_{ik} - \left(1 - \frac{1}{\epsilon\mu}\right)(u_i H_k - u_k H_i)\right]. \tag{25}$$

Con la (18) troviamo in generale per l'elemento di linea $d\sigma$

$$d\sigma^2 = g_{ik}dx^i dx^k + \left(1 - \frac{1}{\epsilon\mu}\right)\left(u_i dx^i\right)^2 = ds^2 + \left(1 - \frac{1}{\epsilon\mu}\right)\left(u_i dx^i\right)^2. \tag{26}$$

Per la direzione d'universo della materia si ha $dx^i = u^i\sqrt{-ds^2}$ e quindi per la (8) $d\sigma^2 = ds^2/(\epsilon\mu)$. Si ha quindi

$$u^{(i)} = \frac{dx^i}{\sqrt{-d\sigma^2}} = u^i\sqrt{\epsilon\mu}. \tag{27}$$

Le componenti covarianti $u_{(i)} = \gamma_{ir}u^{(r)}$, se si tien conto di nuovo della (8), saranno

$$u_{(i)} = \frac{u_i}{\sqrt{\epsilon\mu}}. \tag{28}$$

Per le (21_1) e (27) sarà

$$F_{(i)} = F_{(i)(k)}u^{(k)} = F_{ik}u^k\sqrt{\epsilon\mu} = F_i\sqrt{\epsilon\mu} \tag{29}$$

e per la (16)

$$F^{(i)} = \gamma^{ir}F_{(r)} = \left(g^{ir} - (\epsilon\mu - 1)\,u^i u^r\right)F_r\sqrt{\epsilon\mu} = F^i\sqrt{\epsilon\mu}, \tag{30}$$

poiché è $F_r u^r = 0$. In modo del tutto analogo si riconosce che

$$H^{(i)} = H^i, H_{(i)} = H_i. \tag{31}$$

Siamo ora nella posizione di poter riscrivere anche la legge di Ohm (5) col nuovo elemento di linea. La componente controvariante del primo membro della (5) è per le (22_2), (27) e (28)

$$\frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}}\left(s^{(i)}+u^{(i)}(u_{(k)}s^{(k)})\right),$$

la forma controvariante del secondo membro, secondo la (30), $\sigma F^{(i)}/\sqrt{\epsilon\mu}$. Quindi

$$s^{(i)}+u^{(i)}\left(u_{(k)}s^{(k)}\right)=\sigma F^{(i)}, \tag{32}$$

ovvero, scritta in forma covariante (relativamente a γ_{ik})

$$s_{(i)}+u_{(i)}\left(u^{(k)}s_{(k)}\right)=\sigma F_{(i)}. \tag{32'}$$

Per la $s_{(i)}$ che qui appare si ottiene, secondo le (18) e (22_2)

$$s_{(i)}=\gamma_{ir}s^{(r)}=\sqrt{\epsilon\mu}\left[s_i+\left(1-\frac{1}{\epsilon\mu}\right)u_i\left(u^r s_r\right)\right]. \tag{33}$$

Riassumendo possiamo quindi formulare la regola seguente:

Se si trasforma il campo gravitazionale da g_{ik} a γ_{ik} mediante la formula di trasformazione

$$\gamma_{ik}=g_{ik}+\left(1-\frac{1}{\epsilon\mu}\right)u_iu_k,$$

cioè se si costruiscono relativamente a questa metrica le componenti delle quantità F_{ik}, $\mathfrak{H}^{ik}$, $\mathfrak{s}^i$ che stanno a base delle equazioni differenziali del campo, allora le equazioni aggiuntive prendono la forma

$$\sqrt{\epsilon}F_{(i)(k)}=\sqrt{\mu}H_{(i)(k)},\ s_{(i)}+u_{(i)}\left(u^{(k)}s_{(k)}\right)=\sigma F_{(i)},\ u^{(i)}=\frac{dx^i}{\sqrt{-d\sigma^2}}.$$

La tetravelocità sparisce dall'equazione dielettrica, mentre la legge di Ohm mantiene la sua forma.

Per mezzi non conduttori ($\sigma=0$), non carichi ($u^k s_k=0$), omogenei (ϵ, μ costanti), le equazioni differenziali per il campo F sono identiche a quelle del vuoto puro in presenza del campo di gravitazione γ_{ik}.

In quest'ultimo caso possiamo attribuire alla nostra regola le due interpretazioni fisiche seguenti:

1. I fenomeni elettromagnetici nei corpi ponderabili sono gli stessi che nel vuoto, nel quale vi sia oltre al campo di gravitazione presente anche un campo aggiuntivo di potenziale $\left[1-\frac{1}{\epsilon\mu}\right]u_iu_k$. Nella teoria speciale, restringendosi a quantità del prim'ordine, risulta

$$\gamma_{\alpha\beta}=1,\ \gamma_{\alpha4}=-\left(1-\frac{1}{\epsilon\mu}\right)\frac{v_\alpha}{c},\ \gamma_{44}=-\frac{1}{\epsilon\mu},$$

$$\left(\alpha,\beta=1,2,3;\ v_\alpha=\frac{dx_\alpha}{dt}\right)$$

e l'elemento di linea $d\sigma$ sarà dato da

$$d\sigma^2 = dx_\alpha dx^\alpha - 2\left(1 - \frac{1}{\epsilon\mu}\right) v_\alpha dx^\alpha dt - \frac{c^2}{\epsilon\mu} dt^2. \tag{34}$$

La velocità della luce (come mostreremo nella quarta parte) sarà determinata in una direzione assegnata da $d\sigma^2 = 0$. Se le velocità della luce e del corpo sono parallele, dalla (34) risulta la nota formula

$$\frac{dx}{dt} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon\mu}} + \left(1 - \frac{1}{\epsilon\mu}\right) v, \tag{35}$$

ovvero con la stessa precisione

$$\frac{dx}{dt} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon\mu} - (\epsilon\mu - 1)\frac{v}{c}}. \tag{35'}$$

La (35') si può interpretare nel senso che la luce si propaga come in un mezzo in quiete con indice di rifrazione

$$\sqrt{\epsilon\mu} - (\epsilon\mu - 1)\frac{v}{c}.$$

La nostra interpretazione del teorema di trasformazione è una generalizzazione di questa interpretazione. Ci troviamo per così dire di fronte ad una "trasformazione alla quiete".

Nella fisica prerelativistica il termine $\left[1 - \frac{1}{\epsilon\mu}\right] v$ nella (35) si sarebbe indicato come "trasporto dell'etere". Possiamo dare alla nostra regola un significato analogo.

2. Scomponiamo lo spostamento d'universo PQ nella componente di trasporto PP' parallela alla tetravelocità

$$-\left(1 - \frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}}\right) u^i u_r dx^r \tag{36}$$

e nella componente d'etere $P'Q$

$$d\xi^i = dx^i + \left(1 - \frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}}\right) u^i u_r dx^r.$$

Per la distanza $P'Q$ secondo la *metrica esistente di fatto* si ha

$$g_{ik} d\xi^i d\xi^k = g_{ik} dx^i dx^k + \left(1 - \frac{1}{\epsilon\mu}\right) (u_r dx^r)^2,$$

che per la (26) è uguale alla distanza PQ secondo la metrica γ_{ik}. Se PQ è un raggio di luce nel corpo, allora è $d\sigma^2 = 0$, dalla quale discende $g_{ik} d\xi^i d\xi^k = 0$, cioè $P'Q$ è un raggio di luce nel vuoto (rispetto al campo di gravitazione effettivamente presente g_{ik}). I due si distinguono per il termine di trasporto (36). Sia P_1 la proiezione ortogonale di Q sulla direzione di u, di modo che $PP' = \left[1 - 1/\sqrt{\epsilon\mu}\right] PP_1$. L'analogo della teoria di Hertz sarebbe la scomposizione PP_1, P_1Q, che corrisponderebbe ad una velocità della luce nel vuoto infinitamente grande nel sistema a riposo (P_1 e Q

in esso sono simultanei), in totale accordo col principio di relatività galileiano, che sta alla base di questa teoria. Si potrebbe quindi designare il fattore $\left[1 - 1/\sqrt{\epsilon\mu}\right]$ come coefficiente di trasporto "relativistico"[3].

Dal paragone con le equazioni di campo del vuoto possiamo derivare direttamente il *principio di minima azione* e quindi secondo i risultati della teoria della relatività generale il *tensore dell'energia*. Prescindiamo dalla legge di Ohm, e assumiamo che $\mathfrak{s}^i$ sia una proprietà della materia come ϵ e μ [vedi (13)]. Allora rimane solo l'equazione aggiuntiva (20), che con le definizioni al riguardo possiamo anche scrivere

$$\mathfrak{H}^{ik} = \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}}\sqrt{\gamma}F^{(i)(k)}. \tag{20'}$$

La (20) e la (20') differiscono dalla condizione aggiuntiva che interviene con le equazioni differenziali (1') e (2') nel vuoto in presenza d'un campo gravitazionale γ_{ik} soltanto per il fatto che al posto di $\sqrt{\gamma}$ vi è il fattore $\sqrt{\epsilon/\mu}\sqrt{\gamma}$. Perciò, con questa sostituzione, dalla densità d'azione elettrica $L^{(e)}$ del principio d'azione per il vuoto (in presenza del campo gravitazionale γ_{ik})

$$\delta_\varphi W^{(e)} = \delta_\varphi \int L dS = 0, \; \left(dS = dx^1 dx^2 dx^3 dx^4\right), \tag{37}$$

$$L^{(e)} = \frac{1}{4}\sqrt{\gamma}F_{rs}F^{(r)(s)} - \mathfrak{s}^i\varphi_i, \tag{38}$$

dove il tetrapotenziale φ_i è in relazione col campo F mediante l'equazione

$$F_{ik} = \varphi_{k,i} - \varphi_{i,k}, \tag{39}$$

otteniamo senz'altro la densità d'azione elettrica in presenza di materia

$$L^{(e)} = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}}\sqrt{\gamma}F_{rs}F^{(r)(s)} - \mathfrak{s}^i\varphi_i, \tag{40}$$

ovvero per la (20')

$$L^{(e)} = \frac{1}{4}F_{rs}\mathfrak{H}^{rs} - \mathfrak{s}^i\varphi_i; \tag{40'}$$

si deve variare solo il tetrapotenziale (cosa che abbiamo indicato con δ_φ). Al contorno della regione sulla quale l'integrale della (37) va esteso, queste variazioni devono annullarsi[4].

[3] La prima interpretazione, poiché già subito confronta la situazione nel corpo in moto con quella per la quiete, è evidentemente quella che si attaglia allo spirito della teoria della relatività. Infatti invece di attribuire all'etere una proprietà della materia, cioè una velocità, si attibuisce piuttosto alla materia un campo di gravitazione, cioè una proprietà dell'etere.

[4] Il principio (37), (40') è stato proposto da H. Hensche, Diss. Berlin 1912; Ann. d. Phys. **42**, 887, 1913.

Per ottenere le equazioni per la materia dobbiamo introdurre oltre all'azione elettrica $W^{(e)}$ anche quella meccanica $W^{(m)}$. Nell'equazione variazionale

$$\delta_m W^{(e)} + \delta_m W^{(m)} = 0 \tag{41}$$

vanno variate solo le funzioni (14). (Ciò verrà indicato con δ_m, e al contorno dev'essere $\delta_m = 0$). Perciò la tetravelocità (15) subisce la variazione locale

$$\delta_m u^i = \frac{\partial \delta x^i}{\partial x^r} u^r - \frac{\partial u^i}{\partial x^r} \delta x^r + u^i u_\mu \frac{\partial \delta x^\mu}{\partial x^r} u^r + \frac{1}{2} u^i \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^r} u^\mu u^\nu \delta x^r. \tag{42}$$

(Questa quantità è naturalmente un vettore. Per far apparire ciò esplicitamente basta sostituire le derivate ordinarie con le derivate covarianti spiegate nella seconda parte[5]). Dallo spostamento della materia caratterizzato dalle funzioni δx^i saranno trasportati anche i corpuscoli elettrici in essa contenuti. Le variazioni di ϵ e μ (elettroni legati) e di $\mathfrak{s}^i$ (elettroni liberi) indotte dalla variazione δx^i si ottengono nel modo più semplice[6] dal carattere di trasformazione di queste quantità (ϵ, μ scalari, $\mathfrak{s}^i$ densità vettoriale controvariante)[7]:

$$\delta_m \epsilon = -\frac{\partial \epsilon}{\partial x^r} \delta x^r, \;\; \delta_m \mu = -\frac{\partial \mu}{\partial x^r} \delta x^r. \tag{43}$$

$$\delta_m \mathfrak{s}^i = \mathfrak{s}^r \frac{\partial \delta x^i}{\partial x^r} - \frac{\partial}{\partial x^r} \left(\mathfrak{s}^i \delta x^r \right) = \frac{\partial}{\partial x^r} \left(\delta x^i \mathfrak{s}^r - \delta x^r \mathfrak{s}^i \right) - \frac{\partial \mathfrak{s}^r}{\partial x^r} \delta x^i. \tag{44}$$

Dalla seconda forma di $\delta_m \mathfrak{s}^i$ si vede che $\delta_m \mathfrak{s}^i$ è una densità vettoriale (vedi Eq. (98) e (99)). Se presupponiamo la legge di conservazione dell'elettricità $\partial \mathfrak{s}^r / \partial x^r = 0$ che risulta dalla (2'), la (44) si semplifica in

$$\delta_m \mathfrak{s}^i = \frac{\partial}{\partial x^r} \left(\delta x^i \mathfrak{s}^r - \delta x^r \mathfrak{s}^i \right). \tag{44'}$$

Il vettore u^i invece non sarà trasportato dalla variazione δx^i, mentre la distanza di due punti materiali dello spaziotempo in generale cambia, poiché il campo metrico resta sul posto (vedi nota 10).

La densità d'azione $L^{(m)}$ che corrisponde a $W^{(m)}$ dipende[8] dalle derivate prime delle funzioni (14) e da g_{ik}.

Dalle equazioni elettriche (37) e dalle equazioni meccaniche (41) discende la legge dell'energia e dell'impulso. È noto[9] che la si dimostra senza far uso delle espressioni esplicite di $L^{(e)}$ ed $L^{(m)}$, considerando una variazione nella quale vengano trasportate tutte le quantità, anche il campo gravitazionale. Allora per l'invarianza di $W^{(e)}$ e di $W^{(m)}$ si ha identicamente

$$\delta_\varphi W^{(e)} + \delta_m W^{(e)} + \delta_g W^{(e)} = 0, \tag{45}$$

[5]Si ha $\delta_m u^i = u^r D_r \delta x^i - \delta x^r D_r u^i + u^i u_\mu u^r D_r \delta x^\mu$.
[6]H. Weyl, loc. cit.
[7]Prescindiamo dalla variabilità di ϵ e μ con lo stato di deformazione della materia.
[8]G. Herglotz, Ann. d. Phys. **36**, 493, 1911; G. Nordström, Versl. Amst. **25**, 836, 1916.
[9]H. Weyl, loc. cit. §28.

$$\delta_m W^{(m)} + \delta_g W^{(m)} = 0, \tag{46}$$

dove δ_g si riferisce alla variazione di g_{ik}. Poniamo

$$\delta_g L^{(e)} = \frac{1}{2}\mathfrak{T}_{ik}\delta g^{ik},\ \delta_g L^{(m)} = \frac{1}{2}\mathfrak{M}_{ik}\delta g^{ik}; \tag{47}$$

$\mathfrak{T}_{ik}$ ed $\mathfrak{M}_{ik}$ densità tensoriali d'energia elettrica e meccanica. In δ_g si deve sostituire al posto di δg^{ik}

$$\delta g^{ik} = g^{ir}\frac{\partial \delta x^k}{\partial x^r} + g^{kr}\frac{\partial \delta x^i}{\partial x^r} - \frac{\partial g^{ik}}{\partial x^r}\delta x^r. \tag{48}$$

(Si riconosce il carattere tensoriale di δg^{ik} sostituendo come sopra le derivate ordinarie con le derivate covarianti). Un'integrazione per parti dà

$$\delta_g W^{(e)} = -\int \left(\frac{\partial \mathfrak{T}_i^r}{\partial x^r} + \frac{1}{2}\mathfrak{T}_{\alpha\beta}\frac{\partial g^{\alpha\beta}}{\partial x^i}\right)\delta x^i dS \tag{49}$$

ed una formula analoga (49') per $\delta_g W^{(m)}$. Dalle (45), (46), (49) e (49') discende

$$\delta_\varphi W^{(e)} + \delta_m W^{(e)} + \delta_m W^{(m)} = \int \left(\frac{\partial \mathfrak{S}_i^r}{\partial x^r} + \frac{1}{2}\mathfrak{S}_{\alpha\beta}\frac{\partial g^{\alpha\beta}}{\partial x^i}\right)\delta x^i dS, \tag{50}$$

dove $\mathfrak{S}_{ik}$ è la somma delle due densità tensoriali d'energia. Le equazioni (37) e (41) hanno quindi per conseguenza la legge dell'energia e dell'impulso

$$\frac{\partial \mathfrak{S}_i^r}{\partial x^r} + \frac{1}{2}\mathfrak{S}_{\alpha\beta}\frac{\partial g^{\alpha\beta}}{\partial x^i} = 0. \tag{60}$$

In base alla nostra regola possiamo ora derivare facilmente il tensore elettrico dell'energia che risulta dalla (47_1) a partire da quello per il vuoto. Nel vuoto in presenza del campo di gravitazione γ_{ik} si ha

$$\delta_\gamma L^{(e)} = \frac{1}{2}\mathfrak{T}_{(i)(k)}\delta\gamma^{ik} \tag{61}$$

$$\mathfrak{T}_{(i)}^{(k)} = \sqrt{\gamma}(F_{ir}F^{(k)(r)} - \frac{1}{4}F_{rs}F^{(r)(s)}\delta_i^k). \tag{62}$$

Come prima, dobbiamo qui sostituire semplicemente $\sqrt{\gamma}$ con $\sqrt{\epsilon/\mu}\sqrt{\gamma}$ e otteniamo, tenendo conto ancora della (20')

$$\mathfrak{T}_{(i)}^{(k)} = F_{ir}\mathfrak{H}^{kr} - \frac{1}{4}F_{rs}\mathfrak{H}^{rs}\delta_i{}^k. \tag{63}$$

Per ottenere la relazione tra $\mathfrak{T}_i{}^k$ e $\mathfrak{T}_{(i)}^{(k)}$, dobbiamo semplicemente esprimere ancora $\delta\gamma^{ik}$ mediante δg^{ik}. Per la (15) risulta immediatamente[10]

$$\delta_g u^i = \frac{1}{2}u^i u^\mu u^\nu \delta g_{\mu\nu} = -\frac{1}{2}u^i u_\mu u_\nu \delta g^{\mu\nu}, \tag{64}$$

[10]Si sostituisca al posto di δg^{ik} l'espressione (48); sarà allora

$$\begin{aligned}\delta_g u^i &= -u^i u_\mu \frac{\partial \delta x^\mu}{\partial x^r}u^r + \frac{1}{2}u^i\frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x^r}u_\mu u_\nu \delta x^r\\ &= -u^i u_\mu \frac{\partial \delta x^\mu}{\partial x^r}u^r - \frac{1}{2}u^i\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^r}u^\mu u^\nu \delta x^r.\end{aligned}$$

Perciò gli ultimi due termini nella (42) si compensano:

$$\delta u^i = \delta_m u^i + \delta_g u^i = \frac{\partial \delta x^i}{\partial x^r}u^r - \frac{\partial u^i}{\partial x^r}\delta x^r. \tag{42'}$$

Questa è la variazione locale di u^i con trasporto completo per lo spostamento δx^i.

e quindi anche

$$\delta\gamma^{ik} = \delta\left\{g^{ik} - (\epsilon\mu - 1)\, u^i u^k\right\} = \delta g^{ik} + (\epsilon\mu - 1)\, u^i u^k u_\mu u_\nu \delta g^{\mu\nu}. \tag{65}$$

Se sostituiamo nella (61) e confrontiamo con la (47_1) troviamo

$$\mathfrak{T}_{ik} = \mathfrak{T}_{(i)(k)} + (\epsilon\mu - 1)\, u_i u_k \mathfrak{T}_{(\mu)(\nu)} u^\mu u^\nu. \tag{66}$$

Le componenti miste si trovano se si moltiplicano il primo membro ed il secondo termine del secondo membro per g^{km}, ed il primo termine del secondo membro per $\gamma^{kl} + (\epsilon\mu - 1)\, u^k u^l$:

$$\mathfrak{T}_i^{\ l} = \mathfrak{T}_{(i)}^{(l)} + (\epsilon\mu - 1)\left(\mathfrak{T}_{(i)(k)} u^k + u_i \mathfrak{T}_{(\mu)(\nu)} u^\mu u^\nu\right) u^l. \tag{66'}$$

Nel sistema a riposo (e per valori normali di g_{ik}) il fattore di $(\epsilon\mu - 1)\, u^l$ ha i valori $\mathfrak{T}_{(\alpha)(4)}$, 0 ($\alpha = 1, 2, 3$). Per la (66) in questo caso si ha $\mathfrak{T}_{\alpha 4} = \mathfrak{T}_{(\alpha)(4)}$. Dunque

$$\mathfrak{T}_i^{\ l} = \mathfrak{T}_{(i)}^{(l)} + (\epsilon\mu - 1)\left(\mathfrak{T}_{ik} u^k + u_i \mathfrak{T}_{\mu\nu} u^\mu u^\nu\right) u^l, \tag{67}$$

e quindi per la (63)

$$T_i^{\ k} = F_{ir} H^{kr} - \frac{1}{4} F_{rs} H^{rs} \delta_i^k - (\epsilon\mu - 1)\, \Omega_i u^k, \tag{67'}$$

dove abbiamo introdotto il "raggio a riposo"

$$\Omega^i = -\left(T_r^{\ i} u^r + u^i T_{\mu\nu} u^\mu u^\nu\right). \tag{68}$$

Se $\mathfrak{S}^\alpha$ è la corrente d'energia ($\alpha = 1, 2, 3$), $T_4^{\ \alpha} = -\mathfrak{S}^\alpha / c$, e nel sistema a riposo

$$\Omega^\alpha = \frac{\mathfrak{S}^\alpha}{c},\ \Omega^4 = 0,\ (\alpha = 1, 2, 3). \tag{68'}$$

Se si sostituisce la (67') nella (68), poiché $\Omega^r u_r = 0$ si trova

$$\Omega^i = F_l H^{il} - F_l H^l u^i = u_k F_l (H^{ik} u^l + H^{kl} u^i + H^{li} u^k). \tag{69}$$

Le formule (67') e (69) determinano il *tensore dell'energia proposto da Abraham.*[11]

[11] W. Pauli jr., Enz. d. math. Wiss. V 19, formula (303). Per le (50) e (60) vale anche il principio variazionale

$$\delta_\varphi W^{(e)} + \delta_m W^{(e)} + \delta_m W^{(m)} = 0, \tag{A}$$

dove in δ_φ il tetrapotenziale è trascinato dalla variazione. Allora sarà trascinato anche il campo F_{ik}, ma non il campo H_{ik}, poiché le u^i avvertono la variazione (42) e non la (42') della nota 10 (perché il campo metrico resta invariato). I. Ishiwara, Ann. d. Phys. **42**, 986, 1913, è partito dal principio (A), ha però richiesto (loc. cit. Eq. (15a)) che H sia trasportato dalla variazione. Ma allora lo stesso deve risultare per le u^i, cioè si parte dalla variazione δu^i (42'), che anche per g_{ik} costante *non è compatibile* con la (42). Ma se nell'identità (45) si sostituisce in $\delta_m W^{(e)}$ la variazione (42'), in $\delta_g W^{(e)}$ si deve variare g_{ik} solo finchè non interviene in u^i. Allora $\delta\gamma^{ik} = \delta g^{ik}$ e per la (61) si perviene alla densità tensoriale (63), che porta al tensore dell'energia introdotto da Minkowski (W. Pauli, loc. cit. formula (301) come infatti si ottiene anche dai calcoli espliciti di I. Ishiwara).

2.

L'*espressione delle onde.* Per semplicità ci occuperemo nel seguito della propagazione della luce in isolanti omogenei (scarichi). Per essi valgono, come abbiamo visto, le equazioni del vuoto in presenza del campo gravitazionale γ_{ik}. D'ora in poi tralasceremo anche le parentesi degli indici (e scriveremo talvolta anche g_{ik} al posto di γ_{ik}).

Nei problemi ottici si utilizzano al posto delle equazioni di campo le equazioni d'onda da esse derivate. Nella teoria della relatività speciale la propagazione ondosa di una grandezza A è data da un'equazione della forma:

$$\Box A = \frac{\partial^2 A}{\partial {x_1}^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial {x_2}^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial {x_3}^2} - \frac{\partial^2 A}{\partial {x_4}^2} = 0.$$

Questa somma di derivate seconde è l'applicazione ad A dell'operatore di Laplace tetradimensionale. Costruiremo subito gli operatori corrispondenti della teoria generale. Ciò s'ottiene facilmente sostituendo la derivazione ordinaria con la cosidetta derivazione covariante[12].

Se p è uno scalare, φ_i un vettore, T_{ik} un tensore, le derivate covarianti si scrivono

$$D_i p = p_i = \frac{\partial p}{\partial x_i}, \tag{70}$$

$$D_k \varphi_i = \varphi_{ik} = \frac{\partial \varphi_i}{\partial x^k} - \left\{ \begin{matrix} m \\ ik \end{matrix} \right\} \varphi_m, \tag{71}$$

$$D_m T_{ik} = T_{ikm} = \frac{\partial T_{ik}}{\partial x^m} - \left\{ \begin{matrix} n \\ im \end{matrix} \right\} T_{nk} - \left\{ \begin{matrix} n \\ km \end{matrix} \right\} T_{in} \tag{72}$$

e in generale per un tensore

$$\begin{aligned} D_m T_{i_1 i_2 \ldots i_s} = T_{i_1 i_2 \ldots i_s m} &= \frac{\partial T_{i_1 i_2 \ldots i_s}}{\partial x^m} \\ - \left\{ \begin{matrix} n \\ i_1 m \end{matrix} \right\} T_{n i_2 \ldots i_s} \cdots &- \left\{ \begin{matrix} n \\ i_s m \end{matrix} \right\} T_{i_1 i_2 \ldots i_{s-1} n}. \end{aligned} \tag{73}$$

L'indicazione della derivazione mediante un indice è comoda, poiché per definizione deve valere quanto segue:

1^a *regola.* La derivata controvariante si otterrà da quella covariante mediante il consueto passaggio dalle componenti covarianti a quelle controvarianti, cioè

$$D^m T_{i_1 i_2 \ldots i_s} = T_{i_1 i_2 \ldots i_s}{}^m = g^{mr} T_{i_1 i_2 \ldots i_s r}. \tag{74}$$

2^a *regola.* Allo stesso modo si passa dalla derivata delle componenti covarianti a quella delle controvarianti, cioè

$$\begin{aligned} &D_m T_{i_1 \ldots i_s}{}^{j_1 \ldots j_t}{}_{k_1 \ldots k_n} \\ &= g^{j_1 r_1} g^{j_2 r_2} \ldots g^{j_t r_t} D^m T_{i_1 \ldots i_s r_1 \ldots r_t k_1 \ldots k_n}. \end{aligned} \tag{75}$$

[12] Essa origina da E.B. Christoffel. Le regole enunciate da 1 a 4 sono di G. Ricci e T. Levi Civita, Math. Ann. **54**, 135, 1901. Per la dimostrazione del carattere tensoriale delle derivate covarianti vedasi M. v. Laue, Relativitätsprinzip II, §I9.

In base a queste due regole in un'equazione, che contenga queste derivate generali, si possono innalzare o abbassare gli indici corrispondenti allo stesso modo, sia che questi indici significhino la componente o la derivazione.

Per mezzo dell'identità

$$\frac{\partial g^{ik}}{\partial x^l} = -g^{nk}\left\{ \begin{matrix} i \\ nl \end{matrix} \right\} - g^{in}\left\{ \begin{matrix} k \\ nl \end{matrix} \right\} \tag{76}$$

al secondo membro della (75) si possono far comparire le corrispondenti componenti miste come al primo membro. Per esempio per le (72) e (75) si ha

$$D_l T^i{}_k = g^{is} T_{skl} = g^{is}\frac{\partial T_{sk}}{\partial x^l} - g^{is}\left\{ \begin{matrix} n \\ sl \end{matrix} \right\} T_{nk} - g^{is}\left\{ \begin{matrix} n \\ kl \end{matrix} \right\} T_{sn},$$

e per il primo termine a secondo membro si può scrivere per la (76)

$$\frac{\partial}{\partial x^l}\left(g^{is} T_{sk}\right) - \frac{\partial g^{is}}{\partial x^l} T_{sk} = \frac{\partial T^i{}_k}{\partial x^l} + g^{ns}\left\{ \begin{matrix} i \\ nl \end{matrix} \right\} T_{sk} + g^{in}\left\{ \begin{matrix} s \\ nl \end{matrix} \right\} T_{sk},$$

di modo che risulta la formula

$$D_l T^i{}_k = \frac{\partial T^i{}_k}{\partial x^l} + \left\{ \begin{matrix} i \\ nl \end{matrix} \right\} T^n{}_k - \left\{ \begin{matrix} n \\ kl \end{matrix} \right\} T^i{}_n.$$

In generale si ha

$$\begin{aligned} D_m T_{i_1\dots i_s}{}^{j_1\dots j_t}{}_{k_1\dots k_n} &= \frac{\partial}{\partial x^m} T_{i_1\dots i_s}{}^{j_1\dots j_t}{}_{k_1\dots k_n} \\ &- \sum_{a=1}^{s}\left\{ \begin{matrix} p \\ i_a m \end{matrix} \right\} T_{i_1\dots i_{a-1} p i_{a+1}\dots i_s}{}^{j_1\dots j_t}{}_{k_1\dots k_n} \\ &+ \sum_{a=1}^{t}\left\{ \begin{matrix} j_a \\ pm \end{matrix} \right\} T_{i_1\dots i_s}{}^{j_1\dots j_{a-1} p j_{a+1}\dots j_t}{}_{k_1\dots k_n} \\ &- \sum_{a=1}^{n}\left\{ \begin{matrix} p \\ k_a m \end{matrix} \right\} T_{i_1\dots i_s}{}^{j_1\dots j_t}{}_{k_1\dots k_{a-1} p k_{a+1}\dots k_n}. \end{aligned} \tag{77}$$

3^a *regola.* Per la derivazione di somma e prodotto valgono le regole di derivazione consuete.

Ciò segue dal fatto che in un sistema di coordinate geodetico, nel quale le derivate di g_{ik} e quindi anche i simboli a tre indici sono nulli, le derivate covarianti coincidono con le derivate ordinarie.

4^a *regola.* Lo scambio dell'ordine di derivazione non è permesso in generale, ma si ha

$$p_{ik} - p_{ki} = 0, \tag{78}$$

$$\varphi_{ikm} - \varphi_{imk} = R^h{}_{ikm}\varphi_h, \tag{79}$$

(80) $$T_{ikmn} - T_{iknm} = R^h{}_{imn} T_{hk} + R^h{}_{kmn} T_{ih}$$

e in generale

(81) $$T_{i_1..i_s mn} - T_{i_1..i_s nm} = R^h{}_{i_1 mn} T_{h i_2..i_s} + \cdots + R^h{}_{i_s mn} T_{i_1..i_{s-1} h},$$

dove

(82) $$R^i{}_{kmn} = \frac{\partial}{\partial x^m} \left\{ \begin{matrix} i \\ kn \end{matrix} \right\} - \frac{\partial}{\partial x^n} \left\{ \begin{matrix} i \\ km \end{matrix} \right\} + \left\{ \begin{matrix} i \\ ma \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} a \\ kn \end{matrix} \right\} - \left\{ \begin{matrix} i \\ na \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} a \\ km \end{matrix} \right\}$$

è il tensore di curvatura di Riemann-Christoffel. La (81) si verifica facilmente in un sistema geodetico. In un tale sistema si ha

$$T_{i_1..i_s mn} = \frac{\partial^2 T_{i_1..i_s}}{\partial x^m \partial x^n} - \sum_{a=1}^{s} T_{i_1...i_{a-1} p i_{a+1}...i_s} \frac{\partial}{\partial x^n} \left\{ \begin{matrix} p \\ i_a m \end{matrix} \right\},$$

$$T_{i_1..i_s mn} - T_{i_1..i_s nm} = \sum_{a=1}^{s} T_{i_1...i_{a-1} p i_{a+1}...i_s} \left(\frac{\partial}{\partial x^m} \left\{ \begin{matrix} p \\ i_a n \end{matrix} \right\} - \frac{\partial}{\partial x^n} \left\{ \begin{matrix} p \\ i_a m \end{matrix} \right\} \right).$$

Poniamo inoltre

(83) $$\left\{ \begin{matrix} (m) \\ (i)(k) \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} m \\ ik \end{matrix} \right\} + p^m_{ik},$$

dove secondo la convenzione introdotta nella prima parte i simboli a tre indici con gli indici tra parentesi si costruiscono a partire dai γ_{ik} esattamente come i simboli consueti dai g_{ik}. Se si sostituisce la (83) per esempio nella (72), s'ottiene immediatamente

(84) $$D_{(m)} T_{ik} = D_m T_{ik} - p^n{}_{im} T_{nk} - p^n{}_{km} T_{in},$$

dalla quale si riconosce che i p sono tensori. Ricorrendo ad un sistema geodetico si verifica immediatamente che

(85) $$p^m_{ik} = \gamma^{rm} \left((k u_k u_r)_i + (k u_r u_i)_k - (k u_i u_k)_r \right),\ k = 1 - \frac{1}{\epsilon\mu}.$$

Allo stesso modo

(86) $$R^{(i)}_{(k)(m)(n)} = R^i{}_{kmn} + D_m p^i{}_{kn} - D_n p^i{}_{km} + p^i{}_{ma} p^a{}_{kn} - p^i{}_{na} p^a{}_{km}.$$

5^a *regola.* Si ottengono le derivate covarianti relative a γ_{ik} da quelle relative a g_{ik} se si sostituiscono le derivate ordinarie con quelle covarianti (relativamente a g_{ik}) ed i simboli a tre indici con le quantità p. Il tensore di curvatura $R^{(i)}_{(k)(m)(n)}$ si ottiene da $R^i{}_{kmn}$ con l'aggiunta di alcuni termini che si ottengono da $R^i{}_{kmn}$ con la stessa sostituzione.

Dopo questi preliminari siamo in grado di riscrivere l'espressione del laplaciano. Si ha

(87) $$\Box p = p^k{}_k,$$

$$\Box_i \varphi = \varphi_i{}^k{}_k, \tag{88}$$

$$\Box_{ik} T = T_{ik}{}^l{}_l, \text{ ecc.}, \tag{89}$$

Si vede che queste espressioni hanno sempre lo stesso carattere tensoriale della grandezza alla quale l'operatore è applicato. Per uno scalare p secondo le (70) e (71) compaiono solo le derivate prime di g_{ik}. Quindi l'espressione delle onde per uno scalare coinciderà anche nella teoria della relatività generale con l'espressione di Laplace. Usiamo in generale la lettera maiuscola W per un'espressione delle onde e introduciamo le notazioni

$$\mathrm{Grad}_i\, p = \frac{\partial p}{\partial x^i}, \tag{90}$$

$$\mathrm{Div}\, \varphi = \varphi^k{}_k; \tag{91}$$

abbiamo quindi per uno scalare

$$\mathrm{Div}\,\mathrm{Grad}\, p = Wp. \tag{92}$$

Le espressioni (83), (84) ecc. contengono le derivate seconde di g_{ik}. Esse costituiranno ancora espressioni delle onde solo nell'ambito della teoria della relatività speciale o in campi di gravitazione con tensore di curvatura nullo; nel caso generale interverranno anche termini nei quali compare questo tensore. Determineremo questi termini aggiuntivi.

Vi arriviamo cercando di generalizzare la relazione (92) ai tensori. Questa generalizzazione è ben nota nella teoria speciale. Per un vettore in essa vale la formula[13]

$$\mathrm{Div}\,\mathrm{Rot}\, \varphi = \mathrm{Grad}\,\mathrm{Div}\, \varphi - W\varphi, \tag{93}$$

dove l'espressione delle onde W è identica a $\Box$. Gli operatori Rot e Div esistono anche nella teoria generale. Indichiamo con p, φ_i, F_{ik}, S_{ikm}, L_{ikmn} ecc. *tensori* lineari di grado[14] 0 (scalare), 1, 2, 3, 4 ecc.; allora i rotori sono definiti da

$$\mathrm{Rot}_i\, p = \frac{\partial p}{\partial x^i}, \tag{94}$$

$$\mathrm{Rot}_{ik}\, \varphi = \frac{\partial \varphi_k}{\partial x^i} - \frac{\partial \varphi_i}{\partial x^k}, \tag{95}$$

$$\mathrm{Rot}_{ikm}\, F = \frac{\partial F_{ik}}{\partial x^m} + \frac{\partial F_{km}}{\partial x^i} + \frac{\partial F_{mi}}{\partial x^k}, \tag{96}$$

---

[13] M. v. Laue, Relativitätstheorie I, formula (115).

[14] In uno spazio tetradimensionale la sequenza s'interrompe con L_{ikmn}. Per consentire di riconoscere meglio la relazione formale, nel seguito presupponiamo uno spazio n-dimensionale.

(97) $$\mathrm{Rot}_{ikmn}\, S = \frac{\partial S_{kmn}}{\partial x^i} - \frac{\partial S_{mni}}{\partial x^k} + \frac{\partial S_{nik}}{\partial x^m} - \frac{\partial S_{ikm}}{\partial x^n} \text{ ecc.,}$$

e le divergenze da

(98) $$\mathrm{Div}\, \varphi = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^k} \left(\sqrt{g} \varphi^k \right),$$

(99) $$\mathrm{Div}^i\, F = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^k} \left(\sqrt{g} F^{ik} \right),$$

(100) $$\mathrm{Div}^{ik}\, S = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^m} \left(\sqrt{g} S^{ikm} \right),$$

(101) $$\mathrm{Div}^{ikm}\, L = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^n} \left(\sqrt{g} L^{ikmn} \right) \text{ ecc..}$$

Al posto della notazione (94) si utilizza di solito il Grad introdotto nella (90). I tensori risultanti mediante queste forme sono ancora lineari. I nomi di rotore e divergenza discendono dal fatto che per essi valgono i teoremi generalizzati rispettivamente di Stokes e di Gauss[15]. Queste rappresentazioni dei rotori valgono solo per le componenti covarianti, quelle delle divergenze solo per le componenti controvarianti. Ma se sostituiamo nelle equazioni dalla (94) alla (97) le derivate ordinarie con le derivate covarianti, otteniamo le formule

(94') $$\mathrm{Rot}_i\, p = p_i,$$

(95') $$\mathrm{Rot}_{ik}\, \varphi = \varphi_{ki} - \varphi_{ik},$$

(96') $$\mathrm{Rot}_{ikm}\, F = F_{ikm} + F_{kmi} + F_{mik},$$

(97') $$\mathrm{Rot}_{ikmn}\, S = S_{kmni} - S_{mnik} + S_{nikm} - S_{ikmn} \text{ ecc.,}$$

dove ormai possiamo innalzare gli indici uguali nei due membri secondo le regole 1 e 2. Procediamo in modo analogo con le

(98') $$\mathrm{Div}\, \varphi = {\varphi^k}_k \text{ (vedi 91),}$$

[15]W. Pauli jun., loc. cit., p. 606. Per un "rotore" monodimensionale vale il teorema di Stokes

$$\int_{P_1}^{P_2} \mathrm{Rot}_i p dx^i = P_2 - P_1.$$

(99') $$\mathrm{Div}^i\, F = F^{ik}{}_k,$$

(100') $$\mathrm{Div}^{ik}\, S = S^{ikm}{}_m,$$

(101') $$\mathrm{Div}^{ikm}\, L = L^{ikmn}{}_n \text{ ecc.}$$

Abbassando gli indici otteniamo le componenti covarianti. I tensori da (94) a (101) sono rispettivamente identici ai tensori da (94') a (101'), poiché coincidono in un sistema geodetico.

Dalla rappresentazione da (94') a (101') risulta che non solo la definizione geometrica, ma anche la definizione *formale* del rotore e della divergenza può essere trasportata dall'analisi vettoriale ordinaria a quella generale. È noto che, se ∇ è l'operatore vettoriale $(\partial/\partial x^1, \partial/\partial x^2, \partial/\partial x^3)$, ed $\mathfrak{a}$ è un vettore

(102) $$\mathrm{rot}\mathfrak{a} = [\nabla\mathfrak{a}] \text{ (prodotto esterno)},$$

(103) $$\mathrm{div}\mathfrak{a} = \nabla\mathfrak{a} \text{ (prodotto interno)}.$$

Al posto di ∇ appare l'operatore D. Il prodotto esterno di un vettore (tensore lineare di primo grado) con i tensori lineari di grado 1, 2, 3 ecc. φ_i, F_{ik}, S_{ikm} ecc. è

(104) $$[A\varphi]_{ik} = A_i\varphi_k - A_k\varphi_i,$$

(105) $$[AF]_{ikm} = A_iF_{km} + A_kF_{mi} + A_mF_{ik},$$

(106) $$[AS]_{ikmn} = A_iS_{kmn} - A_kS_{mni} + A_mS_{nik} - A_nS_{ikm} \text{ ecc..}$$

Se il vettore A è in particolare uno spostamento $\xi_{(1)}$, e il tensore lineare di grado s col quale lo si moltiplica esternamente è un tensore spaziale ad s dimensioni costruito con gli s spostamenti $\xi_{(2)}$, $\xi_{(3)}$, … $\xi_{(s+1)}$, anche il prodotto esterno è il tensore spaziale ad $s+1$ dimensioni costruito con gli $s+1$ spostamenti $\xi_{(1)}$, $\xi_{(2)}$,… $\xi_{(s+1)}$. Si definisce in modo analogo il prodotto esterno di due tensori qualsiansi[16],

[16] Il prodotto esterno di di A_{ik} e B_{ik} è dato dallo sviluppo del determinante

$$[AB]_{ikmn} = \begin{vmatrix} \alpha_i & \alpha_k & \alpha_m & \alpha_n \\ \beta_i & \beta_k & \beta_m & \beta_n \\ \gamma_i & \gamma_k & \gamma_m & \gamma_n \\ \delta_i & \delta_k & \delta_m & \delta_n \end{vmatrix}.$$

secondo i minori delle prime due righe, ponendo nello sviluppo

$$\begin{vmatrix} \alpha_i & \alpha_k \\ \beta_i & \beta_k \end{vmatrix} = A_{ik}, \quad \begin{vmatrix} \gamma_m & \gamma_n \\ \delta_m & \delta_n \end{vmatrix} = B_{mn}.$$

Si vede subito che il prodotto esterno cambia segno per lo scambio dei fattori solo se entrambi i fattori sono di grado dispari.

ed in generale il prodotto esterno di due tensori che siano totalmente antisimmetrici negli indici da moltiplicarsi (mentre non c'è bisogno che ciò accada per gli indici rimanenti). Se per esempio $A_{\rho\sigma ik}$ è antisimmetrico in i e k, e $B_{\lambda mn}$ lo è in m ed n, indicheremo con

$$A_{\rho\sigma[i][k]}B_{\lambda[m][n]} \tag{107}$$

il prodotto esterno rispetto a questi indici.

Con questi chiarimenti la definizione formale generale del rotore di un tensore lineare M è

$$\mathrm{Rot}\, M = [DM]\,. \tag{108}$$

È noto che il prodotto interno (per tensori arbitrari, non necessariamente lineari) consiste nel processo di contrazione degli indici a moltiplicare. Si ha quindi

$$\mathrm{Div}\, M = DM, \tag{109}$$

dove la moltiplicazione va effettuata sull'ultimo indice di M.

Analogamente alle formule (92) e (93) assieme alla (94) definiamo in generale l'*espressione delle onde W per un tensore lineare arbitrario M* mediante

$$\mathrm{Div}\,\mathrm{Rot}\, M = \mathrm{Rot}\,\mathrm{Div}\, M \pm WM, \tag{110}$$

dove vale il segno superiore o l'inferiore a seconda che M sia di grado pari o dispari.

Per un tensore di primo grado φ_i, per le (88), (95'), (99') è

$$\mathrm{Div}_i\,\mathrm{Rot}\,\varphi = \varphi^k{}_{ik} - \varphi_i{}^k{}_k = \varphi^k{}_{ik} - \Box_i\varphi.$$

Per la quarta regola, formula (79), è

$$\varphi^k{}_{ik} = \varphi^k{}_{ki} + R^{hk}{}_{ik}\varphi_h = \varphi^k{}_{ki} - R_i{}^h\varphi_h,$$

dove $-R_h{}^k{}_{ik} = R^k{}_{hik} = R^k{}_{ihk}$ è il tensore di curvatura contratto. Tenendo conto delle (94') e (98') sarà quindi

$$\mathrm{Div}_i\,\mathrm{Rot}\,\varphi = \mathrm{Rot}_i\,\mathrm{Div}\,\varphi - \Box_i\varphi - R_i{}^h\varphi_h$$

e il confronto con la (110) insegna che

$$W_i\varphi = \Box_i\varphi + R_i{}^h\varphi_h. \tag{111}$$

È notevole che il termine aggiuntivo qui contenga solo il tensore di curvatura contratto.

Per un tensore di secondo grado F_{ik} per le (96') e (100') è

$$\mathrm{Div}_{ik}\,\mathrm{Rot}\, F = F_{ikl}{}^l + F_{kli}{}^l + F_{lik}{}^l. \tag{112}$$

Il primo termine per la (89) è $\Box_{ik}F$, gli altri due sono insieme della forma $K_{ki} - K_{ik}$, dove $K_{ik} = F_{ilk}{}^l$. Per la quarta regola, formula (80), si ha

$$K_{ik} = F_{il}{}^l{}_k + R^h{}_{lk}{}^l F_{ih} + R^h{}_{ik}{}^l F_{hl},$$

ovvero introducendo la divergenza (99') e il tensore di curvatura contratto

$$K_{ik} = (\mathrm{Div}_i F)_k + R_k{}^h F_{hi} + R^h{}_{ik}{}^l F_{hl},$$

sicché per la definizione (95') del rotore

$$K_{ki} - K_{ik} = \mathrm{Rot}_{ik}\mathrm{Div} F + R_i{}^h F_{hk} - R_k{}^h F_{hi} + \left(R^h{}_{ki}{}^l - R^h{}_{ik}{}^l\right) F_{hl}.$$

A seguito delle proprietà di simmetria di R_{ikmn} è infine ancora $R_{hkim} - R_{hikm} = R_{ikhm}$ e perciò la (112) va nella (110) per $M = F$ con

(113) $$W_{ik}F = \Box_{ik}F + R_i{}^h F_{hk} - R_k{}^h F_{hi} + R_{ik}{}^{hm} F_{hm}.$$

Per la (104), facendo uso della notazione (107), questa si può anche scrivere

(113') $$W_{ik}F = \Box_{ik}F + R_{[i]}^{\,h} F_{h[k]} + R_{ik}{}^{hm} F_{hm}.$$

Esattamente così si deriva per il tensore di terzo grado S_{ikm}

(114) $$\begin{aligned} W_{ikl}S = \Box_{ikl}S + R_i{}^h S_{hkl} + R_k{}^h S_{hli} + R_l{}^h S_{hik} \\ + R_{ik}{}^{hn} S_{hnl} + R_{kl}{}^{hn} S_{hni} + R_{li}{}^{hn} S_{hnk} \end{aligned},$$

che per la (105) si può riscrivere

(114') $$W_{ikl}S = \Box_{ikl}S + R_{[i]}^{\,h} S_{h[k][l]} + R_{[i][k]}{}^{hn} S_{hn[l]}.$$

La formula *generale* per l'espressione delle onde W del tensore lineare di grado s si scrive

(115) $$\begin{aligned} W_{i_1\ldots i_s}M = \Box_{i_1\ldots i_s}M + R_{[i_1]}{}^h M_{h[i_2]\ldots[i_s]} \\ + R_{[i_1][i_2]}{}^{hl} M_{hl[i_3]\ldots[i_s]} \end{aligned}.$$

Dalle forme da (94) a (101) dei rotori e delle divergenze segue immediatamente

(116) $$\mathrm{Div}\,\mathrm{Div}\,M = \mathrm{Rot}\,\mathrm{Rot}\,M = 0.$$

Se si prende quindi la divergenza, rispettivamente il rotore della (110), risulta

$$\mathrm{Div}\,\mathrm{Rot}\,\mathrm{Div}\,M = \mp\,\mathrm{Div}\,WM,\ \ \mathrm{Rot}\,\mathrm{Div}\,\mathrm{Rot}\,M = \pm\,\mathrm{Rot}\,WM.$$

Poiché il grado di un tensore cambia di un'unità formando la divergenza o il rotore, la (110) applicata a $\mathrm{Div}\,M$ e a $\mathrm{Rot}\,M$ dà

$$\mathrm{Div}\,\mathrm{Rot}\,\mathrm{Div}\,M = \mp W\,\mathrm{Div}\,M,\ \ \mathrm{Rot}\,\mathrm{Div}\,\mathrm{Rot}\,M = \pm W\,\mathrm{Rot}\,M.$$

Risulta quindi

(117) $$\mathrm{Div}\,WM = W\,\mathrm{Div}\,M,\ \ \mathrm{Rot}\,WM = W\,\mathrm{Rot}\,M.$$

L'espressione delle onde commuta con Rot *e* Div.

Nel caso di due tensori lineari di grado M ed N eguale (poniamo secondo), per il prodotto interno $M\Box N$, tenendo conto delle (98) e (98') per la 3^a regola risulta

$$\begin{aligned} M^{ik}\Box_{ik}N = M^{ik}N_{ik}{}^{l}{}_{l} &= \left(M^{ik}N_{ik}{}^{l}\right)_{l} - M^{ik}{}_{l}N_{ik}{}^{l} \\ &= \frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial x^{l}}\left(\sqrt{g}M^{ik}N_{ik}{}^{l}\right) - M^{ik}{}_{l}N_{ik}{}^{l}, \end{aligned}$$

e quindi

$$M\Box N - N\Box M = \frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial x^{l}}\left\{\sqrt{g}\left(M^{ik}N_{ik}{}^{l} - N^{ik}M_{ik}{}^{l}\right)\right\}. \tag{118}$$

Qui si può sostituire $\Box$ con W; infatti i termini aggiuntivi si elidono, come si riconosce dalle (111), (113), (114) e dalla formula generale (115), grazie alla simmetria di R_{ik} e rispettivamente di R_{ikmn} negli indici i, k e rispettivamente nelle coppie di indici (ik), (mn). Se integriamo la (118) su un volume tetradimensionale (elemento di volume $d\Sigma = \sqrt{g}dx^1dx^2dx^3dx^4$), si ottiene dal teorema di Gauss[17]

$$\int (MWN - NWM)d\Sigma = \int (MN_n - NM_n)\,dS \tag{119}$$

(dS elemento di superficie della superficie di contorno, n derivata *covariante* lungo la normale esterna). *Per l'espressione delle onde (e per l'operatore di Laplace) vale il teorema di Green*[18].

3.

Campo, tetrapotenziale, tensore di Hertz. Introducendo le definizioni (96) e (99) le equazioni differenziali per il campo F si scrivono (di nuovo tralasciando le parentesi degli indici)

$$\mathrm{Rot}\,F = 0,\;\; \mathrm{Div}\,F = 0. \tag{120}$$

Dalla (110) discende quindi

$$WF = 0. \tag{121}$$

WF è l'espressione (113) (nella quale s'ha da tener conto della regola 5). *Il campo si propaga in modo ondulatorio.* Per mezzo della regola di commutazione (117) si dimostra in modo del tutto analogo a quello della teoria classica[19] la proprietà inversa: una soluzione dell'equazione d'onda (121) che soddisfi ad un istante le equazioni di campo (120) lo fa sempre. La scomoda restrizione dei valori iniziali può essere attenuata o interamente rimossa, nel primo caso con l'introduzione del

---

[17] W. Pauli jun., loc. cit. formula (139a).

[18] Le densità $\sqrt{g}\Box$, $\sqrt{g}W$ rappresentano quindi espressioni differenziali autoaggiunte.

[19] Vedasi E. Cohn, Das elektromagnetische Feld, p. 410-412.

tetrapotenziale φ, nel secondo con l'introduzione dell'*esapotenziale* Z, che chiameremo anche *tensore di Hertz.* (Giustificheremo subito questi nomi). Come nella (39) poniamo

$$F = \mathrm{Rot}\varphi, \tag{122}$$

con la quale per la (116) la prima equazione (120) sarà soddisfatta. Dalla (93) segue allora

$$\mathrm{Div}\, F = \mathrm{Div}\,\mathrm{Rot}\,\varphi = \mathrm{Grad}\,\mathrm{Div}\,\varphi - W\varphi, \tag{123}$$

sicché anche la seconda equazione (120) sarà soddisfatta, quando φ obbedisce all'equazione d'onda

$$W_i\varphi = \Box_i\varphi + R_i{}^h\varphi_h = 0 \tag{124}$$

con la condizione aggiuntiva

$$\mathrm{Div}\,\varphi = 0. \tag{125}$$

Per la (116) ci si può infine liberare di questa ponendo

$$\varphi = \mathrm{Div}\, Z. \tag{126}$$

Per la regola di commutazione (117) risulta

$$W\varphi = W\,\mathrm{Div}\, Z = \mathrm{Div}\, WZ, \tag{127}$$

di modo che la (124) sarà soddisfatta quando lo è l'equazione

$$WZ = 0. \tag{128}$$

Dalle (122) e (126) si ottiene la rappresentazione del campo tramite l'esapotenziale

$$F = \mathrm{Rot}\,\mathrm{Div}\, Z, \tag{129}$$

ovvero per le (110) e (128)

$$F = \mathrm{Div}\,\mathrm{Rot}\, Z. \tag{129'}$$

Tetra- ed esapotenziale soddisfano l'equazione delle onde.

Un sistema di particelle cariche (nel seguito chiamate per brevità molecola) di carica complessiva e secondo la teoria della relatività speciale genera nel punto d'universo P (x^1, x^2, x^3, x^4) (per il resto di questa parte ci fondiamo sulla teoria elettronica del vuoto) in prima approssimazione un tetrapotenziale[20]

$$\varphi_i = \frac{eu_i}{R},\ R = -(x_r - \xi_r)u^r \tag{130}$$

[20] M. v. Laue, Relativitätstheorie I, formula (218); W. Pauli jun., loc. cit., formula (238a).

(ξ_r, u_r coordinata e tetravelocità della molecola all'intersezione della sua linea d'universo con il cono del passato $(x_r - \xi_r)(x^r - \xi^r) = 0$ di P. In luogo del tempo proprio s possiamo scegliere come nella (14) un parametro arbitrario τ, mediante il quale sarà determinata la posizione della molecola lungo la sua linea d'universo. La radice che compare nella (15) si elide al numeratore ed al denominatore e possiamo scrivere

(130')
$$\varphi_i = \frac{e}{R}\frac{d\xi_i}{d\tau},\ R = -(x_r - \xi_r)\frac{d\xi^r}{d\tau}.$$

Se si annulla la carica totale e, la molecola è *polarizzata elettromagneticamente* (la separazione in polarizzazione elettrica e magnetica dipende dalla separazione in spazio e tempo). In questo caso la (130') non basta, ma occorre avanzare d'un passo nell'approssimazione. Per la (126) Z precede φ di un grado di derivazione. Supporremo quindi che in analogia con la (130') *l'esapotenziale di un dipolo elettromagnetico* sia rappresentato dalla formula

$$Z_{ik} = \frac{m_{ik}}{R}$$

(in prima approssimazione, nel caso che i momenti elettromagnetici m non si annullino). Se dividiamo in spazio e tempo secondo lo schema

$$\begin{aligned} F_{14}\ F_{24}\ F_{34},\ F_{23}\ F_{31}\ F_{12} &= \mathfrak{E},\ \mathfrak{H}, \\ \varphi_1\ \varphi_2\ \varphi_3\ \varphi_4 &= \mathfrak{A},\ \varphi, \\ Z_{14}\ Z_{24}\ Z_{34},\ Z_{23}\ Z_{31}\ Z_{12} &= -\mathfrak{Z},\ \mathfrak{Z}', \\ m_{14}\ m_{24}\ m_{34},\ m_{23}\ m_{31}\ m_{12} &= -\mathfrak{p},\ \mathfrak{m}, \end{aligned}$$

$\mathfrak{E}$, $\mathfrak{H}$ intensità di campo elettrica e magnetica, $\mathfrak{A}$, φ potenziali vettore e scalare, $\mathfrak{Z}$, $\mathfrak{p}$ vettori spaziali polari, $\mathfrak{Z}'$, $\mathfrak{m}$ vettori spaziali assiali. Pertanto la (126), e le (129), (129') si suddividono nelle equazioni

(126')
$$\mathfrak{A} = \frac{\dot{\mathfrak{Z}}}{c} + \mathrm{rot}\mathfrak{Z}',\ \varphi = -\mathrm{div}\mathfrak{Z},$$

(129")
$$\mathfrak{E} = \mathrm{rot\ rot}\mathfrak{Z} - \frac{1}{c}\dot{\mathfrak{Z}}',\ \mathfrak{H} = \frac{1}{c}\mathrm{rot}\dot{\mathfrak{Z}} + \mathrm{rot\ rot}\mathfrak{Z}'.$$

Dalla (128) risulta la consueta equazione delle onde per $\mathfrak{Z}$ e $\mathfrak{Z}'$. Ma, se la molecola è a riposo ($d\xi^1/d\tau = d\xi^2/d\tau = d\xi^3/d\tau = 0$), la (131) si suddivide in

(131')
$$\mathfrak{Z} = \frac{\mathfrak{p}\left(t - \frac{r}{c}\right)}{r},\ \mathfrak{Z}' = \frac{\mathfrak{m}\left(t - \frac{r}{c}\right)}{r},\ (r\text{=distanza } P\text{-molecola}).$$

Se $\mathfrak{m}$ e perciò $\mathfrak{Z}'$ sono uguali a zero, come si riconosce dalle (126'), (129") e (131'), $\mathfrak{Z}$ è uguale al *vettore di Hertz* per una molecola polarizzata *elettricamente* di momento $\mathfrak{p}$[21]. Se invece $\mathfrak{p} = \mathfrak{Z} = 0$, si otterranno dalle (126'), (129") assieme

[21] Vedasi per esempio M. Planck, Einführung in die Theorie der Elektrizität und des Magnetismus. §87, 88.

alla (131') il potenziale ed il campo di una molecola polarizzata *magneticamente* di momento $\mathfrak{m}$[22]. $\mathfrak{Z}'$ è la controparte magnetica di $\mathfrak{Z}$. *L'esapotenziale è la sintesi tetradimensionale dei vettori di Hertz elettrico e magnetico.*

Daremo il tensore di Hertz per una molecola scarica qualsiasi e così facendo confermeremo la formula (131). Sia

$$\eta^i(\tau, \epsilon) = \xi^i(\tau) + \epsilon\delta\xi^i, \ \ \epsilon = 1 \tag{132}$$

la linea d'universo di una particella carica di carica e, $\xi^i(\tau)$ la linea d'universo del baricentro della molecola, e quindi le $\delta\xi^i$, funzioni di τ, coordinate relative della particella. L'introduzione formale del fattore ϵ serve in modo noto a trasformare lo sviluppo rispetto alle $\delta\xi^i$ e loro derivate rispetto a τ nello sviluppo rispetto ad ϵ. (Successivamente si ripone ϵ uguale ad 1). Per la (130') il tetrapotenziale della particella è

$$\varphi_i = \frac{e}{R}\frac{\partial \eta_i}{\partial \tau}, \ \ R = -(x_r - \eta_r)\frac{d\eta^r}{d\tau}. \tag{133}$$

dove τ è la funzione di ϵ e delle coordinate x^1, x^2, x^3, x^4 di P che risulta dall'equazione

$$(x_r - \eta_r)(x^r - \eta^r) = 0. \tag{134}$$

I secondi membri delle (133) che originalmente (essendo le η^i le funzioni (132) di ϵ e τ) sono funzioni $\psi_i(\tau, \epsilon, x^1, x^2, x^3, x^4)$, si trasformano per la sostituzione di τ in funzioni $\phi_i(\epsilon, x^1, x^2, x^3, x^4)$:

$$\psi_i(\tau, \epsilon, x^1, x^2, x^3, x^4) = \phi_i(\epsilon, x^1, x^2, x^3, x^4). \tag{135}$$

Per sviluppare secondo ϵ dobbiamo formare le derivate $\partial\phi/\partial\epsilon$, $\partial^2\phi/\partial\epsilon^2$ eccetera. La derivazione della (134) e della (135) dà immediatamente

$$\frac{\partial \tau}{\partial x^k} = -\frac{x_k - \eta_k}{R}, \ \ \frac{\partial \tau}{\partial \epsilon} = \frac{x_r - \eta_r}{R}\frac{\partial \eta^r}{\partial \epsilon} = -\frac{\partial \tau}{\partial x^r}\frac{\partial \eta^r}{\partial \epsilon}, \tag{136}$$

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial \epsilon} = \frac{\partial \psi_i}{\partial \epsilon} + \frac{\partial \psi_i}{\partial \tau}\frac{\partial \tau}{\partial \epsilon} = \frac{d\psi_i}{d\epsilon}, \ \ \frac{\partial \varphi_i}{\partial x^k} = \frac{\partial \psi_i}{\partial x^k} + \frac{\partial \psi_i}{\partial \tau}\frac{\partial \tau}{\partial x^k}, \tag{136'}$$

da dove segue

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial \epsilon} = \frac{\partial \psi_i}{\partial \epsilon} - \frac{\partial \psi_i}{\partial \tau}\frac{\partial \tau}{\partial x^r}\frac{\partial \eta^r}{\partial \epsilon} = \frac{\partial \psi_i}{\partial \epsilon} + \left(\frac{\partial \psi_i}{\partial x^r} - \frac{\partial \varphi_i}{\partial x^r}\right)\frac{\partial \eta^r}{\partial \epsilon}. \tag{137}$$

Per le quantità che qui compaiono al secondo membro si ottiene dalla (133)

$$\frac{\partial \psi_i}{\partial \epsilon} = \frac{e}{R}\frac{\partial^2 \eta_i}{\partial \tau \partial \epsilon} - \frac{e}{R^2}\frac{\partial \eta_i}{\partial \tau}\left\{\frac{\partial \eta_r}{\partial \epsilon}\frac{\partial \eta^r}{\partial \tau} - (x_r - \eta_r)\frac{\partial^2 \eta_r}{\partial \tau \partial \epsilon}\right\}$$

[22] H.A. Lorentz, Enz. d. math. Wiss. V. 14. Nr. 15.

$$\frac{\partial\psi_i}{\partial x^r}\frac{\partial\eta^r}{\partial\epsilon} = \frac{e}{R^2}\frac{\partial\eta_i}{\partial\tau}\frac{\partial\eta_r}{\partial\tau}\frac{\partial\eta^r}{\partial\epsilon}$$

$$-\frac{\partial\varphi_i}{\partial x^r}\frac{\partial\eta^r}{\partial\epsilon} = -\frac{\partial}{\partial x^r}\left(\varphi_i\frac{\partial\eta^r}{\partial\epsilon}\right) + \varphi_i\frac{\partial}{\partial x^r}\left(\frac{\partial\eta^r}{\partial\epsilon}\right).$$

Sommando queste tre espressioni il secondo termine della prima espressione si cancella con la seconda espressione. L'ultimo termine della prima espressione, per la (133) e per la prima equazione (136) è

$$-\varphi_i\frac{\partial\tau}{\partial x^r}\frac{\partial^2\eta^r}{\partial\tau\partial\epsilon} = -\varphi_i\frac{\partial}{\partial x^r}\left(\frac{\partial\eta^r}{\partial\epsilon}\right)$$

e si cancella quindi con l'ultimo termine della terza espressione. Per la prima equazione (136) e per la definizione di R nella (133) si ha

$$\frac{\partial}{\partial x^r}\left(\frac{\partial\eta^i}{\partial\epsilon}\right)\cdot\frac{\partial\eta^r}{\partial\tau} = \frac{\partial^2\eta^i}{\partial\tau\partial\epsilon}\frac{\partial\tau}{\partial x^r}\frac{\partial\eta^r}{\partial\tau} = \frac{\partial^2\eta^i}{\partial\tau\partial\epsilon},$$

sicché per il primo termine della prima espressione si può scrivere $\frac{\partial}{\partial x^r}\left(\frac{\partial\eta^i}{\partial\epsilon}\right)\cdot\varphi^r$ ovvero per l'annullarsi (125) della divergenza $\frac{\partial}{\partial x^r}\left(\frac{\partial\eta^i}{\partial\epsilon}\varphi^r\right)$. Otteniamo in conclusione

$$\frac{\partial\varphi^i}{\partial\epsilon} = \frac{\partial}{\partial x^r}\left(\frac{\partial\eta^i}{\partial\epsilon}\varphi^r - \frac{\partial\eta^r}{\partial\epsilon}\varphi^i\right) \tag{138}$$

ovvero, se introduciamo la definizione (104) del prodotto esterno di due vettori

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\epsilon} = \mathrm{Div}\left[\frac{\partial\eta}{\partial\epsilon}\varphi\right]. \tag{138'}$$

Applicando la prima equazione (136') a $\left[\frac{\partial\eta}{\partial\epsilon}\varphi\right]$ si ha inoltre

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial\epsilon^2} = \frac{\partial}{\partial\epsilon}\,\mathrm{Div}\left[\frac{\partial\eta}{\partial\epsilon}\varphi\right] = \mathrm{Div}\,\frac{\partial}{\partial\epsilon}\left[\frac{\partial\eta}{\partial\epsilon}\varphi\right] = \mathrm{Div}\,\frac{d}{d\epsilon}\left[\frac{\partial\eta}{\partial\epsilon}\psi\right], \tag{139}$$

dove $\partial\eta/\partial\epsilon$ va intesa prima come funzione di ϵ e delle x, infine come funzione di ϵ e di τ. Dalla (138') e dalla (139) si vede che *l'esapotenziale di una molecola polarizzata* sarà rappresentato da

$$Z = z + \frac{1}{2!}\frac{dz}{d\epsilon} + \frac{1}{3!}\frac{d^2z}{d\epsilon^2} + \dots \tag{140}$$

dove per z si deve sostituire secondo la (132), (133) e (138')

$$\begin{aligned} z &= \left[\frac{\partial\eta}{\partial\epsilon}\varphi\right] = \frac{e}{R}\left(\left[\delta\xi\frac{d\xi}{d\tau}\right] + \epsilon\left[\delta\xi\frac{d\delta\xi}{d\tau}\right]\right), \\ R &= -(x_r-\xi_r)\frac{d\xi^r}{d\tau} - \epsilon\frac{d}{d\tau}\left\{(x_r-\xi_r)\delta\xi^r\right\} + \frac{\epsilon^2}{2}\frac{d}{d\tau}(\delta\xi_r\delta\xi^r). \end{aligned} \tag{140'}$$

(τ è la funzione di ϵ e delle x data implicitamente dalla (134); z e le sue derivate vanno prese per $\epsilon = 0$. Bisogna sommare su tutte le particelle della molecola.

Per calcolare $dz/d\epsilon$ si osservi che per le (132), (136) e (140') è

$$\begin{gathered}\frac{\partial\tau}{\partial\epsilon} = \frac{1}{R}\left\{(x_r-\xi_r)\delta\xi^r - \epsilon\delta\xi_r\delta\xi^r)\right\};\\ \frac{\partial R}{\partial\epsilon} = -\frac{d}{d\tau}\left\{(x_r-\xi_r)\delta\xi^r\right\} + \epsilon\frac{d}{d\tau}(\delta\xi_r\delta\xi^r)\end{gathered},$$

quindi

$$\frac{\partial R}{\partial\epsilon} = -\frac{\partial}{\partial\tau}\left(R\frac{\partial\tau}{\partial\epsilon}\right),\ \frac{dR}{d\epsilon} = \frac{\partial R}{\partial\epsilon} + \frac{\partial R}{\partial\tau}\frac{\partial\tau}{\partial\epsilon} = -R\frac{\partial}{\partial\tau}\left(\frac{\partial\tau}{\partial\epsilon}\right).$$

Inoltre si ottiene immediatamente dalla (140')

$$\frac{dz}{d\epsilon} = \frac{e}{R}\left\{\left[\delta\xi\frac{d\delta\xi}{d\tau}\right] + \frac{\partial}{\partial\tau}\left(\left(\left[\delta\xi\frac{d\xi}{d\tau}\right] + \epsilon\left[\delta\xi\frac{d\delta\xi}{d\tau}\right]\right)\frac{\partial\tau}{\partial\epsilon}\right)\right\}.$$

Per $\epsilon = 0$ si ha quindi
(141)

$$\begin{aligned}z &= \frac{e}{R}\left[\delta\xi\frac{d\xi}{d\tau}\right],\\ \frac{dz}{d\epsilon} &= \frac{e}{R}\left[\delta\xi\frac{d\delta\xi}{d\tau}\right] + \frac{e}{R^2}\left\{\frac{d}{d\tau}\left((x_r-\xi_r)\delta\xi^r\left[\delta\xi\frac{d\xi}{d\tau}\right]\right) + \frac{\zeta}{R}(x_r-\xi_r)\delta\xi^r\left[\delta\xi\frac{d\xi}{d\tau}\right]\right\},\\ R &= -(x_r-\xi_r)\frac{d\xi^r}{d\tau}\end{aligned}$$

con l'abbreviazione

(141') $$\zeta = -\left(\frac{\partial R}{\partial\tau}\right)_{\epsilon=0} = -\frac{d\xi_r}{d\tau}\frac{d\xi^r}{d\tau} + (x_r-\xi_r)\frac{d^2\xi^r}{d\tau^2}.$$

Se nella (140) ci si limita ai primi due termini, risulta

(140") $$Z = \frac{m}{R} + \frac{e}{2R^2}\left\{\frac{d}{d\tau}\left((x_r-\xi_r)\delta\xi^r\left[\delta\xi\frac{d\xi}{d\tau}\right]\right) + \frac{\zeta}{R}(x_r-\xi_r)\delta\xi^r\left[\delta\xi\frac{d\xi}{d\tau}\right]\right\}$$

con

(140"') $$m = e\left[\delta\xi\frac{d\xi}{d\tau}\right] + \frac{e}{2}\left[\delta\xi\frac{d\delta\xi}{d\tau}\right].$$

Tralasciando i momenti del second'ordine $\delta\xi^r\delta\xi_r$ vale dunque la formula (131). Se suddividiamo in spazio e tempo e scegliamo come parametro τ la variabile $\xi^4 = ct$ (allora sarà $d\xi^4/d\tau = -d\xi_4/d\tau = 1$, $\delta\xi^4 = -\delta\xi_4 = 0$), si ottengono per il momento elettrico e per il momento magnetico le rappresentazioni

(142) $$\mathfrak{p} = \sum e\mathfrak{s},\ \mathfrak{m} = \left[\mathfrak{p}\frac{\mathfrak{v}}{c}\right] + \frac{1}{2}\sum e\left[\mathfrak{s}\frac{\mathfrak{u}}{c}\right].$$

Qui $\mathfrak{s}$ indica il vettore posizione delle particelle spiccato dal baricentro della molecola, $\mathfrak{v}$ la velocità di questo, $\mathfrak{u}$ le velocità relative delle particelle. Le somme vanno estese sulla configurazione della molecola al tempo $t - r/c$, dove r è la distanza osservatore-molecola a questo tempo. Per i due vettori $\mathfrak{Z}$ e $\mathfrak{Z}'$ si trova per la (140"), (141_3) e (141')

$$\mathfrak{Z} = \frac{\mathfrak{p}}{r\left(1 - \frac{v_r}{c}\right)} + \frac{1}{2r^2\left(1 - \frac{v_r}{c}\right)^2}\left\{\frac{1}{c}\frac{d}{dt}\sum e\mathfrak{s}(\mathfrak{r}\mathfrak{s}) + \frac{\zeta}{r\left(1 - \frac{v_r}{c}\right)}\sum e\mathfrak{s}(\mathfrak{r}\mathfrak{s})\right\}, \tag{143}$$

$$\begin{gathered}\mathfrak{Z}' = \frac{\mathfrak{m}}{r\left(1 - \frac{v_r}{c}\right)} + \frac{1}{2r^2\left(1 - \frac{v_r}{c}\right)^2} \\ \left\{\frac{1}{c}\frac{d}{dt}\sum e\left[\mathfrak{s}\frac{\mathfrak{v}}{c}\right](\mathfrak{r}\mathfrak{s}) + \frac{\zeta}{r\left(1 - \frac{v_r}{c}\right)}\sum e\left[\mathfrak{s}\frac{\mathfrak{v}}{c}\right](\mathfrak{r}\mathfrak{s})\right\},\end{gathered} \tag{143'}$$

con[23]

$$\zeta = 1 - \frac{v^2}{c^2} + \frac{(\dot{\mathfrak{v}}\mathfrak{r})}{c^2}, \tag{143"}$$

dove $\mathfrak{r}$ è il raggio vettore molecola-osservatore, v_r la componente di $\mathfrak{v}$ in questa direzione, $\dot{\mathfrak{v}} = d\mathfrak{v}/dt$. La (142) mostra che un oscillatore di Hertz *in moto* possiede un momento magnetico $[\mathfrak{p}\mathfrak{v}/c]$ e che quindi per la rappresentazione del suo campo sono necessari *entrambi* i vettori $\mathfrak{Z}$ e $\mathfrak{Z}'$.

Se poniamo $H = F - M$ le equazioni di campo (2) si scrivono $\operatorname{Div} F = s + \operatorname{Div} M$. Dalla (123) allora per la (125) si ha $W\varphi = -s - \operatorname{Div} M$. Suddividiamo φ in due parti $\varphi_1 + \varphi_2$ in modo tale che siano $W\varphi_1 = -s$, $W\varphi_2 = -\operatorname{Div} M$, soddisfatte per $WZ = -M$. Concludiamo quindi: *Il campo F si può rappresentare con un tetra- ed un esapotenziale*

$$F = \operatorname{Rot}\varphi + \operatorname{Rot}\operatorname{Div} Z,\ \varphi = \int\frac{[s]}{r}dV, Z = \int\frac{[M]}{r}dV, \tag{144'}$$

(dV elemento di volume spaziale, [ ] valore al tempo $t - r/c$)

dei quali il primo è in relazione con la tetracorrente, il secondo con l'esapolarizzazione. Dalla (143) e (143') si ottiene (trascurando i momenti di second'ordine)

$$\mathfrak{P} = N\sum e\mathfrak{s},\ \mathfrak{M} = \left[\mathfrak{P}\frac{\mathfrak{v}}{c}\right] + \frac{1}{2}N\sum e\left[\mathfrak{s}\frac{\mathfrak{u}}{c}\right]$$

(N numero delle molecole nell'unità di volume). Questa è la ben nota rappresentazione del campo nella teoria degli elettroni.[24]) Dal su menzionato momento magnetico di una molecola polarizzata in moto discende l'azione magnetica della corrente di Röntgen.

4.

I raggi. Il caso nel quale per condizioni iniziali date il campo debba essere determinato in ogni particolare non corrisponde alle situazioni che si presentano in

[23]Vedasi M. Abraham, Theorie der Elektrizität 2. 4^a edizione. Formula (72c).
[24]H.A. Lorentz, loc. cit.; W. Dällenbach, Ann. d. Phys. **58.** 523. 1919.

generale nell'ottica. In essa capita piuttosto di conoscere la velocità dei "raggi", per poter stimare gli effetti d'interferenza introdotti dal moto e dal campo gravitazionale.

Con gli sviluppi precedenti abbiamo ottenuto l'apparato formale utilizzato nell'ottica elettromagnetica classica. Nella trattazione del nostro attuale problema possiamo attenerci completamente ai metodi classici[25]. Come abbiamo visto, se scegliamo il tensore di Hertz come mezzo di rappresentazione del campo elettromagnetico, ci basta occuparci solo dell'equazione d'onda e non abbiamo da tener conto di nessuna condizione aggiuntiva. Per Z facciamo l'ipotesi

$$Z = A\cos\kappa E + a \tag{145}$$

(κ costante, E uno scalare, A ed a tensori lineari di secondo grado). Per la regola 3 della seconda parte si ha (trascurando ancora le parentesi degli indici)

$$Z_l = A_l \cos\kappa E - \kappa A E_l \sin\kappa E + a_l,$$

$$\Box Z = {Z_l}^l = {A_l}^l \cos\kappa E - 2\kappa A_l E^l \sin\kappa E - \kappa A {E_l}^l \sin\kappa E - \kappa^2 A E_l E^l \cos\kappa E + {a_l}^l,$$

e quindi per la (92) e la (113)

$$\begin{aligned} WZ = -\kappa^2 A E_l E^l \cos\kappa E - 2\kappa(A_l E^l + \frac{1}{2}AWE)\sin\kappa E \\ + \cos\kappa E\cdot WA + Wa = 0. \end{aligned} \tag{146}$$

Per raggi s'intendono linee che, se si trascura il fenomeno della diffrazione, possono confinare lateralmente complessi luminosi, e che si comportano indipendentemente l'una dall'altra. Perché si possa prescindere dalla diffrazione le lunghezze d'onda devono essere piccole rispetto alle dimensioni dell'apparato. Per formulare matematicamente quest'ipotesi diamo al parametro κ la dimensione e l'ordine di grandezza del reciproco d'una lunghezza d'onda λ. Le derivate prime di E hanno allora l'ordine di grandezza dei coseni direttori e dell'indice di rifrazione, quindi l'ordine di grandezza 1. Per un modo d'esprimersi meno pesante assumeremo inoltre che ds (e quindi anche $d\sigma$) e le coordinate x abbiano le dimensioni di lunghezze. (g_{ik}, g^{ik}, γ_{ik}, γ^{ik} sono allora adimensionali). Chiamiamo una grandezza lentamente variabile[26] se la sua variazione relativa e quella delle sue derivate (ordinarie) è piccola sull'intervallo λ, cioè $\lambda P'/P \ll 1$, $\lambda P''/P' \ll 1$ ecc., dove P, P', P'' ecc. rappresentano l'ordine di grandezza della quantità considerata e delle sue derivate. Allora l'ipotesi che dobbiamo fare perché si possa parlare di raggi suona così: A, E', γ_{ik} siano lentamente variabili, a sia piccolo rispetto ad A. Inoltre le coordinate possono essere scelte in modo che g_{ik} ed u_i siano (al più) dell'ordine 1. (Ciò vale allora anche per g^{ik} ed u^i). Se γ è di quest'ordine, abbiamo

$$\begin{aligned} \frac{\lambda A'}{A} \ll 1,\ \frac{\lambda A''}{A'} \ll 1,\ E' \sim 1,\ \lambda E'' \ll 1,\ \gamma \sim 1,\ \lambda\gamma' \ll 1, \\ \frac{\lambda\gamma''}{\gamma'} \ll 1,\ a \ll A. \end{aligned} \tag{147}$$

[25]Vedasi per esempio J. Hadamard, Leçons sur la propagation des ondes, Paris 1902, pagg. 331 segg.; H.A. Lorentz, Abh. über theor. Physik, pag. 415.

[26]H.A. Lorentz, loc. cit.

Lenta variabilità di A e piccolezza di a (che sarà rapidamente variabile) significano che si possono trascurare i fenomeni al bordo, l'ipotesi su E' limite alla curvatura del fronte d'onda (diffrazione in prossimità del punto immagine), lenta variabilità di γ_{ik} vuol dire: le velocità ed i campi di gravitazione (che sono rapidamente variabili) suscitati dall'azione meccanica e gravitazionale della luce sono così piccoli che si può trascurare la loro reazione sulla propagazione della luce, e per g_{ik} ed u_i si devono intendere solo le quantità provocate dall'esterno (lentamente variabili).

L'ordine di grandezza della derivata prima covariante è per la (73) $P' + \gamma' P$, quello dalla seconda quindi $(P' + \gamma' P)' + \gamma'(P' + \gamma' P) \sim P'' + \gamma'' P + \gamma' P' + \gamma'^2 P$ (per uno scalare si deve porre $P = O$), quello del tensore di curvatura per la (82) è $\gamma'' + \gamma'^2$ e quindi quello di WZ per le (92), (113), (146) e (147)

$$\frac{A}{\lambda^2} + \frac{1}{\lambda}\left(A' + \gamma' A + AE''\right) + \left(A'' + \gamma' A' + \gamma'' A + \gamma'^2 A\right) + (a) \tag{146'}$$

((a) si costruisce analogamente all'espressione precedente). Se in essa trascuriamo le derivate seconde e i prodotti delle derivate prime delle quantità lentamente variabili, come pure il termine di diffrazione a, dobbiamo considerare nella (146) solo i termini con κ e con κ^2 che, come si vede dalle (147) e (146'), sono di ordine di grandezza diverso. Pertanto la (146) si scompone nelle due equazioni

$$E_l E^l = \gamma^{lr} \frac{\partial E}{\partial x^l} \frac{\partial E}{\partial x^r} = 0, \tag{148}$$

$$A_l E^l = -\frac{1}{2} AWE. \tag{149}$$

La (148) è l'equazione differenziale di Jacobi di un problema "meccanico" con la funzione di Hamilton $H = \frac{1}{2}\gamma^{lr} p_l p_r$, dove $p_l = \partial E / \partial x^l$ sono gli impulsi. Secondo le equazioni canoniche si ha

$$\frac{dx^i}{d\tau} = \frac{\partial H}{\partial p^i} = \gamma^{ir} p_r = p^i = E^i, (\tau = \text{parametro}) \ . \tag{150}$$

Quindi

$$H = \frac{1}{2} \gamma_{lr} \frac{dx^l}{d\tau} \frac{dx^r}{d\tau},$$

sicché le equazioni di Lagrange che discendono dal problema variazionale $\delta \int H d\tau$ sono le equazioni

$$\frac{d^2 x^i}{d\tau^2} + \left\{ \begin{matrix} i \\ kl \end{matrix} \right\} \frac{dx^k}{d\tau} \frac{dx^l}{d\tau} = 0 \tag{151}$$

delle linee geodetiche[27] (della varietà con l'elemento di linea $d\sigma$), e in particolare, poiché per le (148) e (150)

$$\gamma_{lr} \frac{dx^l}{d\tau} \frac{dx^r}{d\tau} = 0, \tag{152}$$

[27]Vedasi per esempio W. Pauli jun., loc. cit. Nr. 15.

si tratta di *linee geodetiche nulle.*

A causa della variabilità lenta di γ^{lr} si può risolvere la (148) con funzioni E lentamente variabili. Se sostituiamo la soluzione nella (149), per la (150) sussistono, tenendo conto della definizione (72) della derivata covariante, equazioni della forma

$$\frac{dA}{d\tau} = \text{funzione lineare omogenea di } A, \tag{153}$$

cioè consuete equazioni differenziali lineari omogenee per le componenti di A, i coefficienti delle quali si compongono con le derivate prime e seconde di E e con i simboli a tre indici (costruiti con γ_{ik}), quindi sono funzioni lentamente variabili note. Dalla (153) si determinano le variazioni dell'ampiezza A lungo le linee geodetiche nulle, quando siano noti i valori iniziali per un τ. Questi valori iniziali possono esser scelti *arbitrariamente* linea nulla per linea nulla, sotto la restrizione che essi siano lentamente variabili. Ma a prescindere da questo le ampiezze sono del tutto indipendenti tra loro. Per la linearità e per l'omogeneità dell'equazione (153) l'annullarsi dell'ampiezza in un punto ha per conseguenza l'annullarsi sull'intera linea nulla che passa da questo punto. *Perciò* le *linee geodetiche nulle possono confinare regioni* d'*universo* al *di fuori delle quali* le *ampiezze si annullano.* Dalla (148) e dalla (150) segue inoltre

$$\frac{dE}{d\tau} = 0, \tag{148'}$$

cioè la fase E resta costante lungo ogni linea nulla.

Dobbiamo ancora dimostrare che l'ultima delle disequazioni (147) può essere soddisfatta. Per le (148) e (149) la (146) si riduce a

$$Wa = -WA \cdot \cos \kappa E. \tag{154}$$

Dobbiamo quindi risolvere l'equazione delle onde non omogenea. Questa soluzione può essere effettuata per mezzo del teorema di Green (119) in linea di principio allo stesso modo come nella teoria classica. La soluzione sarà rappresentabile mediante un integrale della forma[28]

$$a = \int (G \cos \kappa EWA)_L dx^1 dx^2 dx^3,$$

dove G è una funzione che, come nella teoria classica, è infinita del prim'ordine nell'origine, e l'indice L denota il cono del passato uscente dall'origine. La teoria delle serie di Fourier ci insegna che a può esser reso arbitrariamente piccolo aumentando κ, cioè diminuendo la lunghezza d'onda[29]. Siamo quindi pervenuti al risultato che i raggi nei corpi in moto sono rappresentati dalle linee geodetiche nulle della varietà con l' elemento di linea $d\sigma^2 = \gamma_{ik} dx^i dx^k$. Per la (148') la velocità del raggio è uguale alla velocità di fase lungo il raggio.

Da $d\sigma^2 = 0$ segue per la (26) $ds^2 = -[1 - 1/(\epsilon\mu)](u_i dx^i)^2$. Per $\epsilon\mu > 1$ le linee d'universo dei raggi hanno quindi direzione temporale. Esiste perciò una *tetravelocità del raggio*, che per la (15) e la (150) (reintroducendo le parentesi per gli indici) è uguale a

$$w^i = \frac{E^{(i)}}{\sqrt{-g_{mn} E^{(m)} E^{(n)}}}, \; E^{(i)} = \gamma^{ir} \frac{\partial E}{\partial x^r}. \tag{155}$$

Dall'esistenza d'una tetravelocità segue[30] la validità del teorema di addizione delle

[28] M. v. Laue, Berl. Ber. 1922, p. 118.

[29] Vedi per esempio M. Born, Dynamik der Kristallgitter, appendice.

[30] W. Pauli jun., loc. cit., Nr. 25.

velocità.

Come esempio per la propagazione della luce in un corpo in presenza d'un campo gravitazionale prendiamo il caso di un mezzo in quiete in un campo centrifugo (esperimento di Harress). Usando coordinate polari e restringendosi al piano si ha

$$ds^2 = dx_1{}^2 + x_1{}^2 dx_2{}^2 - \frac{2\omega}{c} x_1{}^2 dx_2 dx_4 - \left(1 - \frac{\omega^2 x_1{}^2}{c^2}\right) dx_4{}^2 \tag{156}$$

(x_1 raggio vettore, x_2 angolo polare, ω velocità angolare). Poiché la materia è in quiete, si ha $u^1 = u^2 = u^3 = 0$, $u^4 = 1/\sqrt{-g_{44}} = 1/\sqrt{1 - \frac{\omega^2 x_1{}^2}{c^2}}$. Le componenti covarianti sono

$$u_1 = 0,\ u_2 = g_{24} u^4 = -\frac{\frac{\omega}{c} x_1{}^2}{\sqrt{1 - \frac{\omega^2 x_1{}^2}{c^2}}},\ u_4 = g_{44} u^4 = -\sqrt{1 - \frac{\omega^2 x_1{}^2}{c^2}}.$$

Da qui secondo la (18) si trova per i γ_{ik}

$$\gamma_{22} = \frac{\left(1 - \frac{\omega^2 x_1{}^2}{\epsilon\mu c^2}\right) x_1{}^2}{1 - \frac{\omega^2 x_1{}^2}{c^2}},\ \gamma_{24} = -\frac{\omega}{\epsilon\mu c} x_1{}^2,\ \gamma_{44} = -\frac{1}{\epsilon\mu}\left(1 - \frac{\omega^2 x_1{}^2}{c^2}\right).$$

Le restanti γ_{ik} sono uguali alle g_{ik}. Sarà quindi

$$\begin{aligned} d\sigma^2 = dx_1{}^2 + x_1{}^2 \cdot \frac{1 - \frac{\omega^2 x_1{}^2}{\epsilon\mu c^2}}{1 - \frac{\omega^2 x_1{}^2}{c^2}} dx_2{}^2 - \frac{2\omega}{\epsilon\mu c} x_1{}^2 dx_2 dx_4 \\ - \frac{1}{\epsilon\mu}\left(1 - \frac{\omega^2 x_1{}^2}{c^2}\right) dx_4^2. \end{aligned} \tag{157}$$

Trascurando ω^2 le (156) e (157) si riducono a

$$ds^2 = dx_1{}^2 + x_1{}^2 dx_2{}^2 - \frac{2\omega}{c} x_1{}^2 dx_2 dx_4 - dx_4{}^2, \tag{156'}$$

$$d\sigma^2 = dx_1{}^2 + x_1{}^2 dx_2{}^2 - \frac{2\omega}{\epsilon\mu c} x_1{}^2 dx_2 dx_4 - \frac{dx_4{}^2}{\epsilon\mu}. \tag{157'}$$

Da $ds^2 = 0$ si derivano i fenomeni nel vuoto (esperimento di Sagnac[31]). In questo caso la differenza dei tempi di circolazione di due raggi che girano in verso opposto è $\Delta t = 4\omega F/c^2$ (F superficie circondata). Se ora si sostituisce nella (156') x_4 con $x_4/\sqrt{\epsilon\mu}$ ed ω con $\omega/\sqrt{\epsilon\mu}$, si ottiene la (157'). Ma con questa sostituzione la formula per Δt va in se stessa. Essa vale quindi anche in un mezzo ponderabile[32].

Berlin, Institut für theoretische Physik.

(ricevuto il 28 maggio 1923)

[31]P. Langevin, Compt. Rend. 173, 831, 1921; R. Ortvay, Phys. Zeitschr. **23**, 176, 1922.

[32]M. v. Laue, Relativitätstheorie I, §24 d.

Sull'elettrodinamica di Minkowski dei corpi in movimento[1]

M. v. Laue

(Ricevuto il 19 luglio 1950)

In questa elettrodinamica non si è pervenuti finora a una scelta tra il tensore di Minkowski e altre ipotesi. Il primo è non simmetrico e pertanto contraddice la formulazione di Planck per la legge dell'inerzia dell'energia: densità d'impulso uguale corrente d'energia divisa per il quadrato della velocità della luce. Le altre ipotesi rispettano per l'appunto la simmetria del tensore, e quindi quella formulazione della legge d'inerzia. Questo lavoro dimostra che l'ipotesi di Minkowski è quella giusta.

§1. Poiché nelle nostre argomentazioni dobbiamo prendere le mosse dai fondamenti dati da Minkowski dell'elettrodinamica dei corpi, ne riassumiamo in primo luogo l'essenziale.

Descrivono il campo elettromagnetico due esavettori, $\mathbf{M}$ e $\mathbf{B}$; essi e gli esavettori ad essi duali $\mathbf{M}^*$ e $\mathbf{B}^*$ sono posti in corrispondenza alle intensità di campo $\mathfrak{E}$ ed $\mathfrak{H}$, allo spostamento elettrico $\mathfrak{D}$ e all'induzione magnetica $\mathfrak{B}$ mediante le equazioni:

$$
\begin{gathered}
\mathbf{M}_{10} = \mathbf{M}^*_{23} = -i\mathfrak{E}_1,\ \mathbf{M}_{20} = \mathbf{M}^*_{31} = -i\mathfrak{E}_2,\ \mathbf{M}_{30} = \mathbf{M}^*_{12} = -i\mathfrak{E}_3,\\
\mathbf{M}_{23} = \mathbf{M}^*_{10} = \mathfrak{B}_1,\ \mathbf{M}_{31} = \mathbf{M}^*_{20} = \mathfrak{B}_2,\ \mathbf{M}_{12} = \mathbf{M}^*_{30} = \mathfrak{B}_3,\\
\mathbf{B}_{10} = \mathbf{B}^*_{23} = -i\mathfrak{D}_1,\ \mathbf{B}_{20} = \mathbf{B}^*_{31} = -i\mathfrak{D}_2,\ \mathbf{B}_{30} = \mathbf{B}^*_{12} = -i\mathfrak{D}_3,\\
\mathbf{B}_{23} = \mathbf{B}^*_{10} = \mathfrak{H}_1,\ \mathbf{B}_{31} = \mathbf{B}^*_{20} = \mathfrak{H}_2,\ \mathbf{B}_{12} = \mathbf{B}^*_{30} = \mathfrak{H}_3.
\end{gathered} \tag{1}
$$

Allora valgono le equazioni, scritte in forma tetradimensionale, ma altrimenti immutate rispetto a quelle introdotte da Maxwell

$$
\begin{gathered}
\mathrm{Div}\mathbf{M}^* = 0,\ \text{cioè } \sum_\beta \frac{\partial}{\partial x_\beta}\mathbf{M}^*_{\alpha\beta} = 0,\\
\mathrm{Div}\mathbf{B} = P,\ \text{cioè } \sum_\beta \frac{\partial}{\partial x_\beta}\mathbf{B}_{\alpha\beta} = P_\alpha,\\
(\alpha = 1,2,3,0)
\end{gathered} \tag{2}
$$

nelle quali P indica il tetravettore della corrente elettrica. Oltre a queste equazioni appaiono le equazioni materiali che introducono la costante dielettrica ε e la permeabilità μ. Esse contengono la tetravelocità Y del corpo e si scrivono:

$$
[Y\mathbf{B}] = \varepsilon\,[Y\mathbf{M}]\,,\ [Y\mathbf{M}^*] = \mu\,[Y\mathbf{B}^*]\,. \tag{3}
$$

Il prodotto vettoriale che qui appare fra un tetravettore A ed un esavettore $\mathbf{F}$ è definito dalle equazioni:

$$
[A\mathbf{F}]_\alpha = \sum_\beta A_\beta \mathbf{F}_{\alpha\beta}\ \ (\alpha = 1,2,3,0)\,. \tag{4}
$$

[1]Zur Minkowskischen Elektrodynamik der bewegten Körper, Zeitschr. f. Phys. **128**, 387-394 (1950).

Il tensore d'universo T ha per qualsiasi ipotesi le componenti che risultano dallo schema seguente:

$$T = \left\{ \begin{array}{cccc} \mathbf{p}_{11} & \mathbf{p}_{12} & \mathbf{p}_{13} & ic\mathfrak{g}_1 \\ \mathbf{p}_{21} & \mathbf{p}_{22} & \mathbf{p}_{23} & ic\mathfrak{g}_2 \\ \mathbf{p}_{31} & \mathbf{p}_{32} & \mathbf{p}_{33} & ic\mathfrak{g}_3 \\ \frac{i}{c}\mathfrak{S}_1 & \frac{i}{c}\mathfrak{S}_2 & \frac{i}{c}\mathfrak{S}_3 & -W \end{array} \right\}; \tag{5}$$

$\mathbf{p}$ è il tensore degli sforzi di Maxwell, $\mathfrak{g}$ la densità d'impulso, $\mathfrak{S}$ la densità della corrente d'energia, W la densità d'energia del campo elettromagnetico. L'equazione

$$-\,\mathrm{DivT} = F \text{ ovvero } -\sum_\beta \frac{\partial T_{\alpha\beta}}{\partial x_\beta} = F_\alpha \ \ (\alpha = 1,2,3,0) \tag{6}$$

contiene la tetraforza F e formula, quando la si traduca in tre dimensioni, le leggi dell'impulso e dell'energia. La forza $\mathfrak{F}$ che agisce sul volume unitario del corpo, le componenti della quale coincidono con le componenti di F di egual indice, ha quindi il valore:

$$\mathfrak{F} = -\,\mathrm{div}\mathbf{p} - \frac{\partial \mathfrak{g}}{\partial t} = \rho\mathfrak{E}^* + \frac{1}{c}\,[\mathfrak{J}\mathfrak{B}]\,, \tag{7}$$

dove ρ indica la densità di carica, $\mathfrak{J}$ la corrente di conduzione e

$$\mathfrak{E}^* = \mathfrak{E} + \frac{1}{c}\,[\mathfrak{q}\mathfrak{B}] \tag{8}$$

indica la "forza elettromotrice", purché seguendo Minkowski si estenda ai corpi in movimento dai corpi a riposo, per i quali Maxwell la introdusse, l'ipotesi di Maxwell su $\mathbf{p}$. Esso si scrive:

$$\mathbf{p}_{\alpha\beta} = -\mathfrak{E}_\alpha\mathfrak{D}_\beta - \mathfrak{H}_\alpha\mathfrak{B}_\beta + \frac{1}{2}\delta_{\alpha\beta}\left\{(\mathfrak{E}\mathfrak{D}) + (\mathfrak{H}\mathfrak{B})\right\} \ \ (\alpha,\beta = 1,2,3). \tag{9}$$

Esso è simmetrico per i corpi isotropi a riposo, per i quali $\mathfrak{E}$ e $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{H}$ e $\mathfrak{B}$ hanno la stessa direzione, ma non per i cristalli (non cubici) nè in generale per corpi in moto, per i quali i vettori $\mathfrak{E}$ e $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{H}$ e $\mathfrak{B}$ hanno direzioni diverse. Già H. Hertz[2] ha cercato di sostituirlo mediante la parte simmetrica $\frac{1}{2}\,(\mathbf{p}_{\alpha\beta} + \mathbf{p}_{\beta\alpha})$. Ciò è contraddetto però dalle numerose esperienze sulla coppia esercitata da un campo magnetico omogeneo su sfere cristalline[3]: il momento torcente deriva dalla parte antisimmetrica $\frac{1}{2}\,(\mathbf{p}_{\alpha\beta} - \mathbf{p}_{\beta\alpha})$. Ma inoltre si ha un criterio per il tensore d'universo, che è soddisfatto dall'ipotesi di Minkowski, e da nessuna delle altre: la *velocità di radiazione* $\mathfrak{w} = \mathfrak{S}/W$ *di un'onda piana deve soddisfare il teorema di Einstein di addizione delle*

[2]Hertz, H.: Wiedemanns Ann. **41**, 369 (1890). Untersuchungen über die Ausbreitung der elektrischen Kraft, p. 282. Hertz rimanda anche a H. v. Helmoltz, Wiedemanns Ann. **13**, 400 (1881).

[3]Voigt, W.: Manuale di fisica dei cristalli, p. 487. Con le condizioni attuali delle biblioteche non è stato possibile procurarsi i lavori originali citati da Voigt.

velocità. Se infatti un punto materiale si muove entro un'onda piana limitata ($\mathfrak{w}$ è una velocità inferiore a quella della luce), esso resta permanentemente "in luce", e questo fatto non può essere eliminato per trasformazione passando ad un altro sistema di riferimento[4].

L'ipotesi di Minkowski riconduce il tensore T agli esavettori $\mathbf{M}$ e $\mathbf{B}$ mediante l'equazione:

$$T_{\alpha\beta} = \sum_{\gamma} \mathbf{M}_{\alpha\gamma}\mathbf{B}_{\beta\gamma} - \frac{1}{2}\delta_{\alpha\beta}(\mathbf{MB}) . \tag{10}$$

Ciò significa secondo la (5) che per tutti i sistemi di riferimento si ha:

$$\mathfrak{g} = \frac{1}{c}[\mathfrak{D}\mathfrak{B}] , \ \mathfrak{S} = c[\mathfrak{E}\mathfrak{H}] , \ W = \frac{1}{2}\{(\mathfrak{E}\mathfrak{D}) + (\mathfrak{H}\mathfrak{B})\} . \tag{11}$$

Essa è inoltre in accordo con la (9). Un'onda piana ha quindi la velocità di radiazione:

$$\mathfrak{w} = \frac{c[\mathfrak{E}\mathfrak{H}]}{\frac{1}{2}\{(\mathfrak{E}\mathfrak{D}) + (\mathfrak{H}\mathfrak{B})\}}. \tag{12}$$

Al numeratore come al denominatore è presente il quadrato del seno che appare nella (13). Ma $\mathfrak{w}$ è per conto suo indipendente dalle quattro coordinate d'universo.

§2. Si rappresenta l'onda piana monocromatica polarizzata linearmente quando poniamo $\mathbf{M}$ e $\mathbf{B}$ proporzionali a

$$\sin\left(2\pi \sum_{\alpha} A_\alpha x_\alpha\right) \tag{13}$$

con ciascuno un esavettore costante per fattore di proporzionalità. L'argomento del seno è Lorentz-invariante; di conseguenza le A_α costituiscono un tetravettore, che chiamiamo *"vettore impulso"*. Dalle equazioni di Maxwell (2) con $P = 0$ discende quindi secondo la (4)

$$[A\mathbf{M}^*] = 0, \ [A\mathbf{B}] = 0. \tag{14}$$

Un esavettore è rappresentato in generale mediante due elementi di superficie piana con senso di rotazione, mutuamente ortogonali. Per la (14) $\mathbf{M}$ e $\mathbf{B}$ sono tuttavia dati da un solo siffatto elemento di superficie; il carattere algebrico per tali esavettori si scrive:

$$\begin{aligned} (\mathbf{MM}^*) &= \frac{1}{2}\sum_{\alpha\beta} \mathbf{M}_{\alpha\beta}\mathbf{M}^*_{\alpha\beta} = 0, \\ (\mathbf{BB}^*) &= \frac{1}{2}\sum_{\alpha\beta} \mathbf{B}_{\alpha\beta}\mathbf{B}^*_{\alpha\beta} = 0. \end{aligned} \tag{14a}$$

[4]Sulla base di quest'idea l'autore [Ann. Phys. **23**, 989 (1907)] ha fondato la trasformazione della velocità di radiazione e la teoria dei coefficienti di trasporto di Fresnel, ma senza riferimento ad un tensore d'universo. A. Scheye [Ann. Phys. **30**, 805 (1909)] afferma che solo il tensore di Minkowski soddisfa questo criterio; tuttavia il suo può essere considerato solo un abbozzo della prova più circostanziata che vien data qui.

Se scegliamo il sistema di coordinate in modo tale che delle sei componenti di $\mathbf{M}^*$ siano diverse da zero solo $\mathbf{M}^*_{23}$ e $\mathbf{M}^*_{10}$, la (14) afferma:

$$[A\mathbf{M}^*]_1 = A_0\mathbf{M}^*_{10} = 0,\ [A\mathbf{M}^*]_2 = A_3\mathbf{M}^*_{23} = 0,$$
$$[A\mathbf{M}^*]_0 = A_1\mathbf{M}^*_{01} = 0,\ [A\mathbf{M}^*]_3 = A_2\mathbf{M}^*_{32} = 0.$$

Queste equazioni consentono solo due possibilità. O si ha

$$\mathbf{M}^*_{10} = 0 \text{ e } A_2 = A_3 = 0$$

ovvero

$$\mathbf{M}^*_{23} = 0 \text{ e } A_1 = A_0 = 0.$$

In entrambi i casi la nostra asserzione è provata. Si vede inoltre che il tetravettore A è ortogonale ad $\mathbf{M}^*$. Poiché lo stesso vale per $\mathbf{B}$, A è la perpendicolare comune alle superfici che rappresentano $\mathbf{M}^*$ e $\mathbf{B}$, e quindi esse giacciono entrambe nello spazio tridimensionale perpendicolare ad A, e di conseguenza hanno una *linea* d'intersezione, che di per sè determina a meno di un fattore scalare un tetravettore A^*. Previa opportuna normalizzazione lo chiamiamo il *vettore del raggio* dell'onda piana. Si ha

$$[A^*\mathbf{M}] = 0,\ [A^*\mathbf{B}^*] = 0,\ (AA^*) = 0. \tag{15}$$

La linea d'intersezione delle superfici che rappresentano $\mathbf{M}^*$ e $\mathbf{B}$ è la perpendicolare comune alle superfici che rappresentano $\mathbf{M}$ e $\mathbf{B}^*$ e appartiene allo spazio tridimensionale perpendicolare ad A.

Ma dalla (14) segue inoltre l'annullarsi del prodotto scalare

$$(\mathbf{MB}) = \frac{1}{2}\sum_{\alpha\beta}\mathbf{M}_{\alpha\beta}\mathbf{B}_{\alpha\beta}. \tag{16}$$

Se A ha la direzione di x_3, le superfici che rappresentano $\mathbf{M}^*$ e $\mathbf{B}$ giacciono nello spazio $x_0x_1x_2$, di modo che delle componenti di questi si annullano tutte quelle negli indici delle quali compare il 3. Nel suddetto spazio possiamo poi ruotare il sistema di coordinate in modo che delle componenti di $\mathbf{B}$ sia diversa da zero soltanto $\mathbf{B}_{12}$. Sarà quindi

$$(\mathbf{MB}) = \mathbf{M}_{12}\mathbf{B}_{12} = \mathbf{M}^*_{30}\mathbf{B}_{12} = 0, \tag{17}$$

poiché $\mathbf{M}^*_{30}$ è nulla. Per la (1) e la (11) quest'equazione significa

$$(\mathfrak{E}\mathfrak{D}) = (\mathfrak{H}\mathfrak{B}) = W. \tag{18}$$

Nella (11) la densità d'energia W è suddivisa in una parte elettrica $(\mathfrak{E}\mathfrak{D})/2$ ed in una parte magnetica $(\mathfrak{H}\mathfrak{B})/2$. Le due sono tra loro uguali per l'onda piana. Dalla (14a) segue tenendo conto della (1)

$$(\mathfrak{E}\mathfrak{B}) = (\mathfrak{H}\mathfrak{D}) = 0. \tag{18a}$$

§3. *Il vettore impulso A è necessariamente di tipo spaziale.* Se rappresentiamo l'onda piana in tre dimensioni mediante

$$\sin\left(2\pi\left\{\nu t-\frac{1}{\lambda}\sum_{1}^{3}\mathfrak{e}_\alpha x_\alpha\right\}\right) \tag{19}$$

(ν frequenza, λ lunghezza d'onda, $\mathfrak{e}$ vettore unitario nella direzione della normale all'onda), il confronto con la (13) mostra che:

$$A_\alpha=-\frac{\mathfrak{e}_\alpha}{\lambda}\ \ (\alpha=1,2,3)\,,\ A_0=-\frac{-i\nu}{c}. \tag{20}$$

Inoltre il quadrato del valore assoluto di A è

$$A^2=\frac{1}{\lambda^2}-\frac{\nu^2}{c^2} \tag{21}$$

e nel sistema a riposo K^0 del corpo, nel quale secondo Maxwell si ha $\left(\nu^0\lambda^0/c\right)^2 = 1/\left(\varepsilon\mu\right)<1$,

$$A^2=\frac{1}{\lambda^{02}}\left(1-\frac{1}{\varepsilon\mu}\right)>0. \tag{22}$$

Il vettore del raggio A^* è invece necessariamente di tipo temporale. Ciò risulta dalle equazioni materiali (3).

Per la dimostrazione scegliamo il sistema di riferimento K^r, nel quale A ha la direzione x_3 e inoltre x_1 e x_2 sono ortogonali alla tetravelocità Y del corpo. In esso i vettori di campo $\mathbf{M}^*$ e $\mathbf{B}$ hanno sicuramente solo le componenti seguenti:

$$\begin{aligned}\mathbf{M}^*_{10}=\mathbf{M}_{23},\ \mathbf{M}^*_{20}=\mathbf{M}_{31},\ \mathbf{M}^*_{12}=\mathbf{M}_{30},\\ \mathbf{B}_{10}=\mathbf{B}^*_{23},\ \mathbf{B}_{20}=\mathbf{B}^*_{31},\ \mathbf{B}_{12}=\mathbf{B}^*_{30}.\end{aligned}$$

Come intersezione delle superfici che li rappresentano A^* deve anche soddisfare alle seguenti equazioni derivanti dalle (15):

$$\begin{aligned}A^*_1\mathbf{M}^*_{20}+A^*_2\mathbf{M}^*_{01}+A^*_0\mathbf{M}^*_{12}=0,\\ A^*_1\mathbf{B}_{20}+A^*_2\mathbf{B}_{01}+A^*_0\mathbf{B}_{12}=0.\end{aligned} \tag{23}$$

Ma per questo caso le equazioni materiali (3) ora dicono:

$$\begin{aligned}Y_0\mathbf{B}_{10}=\varepsilon Y_3\mathbf{M}_{13},\ Y_0\mathbf{B}_{20}=\varepsilon Y_3\mathbf{M}_{23},\ 0=\varepsilon Y_3\mathbf{M}_{30},\\ Y_0\mathbf{M}_{31}=\mu Y_3\mathbf{B}_{10},\ Y_0\mathbf{M}_{32}=\mu Y_3\mathbf{B}_{20},\ 0=\mu Y_3\mathbf{B}_{12}.\end{aligned}$$

Da esse, oltre a $\varepsilon\mu Y_3^2=-Y_0^2$, segue l'annullarsi di $\mathbf{B}_{12}$ e di $\mathbf{M}_{30}=\mathbf{M}^*_{12}$; secondo le (23) è quindi $A^*_1=A^*_2=0$; secondo l'ultima delle (15) risulta inoltre $A^*_3=0$, quindi solo la componente A^*_0 è diversa da zero. Il suo valore resta qui ancora indeterminato.

Poiché il vettore A^* è di tipo temporale, lo si può per ogni sistema di riferimento ricondurre ad un vettore $\mathfrak{s}$ dello spazio mediante le equazioni:

$$A^*_\alpha = \frac{\nu\lambda\mathfrak{s}_\alpha}{\sqrt{c^2 - (\nu\lambda\mathfrak{s})^2}} \ (\alpha = 1,2,3)\,,\ A^*_0 = \frac{ic}{\sqrt{c^2 - (\nu\lambda\mathfrak{s})^2}}, \tag{24}$$

nella quale assumiamo la radice come positiva; di conseguenza

$$A^{*2} = -1, \tag{25}$$

quindi negativo. Con ciò per A^* risulta fissato anche il fattore finora indeterminato. Dalle (20) e dall'ultima delle (15) si ottiene sotto queste circostanze:

$$(\mathfrak{e}\mathfrak{s}) = 1. \tag{25a}$$

§4. Per mezzo delle (1) e delle (20) segue dalle (14):

$$\mathfrak{B} = \frac{c}{\lambda\nu}\,[\mathfrak{e}\mathfrak{E}]\,,\ \mathfrak{D} = -\frac{c}{\lambda\nu}\,[\mathfrak{e}\mathfrak{H}]\,. \tag{26}$$

Parimenti per le (1) e (24) discende dalle prime due delle (15):

$$\mathfrak{E} = -\frac{\lambda\nu}{c}\,[\mathfrak{s}\mathfrak{B}]\,,\ \mathfrak{H} = \frac{\lambda\nu}{c}\,[\mathfrak{s}\mathfrak{D}]\,. \tag{27}$$

Secondo l'ipotesi di Minkowski [Eq. (10)] e secondo la (18) la densità d'impulso e la corrente d'energia saranno di conseguenza

$$\begin{gathered}\mathfrak{g} = \frac{1}{c}\,[\mathfrak{D}\mathfrak{B}] = \frac{1}{\lambda\nu}\,[\mathfrak{D}\,[\mathfrak{e}\mathfrak{E}]] = \frac{\mathfrak{e}}{\lambda\nu}\,(\mathfrak{E}\mathfrak{D}) = \frac{\mathfrak{e}}{\lambda\nu}W,\\ \mathfrak{S} = c\,[\mathfrak{E}\mathfrak{H}] = \lambda\nu\,[\mathfrak{E}\,[\mathfrak{s}\mathfrak{D}]] = \lambda\nu\mathfrak{s}\,(\mathfrak{E}\mathfrak{D}) = \lambda\nu\mathfrak{s}W,\end{gathered} \tag{28}$$

e quindi la velocità di radiazione sarà

$$\mathfrak{w} = \lambda\nu\mathfrak{s}. \tag{29}$$

Per la (24) essa è in rapporto con il vettore del raggio A^* secondo le relazioni

$$A^*_\alpha = \frac{\mathfrak{w}_\alpha}{\sqrt{c^2 - \mathfrak{w}^2}} \ (\alpha = 1,2,3)\,,\ A^*_0 = \frac{ic}{\sqrt{c^2 - \mathfrak{w}^2}}, \tag{30}$$

che hanno esattamente la stessa forma delle relazioni tra la velocità tridimensionale $\mathfrak{q}$ di un punto materiale e la sua tetravelocità Y. È perciò dimostrato che con l'ipotesi di Minkowski per il tensore d'universo T vale per $\mathfrak{w}$ il teorema di Einstein di addizione delle velocità.

Ma l'equazione (28) mostra inoltre: *L'impulso dell'onda piana ha in ogni sistema di riferimento la direzione della normale d'onda $\mathfrak{e}$. Questa d'altra parte è legata secondo la (20) al tetravettore A, al quale perciò abbiamo dato il nome di vettore impulso. Gli esavettori* $\mathbf{M}^*$ *e* $\mathbf{B}$ *rappresentabili mediante una qualsiasi superficie individuano tra tutte le direzioni del mondo tetradimensionale la loro perpendicolare comune, cioè la direzione di A, e la loro linea d'intersezione, cioè la direzione di A^*.*

A questi due tetravettori corrispondono in ogni sistema di riferimento le direzioni spaziali caratteristiche dell'onda piana, quella dell'impulso e quella del raggio.

Il ragionamento precedente è fino all'equazione (27) inclusa indipendente da ogni ipotesi su T. Per la nostra dimostrazione l'equazione (29) è non solo sufficiente, ma anche necessaria, perché proprio il vettore $\mathfrak{s}$ è in relazione con A^* [Eq. (24)]. Dalla (27) segue che $\mathfrak{s}$ è ortogonale ad $\mathfrak{E}$ e ad $\mathfrak{H}$. Questa proprietà si estende per la (29) ai vettori $\mathfrak{w}$ e $\mathfrak{S}$, e porta quindi, a meno di un fattore di proporzionalità c, all'ipotesi di Minkowski per $\mathfrak{S}$. Di contro secondo l'ipotesi di Abraham[5],

$$\mathfrak{S} = c^2\mathfrak{g} = c\left\{[\mathfrak{E}\mathfrak{H}] + \mathfrak{q}\frac{(\mathfrak{q}, [\mathfrak{E}\mathfrak{H}] - [\mathfrak{D}\mathfrak{B}])}{c^2 - \mathfrak{q}^2}\right\},$$

$\mathfrak{S}$ ha in generale un'altra direzione; essa quindi non porta al teorema di addizione delle velocità per la velocità di radiazione $\mathfrak{w}$. Nel caso di un'onda piana nello spazio vuoto si ha un solo vettore caratteristico; esso è singolare ed è perpendicolare a se stesso. Nel nostro caso esso si separa nel vettore di tipo spaziale A e nel vettore di tipo temporale A^*, che per la (15) sono tra loro ortogonali.

§5. Trattiamo l'onda piana ancora una volta nel sistema di coordinate K^r utilizzato precedentemente. Secondo il §3 in esso sono diverse da zero solo le due componenti di $\mathbf{M}^*$ e di $\mathbf{B}$:

$$\mathbf{M}^*_{10} = \mathfrak{B}_1,\ \mathbf{M}^*_{20} = \mathfrak{B}_2,$$
$$\mathbf{B}_{10} = -i\mathfrak{D}_1,\ \mathbf{B}_{20} = -i\mathfrak{D}_2.$$

Le intensità di campo $\mathfrak{E}$ ed $\mathfrak{H}$, ma anche le componenti x_3 di $\mathfrak{D}$ e $\mathfrak{B}$, sono nulle. La normale d'onda ha la direzione x_3, poiché ciò vale per A. Invece la corrente d'energia $\mathfrak{S}$ e la velocità di radiazione $\mathfrak{w}$ sono nulle, poiché tutte le componenti spaziali di A^* in questo sistema di riferimento si annullano. Inoltre la densità d'energia W a causa dell'annullarsi delle intensità di campo è zero. Per la tetravelocità del corpo vale, come su accennato:

$$Y_1 = Y_2 = 0,\ Y_3^2 = -\frac{1}{\varepsilon\mu}Y_0^2,$$

cioè per la sua velocità spaziale

$$\mathfrak{q}_1 = \mathfrak{q}_2 = 0,\ \mathfrak{q}_3^2 = \frac{c^2}{\varepsilon\mu}.$$

Ma $c/\sqrt{\varepsilon\mu}$ è la velocità di radiazione nel corpo a riposo. In K^r il corpo si muove quindi con questa velocità in direzione opposta alla normale d'onda. Infine segue da $A_0 = 0$ secondo la (20) l'annullarsi della frequenza ν, mentre la lunghezza d'onda λ secondo la (21) assume il valore finito A_3^{-1}.

In K^r esiste quindi un'onda sinusoidale stazionaria con le intensità di campo nulle e con spostamento $\mathfrak{D}$ e induzione $\mathfrak{B}$ costanti nel tempo. La sua energia è zero.

[5]Abraham, M.: Rendiconti Palermo **28** (1909); **30**, 33 (1910). - Phys. Z. **10**, 737 (1909). - Ann. Phys. **44**, 537 (1914). - Grammel, R.: Ann. Phys. **41**, 517 (1913). - Kafka, H.: Ann. Phys. **58**, 1 (1919).

Entro essa il corpo scorre con la velocità $c/\sqrt{\varepsilon\mu}$ opposta a quella della normale d' onda.

Se accresciamo $\mathfrak{q}$ oltre questo valore mantenendo la sua direzione opposta ad $\mathfrak{e}$, la sola componente della velocità di radiazione non nulla per simmetria, ossia $\mathfrak{w}_3$, sarà negativa. Poiché nè la lunghezza d'onda λ nè [secondo la (25a)] la componente $\mathfrak{s}_3$ del vettore $\mathfrak{s}$ parallela ad $\mathfrak{e}$ possono cambiar segno, per la (20) la frequenza sarà quindi $\nu < 0$, cosa che significa che la fase ora cresce in senso opposto alla normale d'onda $\mathfrak{e}$. Per la (27) questo cambio di segno si trasmette ad $\mathfrak{E}$ e ad $\mathfrak{H}$, ma non ai vettori $\mathfrak{D}$ e $\mathfrak{B}$, che non si annullano in K^r. Quindi per la (18) W sarà ora negativa. Il vettore di Poynting $\mathfrak{S}$ mantiene invece la sua direzione [secondo la (11)]. Il cambio di segno di $\mathfrak{w}_3$ deriva dal cambio di segno del denominatore W che compare nella (12).

Riepilogo

Poiché il tensore d'universo di Minkowski non simmetrico T è il solo possibile per l'elettrodinamica della materia, non si può ritenere valida in generale la formulazione $\mathfrak{g} = \mathfrak{S}/c^2$ della legge dell'inerzia dell'energia. Ciò si accorda con la dimostrazione, che G.U. Schubert[6] ha dato, che il tensore d'universo associato alla supercorrente è nonsimmetrico, e quindi parimenti contraddice quella forma della legge d'inerzia.

[6]Schubert, G.U.: Ann. Phys. **6**, 163 (1949).

Le equazioni fondamentali per i processi elettromagnetici nei corpi in movimento[1]

Hermann Minkowski

Presentato nella seduta del 21 dicembre 1907.

Sommario. Introduzione: teoria di Lorentz; teorema, postulato, principio della relatività.- §1. Notazioni.

Parte prima: Trattazione del caso limite dell'etere. - §2. Le equazioni fondamentali per l'etere. - §3. Il teorema della relatività di Lorentz. - §4. Trasformazioni di Lorentz speciali. - §5. Vettori dello spazio-tempo di I e di II specie. - §6. Concetto di tempo.

Parte seconda: I processi elettromagnetici. - §7. Le equazioni fondamentali per i corpi in quiete. - §8. Le equazioni fondamentali per i corpi in moto. - §9. Le equazioni fondamentali nella teoria di Lorentz. - §10. Le equazioni fondamentali secondo E. Cohn. - §11. Rappresentazione tipica delle equazioni fondamentali. - §12. L'operatore differenziale lor. - §13. Il prodotto dei vettori di campo fF. - §14. Le forze ponderomotrici.

Appendice: Meccanica e postulato di relatività. - Linee dello spazio-tempo, tempo proprio, aggiustamento del principio di Hamilton, legge dell'energia ed equazioni del moto, gravitazione.

Sulle equazioni fondamentali dell'elettrodinamica per i corpi in moto al momento presente regnano ancora delle divergenze di opinione. Le ipotesi di Hertz[2] (1890) devono essere abbandonate, poiché si è dimostrato che esse sono in contrasto con diversi risultati sperimentali.

Nel 1895 H.A. Lorentz[3] ha pubblicato la sua teoria dei fenomeni ottici ed elettrici nei corpi in moto che, fondandosi su una rappresentazione atomistica dell'elettricità, con il suo grande successo sembra giustificare le ardite ipotesi dalle quali essa è sorretta e permeata. La teoria di Lorentz[4] parte da certe equazioni originarie, che devono valere in ogni punto dell'"etere" e da lì perviene mediante la formazione di valori medi su regioni "infinitamente piccole dal punto di vista fisico", che già contengano moltissimi elettroni, alle equazioni per i processi nei corpi ponderabili.

In particolare la teoria di Lorentz dà conto dell'inesistenza di un moto relativo della terra rispetto all'etere luminoso; essa porta questo fatto in relazione con una covarianza di quelle equazioni originarie rispetto a certe trasformazioni simultanee dei parametri spaziali e temporali, che hanno ricevuto da Poincaré[5] il nome di trasformazioni di Lorentz. Per quelle equazioni originarie la covarianza per trasformazioni di Lorentz è un fatto puramente matematico, che chiamerò il teorema

[1]Die Grundgleichungen für die elektromagnetischen Vorgänge in bewegten Körpern, Nachrichten von der Kgl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Jahrgang 1908, 53-111.

[2]"Ueber die Grundgleichungen der Elektrodynamik für bewegte Körper". Wiedemanns Ann. p. 369. 1890 (anche in: "Ges. Werke", vol. I, p. 256. Leipzig 1892).

[3]"Versuch einer Theorie der elektrischen und optischen Erscheinungen in bewegten Körpern", Leiden 1895.

[4]vedi Encyklopädie der math. Wissenschaften, vol. V 2, art. 14. "Weiterbildung der Maxwellschen Theorie. Elektronentheorie."

[5]Rend. Circ. Matem. Palermo, t. XXI (1906), p. 129.

della relatività; questo teorema si fonda essenzialmente sulla forma dell'equazione differenziale per la propagazione di onde con la velocità della luce.

Ora ci si può aspettare, senza fare ancora professione di fede in certe ipotesi sulla relazione tra elettricità e materia, che quel teorema matematicamente evidente estenda le sue conseguenze così in là, che per esso anche le leggi finora sconosciute relative ai mezzi ponderabili assumano in qualche modo una covarianza rispetto alle trasformazioni di Lorentz. Si esprime così più un atto di fiducia che un giudizio compiuto, e chiamerò questo atto di fiducia il postulato della relatività. La situazione è all'incirca come quando si postula la conservazione dell'energia in casi per i quali le forme di energia che intervengono non siano ancora note.

Se si arrivasse a sostenere l'attesa covarianza come una determinata connessione tra quantità direttamente osservabili per i corpi in moto, si potrebbe poi chiamare questa determinata connessione il principio della relatività.

Queste distinzioni mi paiono utili a caratterizzare lo stato attuale dell'elettrodinamica dei corpi in movimento.

H.A. Lorentz ha trovato il teorema di relatività e creato il postulato di relatività come un'ipotesi per la quale gli elettroni e la materia in conseguenza del moto sperimentano contrazioni secondo determinate leggi.

A. Einstein[6] ha finora espresso nel modo più netto il fatto che questo postulato non è un'ipotesi artificiosa, ma piuttosto un'interpretazione di tipo nuovo del concetto di tempo che si impone attraverso i fenomeni.

Tuttavia il principio della relatività nel senso da me riconosciuto non è stato finora formulato per l'elettrodinamica dei corpi in moto. *Con la formulazione di questo principio nella presente dissertazione ottengo le equazioni fondamentali per corpi in moto in una forma che è determinata mediante questo principio in modo completamente univoco. Si dimostrerà inoltre che nessuna delle forme finora proposte per queste equazioni si conforma esattamente a questo principio.*

Ci si aspetterebbe prima di tutto che le equazioni fondamentali assunte da Lorentz per corpi in moto soddisfacessero il postulato di relatività. Risulta tuttavia che ciò non accade per le equazioni generali che Lorentz assume per corpi arbitrari, anche magnetizzati, ma che ciò accade in modo approssimato (qualora si tralasci il quadrato delle velocità della materia rispetto al quadrato della velocità della luce) per quelle equazioni che Lorentz ha dedotto poi per corpi non magnetizzati; egli perviene tuttavia a questo adeguamento successivo al postulato di relatività solo per il fatto che la condizione di assenza di magnetizzazione è per suo conto imposta in un modo che non si conforma al postulato di relatività, ossia mediante una compensazione casuale di due infrazioni del postulato di relatività. Questa constatazione tuttavia non significa alcuna obiezione contro le ipotesi di teoria molecolare di Lorentz, ma soltanto si rende chiaro che l'ipotesi della contrazione degli elettroni a causa del moto dovrebbe essere introdotta nella teoria di Lorentz in un punto precedente a quello da Lorentz adottato.

In un'appendice mi addentro poi sulla posizione della meccanica classica rispetto al postulato di relatività. Un aggiustamento di facile realizzazione della meccanica al postulato di relatività darebbe per i fenomeni osservabili differenze a malapena percettibili, ma porterebbe ad una conseguenza assai sorprendente: *con l'imposizione preventiva del postulato di relatività ci si procura lo strumento sufficiente a dedurre poi tutte le leggi della meccanica solo dalla legge della conservazione*

[6] Ann. d. Phys. **17**, p. 891, 1905.

dell'energia (e da asserzioni sulle forme dell'energia).

§1. Notazioni.

Sia dato un sistema di riferimento $x,\ y,\ z,\ t$ di coordinate rettilinee nello spazio e nel tempo. L'unità di tempo sia scelta in rapporto tale con l'unità di lunghezza che la velocità della luce sia 1 nello spazio vuoto.

Sebbene di per sé avrei preferito non alterare le notazioni utilizzate da Lorentz, mi pare tuttavia importante far risaltare fin dall'inizio certe uniformità mediante un'altra scelta dei simboli. Indicherò il vettore della forza elettrica con $\mathfrak{E}$, dell'induzione magnetica con $\mathfrak{M}$, dell'induzione elettrica con $\mathfrak{e}$, della forza magnetica con $\mathfrak{m}$, di modo che appariranno $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{e}$, $\mathfrak{m}$ al posto degli $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{H}$ di Lorentz.

Farò uso inoltre di quantità complesse in un modo che finora non era consueto nelle ricerche fisiche, cioè opererò invece che con t con l'espressione it, dove i indica l'unità immaginaria $\sqrt{-1}$. Saranno d'altra parte messi in evidenza i fatti veramente importanti, poiché utilizzerò una notazione con indici, ossia spesso porrò

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4 \ \text{ al posto di } x,\ y,\ z,\ it$$

e farò quindi un uso generale degli indici 1, 2, 3, 4. Ma si avrà poi a che fare, come espressamente sottolineo, sempre soltanto con un più chiaro insieme di relazioni puramente reali, ed il passaggio a equazioni reali si otterrà sempre immediatamente, pur di interpretare i simboli con un indice 4 sempre come di valore immaginario, e quelli senza indice 4 o con due indici 4 sempre come di valore reale.

Un singolo sistema di valori $x,\ y,\ z,\ t$ ovvero $x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4$ si chiamerà un punto dello spazio-tempo.

Inoltre $\mathfrak{w}$ indicherà il vettore velocità della materia, ε la costante dielettrica, μ la permeabilità magnetica, σ la conducibilità della materia, tutte intese come funzioni di $x,\ y,\ z,\ t$ (ovvero $x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4$); ρ indicherà la densità spaziale elettrica, $\mathfrak{s}$ un vettore "corrente elettrica", sulla definizione del quale verremo in seguito (nei §7 e 8).

Parte prima: Trattazione del caso limite dell'etere.

§2. Le equazioni fondamentali per l'etere.

La teoria di Lorentz riconduce le leggi dell'elettrodinamica dei corpi ponderabili mediante rappresentazioni atomistiche dell'elettricità a leggi più semplici; a queste leggi più semplici ci riconduciamo qui parimenti richiedendo che esse debbano rappresentare il caso limite $\varepsilon = 1$, $\mu = 1$, $\sigma = 0$ delle leggi per i corpi ponderabili. In questo caso limite ideale $\varepsilon = 1$, $\mu = 1$, $\sigma = 0$ dev'essere $\mathfrak{E} = \mathfrak{e}$, $\mathfrak{M} = \mathfrak{m}$, ed in ogni punto $x,\ y,\ z,\ t$ dello spazio-tempo devono valere le equazioni:

$$\text{(I)} \qquad \operatorname{rot} \mathfrak{m} - \frac{\partial \mathfrak{e}}{\partial t} = \rho \mathfrak{w},$$

$$\text{(II)} \qquad \operatorname{div} \mathfrak{e} = \rho,$$

$$\text{(III)} \qquad \operatorname{rot} \mathfrak{e} + \frac{\partial \mathfrak{m}}{\partial t} = 0,$$

$$\text{(IV)} \qquad \operatorname{div} \mathfrak{m} = 0.$$

Scriverò ora x_1, x_2, x_3, x_4 al posto di x, y, z, it $(i = \sqrt{-1})$; inoltre

$$\rho_1,\ \rho_2,\ \rho_3,\ \rho_4 \text{ al posto di } \rho\mathfrak{w}_x,\ \rho\mathfrak{w}_y,\ \rho\mathfrak{w}_z,\ i\rho,$$

cioè delle componenti della corrente di convezione $\rho\mathfrak{w}$ e della densità di elettricità moltiplicata per i; inoltre porrò

$$f_{23},\ f_{31},\ f_{12},\ f_{14},\ f_{24},\ f_{34} \text{ al posto di } \mathfrak{m}_x,\ \mathfrak{m}_y,\ \mathfrak{m}_z,\ -i\mathfrak{e}_x,\ -i\mathfrak{e}_y,\ -i\mathfrak{e}_z,$$

cioè delle componenti di $\mathfrak{m}$ e rispettivamente di $-i\mathfrak{e}$ secondo gli assi, infine ancora in generale con due indici h, k presi dalla sequenza 1, 2, 3, 4:

$$f_{kh} = -f_{hk},$$

quindi porrò

$$\begin{gathered} f_{32} = -f_{23},\ f_{13} = -f_{31},\ f_{21} = -f_{12}, \\ f_{41} = -f_{14},\ f_{42} = -f_{24},\ f_{43} = -f_{34}. \end{gathered}$$

Allora le tre equazioni riassunte nella (I) e l'equazione (II) moltiplicata per i si scrivono:

$$\text{(A)} \qquad \begin{aligned} \frac{\partial f_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial f_{13}}{\partial x_3} + \frac{\partial f_{14}}{\partial x_4} &= \rho_1, \\ \frac{\partial f_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial f_{23}}{\partial x_3} + \frac{\partial f_{24}}{\partial x_4} &= \rho_2, \\ \frac{\partial f_{31}}{\partial x_1} + \frac{\partial f_{32}}{\partial x_2} + \frac{\partial f_{34}}{\partial x_4} &= \rho_3, \\ \frac{\partial f_{41}}{\partial x_1} + \frac{\partial f_{42}}{\partial x_2} + \frac{\partial f_{43}}{\partial x_3} &= \rho_4, \end{aligned}$$

D'altra parte le tre equazioni riassunte nella (III), moltiplicate per $-i$, e l'equazione (IV), moltiplicata per -1 , si trasformano in

$$\text{(B)} \qquad \begin{aligned} \frac{\partial f_{34}}{\partial x_2} + \frac{\partial f_{42}}{\partial x_3} + \frac{\partial f_{23}}{\partial x_4} &= 0, \\ \frac{\partial f_{43}}{\partial x_1} + \frac{\partial f_{14}}{\partial x_3} + \frac{\partial f_{31}}{\partial x_4} &= 0, \\ \frac{\partial f_{24}}{\partial x_1} + \frac{\partial f_{41}}{\partial x_2} + \frac{\partial f_{12}}{\partial x_4} &= 0, \\ \frac{\partial f_{32}}{\partial x_1} + \frac{\partial f_{13}}{\partial x_2} + \frac{\partial f_{21}}{\partial x_3} &= 0. \end{aligned}$$

Con questo modo di scrivere si nota immediatamente la completa simmetria sia del primo che del secondo di questi sistemi d'equazioni rispetto alle permutazioni degli indici 1, 2, 3, 4.

§3. Il teorema della relatività di Lorentz.

Il modo di scrivere le equazioni (I) - (IV) con il simbolismo del calcolo vettoriale serve notoriamente a porre in evidenza un'invarianza (o meglio covarianza) del sistema di equazioni (A) come pure del sistema (B) rispetto ad una rotazione del sistema di coordinate attorno all'origine. Eseguiamo per esempio una rotazione attorno all'asse x di un angolo fisso φ mantenendo fissi nello spazio i vettori $\mathfrak{e}$, $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{w}$; introduciamo quindi al posto di $x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4$ nuove variabili $x'_1,\ x'_2,\ x'_3,\ x'_4$ mediante

$$x'_1 = x_1 \cos\varphi + x_2 \sin\varphi,\ x'_2 = -x_1 \sin\varphi + x_2 \cos\varphi,\ x'_3 = x_3,\ x'_4 = x_4,$$

inoltre nuove quantità $\rho'_1,\ \rho'_2,\ \rho'_3,\ \rho'_4$ mediante

$$\rho'{}_1 = \rho_1 \cos\varphi + \rho_2 \sin\varphi,\ \rho'{}_2 = -\rho_1 \sin\varphi + \rho_2 \cos\varphi,\ \rho''{}_3 = \rho_3,\ \rho'{}_4 = \rho_4,$$

nuove quantità $f'_{12}, \dots f'_{34}$ mediante

$$f'_{23} = f_{23} \cos\varphi + f_{31} \sin\varphi,\ f'_{31} = -f_{23} \sin\varphi + f_{31} \cos\varphi,\ f'_{12} = f_{12},$$

$$f'_{14} = f_{14} \cos\varphi + f_{24} \sin\varphi,\ f'_{24} = -f_{14} \sin\varphi + f_{24} \cos\varphi,\ f'_{34} = f_{34},$$

$$f'_{kh} = -f'_{hk}\ (h, k = 1, 2, 3, 4),$$

allora dal sistema (A) deriverà necessariamente il sistema esattamente corrispondente (A') tra le nuove quantità primate, da (B) il sistema esattamente corrispondente (B').

Pertanto si può dedurre immediatamente senza alcun calcolo sulla base della simmetria del sistema (A) e del sistema (B) negli indici 1, 2, 3, 4 il teorema della relatività trovato da Lorentz.

Intenderò con $i\psi$ una quantità puramente immaginaria e considererò la sostituzione

$$\begin{gathered} x' = x_1,\ x' = x_2, \\ x'{}_3 = x_3 \cos i\psi + x_4 \sin i\psi,\ x'{}_4 = -x_3 \sin i\psi + x_4 \cos i\psi. \end{gathered} \tag{1}$$

Mediante

$$-i \tan i\psi = \frac{e^{\psi} - e^{-\psi}}{e^{\psi} + e^{-\psi}} = q,\ \psi = \frac{1}{2} \log\operatorname{nat} \frac{1+q}{1-q} \tag{2}$$

sarà

$$\cos i\psi = \frac{1}{\sqrt{1-q^2}},\ \sin i\psi = \frac{iq}{\sqrt{1-q^2}},$$

dove $-1 < q < 1$ e $\sqrt{1-q^2}$ va preso col segno positivo. Scriviamo ancora

$$x'_1 = x',\ x'_2 = y',\ x'_3 = z',\ x'_4 = it'; \tag{3}$$

allora la sostituzione (1) assume la forma

$$x' = x,\ y' = y,\ z' = \frac{z - qt}{\sqrt{1-q^2}},\ t' = \frac{-qz + t}{\sqrt{1-q^2}} \tag{4}$$

con coefficienti puramente reali.

Se ora sostituiamo nelle succitate equazioni per la rotazione attorno all'asse x ovunque 1, 2, 3, 4 con 3, 4, 1, 2 e contemporaneamente φ mediante $i\psi$, e se contemporaneamente a questa sostituzione (1) introduciamo nuove quantità $\rho'_1,\ \rho'_2,\ \rho'_3,\ \rho'_4$ mediante

$$\rho'_1 = \rho_1,\ \rho'_2 = \rho_2,$$

$$\rho'_3 = \rho_3 \cos i\psi + \rho_4 \sin i\psi,\ \rho'_4 = -\rho_3 \sin i\psi + \rho_4 \cos i\psi,$$

nuove quantità $f'_{12}, \dots f'_{34}$ mediante

$$f'_{41} = f_{41} \cos i\psi + f_{13} \sin i\psi,\ f'_{13} = -f_{41} \sin i\psi + f_{13} \cos i\psi,\ f'_{34} = f_{34},$$

$$f'_{32} = f_{32} \cos i\psi + f_{42} \sin i\psi,\ f'_{42} = -f_{32} \sin i\psi + f_{42} \cos i\psi,\ f'_{12} = f_{12},$$

$$f'_{kh} = -f'_{hk}\ (h, k = 1, 2, 3, 4),$$

parimenti il sistema (A) andrà nel sistema esattamente corrispondente (A'), il sistema (B) nel sistema esattamente corrispondente (B') tra le nuove quantità primate.

Tutte queste equazioni si possono immediatamente riscrivere in forma puramente reale, e l'ultimo risultato si può formulare così:

Si assuma la trasformazione reale (4) e si considerino poi $x',\ y',\ z',\ t'$ come un sistema di riferimento per lo spazio ed il tempo; siano parimenti introdotti

$$\rho' = \rho\left(\frac{-q\mathfrak{w}_z + 1}{\sqrt{1-q^2}}\right),\ \rho'\mathfrak{w}'_{z'} = \rho\left(\frac{\mathfrak{w}_z - q}{\sqrt{1-q^2}}\right),\ \rho'\mathfrak{w}'_{x'} = \rho\mathfrak{w}_x,\ \rho'\mathfrak{w}'_{y'} = \rho\mathfrak{w}_y, \tag{5}$$

inoltre

$$\mathfrak{e}'_{x'} = \frac{\mathfrak{e}_x - q\mathfrak{m}_y}{\sqrt{1-q^2}},\ \mathfrak{m}'_{y'} = \frac{-q\mathfrak{e}_x + \mathfrak{m}_y}{\sqrt{1-q^2}},\ \mathfrak{e}'_{z'} = \mathfrak{e}_z, \tag{6}$$

e

$$\mathfrak{m}'_{x'} = \frac{\mathfrak{m}_x + q\mathfrak{e}_y}{\sqrt{1-q^2}},\ \mathfrak{e}'_{y'} = \frac{q\mathfrak{m}_x + \mathfrak{e}_y}{\sqrt{1-q^2}},\ \mathfrak{m}'_{z'} = \mathfrak{m}_z; \tag{7}$$

allora[7] per i vettori $\mathfrak{w}',\ \mathfrak{e}',\ \mathfrak{m}'$ con le componenti $\mathfrak{w}'_{x'},\ \mathfrak{w}'_{y'},\ \mathfrak{w}'_{z'};\ \mathfrak{e}'_{x'},\ \mathfrak{e}'_{y'},\ \mathfrak{e}'_{z'};\ \mathfrak{m}'_{x'},\ \mathfrak{m}'_{y'},\ \mathfrak{m}'_{z'}$ nel nuovo sistema di coordinate $x',\ y',\ z'$ e inoltre per la quantità ρ' valgono esattamente le equazioni (I')-(IV') analoghe alle (I)-(IV), e più precisamente il sistema (I), (II) va in (I'), (II'), il sistema (III), (IV) in (III'), (IV').

Osserviamo che qui $\mathfrak{e}_x - q\mathfrak{m}_y,\ \mathfrak{e}_y + q\mathfrak{m}_x,\ \mathfrak{e}_z$ sono le componenti del vettore $\mathfrak{e} + [\mathfrak{v}\mathfrak{m}]$, quando $\mathfrak{v}$ indica un vettore nella direzione dell'asse z positivo di modulo $|\mathfrak{v}| = q$ e

[7] Le equazioni (5) sono qui in ordine diverso, le equazioni (6) e (7) sono invece nello stesso ordine delle equazioni su citate, che da queste derivano.

$[\mathfrak{v}\mathfrak{m}]$ il prodotto vettore dei vettori $\mathfrak{v}$ ed $\mathfrak{m}$. Analogamente poi $\mathfrak{m}_x + q\mathfrak{e}_y$, $\mathfrak{m}_y - q\mathfrak{e}_x$, $\mathfrak{m}_z$ sono le componenti del vettore $\mathfrak{m} - [\mathfrak{v}\mathfrak{e}]$.

Le equazioni (6) e (7), così come stanno appaiate l'una sotto l'altra, si possono riassumere con un altro utilizzo delle quantità immaginarie in

$$\mathfrak{e}'_{x'} + i\mathfrak{m}'_{x'} = (\mathfrak{e}_x + i\mathfrak{m}_x)\cos i\psi + (\mathfrak{e}_y + i\mathfrak{m}_y)\sin i\psi,$$
$$\mathfrak{e}'_{y'} + i\mathfrak{m}'_{y'} = -(\mathfrak{e}_x + i\mathfrak{m}_x)\sin i\psi + (\mathfrak{e}_y + i\mathfrak{m}_y)\cos i\psi,$$
$$\mathfrak{e}'_{z'} + i\mathfrak{m}'_{z'} = \mathfrak{e}_z + i\mathfrak{m}_z,$$

e osserviamo ancora che quando φ indica un qualche angolo reale, da queste ultime relazioni si ottengono inoltre le combinazioni

$$(8)\qquad \begin{aligned}&(\mathfrak{e}'_{x'} + i\mathfrak{m}'_{x'})\cos\varphi + \left(\mathfrak{e}'_{y'} + i\mathfrak{m}'_{y'}\right)\sin\varphi\\ &= (\mathfrak{e}_x + i\mathfrak{m}_x)\cos(\varphi + i\psi) + (\mathfrak{e}_y + i\mathfrak{m}_y)\sin(\varphi + i\psi)\,,\end{aligned}$$

$$(9)\qquad \begin{aligned}&-(\mathfrak{e}'_{x'} + i\mathfrak{m}'_{x'})\sin\varphi + \left(\mathfrak{e}'_{y'} + i\mathfrak{m}'_{y'}\right)\cos\varphi\\ &= -(\mathfrak{e}_x + i\mathfrak{m}_x)\sin(\varphi + i\psi) + (\mathfrak{e}_y + i\mathfrak{m}_y)\cos(\varphi + i\psi)\,.\end{aligned}$$

§4. Trasformazioni di Lorentz speciali.

Il ruolo che la direzione z gioca nella trasformazione 4 può essere facilmente esteso ad una direzione qualsiasi, purché si sottopongano i sistemi di assi x, y, z e x', y', z' ad una ed uguale rotazione rispetto a se stessi. Giungiamo così ad una legge più generale.

Sia $\mathfrak{v}$ con le componenti $\mathfrak{v}_x$, $\mathfrak{v}_y$, $\mathfrak{v}_z$ un dato vettore, con un modulo $|\mathfrak{v}| = q$ diverso da zero che sia minore di 1; esso abbia una certa direzione. Intendiamo in generale con $\bar{\mathfrak{v}}$ una direzione qualsiasi ortogonale a $\mathfrak{v}$ e indichiamo inoltre la componente di un vettore $\mathfrak{r}$ lungo la direzione $\mathfrak{v}$ ovvero lungo la direzione $\bar{\mathfrak{v}}$ con $\mathfrak{r}_{\mathfrak{v}}$ ovvero rispettivamente con $\mathfrak{r}_{\bar{\mathfrak{v}}}$.

Al posto di x, y, z, t si introducano ora nuove quantità x', y', z', t' nel modo seguente. Si indichi per brevità con $\mathfrak{r}$ il vettore con le componenti x, y, z nel primo sistema di riferimento, con $\mathfrak{r}'$ quello con le componenti x', y', z' nel secondo sistema di riferimento; allora per la direzione di $\mathfrak{v}$ dovrà essere

$$(10)\qquad \mathfrak{r}'_{\mathfrak{v}} = \frac{\mathfrak{r}_{\mathfrak{v}} - qt}{\sqrt{1-q^2}},$$

per ogni direzione $\bar{\mathfrak{v}}$ perpendicolare a $\mathfrak{v}$:

$$(11)\qquad \mathfrak{r}'_{\bar{\mathfrak{v}}} = \mathfrak{r}_{\bar{\mathfrak{v}}},$$

e inoltre:

$$(12)\qquad t' = \frac{-q\mathfrak{r}_{\mathfrak{v}} + t}{\sqrt{1-q^2}}.$$

Le notazioni $\mathfrak{r}'_{\mathfrak{v}}$ e $\mathfrak{r}'_{\bar{\mathfrak{v}}}$ vanno qui intese nel senso che alla direzione $\mathfrak{v}$ e a ogni direzione $\bar{\mathfrak{v}}$ ortogonale a $\mathfrak{v}$ in $x,\ y,\ z$ è sempre associata la direzione con gli stessi coseni direttori in $x',\ y',\ z'$.

Chiamerò trasformazione di Lorentz speciale una trasformazione che sia rappresentata dalle (10), (11), (12) con la condizione $0 < q < 1$, e $\mathfrak{v}$ si dirà il vettore, la direzione di $\mathfrak{v}$ l'asse, il modulo di $\mathfrak{v}$ il momento di questa trasformazione di Lorentz speciale.

Siano inoltre così definiti, in $x',\ y',\ z',\ \rho'$ ed i vettori $\mathfrak{w}',\ \mathfrak{e}',\ \mathfrak{m}'$:

$$\rho' = \frac{\rho\left(-q\mathfrak{w}_{\mathfrak{v}} + 1\right)}{\sqrt{1-q^2}}, \tag{13}$$

$$\rho'\mathfrak{w}'_{\mathfrak{v}} = \frac{\rho\mathfrak{w}_{\mathfrak{v}} - \rho q}{\sqrt{1-q^2}},\ \rho'\mathfrak{w}'_{\bar{\mathfrak{v}}} = \rho\mathfrak{w}_{\bar{\mathfrak{v}}}, \tag{14}$$

inoltre[8] è

$$\begin{aligned} (\mathfrak{e}' + i\mathfrak{m}')_{\bar{\mathfrak{v}}} &= \frac{(\mathfrak{e} + i\mathfrak{m} - i\,[\mathfrak{w},\ \mathfrak{e} + i\mathfrak{m}])_{\bar{\mathfrak{v}}}}{\sqrt{1-q^2}}, \\ (\mathfrak{e}' + i\mathfrak{m}')_{\mathfrak{v}} &= (\mathfrak{e} + i\mathfrak{m} - i\,[\mathfrak{w},\ \mathfrak{e} + i\mathfrak{m}])_{\mathfrak{v}}\,, \end{aligned} \tag{15}$$

e quindi risulta la legge, secondo la quale i sistemi di equazioni (I), (II) e (III), (IV) vanno ciascuno nel sistema esattamente corrispondente con le quantità primate.

La soluzione delle equazioni (10), (11), (12) porta a

$$\mathfrak{r}_{\mathfrak{v}} = \frac{\mathfrak{r}'_{\mathfrak{v}} + qt'}{\sqrt{1-q^2}},\ \mathfrak{r}_{\bar{\mathfrak{v}}} = \mathfrak{r}'_{\bar{\mathfrak{v}}},\ t = \frac{q\mathfrak{r}'_{\mathfrak{v}} + t'}{\sqrt{1-q^2}}. - \tag{16}$$

Esponiamo ora un'osservazione assai importante nel seguito sulla relazione tra i vettori $\mathfrak{w}$ e $\mathfrak{w}'$. Si può far uso della notazione con gli indici 1, 2, 3, 4 già utilizzata più volte, con la quale poniamo $x'_1,\ x'_2,\ x'_3,\ x'_4$ al posto di $x',\ y',\ z',\ it'$ e $\rho'_1,\ \rho'_2,\ \rho'_3,\ \rho'_4$ al posto di $\rho'\mathfrak{w}'_{x'},\ \rho'\mathfrak{w}'_{y'},\ \rho'\mathfrak{w}'_{z'},\ i\rho'$. Come una rotazione attorno all'asse z, anche la trasformazione (4) e più in generale la trasformazione (10), (11), (12) è evidentemente una trasformazione lineare di determinante +1, per la quale

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2,\ \text{cioè}\ x^2 + y^2 + z^2 - t^2 \tag{17}$$

va in

$$x'^2_1 + x'^2_2 + x'^2_3 + x'^2_4,\ \text{cioè}\ x'^2 + y'^2 + z'^2 - t'^2.$$

In base alle espressioni (13), (14) anche

$$-\left(\rho_1^2 + \rho_2^2 + \rho_3^2 + \rho_4^2\right) = \rho^2\left(1 - \mathfrak{w}_x^2 - \mathfrak{w}_y^2 - \mathfrak{w}_z^2\right) = \rho^2\left(1 - \mathfrak{w}^2\right)$$

[8]Le parentesi tonde racchiuderanno solo espressioni che si riferiscono all'indice, e $[\mathfrak{w},\ \mathfrak{e} + i\mathfrak{m}]$ indicherà il prodotto vettore di $\mathfrak{w}$ ed $\mathfrak{e} + i\mathfrak{m}$.

andrà in $\rho'^2\left(1-\mathfrak{w}'^2\right)$, ovvero in altre parole

$$\rho\sqrt{1-\mathfrak{w}^2}, \tag{18}$$

nel quale la radice quadrata va assunta positiva, sarà un invariante per trasformazioni di Lorentz.

Se dividiamo $\rho_1,\ \rho_2,\ \rho_3,\ \rho_4$ per questa quantità, risultano i 4 valori

$$w_1=\frac{\mathfrak{w}_x}{\sqrt{1-\mathfrak{w}^2}},\ w_2=\frac{\mathfrak{w}_y}{\sqrt{1-\mathfrak{w}^2}},\ w_3=\frac{\mathfrak{w}_z}{\sqrt{1-\mathfrak{w}^2}},\ w_4=\frac{i}{\sqrt{1-\mathfrak{w}^2}},$$

tra i quali sussiste la relazione

$$w_1^2+w_2^2+w_3^2+w_4^2=-1. \tag{19}$$

Evidentemente questi 4 valori sono determinati univocamente dal vettore $\mathfrak{w}$, e viceversa da 4 valori $w_1,\ w_2,\ w_3,\ w_4$ dei quali $w_1,\ w_2,\ w_3$ siano reali, $-iw_4$ reale e positivo, e che soddisfino la condizione (19), si ricava a ritroso secondo queste equazioni un vettore $\mathfrak{w}$ di modulo < 1.

L' importanza di w_1, w_2, w_3, w_4 sta nel fatto che essi sono i rapporti tra dx_1, dx_2, dx_3, dx_4 e

$$\sqrt{-\left(dx_1^2+dx_2^2+dx_3^2+dx_4^2\right)}=dt\sqrt{1-\mathfrak{w}^2} \tag{20}$$

per la materia che si trova nel punto dello spazio-tempo x_1, x_2, x_3, x_4, quando lo stesso punto della materia passa ad uno stato prossimo nel tempo. Ora le equazioni (10), (11), (12), si estendono immediatamente ai differenziali dx, dy, dz, dt e dx', dy', dz', dt', e si avrà in particolare

$$-\left(dx_1^2+dx_2^2+dx_3^2+dx_4^2\right)=-\left({dx'}_1^2+{dx'}_2^2+{dx'}_3^2+{dx'}_4^2\right).$$

In seguito ad esecuzione della trasformazione di Lorentz si deve prendere come velocità della materia nel nuovo sistema di riferimento nello stesso punto dello spazio-tempo x', y', z', t' il vettore $\mathfrak{w}'$ con i rapporti dx'/dt', dy'/dt', dz'/dt' come componenti.

Inoltre è chiaro che il sistema di valori

$$x_1=w_1,\ x_2=w_2,\ x_3=w_3,\ x_4=w_4,$$

in forza della trasformazione di Lorentz (10), (11), (12) va proprio in quel nuovo sistema di valori

$${x'}_1=w'_1,\ {x'}_2=w'_2,\ {x'}_3=w'_3,\ {x'}_4=w'_4,$$

che dopo la trasformazione ha per la velocità $\mathfrak{w}'$ proprio il significato che prima della trasformazione aveva per la velocità il primo sistema di valori.

Se in particolare il vettore $\mathfrak{v}$ della trasformazione speciale di Lorentz è uguale al vettore velocità $\mathfrak{w}$ della materia nel punto dello spazio-tempo x_1, x_2, x_3, x_4, discende dalle (10), (11), (12):

$$w_1' = 0,\ w_2' = 0,\ w_3' = 0,\ w' = i_4.$$

In questa situazione il punto in questione dello spazio-tempo acquista a seguito della trasformazione la velocità $\mathfrak{w}' = 0$; esso sarà, per così dire, trasformato alla quiete. Possiamo perciò opportunamente chiamare l'invariante $\rho\sqrt{1-\mathfrak{w}^2}$ la densità a riposo dell'elettricità.

§5. Vettori dello spazio-tempo di I e di II specie.

Unendo il risultato fondamentale relativo alle trasformazioni di Lorentz con il fatto che sia il sistema (A) che il sistema (B) sono in ogni caso covarianti rispetto ad una rotazione del sistema di riferimento spaziale attorno all'origine otteniamo il teorema generale della relatività. Per formularlo in modo facilmente comprensibile può essere conveniente definire una serie di espressioni abbreviate, mentre d'altra parte continuerò ad utilizzare quantità complesse, per porre in evidenza determinate simmetrie.

Una trasformazione lineare omogenea

$$\begin{aligned}
x_1 &= \alpha_{11}x_1' + \alpha_{12}x_2' + \alpha_{13}x_3' + \alpha_{14}x_4',\\
x_2 &= \alpha_{21}x_1' + \alpha_{22}x_2' + \alpha_{23}x_3' + \alpha_{24}x_4',\\
x_3 &= \alpha_{31}x_1' + \alpha_{32}x_2' + \alpha_{33}x_3' + \alpha_{34}x_4',\\
x_4 &= \alpha_{41}x_1' + \alpha_{42}x_2' + \alpha_{43}x_3' + \alpha_{44}x_4',
\end{aligned} \tag{21}$$

di determinante $+1$, nella quale tutti i coefficienti nei quali non compaia nessun indice 4 siano reali, mentre $\alpha_{14},\ \alpha_{24},\ \alpha_{34}$ come pure $\alpha_{41},\ \alpha_{42},\ \alpha_{43}$ siano immaginari puri (eventualmente zero), e infine α_{44} sia di nuovo reale e in particolare > 0, e mediante la quale

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 \ \text{ vada in } \ {x'}_1^2 + {x'}_2^2 + {x'}_3^2 + {x'}_4^2,$$

la chiamerò in generale una trasformazione di Lorentz.

Se si pone

$$x'_1 = x',\ x'_2 = y',\ x'_3 = z',\ x'_4 = it',$$

da essa risulta immediatamente una trasformazione lineare omogenea di $x,\ y,\ z,\ t$ in $x',\ y',\ z',\ t'$ con coefficienti puramente reali, per la quale l'espressione

$$-x^2 - y^2 - z^2 + t^2 \ \text{va in } -x'^2 - y'^2 - z'^2 + t'^2,$$

e a un qualsiasi siffatto sistema di valori $x,\ y,\ z,\ t$ con t positivo, per il quale quest'espressione sia > 0, corrisponde sempre anche un t' positivo; questo risulta facilmente evidente dalla continuità dell'espressione in $x,\ y,\ z,\ t$.

L'ultima riga verticale del sistema di coefficienti della (21) deve soddisfare la condizione

$$\alpha_{14}^2 + \alpha_{24}^2 + \alpha_{34}^2 + \alpha_{44}^2 = 1. \tag{22}$$

Siano $\alpha_{14} = 0$, $\alpha_{24} = 0$, $\alpha_{34} = 0$, allora $\alpha_{44} = 1$ e la trasformazione di Lorentz si riduce ad una pura rotazione del sistema di coordinate spaziale attorno all'origine.

Siano α_{14}, α_{24}, α_{34} non simultaneamente nulli e si ponga

$$\alpha_{14} : \alpha_{24} : \alpha_{34} : \alpha_{44} = \mathfrak{v}_x : \mathfrak{v}_y : \mathfrak{v}_z : i,$$

allora dalla (22) risulta il valore

$$q = \left(\mathfrak{v}_x^2 + \mathfrak{v}_y^2 + \mathfrak{v}_z^2\right)^{1/2} < 1.$$

D'altra parte, per ogni sistema di valori $\alpha_{14},\ \alpha_{24},\ \alpha_{34},\ \alpha_{44}$ che soddisfi in questo modo la condizione (22) con $\mathfrak{v}_x,\ \mathfrak{v}_y,\ \mathfrak{v}_z$ reali, si può costruire la trasformazione di Lorentz speciale (16) con $\alpha_{14},\ \alpha_{24},\ \alpha_{34},\ \alpha_{44}$ come ultima riga verticale e ogni trasformazione di Lorentz con la suddetta ultima riga verticale dei coefficienti può quindi essere composta da questa trasformazione di Lorentz speciale e da una corrispondente rotazione del sistema di coordinate spaziale attorno all'origine.

La totalità delle trasformazioni di Lorentz costituisce un gruppo.

Per vettore dello spazio-tempo di I specie si intenderà un arbitrario sistema di quattro quantità $\rho_1,\ \rho_2,\ \rho_3,\ \rho_4$ con la prescrizione che per ogni trasformazione di Lorentz (21) esso venga sostituito da quel sistema $\rho_1',\ \rho_2',\ \rho_3',\ \rho_4'$ che si ottiene dalla (21) per i valori $x_1',\ x_2',\ x_3',\ x_4'$, quando per $x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4$ si assumano i valori $\rho_1,\ \rho_2,\ \rho_3,\ \rho_4$.

Impieghiamo oltre al vettore dello spazio-tempo di I specie variabile x_1, x_2, x_3, x_4 un secondo siffatto vettore dello spazio-tempo di I specie variabile u_1, u_2, u_3, u_4, e costruiamo l'espressione bilineare

$$\begin{aligned} &f_{23}\,(x_2u_3 - x_3u_2) + f_{31}\,(x_3u_1 - x_1u_3) + f_{12}\,(x_1u_2 - x_2u_1) \\ &+f_{14}\,(x_1u_4 - x_4u_1) + f_{24}\,(x_2u_4 - x_4u_2) + f_{34}\,(x_3u_4 - x_4u_3) \end{aligned} \tag{23}$$

con sei coefficienti $f_{23}, \dots f_{34}$. Notiamo che da un lato essa si può scrivere con notazione vettoriale a partire dai 4 vettori

$$x_1,\ x_2,\ x_3;\ u_1,\ u_2,\ u_3;\ f_{23},\ f_{31},\ f_{12};\ f_{14},\ f_{24},\ f_{34}$$

e dalle costanti x_4 e u_4 , e dall'altro è simmetrica negli indici 1, 2, 3, 4. Se si sostituiscono simultaneamente $x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4$ e $u_1,\ u_2,\ u_3,\ u_4$ secondo la trasformazione di Lorentz (21), la (23) si trasforma in un'espressione

$$\begin{aligned} &f_{23}'\,(x_2'u_3' - x_3'u_2') + f_{31}'\,(x_3'u_1' - x_1'u_3') + f_{12}'\,(x_1'u_2' - x_2'u_1') \\ &+f_{14}'\,(x_1'u_4' - x_4'u_1') + f_{24}'\,(x_2'u_4' - x_4'u_2') + f_{34}'\,(x_3'u_4' - x_4'u_3') \end{aligned} \tag{24}$$

con 6 determinati coefficienti $f_{23}',\ \dots f_{34}'$ che dipendono soltanto dalle 6 quantità $f_{23},\ \dots f_{34}$ e dai 16 coefficienti $\alpha_{11},\ \alpha_{12} \dots \alpha_{44}$.

Definiamo un vettore dello spazio-tempo di II specie come un sistema di sei quantità $f_{23},\ f_{31},\ f_{12},\ f_{14},\ f_{24},\ f_{34}$, con la prescrizione che per ogni trasformazione di Lorentz sia sostituito da quel nuovo sistema $f_{23}',\ f_{31}',\ f_{12}',\ f_{14}',\ f_{24}',\ f_{34}'$, che si conforma alla relazione discussa prima della forma (23) con la forma (24).

Esprimo d'ora in poi nel modo seguente il teorema generale della relatività riguardante le equazioni (I)-(IV), le "equazioni fondamentali per l'etere".

Si sottopongano x, y, z, it (coordinate spaziali e tempo $\times i$) ad una trasformazione di Lorentz arbitraria, e simultaneamente si trasformino $\rho\mathfrak{w}_x,\ \rho\mathfrak{w}_y,$

$\rho\mathfrak{w}_z$, $i\rho$ (corrente di convezione e densità di carica $\times i$) come vettore dello spazio-tempo di I specie, ed inoltre $\mathfrak{m}_x$, $\mathfrak{m}_y$, $\mathfrak{m}_z$, $-i\mathfrak{e}_x$, $-i\mathfrak{e}_y$, $-i\mathfrak{e}_z$ (forza magnetica ed induzione elettrica $\times -i$) come vettore dello spazio-tempo di II specie; allora il sistema delle equazioni (I), (II) ed il sistema delle equazioni (III), (IV) vanno ciascuno nel sistema delle relazioni che si scrivono in modo corrispondente tra le corrispondenti quantità nuove introdotte.

Questi fatti si possono esprimere più brevemente anche a parole: il sistema (I), (II) come il sistema (III), (IV) è covariante per ogni trasformazione di Lorentz, purché si trasformi $\rho\mathfrak{w}$, $i\rho$ come vettore dello spazio-tempo di I specie, $\mathfrak{m}$, $-i\mathfrak{e}$ come vettore dello spazio-tempo di II specie. O in modo ancora più pregnante:

$\rho\mathfrak{w}$, $i\rho$ è un vettore dello spazio-tempo di I specie, $\mathfrak{m}$, $-i\mathfrak{e}$ è un vettore dello spazio-tempo di II specie. -

Aggiungo ancora alcune osservazioni, per chiarire il concetto di vettore dello spazio-tempo di II specie. Gli invarianti per un tale vettore $\mathfrak{m}$, $-i\mathfrak{e}$ sono evidentemente

$$\mathfrak{m}^2-\mathfrak{e}^2=f_{23}^2+f_{31}^2+f_{12}^2+f_{14}^2+f_{24}^2+f_{34}^2, \tag{25}$$

$$\mathfrak{m}\mathfrak{e}=i\left(f_{23}f_{14}+f_{31}f_{24}+f_{12}f_{34}\right). \tag{26}$$

Un vettore dello spazio-tempo di II specie $\mathfrak{m}$, $-i\mathfrak{e}$ (dove $\mathfrak{m}$ ed $\mathfrak{e}$ sono vettori spaziali reali) può dirsi singolare quando lo scalare quadrato $(\mathfrak{m}-i\mathfrak{e})^2=0$, cioè si abbia $\mathfrak{m}^2-\mathfrak{e}^2=0$ e parimenti $\mathfrak{m}\mathfrak{e}=0$, cioè i vettori $\mathfrak{m}$ ed $\mathfrak{e}$ abbiano ugual modulo e inoltre siano tra loro ortogonali. Quando ciò avviene, queste due proprietà del vettore dello spazio-tempo di II specie permangono per ogni trasformazione di Lorentz.

Se il vettore dello spazio-tempo di II specie $\mathfrak{m}$, $-i\mathfrak{e}$ non è singolare, ruotiamo il sistema di coordinate spaziale in modo che il prodotto vettore $[\mathfrak{m}\mathfrak{e}]$ vada sull'asse z, di modo che sia $\mathfrak{m}_z=0, \mathfrak{e}_z=0$. Allora $(\mathfrak{m}_x-i\mathfrak{e}_x)^2+(\mathfrak{m}_y-i\mathfrak{e}_y)^2\neq 0$, quindi $(\mathfrak{e}_y+i\mathfrak{m}_y)\,/\,(\mathfrak{e}_x+i\mathfrak{m}_x)$ è diverso da $\pm i$ e possiamo determinare un argomento complesso $\varphi+i\psi$ in modo tale che sia

$$\tan(\varphi+i\psi)=\frac{(\mathfrak{e}_y+i\mathfrak{m}_y)}{(\mathfrak{e}_x+i\mathfrak{m}_x)}.$$

Quindi, tenendo conto dell'equazione (9), mediante la trasformazione (1) corrispondente a ψ, e una successiva rotazione attorno all'asse z di un angolo φ, si compirà una trasformazione di Lorentz, per la quale si avrà anche $\mathfrak{m}_y=0$, $\mathfrak{e}_y=0$, quindi ora sia $\mathfrak{m}$ che $\mathfrak{e}$ cadranno entrambi lungo la nuova linea x; perciò è fissato a priori mediante gli invarianti $\mathfrak{m}^2-\mathfrak{e}^2$ e $(\mathfrak{m}\mathfrak{e})$ quale sia la grandezza di questi vettori e se essi abbiano direzione uguale od opposta, ovvero se uno sia nullo.

§6. Concetto di tempo.

Mediante le trasformazioni di Lorentz sono consentite certe modificazioni del parametro temporale. In conseguenza di ciò non è più consentito parlare della simultaneità di due eventi di per sé. L'utilizzo di questo concetto presuppone anzi che la libertà dei 6 parametri, che è disponibile per la determinazione di un sistema di riferimento per lo spazio ed il tempo, sia ristretta a solo 3 parametri. Solo perché siamo abituati a trattare questa restrizione come evidente con grande approssimazione, riteniamo il concetto di simultaneità di due eventi come esistente di per sé[9]. In realtà si ha a che fare con la situazione seguente.

Un sistema di riferimento $x,\ y,\ z,\ t$ per i punti dello spazio-tempo (eventi) sia in qualche modo noto. Si confronti un punto dello spazio $A\,(x_0,\ y_0,\ z_0)$ al tempo $t_0 = 0$ con un altro punto dello spazio $P\,(x,\ y,\ z)$ ad un altro tempo t, e la differenza dei tempi $t - t_0$ (sia $t > t_0$) sia minore della lunghezza AP, cioè del tempo che la luce impiega a propagarsi da A a P, e sia q il quoziente $t - t_0/AP < 1$; allora mediante la trasformazione di Lorentz speciale, che ha AP come asse e q come momento, possiamo introdurre un nuovo parametro temporale t' che (vedi Eq. (12) nel §4) attribuisce ad entrambi i punti dello spazio-tempo $A,\ t_0$ e $P,\ t$ lo stesso valore $t' = 0$; questi due eventi si possono quindi intendere anche come simultanei.

Introduciamo poi ad uno stesso tempo $t_0 = 0$ due punti distinti dello spazio $A,\ B$ oppure tre punti dello spazio $A,\ B,\ C$ che non giacciano su una retta, e confrontiamo con essi un punto dello spazio P fuori dalla retta AB ovvero dal piano ABC ad un altro tempo t, e la differenza dei tempi $t - t_0$ (sia $t > t_0$) sia minore del tempo che la luce impiega a propagarsi dalla retta AB o dal piano ABC fino a P, e sia q il quoziente tra il primo ed il secondo tempo; allora eseguendo la trasformazione di Lorentz speciale, che ha come asse la perpendicolare condotta per P ad AB, ovvero rispettivamente ad ABC, ed ha q come momento, tutti e 3 (rispettivamente 4) gli eventi $A,\ t_0;\ B,\ t_0;\ (C,\ t_0)$ e $P,\ t$ appaiono come simultanei.

Se tuttavia quattro punti dello spazio che non giacciano su un piano vengono considerati ad uno stesso tempo t_0, non è più possibile introdurre mediante una trasformazione di Lorentz una modificazione del parametro temporale senza che il carattere di simultaneità di questi quattro punti dello spazio-tempo vada perduto.

Al matematico, che è abituato a considerazioni su varietà multidimensionali e inoltre alle costruzioni concettuali della cosidetta geometria non euclidea, non può provocare alcuna difficoltà seria l'adattare il concetto di tempo all'impiego delle trasformazioni di Lorentz. Al bisogno di accostarsi all'essenza di queste trasformazioni dal punto di vista fisico viene incontro l'articolo di A. Einstein citato nell'Introduzione.

Parte seconda: I processi elettromagnetici.

§7. Le equazioni fondamentali per i corpi in quiete.

Dopo questa esposizione introduttiva, nella quale abbiamo sviluppato l'apparato matematico alquanto più ristretto per il caso limite ideale $\varepsilon = 1$, $\mu = 1$, $\sigma = 0$, ci rivolgiamo ora alle leggi per i processi elettromagnetici nella materia. Cerchiamo quelle relazioni che - presupponendo opportuni dati al contorno - rendano possibile trovare, ad ogni punto e per ogni tempo, quindi come funzioni di $x,\ y,\ z,\ t$: i vettori della forza elettrica $\mathfrak{E}$, dell'induzione magnetica $\mathfrak{M}$, dell'induzione elettrica $\mathfrak{e}$, della forza magnetica $\mathfrak{m}$, la densità spaziale elettrica ρ, il vettore "corrente elettrica $\mathfrak{s}$" (la relazione della quale con la corrente di conduzione dovrà poi riconoscersi dal modo di apparire della conducibilità), e infine il vettore $\mathfrak{w}$, la velocità della materia.

Le relazioni in questione si dividono in due classi:

[9]All'incirca come quando, confinandoci ad un piccolo intorno di un punto su di una superficie sferica, potremmo per questo incorrere nell'errore di considerare la sfera come una figura geometrica per la quale un diametro è di per sé privilegiato.

in primo luogo quelle equazioni che, quando il vettore $\mathfrak{w}$ in funzione di $x,\ y,\ z,\ t$ è dato, e quindi è conosciuto il moto della materia, portano alla conoscenza di tutte le altre sunnominate grandezze come funzioni di $x,\ y,\ z,\ t$, - chiamerò in particolare questa prima classe le equazioni fondamentali, -

in secondo luogo le espressioni per le forze ponderomotrici, che mediante l'introduzione delle leggi della meccanica portano ulteriori informazioni sul vettore $\mathfrak{w}$ in funzione di $x,\ y,\ z,\ t$.

Per il caso di corpi a riposo, cioè quando $\mathfrak{w}\,(x,\ y,\ z,\ t) = 0$, le teorie di Maxwell (Heaviside, Hertz) e di Lorentz portano alle stesse equazioni fondamentali. Esse sono

1) le equazioni differenziali, che ancora non contengono alcuna costante che si riferisca alla materia:

$$\text{(I)} \qquad \operatorname{rot}\mathfrak{m} - \frac{\partial\mathfrak{e}}{\partial t} = \mathfrak{s},$$

$$\text{(II)} \qquad \operatorname{div}\mathfrak{e} = \rho,$$

$$\text{(III)} \qquad \operatorname{rot}\mathfrak{E} + \frac{\partial\mathfrak{M}}{\partial t} = 0,$$

$$\text{(IV)} \qquad \operatorname{div}\mathfrak{M} = 0.$$

2) ulteriori relazioni, che caratterizzano l'influenza della materia presente; nel caso più importante, al quale qui ci limitiamo, di corpi isotropi, esse si porranno nella forma

$$\text{(V)} \qquad \mathfrak{e} = \varepsilon\mathfrak{E},\ \mathfrak{M} = \mu\mathfrak{m},\ \mathfrak{s} = \sigma\mathfrak{E},$$

dove ε, la costante dielettrica, μ, la permeabilità magnetica, σ, la conducibilità della materia, sono da pensarsi come funzioni note di $x,\ y,\ z$ e t. $\mathfrak{s}$ va inteso qui come corrente di conduzione.

Con un cambiamento di notazione faccio ora riapparire in queste equazioni una simmetria ancora nascosta. Pongo come nell'esposizione precedente:

$$x_1 = x,\ x_2 = y,\ x_3 = z,\ x_4 = it,$$

e scrivo

$$s_1,\ s_2,\ s_3,\ s_4 \text{ al posto di } \mathfrak{s}_x,\ \mathfrak{s}_y,\ \mathfrak{s}_z,\ i\rho,$$

inoltre

$$f_{23},\ f_{31},\ f_{12},\ f_{14},\ f_{24},\ f_{34} \text{ al posto di } \mathfrak{m}_x,\ \mathfrak{m}_y,\ \mathfrak{m}_z,\ -i\mathfrak{e}_x,\ -i\mathfrak{e}_y,\ -i\mathfrak{e}_z,$$

e ancora

$$F_{23},\ F_{31},\ F_{12},\ F_{14},\ F_{24},\ F_{34} \text{ al posto di } \mathfrak{M}_x,\ \mathfrak{M}_y,\ \mathfrak{M}_z,\ -i\mathfrak{E}_x,\ -i\mathfrak{E}_y,\ -i\mathfrak{E}_z;$$

infine per tutte le altre coppie di indici $h,\ k$ non uguali presi dalla sequenza 1, 2, 3, 4 varrà sempre

$$f_{kh} = -f_{hk},\ F_{kh} = -F_{hk}.$$

(Le lettere $f,\ F$ ricordano la parola "Feld", la s "Strom".)

Le equazioni (I), (II) si riscrivono allora come

$$\text{(A)}\qquad \begin{aligned} \frac{\partial f_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial f_{13}}{\partial x_3} + \frac{\partial f_{14}}{\partial x_4} &= s_1, \\ \frac{\partial f_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial f_{23}}{\partial x_3} + \frac{\partial f_{24}}{\partial x_4} &= s_2, \\ \frac{\partial f_{31}}{\partial x_1} + \frac{\partial f_{32}}{\partial x_2} + \frac{\partial f_{34}}{\partial x_4} &= s_3, \\ \frac{\partial f_{41}}{\partial x_1} + \frac{\partial f_{42}}{\partial x_2} + \frac{\partial f_{43}}{\partial x_3} &= s_4, \end{aligned}$$

e le equazioni (III), (IV) si riscrivono come

$$\text{(B)}\qquad \begin{aligned} \frac{\partial F_{34}}{\partial x_2} + \frac{\partial F_{42}}{\partial x_3} + \frac{\partial F_{23}}{\partial x_4} &= 0, \\ \frac{\partial F_{43}}{\partial x_1} + \frac{\partial F_{14}}{\partial x_3} + \frac{\partial F_{31}}{\partial x_4} &= 0, \\ \frac{\partial F_{24}}{\partial x_1} + \frac{\partial F_{41}}{\partial x_2} + \frac{\partial F_{12}}{\partial x_4} &= 0, \\ \frac{\partial F_{32}}{\partial x_1} + \frac{\partial F_{13}}{\partial x_2} + \frac{\partial F_{21}}{\partial x_3} &= 0. \end{aligned}$$

§8. Le equazioni fondamentali per i corpi in moto.

Ora arriveremo a fissare in modo univoco le equazioni fondamentali per corpi in moto arbitrario esclusivamente mediante i seguenti tre assiomi:

Il primo assioma sarà:

Quando un singolo punto della materia in un certo istante è a riposo, e quindi il vettore $\mathfrak{w}$ è nullo per un sistema $x,\ y,\ z,\ t$, - il circondario può essere pensato in un qualche moto - per il punto dello spazio-tempo $x,\ y,\ z,\ t$ tra ρ, i vettori $\mathfrak{s},\ \mathfrak{e},\ \mathfrak{m},\ \mathfrak{E},\ \mathfrak{M}$ e le loro derivate rispetto ad $x,\ y,\ z,\ t$ hanno luogo esattamente le relazioni (A), (B), (V) che hanno da valere nel caso che tutta la materia sia a riposo.

Il secondo assioma sarà:

Ogni velocità della materia è < 1, minore della velocità di propagazione della luce nello spazio vuoto.

Il terzo assioma sarà:

Le equazioni fondamentali sono di tipo tale che, quando $x,\ y,\ z,\ t$ subiscono una qualche trasformazione di Lorentz e perciò $\mathfrak{m},\ -i\mathfrak{e}$ da un lato, $\mathfrak{M}$, $-i\mathfrak{E}$ dall'altro si trasformano come vettori dello spazio-tempo di II specie, mentre $\mathfrak{s},\ i\rho$ si trasformano come vettori di I specie, le equazioni vanno per questo nelle equazioni scritte nel modo esattamente corrispondente tra le quantità trasformate.

Questo terzo assioma lo esprimo in breve con le parole: $\mathfrak{m}, -i\mathfrak{e}$ e $\mathfrak{M}, -i\mathfrak{E}$ sono ciascuno un vettore dello spazio-tempo di II specie, $\mathfrak{s}, i\rho$ un vettore dello spazio-tempo di I specie,
e chiamo questo assioma il principio della relatività.

Questi tre assiomi ci portano di fatto in maniera univoca dalle summenzionate equazioni fondamentali per corpi a riposo alle equazioni fondamentali per corpi in moto.

Infatti per il secondo assioma in ogni punto dello spazio-tempo il modulo del vettore velocità è $|\mathfrak{w}| < 1$. In conseguenza di ciò possiamo sempre associare a ritroso al vettore $\mathfrak{w}$ univocamente la quaterna di quantità

$$w_1 = \frac{\mathfrak{w}_x}{\sqrt{1-\mathfrak{w}^2}},\ w_2 = \frac{\mathfrak{w}_y}{\sqrt{1-\mathfrak{w}^2}},\ w_3 = \frac{\mathfrak{w}_z}{\sqrt{1-\mathfrak{w}^2}},\ w_4 = \frac{i}{\sqrt{1-\mathfrak{w}^2}},$$

tra le quali sussiste la relazione:

$$w_1^2 + w_2^2 + w_3^2 + w_4^2 = -1. \tag{27}$$

Dalle considerazioni in conclusione del §4 è evidente che questa quaterna si comporta per trasformazioni di Lorentz come un vettore dello spazio-tempo di I specie, e la chiameremo la velocità vettore dello spazio-tempo.

Consideriamo ora un determinato punto $x,\ y,\ z$ della materia ad un determinato tempo t. Se in questo punto dello spazio-tempo è $\mathfrak{w} = 0$, in esso per il primo assioma abbiamo immediatamente le equazioni (A), (B), (V) del §7. Se in esso è $\mathfrak{w} \neq 0$, poiché $|\mathfrak{w}| < 1$, esiste per (16) una trasformazione di Lorentz speciale, il cui vettore $\mathfrak{v}$ è uguale a questo vettore $\mathfrak{w}\,(x,\ y,\ z,\ t)$, e in generale con questa determinata trasformazione passiamo ad un nuovo sistema di riferimento $x',\ y',\ z',\ t'$. Per il punto dello spazio tempo considerato sussistono pertanto, come abbiamo detto nel §4, i nuovi valori

$$w_1' = 0,\ w_2' = 0,\ w_3' = 0,\ w_4' = i, \tag{28}$$

e quindi il nuovo vettore velocità è $\mathfrak{w}' = 0$, il punto dello spazio-tempo sarà, per così dire, trasformato a riposo. Ora con il terzo assioma ricaveremo a partire dalle equazioni fondamentali per il punto dello spazio-tempo $x,\ y,\ z,\ t$ le equazioni fondamentali per il sistema corrispondente $x',\ y',\ z',\ t'$, scritte mediante le quantità trasformate $\mathfrak{w}', \rho', \mathfrak{s}', \mathfrak{e}', \mathfrak{m}', \mathfrak{E}', \mathfrak{M}'$ e le loro derivate rispetto a $x',\ y',\ z',\ t'$. Ma queste ultime equazioni devono, per il primo assioma, poiché adesso $\mathfrak{w}' = 0$, essere proprio:

1) quelle equazioni differenziali (A'), (B') che si ottengono semplicemente da (A) e (B), apponendo ad ogni lettera che compare in esse un apice posto in alto.

2) le equazioni

$$\mathfrak{e}' = \varepsilon\mathfrak{E}',\ \mathfrak{M}' = \mu\mathfrak{m}',\ \mathfrak{s}' = \sigma\mathfrak{E}', \tag{V'}$$

dove $\varepsilon,\ \mu,\ \sigma$ sono la costante dielettrica, la permeabilità magnetica e la conducibilità per il sistema $x',\ y',\ z',\ t'$, quindi anche nel punto considerato dello spazio-tempo $x,\ y,\ z,\ t$ della materia.

Ora ritorniamo mediante la trasformazione di Lorentz inversa alle variabili originarie x, y, z, t, e alle quantità $\mathfrak{w}$, ρ, $\mathfrak{s}$, $\mathfrak{e}$, $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{M}$, e le equazioni che otteniamo allora da quelle su citate, saranno le equazioni fondamentali generali per corpi in moto da noi cercate.

Ora si può vedere dalle considerazioni del §4 e del §5 che sia il sistema di equazioni (A) per conto suo che il sistema di equazioni (B) per conto suo sono covarianti per trasformazioni di Lorentz; cioè le equazioni che raggiungiamo a ritroso da (A'), (B') devono coincidere esattamente con le equazioni (A), (B) così come le assumiamo per corpi a riposo. Abbiamo quindi come primo risultato:

Delle equazioni fondamentali dell'elettrodinamica per corpi in moto le equazioni differenziali che sono espresse in termini di ρ e dei vettori $\mathfrak{s}$, $\mathfrak{e}$, $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{M}$ si scrivono esattamente come per i corpi in quiete. La velocità della materia in queste equazioni ancora non compare. Quindi con espressione vettoriale queste equazioni sono di nuovo

$$\text{(I)} \qquad \operatorname{rot}\mathfrak{m} - \frac{\partial\mathfrak{e}}{\partial t} = \mathfrak{s},$$

$$\text{(II)} \qquad \operatorname{div}\mathfrak{e} = \rho,$$

$$\text{(III)} \qquad \operatorname{rot}\mathfrak{E} + \frac{\partial\mathfrak{M}}{\partial t} = 0,$$

$$\text{(IV)} \qquad \operatorname{div}\mathfrak{M} = 0.$$

La velocità della materia sarà relegata esclusivamente nelle condizioni aggiuntive che caratterizzano l'influenza della materia in base alle sue costanti particolari ε, μ, σ. Ritrasformiamo ora queste condizioni aggiuntive (V') alle coordinate originarie x, y, z ed al tempo originario t.

Secondo le formule (15) del §4 nella direzione del vettore $\mathfrak{w}$ la componente di $\mathfrak{e}'$ è la stessa di quella di $\mathfrak{e}+[\mathfrak{w}\mathfrak{m}]$, quella di $\mathfrak{m}'$ la stessa di quella di $\mathfrak{m}-[\mathfrak{w}\mathfrak{e}]$, per ogni direzione $\bar{\mathfrak{w}}$ perpendicolare alla precedente invece la componente di $\mathfrak{e}'$ e rispettivamente di $\mathfrak{m}'$ è uguale alla componente corrispondente di $\mathfrak{e}+[\mathfrak{w}\mathfrak{m}]$, rispettivamente di $\mathfrak{m}-[\mathfrak{w}\mathfrak{e}]$, ciascuna moltiplicata ora per $1/\sqrt{1-\mathfrak{w}^2}$. D'altra parte $\mathfrak{E}'$ ed $\mathfrak{M}'$ saranno qui con $\mathfrak{E}+[\mathfrak{w}\mathfrak{M}]$ e con $\mathfrak{M}-[\mathfrak{w}\mathfrak{E}]$ in relazione del tutto analoga a quella di $\mathfrak{e}'$ e di $\mathfrak{m}'$ con $\mathfrak{e}+[\mathfrak{w}\mathfrak{m}]$ e con $\mathfrak{m}-[\mathfrak{w}\mathfrak{e}]$. Così la relazione $\mathfrak{e}'=\varepsilon\mathfrak{E}'$, quando nei vettori si trattano prima le componenti lungo la direzione $\mathfrak{w}$, poi quelle lungo due direzioni $\bar{\mathfrak{w}}$ perpendicolari a $\mathfrak{w}$ e tra loro, e si moltiplicano per $\sqrt{1-\mathfrak{w}^2}$ le equazioni che risultano nel secondo caso, porta a

$$\text{(C)} \qquad \mathfrak{e}+[\mathfrak{w}\mathfrak{m}] = \varepsilon\,(\mathfrak{E}+[\mathfrak{w}\mathfrak{M}])\,.$$

La relazione $\mathfrak{M}'=\mu\mathfrak{m}'$ andrà a finire analogamente in

$$\text{(D)} \qquad \mathfrak{M}-[\mathfrak{w}\mathfrak{E}] = \mu\,(\mathfrak{m}-[\mathfrak{w}\mathfrak{e}])\,.$$

Inoltre segue dalle equazioni di trasformazione (12), (10), (11) del §4, nelle quali q, $\mathfrak{r}_{\mathfrak{v}}$, $\mathfrak{r}_{\bar{\mathfrak{v}}}$, t, $\mathfrak{r}'_{\mathfrak{v}}$, $\mathfrak{r}'_{\bar{\mathfrak{v}}}$, t' vanno sostituiti da $|\mathfrak{w}|$, $\mathfrak{s}_{\mathfrak{w}}$,$\mathfrak{s}_{\bar{\mathfrak{w}}}$, ρ,$\mathfrak{s}'_{\mathfrak{w}}$, $\mathfrak{s}'_{\bar{\mathfrak{w}}}$, ρ'

$$\rho' = \frac{-|\mathfrak{w}|\mathfrak{s}_{\mathfrak{w}}+\rho}{\sqrt{1-\mathfrak{w}^2}},\ \mathfrak{s}'_{\mathfrak{w}} = \frac{\mathfrak{s}_{\mathfrak{w}}-|\mathfrak{w}|\rho}{\sqrt{1-\mathfrak{w}^2}},\ \mathfrak{s}'_{\bar{\mathfrak{w}}} = \mathfrak{s}_{\bar{\mathfrak{w}}},$$

di modo che da $\mathfrak{s}' = \sigma\mathfrak{E}'$ ora risulta

$$\text{(E)}\qquad \frac{\mathfrak{s}_{\mathfrak{w}} - |\mathfrak{w}|\rho}{\sqrt{1-\mathfrak{w}^2}} = \sigma\left(\mathfrak{E} + [\mathfrak{w}\mathfrak{M}]\right)_{\mathfrak{w}}, \qquad \mathfrak{s}_{\overline{\mathfrak{w}}} = \frac{\sigma\left(\mathfrak{E} + [\mathfrak{w}\mathfrak{M}]\right)_{\overline{\mathfrak{w}}}}{\sqrt{1-\mathfrak{w}^2}}.$$

Per il modo con il quale la conducibilità σ appare qui, sarà conveniente indicare come corrente di conduzione il vettore $\mathfrak{s} - \rho\mathfrak{w}$ con le componenti $\mathfrak{s}_{\mathfrak{w}} - \rho|\mathfrak{w}|$ nella direzione $\mathfrak{w}$ e $\mathfrak{s}_{\overline{\mathfrak{w}}}$ nelle direzioni $\overline{\mathfrak{w}}$ perpendicolari a $\mathfrak{w}$, il quale si annulla per $\sigma = 0$.

Osserviamo che per $\varepsilon = 1$, $\mu = 1$ le equazioni $\mathfrak{e}' = \mathfrak{E}'$, $\mathfrak{m}' = \mathfrak{M}'$, tramite la trasformazione di Lorentz inversa, che qui sarà quella speciale con $-\mathfrak{w}$ come vettore, per la (15) portano immediatamente ad $\mathfrak{e} = \mathfrak{E}$, $\mathfrak{m} = \mathfrak{M}$, e che per $\sigma = 0$ l'equazione $\mathfrak{s}' = 0$ porta a $\mathfrak{s} = \rho\mathfrak{w}$, sicché le "equazioni fondamentali per l'etere" trattate nel §2 si danno come caso limite delle equazioni qui ottenute per $\varepsilon = 1$, $\mu = 1$, $\sigma = 0$.

§9. Le equazioni fondamentali nella teoria di Lorentz.

Vediamo ora fino a che punto le equazioni fondamentali che Lorentz assume soddisfano il postulato di relatività, come si dovrà chiamare il principio di relatività formulato nel §8. Nell'articolo "Teoria degli elettroni" (Encykl. der math. Wiss., vol. V 2, art. 14) Lorentz dà per corpi qualsiansi, anche magnetizzati (vedi ivi p. 209 tenendo conto dell'equazione XXX' dello stesso e della formula (14) a p.78 dello stesso fascicolo):

$$\text{(III''}_a\text{)}\qquad \operatorname{rot}\left(\mathfrak{H} - [\mathfrak{w}\mathfrak{E}]\right) = \mathfrak{J} + \frac{\partial\mathfrak{D}}{\partial t} + \mathfrak{w}\operatorname{div}\mathfrak{D} - \operatorname{rot}[\mathfrak{w}\mathfrak{D}],$$

$$\text{(I'')}\qquad \operatorname{div}\mathfrak{D} = \rho,$$

$$\text{(IV'')}\qquad \operatorname{rot}\mathfrak{E} = -\frac{\partial\mathfrak{B}}{\partial t},$$

$$\text{(V'')}\qquad \operatorname{div}\mathfrak{B} = 0.$$

Poi Lorentz pone per corpi in moto non magnetizzati (p.223, n. 3) $\mu = 1$, $\mathfrak{B} = \mathfrak{H}$ e assume inoltre l'intervento della costante dielettrica ε e della conducibilità σ secondo le

$$\mathfrak{D} - \mathfrak{E} = (\varepsilon - 1)\left(\mathfrak{E} + [\mathfrak{w}\mathfrak{B}]\right), \quad \text{(Eq. XXXIV"', p. 227)}$$
$$\mathfrak{J} = \sigma\left(\mathfrak{E} + [\mathfrak{w}\mathfrak{B}]\right), \quad \text{(Eq. XXXIII", p. 223)}\ .$$

I simboli di Lorentz $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{H}$ sono qui sostituiti con $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{e}$, $\mathfrak{m}$, mentre $\mathfrak{J}$ per Lorentz si designerà come corrente di conduzione.

Le ultime tre delle equazioni differenziali citate coincidono direttamente con le equazioni (II), (III), (IV) di qui, ma la prima equazione, se identifichiamo $\mathfrak{J}$ con la corrente $\mathfrak{s} - \mathfrak{w}\rho$ che si annulla per $\sigma = 0$, diventa

$$\text{(29)} \qquad \operatorname{rot}(\mathfrak{H} - [\mathfrak{w}\mathfrak{E}]) = \mathfrak{s} + \frac{\partial \mathfrak{D}}{\partial t} - \operatorname{rot}[\mathfrak{w}\mathfrak{D}],$$

e risulta differire dalla (I) di qui. Perciò le equazioni differenziali generali di Lorentz per corpi arbitrariamente magnetizzati non si conformano al principio di relatività.

D'altra parte la forma della condizione di assenza di magnetizzazione che corrisponde al principio di relatività andrebbe presa dalla (D) del §8 con $\mu = 1$ non, come secondo Lorentz, come $\mathfrak{B} = \mathfrak{H}$, ma come

$$\text{(30)} \qquad \mathfrak{B} - [\mathfrak{w}\mathfrak{E}] = \mathfrak{H} - [\mathfrak{w}\mathfrak{D}] \quad (\text{qui } \mathfrak{M} - [\mathfrak{w}\mathfrak{E}] = \mathfrak{m} - [\mathfrak{w}\mathfrak{e}]).$$

Ma ora l'ultima equazione differenziale scritta (29) va a finire per $\mathfrak{H} = \mathfrak{B}$ (a prescindere dalla diversità dei simboli) nella stessa equazione nella quale la (I) di qui si trasformerebbe ponendo $\mathfrak{m} - [\mathfrak{w}\mathfrak{e}] = \mathfrak{M} - [\mathfrak{w}\mathfrak{E}]$. Così accade, mediante una compensazione di due infrazioni del principio di relatività, che per corpi non magnetizzati in moto le equazioni differenziali di Lorentz si adeguino alla fine al principio di relatività.

Se inoltre per corpi non magnetizzati si facesse qui uso della (30) e si ponesse di conseguenza $\mathfrak{H} = \mathfrak{B} + [\mathfrak{w},\ \mathfrak{D} - \mathfrak{E}]$, allora in seguito alla (C) del §8 si dovrebbe assumere

$$(\varepsilon - 1)(\mathfrak{E} + [\mathfrak{w}\mathfrak{B}]) = \mathfrak{D} - \mathfrak{E} + [\mathfrak{w}[\mathfrak{w},\ \mathfrak{D} - \mathfrak{E}]],$$

cioè per la direzione di $\mathfrak{w}$:

$$(\varepsilon - 1)(\mathfrak{E} + [\mathfrak{w}\mathfrak{B}])_{\mathfrak{w}} = (\mathfrak{D} - \mathfrak{E})_{\mathfrak{w}},$$

e per ogni direzione $\overline{\mathfrak{w}}$ perpendicolare a $\mathfrak{w}$:

$$(\varepsilon - 1)(\mathfrak{E} + [\mathfrak{w}\mathfrak{B}])_{\overline{\mathfrak{w}}} = \left(1 - \mathfrak{w}^2\right)(\mathfrak{D} - \mathfrak{E})_{\overline{\mathfrak{w}}},$$

ossia in accordo con la suddetta assunzione di Lorentz solo a meno di errori dell'ordine di $\mathfrak{w}^2$ rispetto a 1.

Solo con lo stesso grado di approssimazione anche il suddetto postulato di Lorentz per $\mathfrak{J}$ soddisfa alle relazioni imposte dal principio di relatività (vedi (E) nel §8), che le componenti $\mathfrak{J}_{\mathfrak{w}}$ e rispettivamente $\mathfrak{J}_{\overline{\mathfrak{w}}}$ siano uguali alle corrispondenti componenti di $\sigma(\mathfrak{E} + [\mathfrak{w}\mathfrak{B}])$, moltiplicate rispettivamente per $\sqrt{1 - \mathfrak{w}^2}$ ovvero per $1/\sqrt{1 - \mathfrak{w}^2}$.

§10. Le equazioni fondamentali secondo E. Cohn.

E. Cohn[10] assume le seguenti equazioni fondamentali:

$$\text{(31)} \qquad \begin{aligned} \operatorname{rot}(M + [\mathfrak{w}\mathfrak{E}]) &= \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t} + \mathfrak{w} \operatorname{div} \mathfrak{E} + \mathfrak{J}, \\ -\operatorname{rot}(E - [\mathfrak{w}\mathfrak{M}]) &= \frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial t} + \mathfrak{w} \operatorname{div} \mathfrak{M}, \end{aligned}$$

[10] Gött. Nachr. 1901, p. 74 (anche Ann. d. Phys. **7**, (4), 1902, p. 29).

$$\mathfrak{J} = \sigma E,\ \mathfrak{E} = \varepsilon E - [\mathfrak{w} M]\,,\ \mathfrak{M} = \mu M + [\mathfrak{w} E]\,, \tag{32}$$

dove $E,\ M$ sono assunti come intensità di campo elettrica e magnetica (forza), $\mathfrak{E},\ \mathfrak{M}$ come polarizzazione elettrica e magnetica (induzione). Le equazioni ammettono ora la presenza del magnetismo vero; lo tralasceremo, e si porrà $\operatorname{div} \mathfrak{M} = 0$.

Un'obiezione contro queste equazioni è che con esse per $\varepsilon = 1,\ \mu = 1$ i vettori forza e induzione non coincidono. Se tuttavia assumiamo nelle equazioni non E ed M, ma $E - [\mathfrak{w}\mathfrak{M}]$ e $M + [\mathfrak{w}\mathfrak{E}]$ come forza elettrica e magnetica, e tenendo conto di ciò, sostituiamo ad $\mathfrak{E},\ \mathfrak{M},\ E,\ M,\ \operatorname{div}\mathfrak{E}$ i simboli $\mathfrak{e},\ \mathfrak{M},\ \mathfrak{E} + [\mathfrak{w}\mathfrak{M}],\ \mathfrak{m} - [\mathfrak{w}\mathfrak{e}],\ \rho$, le equazioni differenziali vanno immediatamente nelle nostre equazioni e parimenti le condizioni (32) si tramutano in

$$\begin{aligned} \mathfrak{J} &= \sigma\,(\mathfrak{E} + [\mathfrak{w}\mathfrak{M}])\,,\\ \mathfrak{e} + [\mathfrak{w},\ \mathfrak{m} - [\mathfrak{w}\mathfrak{e}]] &= \varepsilon\,(\mathfrak{E} + [\mathfrak{w}\mathfrak{M}])\,,\\ \mathfrak{M} - [\mathfrak{w},\ \mathfrak{E} + [\mathfrak{w}\mathfrak{M}]] &= \mu\,(\mathfrak{m} - [\mathfrak{w}\mathfrak{e}])\,; \end{aligned}$$

in tal modo queste equazioni di Cohn sarebbero a meno di errori dell'ordine di $\mathfrak{w}^2$ rispetto ad 1 proprio quelle prescritte dal principio di relatività.

Va osservato ancora che le equazioni assunte da Hertz (nella notazione di Cohn) si scrivono come le (31) con le condizioni aggiuntive diverse

$$\mathfrak{E} = \varepsilon E,\ \mathfrak{M} = \mu M,\ \mathfrak{J} = \sigma E, \tag{33}$$

e questo sistema di equazioni anche per qualsiasi cambiamento della relazione dei simboli con le quantità osservabili non si conformerebbe al principio di relatività a meno di errori dell'ordine di $\mathfrak{w}^2$ rispetto ad 1.

§11. Rappresentazione tipica delle equazioni fondamentali.

Nella determinazione delle equazioni fondamentali ci ha guidato l'idea di conseguire una covarianza rispetto al gruppo delle trasformazioni di Lorentz. Ora abbiamo da trattare le azioni ponderomotrici e lo scambio d'energia nel campo elettromagnetico, e non vi può essere a priori alcun dubbio che la soluzione di questi problemi sarà in ogni caso connessa con le strutture più semplici, associate alle equazioni fondamentali, che ancora mostrino covarianza rispetto alle trasformazioni di Lorentz. Per indicare queste strutture, prima di tutto porterò le equazioni fondamentali in una forma tipica, che pone in evidenza la loro covarianza rispetto al gruppo di Lorentz. Per questo mi avvalgo di un metodo di calcolo che si propone un operare abbreviato con i vettori dello spazio-tempo di I e di II specie, e le cui regole e simboli, per quanto a noi sarà utile, riassumo qui per prima cosa.

1^0 . Un sistema di quantità

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1q} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{p1} & \cdots & a_{pq} \end{vmatrix},$$

ordinato in p righe orizzontali, q verticali, si chiama matrice[11] $p \times q$, e si indica con un solo simbolo, qui A.

[11] Si potrebbe anche pensare di avvalersi al posto del calcolo matriciale di Cayley del calcolo dei quaternioni di Hamilton, tuttavia quest'ultimo mi pare per i nostri scopi limitato e pesante.

Se si moltiplicano tutte le quantità a_{hk} per lo stesso fattore c, la matrice risultante delle quantità ca_{hk} si indicherà con cA.

Se i ruoli delle righe orizzontali e verticali in A vengono scambiati, si ottiene una matrice $q \times p$, che si chiama la trasposta di A e che si indicherà con $\overline{A}$:

$$\overline{A} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{p1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{1q} & \cdots & a_{pq} \end{vmatrix}.$$

Se si ha una seconda matrice con i numeri p e q uguali a quelli di A,

$$B = \begin{vmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1q} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{p1} & \cdots & b_{pq} \end{vmatrix},$$

$A+B$ indicherà la matrice sempre $p \times q$ costituita dai binomi corrispondenti $a_{hk} + b_{hk}$.

2^0 . Se si hanno due matrici

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1q} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{p1} & \cdots & a_{pq} \end{vmatrix}, \; B = \begin{vmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{q1} & \cdots & b_{qr} \end{vmatrix},$$

dove il numero delle righe orizzontali della seconda è uguale al numero delle righe verticali della prima, si intenderà per AB, prodotto di A e B, la matrice

$$C = \begin{vmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{p1} & \cdots & c_{pr} \end{vmatrix},$$

gli elementi della quale sono costruiti per combinazione delle righe orizzontali di A e delle righe verticali di B secondo la regola

$$c_{hk} = a_{h1}b_{1k} + a_{h2}b_{2k} + \cdots + a_{hq}b_{qk} \quad \begin{pmatrix} h = 1, \; 2, \cdots p \\ k = 1, \; 2, \cdots r \end{pmatrix}.$$

Per un tale prodotto vale la legge associativa $(AB)S = A(BS)$; con S si intende qui una terza matrice con un numero di righe orizzontali uguale al numero di righe verticali di B (e quindi anche di AB).

Per la matrice trasposta rispetto a $C = AB$ vale $\overline{C} = \overline{BA}$.

3^0 . Si considereranno qui solo matrici con al più 4 righe orizzontali e al più 4 righe verticali.

Come matrice unità indicata in breve nelle equazioni matriciali con 1 si intenderà la matrice 4×4 con i seguenti elementi

$$(34) \qquad \begin{vmatrix} e_{11}, & e_{12}, & e_{13}, & e_{14} \\ e_{21}, & e_{22}, & e_{23}, & e_{24} \\ e_{31}, & e_{32}, & e_{33}, & e_{34} \\ e_{41}, & e_{42}, & e_{43}, & e_{44} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1, & 0, & 0, & 0 \\ 0, & 1, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 1, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & 1 \end{vmatrix}.$$

Per un multiplo $c.1$ della matrice unità (nel senso fissato in 1^0 per una matrice cA) si porrà nelle equazioni matriciali semplicemente c.

Per una matrice A 4×4, $\det A$ indicherà il determinante dei 4×4 elementi della matrice. Se $\det A \neq 0$, si ottiene da A una determinata matrice reciproca, che si indica con A^{-1}, tale che sia $A^{-1}A = 1$. -

Una matrice

$$f = \begin{vmatrix} 0, & f_{12}, & f_{13}, & f_{14} \\ f_{21}, & 0, & f_{23}, & f_{24} \\ f_{31}, & f_{32}, & 0, & f_{34} \\ f_{41}, & f_{42}, & f_{43}, & 0 \end{vmatrix},$$

nella quale gli elementi soddisfino le relazioni $f_{kh} = -f_{hk}$, si chiama una matrice alternante. Queste relazioni dicono che la matrice trasposta è $\overline{f} = -f$. Inoltre si indicherà con f^* e come la matrice duale di f la matrice anch'essa alternante

$$f^* = \begin{vmatrix} 0, & f_{34}, & f_{42}, & f_{23} \\ f_{43}, & 0, & f_{14}, & f_{31} \\ f_{24}, & f_{41}, & 0, & f_{12} \\ f_{32}, & f_{13}, & f_{21}, & 0 \end{vmatrix}. \tag{35}$$

Sarà quindi

$$f^* f = f_{32}f_{14} + f_{13}f_{24} + f_{21}f_{34}, \tag{36}$$

che indicherà una matrice 4×4 nella quale tutti gli elementi al di fuori della diagonale principale da sinistra in alto a destra in basso sono nulli e tutti gli elementi su questa diagonale coincidono e sono uguali all'espressione riportata a secondo membro in termini dei coefficienti di f. Il determinante di f risulta allora essere il quadrato di questa espressione, e interpreteremo il simbolo $\mathrm{Det}^{1/2} f$ come l'abbreviazione

$$\mathrm{Det}^{1/2} f = f_{32}f_{14} + f_{13}f_{24} + f_{21}f_{34}. \tag{37}$$

4^0 . Una trasformazione lineare

$$x_h = \alpha_{h1}x'_1 + \alpha_{h2}x'_2 + \alpha_{h3}x'_3 + \alpha_{h4}x'_4 \ \ (h = 1,\ 2,\ 3,\ 4) \tag{38}$$

si potrà anche indicare semplicemente mediante la matrice 4×4 dei coefficienti

$$\mathbf{A} = \begin{vmatrix} \alpha_{11}, & \alpha_{12}, & \alpha_{13}, & \alpha_{14} \\ \alpha_{21}, & \alpha_{22}, & \alpha_{23}, & \alpha_{24} \\ \alpha_{31}, & \alpha_{32}, & \alpha_{33}, & \alpha_{34} \\ \alpha_{41}, & \alpha_{42}, & \alpha_{43}, & \alpha_{44} \end{vmatrix}$$

come trasformazione $\mathbf{A}$. Mediante la trasformazione $\mathbf{A}$ l'espressione

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2$$

diventa la forma quadratica

$$\sum a_{hk}x'_h x'_k \ \ (h,\ k = 1,\ 2,\ 3,\ 4)$$

dove sarà

$$a_{hk} = \alpha_{1h}\alpha_{1k} + \alpha_{2h}\alpha_{2k} + \alpha_{3h}\alpha_{3k} + \alpha_{4h}\alpha_{4k},$$

cioè la matrice 4×4 (simmetrica) dei coefficienti a_{hk} di questa forma sarà il prodotto $\overline{\mathbf{A}}\mathbf{A}$ della matrice trasposta di $\mathbf{A}$ per $\mathbf{A}$. Se mediante la trasformazione si otterrà la nuova espressione

$$x'^2_1 + x'^2_2 + x'^2_3 + x'^2_4,$$

dovrà essere

$$\overline{\mathbf{A}}\mathbf{A} = 1, \tag{39}$$

cioè la matrice 1. $\mathbf{A}$ deve pertanto soddisfare a questa relazione quando la trasformazione (38) sarà una trasformazione di Lorentz. Per il determinante di $\mathbf{A}$ segue dalla (39): $(\det \mathbf{A})^2 = 1$, $\det \mathbf{A} = \pm 1$. La condizione (39) dà luogo parimenti a

$$\mathbf{A}^{-1} = \overline{\mathbf{A}}, \tag{40}$$

cioè la matrice inversa di $\mathbf{A}$ deve coincidere con la trasposta.

Perché $\mathbf{A}$ sia una trasformazione di Lorentz abbiamo ancora da imporre che sia $\det \mathbf{A} = +1$, che ognuna delle quantità $\alpha_{14},\ \alpha_{24},\ \alpha_{34}, \alpha_{41},\ \alpha_{42},\ \alpha_{43}$ sia immaginaria pura (ovvero nulla), che gli altri coefficienti in $\mathbf{A}$ siano reali e infine ancora che sia $\alpha_{44} > 0$.

5^0 . Un vettore dello spazio-tempo di I specie $s_1,\ s_2,\ s_3,\ s_4$ sarà rappresentato mediante la matrice 1×4 delle sue quattro componenti:

$$s = |s_1,\ s_2,\ s_3,\ s_4|, \tag{41}$$

e a seguito di una trasformazione di Lorentz dovrà essere sostituito da $s\mathbf{A}$.

Un vettore dello spazio-tempo di II specie con le componenti $f_{23},\ f_{31},\ f_{12},\ f_{14},\ f_{24},\ f_{34}$ dovrà essere rappresentato con la matrice alternante

$$f = \begin{vmatrix} 0, & f_{12}, & f_{13}, & f_{14} \\ f_{21}, & 0, & f_{23}, & f_{24} \\ f_{31}, & f_{32}, & 0, & f_{34} \\ f_{41}, & f_{42}, & f_{43}, & 0 \end{vmatrix},$$

e a seguito di una trasformazione di Lorentz (vedi la regola fissata nel §5 mediante le (23) e (24)) $\mathbf{A}$ va sostituito con $\overline{\mathbf{A}}f\mathbf{A} = \mathbf{A}^{-1}f\mathbf{A}$. Riguardo all'espressione (37) vale l'identità $\mathrm{Det}^{1/2}(\overline{\mathbf{A}}f\mathbf{A}) = \mathrm{Det}\,\mathbf{A}\,\mathrm{Det}^{1/2}\,f$. Pertanto $\mathrm{Det}^{1/2}\,f$ sarà un invariante per trasformazioni di Lorentz (vedi Eq.(26) nel §5).

Per la matrice duale f^* segue allora tenendo conto della (36):

$$\left(\mathbf{A}^{-1}f^*\mathbf{A}\right)\left(\mathbf{A}^{-1}f\mathbf{A}\right) = \mathbf{A}^{-1}f^*f\mathbf{A} = \mathrm{Det}^{1/2}\,f.\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathrm{Det}^{1/2}\,f,$$

dalla quale si vede che assieme al vettore dello spazio-tempo di II specie f anche la corrispondente matrice duale f^* si trasforma come un vettore dello spazio-tempo di II specie, e perciò f^* con le componenti $f_{14},\ f_{24},\ f_{34},\ f_{23},\ f_{31},\ f_{12}$ si dirà il vettore dello spazio-tempo duale di f.

6^0 . Siano w ed s due vettori dello spazio-tempo di I specie, allora con $w\overline{s}$ (oppure anche con $s\overline{w}$) si intende l'espressione

$$w_1 s_1 + w_2 s_2 + w_3 s_3 + w_4 s_4 \tag{43}$$

costruita con le componenti corrispondenti. Quest'espressione è invariante per una trasformazione di Lorentz $\mathbf{A}$, poiché $(w\mathbf{A})\left(\overline{\mathbf{A}\overline{s}}\right) = w\overline{s}$. - Se $w\overline{s} = 0$, w ed s si diranno normali tra loro.

Due vettori dello spazio tempo di I specie w, s danno inoltre origine alla struttura della matrice 2×4

$$\begin{vmatrix} w_1, & w_2, & w_3, & w_4 \\ s_1, & s_2, & s_3, & s_4 \end{vmatrix}.$$

Si dimostra poi immediatamente che il sistema delle sei quantità

$$\begin{gathered} w_2 s_3 - w_3 s_2,\ w_3 s_1 - w_1 s_3,\ w_1 s_2 - w_2 s_1, \\ w_1 s_4 - w_4 s_1,\ w_2 s_4 - w_4 s_2,\ w_3 s_4 - w_4 s_3, \end{gathered} \tag{44}$$

si comporta per le trasformazioni di Lorentz come un vettore dello spazio-tempo di II specie. Si indicherà il vettore di II specie con queste componenti (44) con $[w, s]$. Si deduce facilmente che $\mathrm{Det}^{1/2}[w, s] = 0$. Il vettore duale di $[w, s]$ si scriverà $[w, s]^*$.

Se w è un vettore dello spazio-tempo di I specie, f un vettore dello spazio-tempo di II specie, wf indica sempre una matrice 1×4. Per una trasformazione di Lorentz $\mathbf{A}$, w va in $w' = w\mathbf{A}$, f in $f' = \mathbf{A}^{-1} f \mathbf{A}$; sarà perciò $w'f' = w\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} f \mathbf{A} = (wf)\,\mathbf{A}$, ossia wf si trasforma ancora come un vettore dello spazio-tempo di I specie.

Quando w è un vettore di I specie ed f è un vettore di II specie, si verifica facilmente l'importante identità:

$$[w, wf] + [w, wf^*]^* = (w\overline{w})\, f. \tag{45}$$

La somma dei due vettori dello spazio-tempo di II specie a primo membro va intesa nel senso della somma di due matrici alternanti.

Infatti per $w_1 = 0$, $w_2 = 0$, $w_3 = 0$, $w_4 = i$ sarà

$$\begin{gathered} wf = |if_{41},\ if_{42},\ if_{43},\ 0|;\ wf^* = |if_{32},\ if_{13},\ if_{21},\ 0|; \\ [w, wf] = 0,\ 0,\ 0,\ f_{41},\ f_{42},\ f_{43};\ [w, wf^*] = 0,\ 0,\ 0,\ f_{32},\ f_{13},\ f_{21}, \end{gathered}$$

e l'osservazione che in questo caso particolare risulta la relazione (45) è già sufficiente perché la stessa valga in generale, poiché questa relazione ha carattere covariante per il gruppo di Lorentz e inoltre è omogenea in $w_1,\ w_2,\ w_3,\ w_4$.

Dopo questi preliminari occupiamoci ora delle equazioni (C), (D), (E), mediante le quali vengono introdotte le costanti $\varepsilon,\ \mu,\ \sigma$.

Al posto del vettore spaziale $\mathfrak{w}$, velocità della materia, introduciamo come già nel §8 il vettore dello spazio-tempo di I specie w con le 4 componenti

$$w_1 = \frac{\mathfrak{w}_x}{\sqrt{1-\mathfrak{w}^2}},\ w_2 = \frac{\mathfrak{w}_y}{\sqrt{1-\mathfrak{w}^2}},\ w_3 = \frac{\mathfrak{w}_z}{\sqrt{1-\mathfrak{w}^2}},\ w_4 = \frac{i}{\sqrt{1-\mathfrak{w}^2}},$$

per il quale si ha

$$w\overline{w} = w_1^2 + w_2^2 + w_3^2 + w_4^2 = -1 \tag{46}$$

e

$$-iw_4 > 0.$$

Con F e f intenderemo ancora i vettori dello spazio-tempo di II specie $\mathfrak{M}$, $-i\mathfrak{E}$ e $\mathfrak{m}$, $-i\mathfrak{e}$ che compaiono nelle equazioni fondamentali.

In $\Phi = -wF$ abbiamo ancora un vettore dello spazio-tempo di I specie; le sue componenti saranno

$$\begin{aligned}
\Phi_1 &= \qquad\quad w_2F_{12} + w_3F_{13} + w_4F_{14},\\
\Phi_2 &= w_1F_{21} \qquad\quad + w_3F_{23} + w_4F_{24},\\
\Phi_3 &= w_1F_{31} + w_2F_{32} \qquad\quad + w_4F_{34},\\
\Phi_4 &= w_1F_{41} + w_2F_{42} + w_3F_{43} \qquad\quad .
\end{aligned}$$

Le prime tre quantità Φ_1, Φ_2, Φ_3 sono rispettivamente le componenti x, y, z del vettore spaziale

$$\frac{\mathfrak{E} + [\mathfrak{w}\mathfrak{M}]}{\sqrt{1-\mathfrak{w}^2}}, \tag{47}$$

e inoltre è

$$\Phi_4 = \frac{i\,(\mathfrak{w}\mathfrak{E})}{\sqrt{1-\mathfrak{w}^2}}. \tag{48}$$

Poiché la matrice F è alternante, vale evidentemente

$$w\overline{\Phi} = w_1\Phi_1 + w_2\Phi_2 + w_3\Phi_3 + w_4\Phi_4 = 0, \tag{49}$$

il vettore Φ è quindi normale a w; possiamo scrivere questa relazione anche

$$\Phi_4 = i\,(\mathfrak{w}_x\Phi_1 + \mathfrak{w}_y\Phi_2 + \mathfrak{w}_z\Phi_3)\,. \tag{50}$$

Chiamerò il vettore dello spazio-tempo di I specie Φ forza elettrica a riposo.

Relazioni analoghe a quelle tra $-wF$, $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{w}$ risultano tra $-wf$, $\mathfrak{e}$, $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{w}$ e in particolare anche $-wf$ sarà normale a w. Si può ora sostituire la relazione (C) con

$$wf = \varepsilon wF, \tag{\{C\}}$$

una formula che dà 4 equazioni per le relative componenti, ma tuttavia in modo tale che la quarta, tenendo conto della (50), è una conseguenza delle prime tre.

Costruiamo inoltre il vettore dello spazio-tempo di I specie $\Psi = iwf^*$, le cui componenti sono

$$\begin{aligned}
\Psi_1 &= -i\,(\qquad\quad w_2f_{34} + w_3f_{42} + w_4f_{23})\,,\\
\Psi_2 &= -i\,(w_1f_{43} \qquad\quad + w_3f_{14} + w_4f_{31})\,,\\
\Psi_3 &= -i\,(w_1f_{24} + w_2f_{41} \qquad\quad + w_4f_{12})\,,\\
\Psi_4 &= -i\,(w_1f_{32} + w_2f_{13} + w_3f_{21} \qquad\quad)\,.
\end{aligned}$$

Di queste le prime tre Ψ_1, Ψ_2, Ψ_3 sono rispettivamente le componenti x, y, z del vettore spaziale

$$\frac{\mathfrak{m}-[\mathfrak{w}\mathfrak{e}]}{\sqrt{1-\mathfrak{w}^2}}, \tag{51}$$

e inoltre è

$$\Psi_4=\frac{i\,(\mathfrak{w}\mathfrak{m})}{\sqrt{1-\mathfrak{w}^2}}; \tag{52}$$

tra loro sussiste la relazione

$$w\overline{\Psi}=w_1\Psi_1+w_2\Psi_2+w_3\Psi_3+w_4\Psi_4=0, \tag{53}$$

che possiamo scrivere anche

$$\Psi_4=i\,(\mathfrak{w}_x\Psi_1+\mathfrak{w}_y\Psi_2+\mathfrak{w}_z\Psi_3)\,; \tag{54}$$

il vettore Ψ è quindi anch'esso normale a w. Chiamerò il vettore dello spazio-tempo di I specie Ψ forza magnetica a riposo.

Relazioni analoghe a quelle tra iwf^*, $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{e}$, $\mathfrak{w}$ si hanno tra iwF^*, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{w}$, e ora si può sostituire la relazione (D) con

$$wF^*=\mu wf^*. \tag{\{D\}}$$

Possiamo utilizzare le equazioni ({C}) e ({D}) per ricondurre i vettori di campo F e f a Φ e Ψ. Abbiamo

$$wF=-\Phi,\; wF^*=-i\mu\Psi,\; wf=-\varepsilon\Phi,\; wf^*=-i\Psi,$$

e l'utilizzo della regola (45), tenendo conto della (46), porta a

$$F=[w,\Phi]+i\mu\,[w,\Psi]^*\,, \tag{55}$$

$$f=\varepsilon\,[w,\Phi]+i\,[w,\Psi]^*\,, \tag{56}$$

ossia

$$F_{12}=(w_1\Phi_2-w_2\Phi_1)+i\mu\,(w_3\Psi_4-w_4\Psi_3)\,,\quad \text{ecc.},$$
$$f_{12}=\varepsilon\,(w_1\Phi_2-w_2\Phi_1)+i\,(w_3\Psi_4-w_4\Psi_3)\,,\ \text{ecc.}.$$

Consideriamo inoltre il vettore dello spazio-tempo di II specie $[\Phi,\Psi]$ con le 6 componenti

$$\Phi_2\Psi_3-\Phi_3\Psi_2,\; \Phi_3\Psi_1-\Phi_1\Psi_3,\; \Phi_1\Psi_2-\Phi_2\Psi_1,$$
$$\Phi_1\Psi_4-\Phi_4\Psi_1,\; \Phi_2\Psi_4-\Phi_4\Psi_2,\; \Phi_3\Psi_4-\Phi_4\Psi_3.$$

Il vettore dello spazio-tempo di I specie

$$w\,[\Phi,\Psi]=-\left(w\overline{\Psi}\right)\Phi+\left(w\overline{\Phi}\right)\Psi$$

si annulla identicamente per le (49) e (53). Introduciamo ora il vettore dello spazio-tempo di I specie

$$\Omega = iw\,[\Phi, \Psi]^* \tag{57}$$

con le componenti

$$\Omega_1 = -i \begin{vmatrix} w_2, & w_3, & w_4 \\ \Phi_2, & \Phi_3, & \Phi_4 \\ \Psi_2, & \Psi_3, & \Psi_4 \end{vmatrix}, \text{ ecc.,}$$

allora risulta per applicazione della regola (45):

$$[\Phi, \Psi] = i\,[w, \Omega]^*, \tag{58}$$

$$\text{cioè } \Phi_1\Psi_2 - \Phi_2\Psi_1 = iw_3\Omega_4 - w_4\Omega_3, \quad \text{ecc..}$$

Il vettore Ω soddisfa evidentemente la relazione

$$w\overline{\Omega} = w_1\Omega_1 + w_2\Omega_2 + w_3\Omega_3 + w_4\Omega_4 = 0, \tag{59}$$

che possiamo scrivere anche

$$\Omega_4 = i\mathfrak{w}_x\Omega_1 + \mathfrak{w}_y\Omega_2 + \mathfrak{w}_z\Omega_3;$$

quindi anche tale vettore è normale a w. Nel caso che sia $\mathfrak{w} = 0$ si ha $\Phi_4 = 0$, $\Psi_4 = 0$, $\Omega_4 = 0$ e

$$\Omega_1 = \Phi_2\Psi_3 - \Phi_3\Psi_2,\ \Omega_2 = \Phi_3\Psi_1 - \Phi_1\Psi_3,\ \Omega_3 = \Phi_1\Psi_2 - \Phi_2\Psi_1. \tag{60}$$

Chiamerò il vettore dello spazio-tempo di I specie Ω radiazione a riposo.

Per quanto riguarda la relazione (E), che introduce la conducibilità σ, riconosciamo immediatamente che

$$-w\overline{s} = -\left(w_1s_1 + w_2s_2 + w_3s_3 + w_4s_4\right) = \frac{-|\mathfrak{w}|\mathfrak{s}_{\mathfrak{w}} + \rho}{\sqrt{1-\mathfrak{w}^2}} = \rho'$$

è la densità a riposo dell'elettricità (vedi §8 e la fine del §4). Quindi

$$s + (w\overline{s})\,w \tag{61}$$

rappresenta un vettore dello spazio-tempo di I specie, che a causa di $w\overline{w} = -1$ è evidentemente anch'esso normale a w, e che chiamerò corrente a riposo. Se assumiamo le prime tre componenti di questo vettore come le componenti lungo x, y, z di un vettore dello spazio, la componente di quest'ultimo lungo la direzione di $\mathfrak{w}$ è

$$\mathfrak{s}_{\mathfrak{w}} - \frac{|\mathfrak{w}|\rho'}{\sqrt{1-\mathfrak{w}^2}} = \frac{\mathfrak{s}_{\mathfrak{w}} - |\mathfrak{w}|\rho}{1-\mathfrak{w}^2} = \frac{\mathfrak{J}_{\mathfrak{w}}}{1-\mathfrak{w}^2},$$

e la componente in qualsiasi direzione $\overline{\mathfrak{w}}$ perpendicolare a $\mathfrak{w}$ sarà

$$\mathfrak{s}_{\overline{\mathfrak{w}}} = \mathfrak{J}_{\overline{\mathfrak{w}}};$$

quindi questo vettore spaziale dipende in modo molto semplice dal vettore spaziale $\mathfrak{J} = \mathfrak{s} - \rho\mathfrak{w}$, che abbiamo indicato nel §8 come corrente di conduzione.

Ora, confrontandola con $\Phi = -wF$, la relazione (E) si può portare nella forma:

$$(\{E\}) \qquad s + (w\bar{s})\, w = -\sigma w F.$$

Anche questa formula riassume 4 equazioni, delle quali tuttavia, poiché si tratta in entrambi i membri di un vettore dello spazio-tempo di I specie normale a w, la quarta è una conseguenza delle prime tre.

Trasformeremo infine le equazioni differenziali (A) e (B) in una forma tipica.

§12. L'operatore differenziale lor.

Una matrice 4×4

$$(62) \qquad \begin{vmatrix} S_{11}, & S_{12}, & S_{13}, & S_{14} \\ S_{21}, & S_{22}, & S_{23}, & S_{24} \\ S_{31}, & S_{32}, & S_{33}, & S_{34} \\ S_{41}, & S_{42}, & S_{43}, & S_{44} \end{vmatrix} = |S_{ik}|$$

con la prescrizione, che essa per una trasformazione di Lorentz $\mathbf{A}$ vada sostituita sempre da $\bar{\mathbf{A}}S\mathbf{A}$, si può chiamare una matrice dello spazio-tempo di II specie. Una matrice siffatta si ha in particolare

nella matrice alternante f che corrisponde a un vettore dello spazio-tempo di II specie,

nel prodotto fF di due siffatte matrici alternanti f, F, che per una trasformazione $\mathbf{A}$ va sostituito da $\left(\mathbf{A}^{-1}f\mathbf{A}\right)\left(\mathbf{A}^{-1}F\mathbf{A}\right) = \mathbf{A}^{-1}fF\mathbf{A}$,

inoltre, quando $w_1,\ w_2,\ w_3,\ w_4$ e $\Omega_1,\ \Omega_2,\ \Omega_3,\ \Omega_4$ sono due vettori dello spazio-tempo di I specie, nella matrice dei 4×4 elementi $S_{hk} = w_h\Omega_k$,

infine in un multiplo L della matrice unità, cioè in una matrice 4×4 nella quale tutti gli elementi sulla diagonale principale abbiano ugual valore L e i restanti elementi siano tutti nulli.

Abbiamo sempre a che fare qui con funzioni dei punti dello spazio-tempo x, y, z, it e possiamo avvalerci con vantaggio di una matrice 1×4, costruita con i simboli di derivazione

$$\left|\frac{\partial}{\partial x},\ \frac{\partial}{\partial y},\ \frac{\partial}{\partial z},\ \frac{\partial}{i\partial t}\right|,$$

o anche scritta come

$$(63) \qquad \left|\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2},\ \frac{\partial}{\partial x_3},\ \frac{\partial}{\partial x_4}\right|.$$

Per questa matrice utilizzerò l'abbreviazione lor.

Quando S come nella (62) indica una matrice dello spazio-tempo di II specie, con estensione coerente della regola per la costruzione del prodotto di matrici, per $\operatorname{lor} S$ si intenderà la matrice 1×4

$$|K_1,\ K_2,\ K_3,\ K_4|$$

dell'espressione

$$K_k = \frac{\partial S_{1k}}{\partial x_1} + \frac{\partial S_{2k}}{\partial x_2} + \frac{\partial S_{3k}}{\partial x_3} + \frac{\partial S_{4k}}{\partial x_4} \ (k = 1,\ 2,\ 3,\ 4). \tag{64}$$

Se si introduce mediante una trasformazione di Lorentz $\mathbf{A}$ un nuovo sistema di riferimento $x_1',\ x_2',\ x_3',\ x_4'$ per i punti dello spazio-tempo, conformemente si dovrà utilizzare l'operatore

$$\mathrm{lor}' = \left| \frac{\partial}{\partial x_1'},\ \frac{\partial}{\partial x_2'},\ \frac{\partial}{\partial x_3'},\ \frac{\partial}{\partial x_4'} \right|.$$

Poiché inoltre S va in $S' = \overline{\mathbf{A}} S \mathbf{A} = |S_{hk}'|$, si intenderà con $\mathrm{lor}' S'$ la matrice 1×4 dell'espressione

$$K_k' = \frac{\partial S_{1k}'}{\partial x_1'} + \frac{\partial S_{2k}'}{\partial x_2'} + \frac{\partial S_{3k}'}{\partial x_3'} + \frac{\partial S_{4k}'}{\partial x_4'} \ (k = 1,\ 2,\ 3,\ 4).$$

Ora per la derivazione di una funzione qualsiasi di un punto dello spazio-tempo vale la regola

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_k'} &= \frac{\partial}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial x_k'} + \frac{\partial}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial x_k'} + \frac{\partial}{\partial x_3}\frac{\partial x_3}{\partial x_k'} + \frac{\partial}{\partial x_4}\frac{\partial x_4}{\partial x_k'} \\ &= \frac{\partial}{\partial x_1}\alpha_{1k} + \frac{\partial}{\partial x_2}\alpha_{2k} + \frac{\partial}{\partial x_3}\alpha_{3k} + \frac{\partial}{\partial x_4}\alpha_{4k}, \end{aligned}$$

che si esprime simbolicamente in modo facilmente comprensibile come

$$\mathrm{lor}' = \mathrm{lor}(\mathbf{A}$$

e tenendo conto di questa segue parimenti

$$\mathrm{lor}' S' = \mathrm{lor}\left(\mathbf{A}\left(\mathbf{A}^{-1} S \mathbf{A}\right)\right) = (\mathrm{lor}\, S)\mathbf{A}, \tag{65}$$

cioè quando S rappresenta una matrice dello spazio-tempo di II specie, $\mathrm{lor}\, S$ si trasforma come un vettore dello spazio-tempo di I specie.

Se in particolare L è un multiplo della matrice unità, si intenderà come $\mathrm{lor}\, L$ la matrice di elementi

$$\left| \frac{\partial L}{\partial x_1},\ \frac{\partial L}{\partial x_2},\ \frac{\partial L}{\partial x_3},\ \frac{\partial L}{\partial x_4} \right|. \tag{66}$$

Se $s = |s_1,\ s_2,\ s_3,\ s_4|$ rappresenta un vettore dello spazio-tempo di I specie, bisogna intendere

$$\mathrm{lor}\, \overline{s} = \frac{\partial s_1}{\partial x_1} + \frac{\partial s_2}{\partial x_2} + \frac{\partial s_3}{\partial x_3} + \frac{\partial s_4}{\partial x_4}. \tag{67}$$

Se in seguito ad una trasformazione di Lorentz $\mathbf{A}$ appaiono i simboli lor', s' al posto di lor, s, risulta

$$\mathrm{lor}'\overline{s}' = (\mathrm{lor}\,\mathbf{A})(\overline{\mathbf{A}}\overline{s}) = \mathrm{lor}\,\overline{s},$$

cioè $\mathrm{lor}\,\overline{s}$ è un invariante per trasformazioni di Lorentz.

In tutte queste relazioni l'operatore lor stesso gioca il ruolo di un vettore dello spazio-tempo di I specie.

Se f rappresenta un vettore dello spazio-tempo di II specie, si ha ora da intendere $-\,\mathrm{lor}\,f$ come il vettore dello spazio-tempo di I specie con le componenti

$$\begin{array}{l}
\phantom{\frac{\partial f_{21}}{\partial x_1}+{}}\frac{\partial f_{12}}{\partial x_2}+\frac{\partial f_{13}}{\partial x_3}+\frac{\partial f_{14}}{\partial x_4},\\
\frac{\partial f_{21}}{\partial x_1}\phantom{+\frac{\partial f_{12}}{\partial x_2}}+\frac{\partial f_{23}}{\partial x_3}+\frac{\partial f_{24}}{\partial x_4},\\
\frac{\partial f_{31}}{\partial x_1}+\frac{\partial f_{32}}{\partial x_2}\phantom{+\frac{\partial f_{13}}{\partial x_3}}+\frac{\partial f_{34}}{\partial x_4},\\
\frac{\partial f_{41}}{\partial x_1}+\frac{\partial f_{42}}{\partial x_2}+\frac{\partial f_{43}}{\partial x_3}\phantom{+\frac{\partial f_{14}}{\partial x_4}}.
\end{array}$$

Perciò il sistema di equazioni differenziali (A) si può riassumere nella forma breve

({A}) $$\mathrm{lor}\,f = -s.$$

In modo del tutto analogo il sistema di equazioni differenziali (B) si scriverà

({B}) $$\mathrm{lor}\,F^* = 0.$$

Le espressioni $\mathrm{lor}\,\overline{(\mathrm{lor}\,f)}$ e $\mathrm{lor}\,\overline{(\mathrm{lor}\,F^*)}$ costruite tenendo conto della definizione (67) di $\mathrm{lor}\,\overline{s}$ si annullano evidentemente in modo identico, poiché f ed F^* sono matrici alternanti. Quindi per la corrente s segue dalla ({A}) la relazione

(68) $$\frac{\partial s_1}{\partial x_1}+\frac{\partial s_2}{\partial x_2}+\frac{\partial s_3}{\partial x_3}+\frac{\partial s_4}{\partial x_4}=0,$$

mentre la relazione

(69) $$\mathrm{lor}\,\overline{(\mathrm{lor}\,F^*)} = 0$$

ha il significato che le quattro equazioni date dalla ({B}) rappresentano solo tre condizioni indipendenti per il comportamento dei vettori di campo.

Riassumo ora i risultati:

Si indichino con w il vettore dello spazio-tempo di I specie $\frac{\mathfrak{w}}{\sqrt{1-\mathfrak{w}^2}}$, $\frac{i}{\sqrt{1-\mathfrak{w}^2}}$ ($\mathfrak{w}$ velocità della materia), con F il vettore dello spazio-tempo di II specie $\mathfrak{M}$, $-i\mathfrak{E}$ ($\mathfrak{M}$ induzione magnetica, $\mathfrak{E}$ forza elettrica), con f il vettore dello spazio-tempo di II specie $\mathfrak{m}$, $-i\mathfrak{e}$ ($\mathfrak{m}$ forza magnetica, $\mathfrak{e}$ induzione elettrica), con s il vettore dello spazio-tempo di I specie $\mathfrak{s}$, $i\rho$ (ρ densità elettrica spaziale, $\mathfrak{s}-\rho\mathfrak{w}$ corrente di conduzione), con ε la costante dielettrica, con μ la permeabilità magnetica, con σ la conducibilità; allora (con i simboli del calcolo matriciale spiegati nel §10 e nel §11) le equazioni fondamentali per i processi elettromagnetici nei corpi in moto si scrivono

({A}) $$\mathrm{lor}\,f = -s,$$

$$(\{B\}) \qquad \operatorname{lor} F^* = 0,$$

$$(\{C\}) \qquad wf = \varepsilon wF,$$

$$(\{D\}) \qquad wF^* = \mu wf^*,$$

$$(\{E\}) \qquad s + (w\overline{s})\, w = -\sigma wF.$$

Poiché $w\overline{w} = -1$, i vettori dello spazio-tempo di I specie wF, wf, wF^*, wf^*, $s + (w\overline{s})\, w$ sono tutti normali a w e infine vale per il sistema di equazioni ({B}) la relazione

$$\operatorname{lor} \overline{(\operatorname{lor} F^*)} = 0.$$

In considerazione della circostanza da ultimo ricordata, si ha qui a disposizione esattamente il numero richiesto di equazioni indipendenti per descrivere completamente i processi a partire da opportuni dati al contorno, purché sia noto il movimento della materia, quindi il vettore $\mathfrak{w}$ in funzione di x, y, z, t.

§13. Il prodotto dei vettori di campo fF.

Studiamo infine le leggi che portano a determinare il vettore w in funzione di x, y, z, t. Nelle ricerche relative a queste appaiono in primo piano quelle espressioni che si presentano costruendo il prodotto delle due matrici alternanti

$$f = \begin{vmatrix} 0, & f_{12}, & f_{13}, & f_{14} \\ f_{21}, & 0, & f_{23}, & f_{24} \\ f_{31}, & f_{32}, & 0, & f_{34} \\ f_{41}, & f_{42}, & f_{43}, & 0 \end{vmatrix}, \quad F = \begin{vmatrix} 0, & F_{12}, & F_{13}, & F_{14} \\ F_{21}, & 0, & F_{23}, & F_{24} \\ F_{31}, & F_{32}, & 0, & F_{34} \\ F_{41}, & F_{42}, & F_{43}, & 0 \end{vmatrix}.$$

Scrivo

$$(70) \qquad fF = \begin{vmatrix} S_{11} - L, & S_{12}, & S_{13}, & S_{14} \\ S_{21}, & S_{22} - L, & S_{23}, & S_{24} \\ S_{31}, & S_{32}, & S_{33} - L, & S_{34} \\ S_{41}, & S_{42}, & S_{43}, & S_{44} - L \end{vmatrix}$$

di modo che sarà

$$(71) \qquad S_{11} + S_{22} + S_{33} + S_{44} = 0.$$

L significa l'espressione simmetrica negli indici 1, 2, 3, 4

$$(72) \qquad L = \frac{1}{2} \left(f_{23}F_{23} + f_{31}F_{31} + f_{12}F_{12} + f_{14}F_{14} + f_{24}F_{24} + f_{34}F_{34} \right),$$

e sarà

$$(73) \qquad \begin{aligned} S_{11} &= \frac{1}{2} \left(f_{23}F_{23} + f_{34}F_{34} + f_{42}F_{42} - f_{12}F_{12} - f_{13}F_{13} - f_{14}F_{14} \right), \\ S_{12} &= f_{13}F_{32} + f_{14}F_{42}, \text{ ecc..} \end{aligned}$$

Per rendere esplicite le condizioni di realtà, scriverò ora

$$(74)\qquad S = \begin{vmatrix} S_{11}, & S_{12}, & S_{13}, & S_{14} \\ S_{21}, & S_{22}, & S_{23}, & S_{24} \\ S_{31}, & S_{32}, & S_{33}, & S_{34} \\ S_{41}, & S_{42}, & S_{43}, & S_{44} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} X_x, & Y_x, & Z_x, & -iT_x \\ X_y, & Y_y, & Z_y, & -iT_y \\ X_z, & Y_z, & Z_z, & -iT_z \\ -iX_t, & -iY_t, & -iZ_t, & T_t \end{vmatrix},$$

dove poi

$$X_x = \frac{1}{2}\left(\mathfrak{m}_x\mathfrak{M}_x - \mathfrak{m}_y\mathfrak{M}_y - \mathfrak{m}_z\mathfrak{M}_z + \mathfrak{e}_x\mathfrak{E}_x - \mathfrak{e}_y\mathfrak{E}_y - \mathfrak{e}_z\mathfrak{E}_z\right),$$

$$X_y = \mathfrak{m}_x\mathfrak{M}_y + \mathfrak{e}_y\mathfrak{E}_x,\ Y_x = \mathfrak{m}_y\mathfrak{M}_x + \mathfrak{e}_x\mathfrak{E}_y,\ \text{ecc.},$$

$$(75)\qquad X_t = \mathfrak{e}_y\mathfrak{M}_z - \mathfrak{e}_z\mathfrak{M}_y,$$

$$T_x = \mathfrak{m}_z\mathfrak{E}_y - \mathfrak{m}_y\mathfrak{E}_z,\ \text{ecc.},$$

$$T_t = \frac{1}{2}\left(\mathfrak{m}_x\mathfrak{M}_x + \mathfrak{m}_y\mathfrak{M}_y + \mathfrak{m}_z\mathfrak{M}_z + \mathfrak{e}_x\mathfrak{E}_x + \mathfrak{e}_y\mathfrak{E}_y + \mathfrak{e}_z\mathfrak{E}_z\right),$$

ed anche

$$(76)\qquad L = \frac{1}{2}\left(\mathfrak{m}_x\mathfrak{M}_x + \mathfrak{m}_y\mathfrak{M}_y + \mathfrak{m}_z\mathfrak{M}_z - \mathfrak{e}_x\mathfrak{E}_x - \mathfrak{e}_y\mathfrak{E}_y - \mathfrak{e}_z\mathfrak{E}_z\right),$$

sono tutti reali. Nella teoria per corpi a riposo le espressioni X_x, X_y, X_z, Y_x, Y_y, Y_z, Z_x, Z_y, Z_z intervengono con il nome di "sforzi di Maxwell", le quantità T_x, T_y, T_z come "vettore di Poynting", T_t come "densità d'energia elettromagnetica per l'unità di volume" ed L si indica come "funzione di Lagrange".

D'altra parte troviamo immediatamente, componendo nell'ordine inverso le matrici duali di f ed F

$$(77)\qquad F^*f^* = \begin{vmatrix} -S_{11} - L, & -S_{12}, & -S_{13}, & -S_{14} \\ -S_{21}, & -S_{22} - L, & -S_{23}, & -S_{24} \\ -S_{31}, & -S_{32}, & -S_{33} - L, & -S_{34} \\ -S_{41}, & -S_{42}, & -S_{43}, & -S_{44} - L \end{vmatrix}$$

e possiamo quindi porre

$$(78)\qquad fF = S - L,\ F^*f^* = -S - L,$$

nelle quali intendiamo per L il multiplo $L.1$ della matrice unità, cioè della matrice degli elementi

$$|Le_{hk}|\ \begin{pmatrix} e_{hh} = 1, & e_{hk} = 0, & h \neq k \\ & h, k = 1,\ 2,\ 3,\ 4 & \end{pmatrix}.$$

Ricaviamo inoltre, poiché $SL = LS$,

$$F^*f^*fF = (-S - L)(S - L) = -SS + L^2,$$

e troviamo, poiché si ha $f^*f = \mathrm{Det}^{1/2}\, f$, $F^*F = \mathrm{Det}^{1/2}\, F$, l'interessante relazione:

$$SS = L^2 - \mathrm{Det}^{1/2} f\, \mathrm{Det}^{1/2}\, F, \tag{79}$$

cioè il prodotto della matrice S per se stessa è un multiplo della matrice unità, una matrice nella quale fuori dalla diagonale principale tutti gli elementi sono nulli e sulla diagonale tutti gli elementi sono uguali, ed hanno come valore comune la quantità qui riportata al secondo membro. Si ottengono quindi in generale le relazioni

$$S_{h1}S_{1k} + S_{h2}S_{2k} + S_{h3}S_{3k} + S_{h4}S_{4k} = 0 \tag{80}$$

per indici h e k disuguali estratti dalla sequenza 1, 2, 3, 4, e

$$S_{h1}S_{1h} + S_{h2}S_{2h} + S_{h3}S_{3h} + S_{h4}S_{4h} = L^2 - \mathrm{Det}^{1/2} f\, \mathrm{Det}^{1/2}\, F \tag{81}$$

per $h = 1,\ 2,\ 3,\ 4$.

Se ora invece di F e di f nelle espressioni (72), (73) introduciamo per mezzo delle (55), (56), (57) la forza elettrica a riposo Φ, la forza magnetica a riposo Ψ, la radiazione a riposo Ω, arriviamo alle espressioni:

$$L = -\frac{1}{2}\varepsilon\Phi\overline{\Phi} + \frac{1}{2}\mu\Psi\overline{\Psi}, \tag{82}$$

$$\begin{aligned} S_{hk} = {} & -\frac{1}{2}\varepsilon\Phi\overline{\Phi}e_{hk} + \frac{1}{2}\mu\Psi\overline{\Psi}e_{hk} \\ & +\varepsilon\left(\Phi_h\Phi_k - \Phi\overline{\Phi}w_hw_k\right) + \mu\left(\Psi_h\Psi_k - \Psi\overline{\Psi}w_hw_k\right) \\ & -\Omega_hw_k - \varepsilon\mu w_h\Omega_k\ (h,\ k = 1,\ 2,\ 3,\ 4) \end{aligned} \tag{83}$$

nelle quali si deve porre

$$\Phi\overline{\Phi} = \Phi_1^2 + \Phi_2^2 + \Phi_3^2 + \Phi_4^2,\ \Psi\overline{\Psi} = \Psi_1^2 + \Psi_2^2 + \Psi_3^2 + \Psi_4^2,$$

$$e_{hh} = 1,\ e_{hk} = 0,\ (h \neq k).$$

Il secondo membro della (82), come pure L, è sempre un invariante per le trasformazioni di Lorentz e i 4×4 elementi al secondo membro della (83), come S_{hk}, rappresentano una matrice dello spazio-tempo di II specie. Tenendo conto di ciò basta, per poter affermare le relazioni (82), (83) in generale, verificarle per il caso $w_1 = 0,\ w_2 = 0,\ w_3 = 0,\ w_4 = i$. Per questo caso $\mathfrak{w} = 0$ e le (83) e (82) si riconducono immediatamente mediante le (47), (51), (60) da un lato, ed $\mathfrak{e} = \varepsilon\mathfrak{E}$, $\mathfrak{M} = \mu\mathfrak{m}$ dall'altro, alle equazioni (75) e (76).

L' espressione al secondo membro nella (81), che è

$$= \left(\frac{1}{2}\left(\mathfrak{m}\mathfrak{M} - \mathfrak{e}\mathfrak{E}\right)\right)^2 + \left(\mathfrak{e}\mathfrak{m}\right)\left(\mathfrak{E}\mathfrak{M}\right),$$

risulta ≥ 0 mediante $(\mathfrak{e}\mathfrak{m}) = \varepsilon\Phi\overline{\Psi}$, $(\mathfrak{E}\mathfrak{M}) = \mu\Phi\overline{\Psi}$; la sua radice quadrata, presa ≥ 0, può tenendo conto della (79) essere indicata con $\mathrm{Det}^{1/4}\, S$.

Per $\overline{S}$, la matrice trasposta di S, risulta dalla (78), poiché $\overline{f} = -f,\ \overline{F} = -F,$

$$Ff = \overline{S} - L,\ f^*F^* = -\overline{S} - L. \tag{84}$$

Pertanto

$$S - \overline{S} = |S_{hk} - S_{kh}|$$

è una matrice alternante e significa parimenti un vettore dello spazio-tempo di II specie. Dall'espressione (83) otteniamo immediatamente

$$S - \overline{S} = -\left(\varepsilon\mu - 1\right)\left[w, \Omega\right], \tag{85}$$

dalla quale (vedi (57), (58)) si ricava ora

$$w\left(S - \overline{S}\right)^* = 0, \tag{86}$$

$$w\left(S - \overline{S}\right) = \left(\varepsilon\mu - 1\right)\Omega. \tag{87}$$

Quando in un punto dello spazio-tempo la materia è a riposo, si ha $\mathfrak{w} = 0$, e la (86) significa il sussistere delle equazioni

$$Z_y = Y_z,\ X_z = Z_x,\ Y_x = X_y;$$

inoltre per la (83) si ha

$$T_x = \Omega_1,\ T_y = \Omega_2,\ T_z = \Omega_3,$$

$$X_t = \varepsilon\mu\Omega_1,\ Y_t = \varepsilon\mu\Omega_2,\ Z_t = \varepsilon\mu\Omega_3.$$

Ora mediante un'opportuna rotazione del sistema di coordinate spaziali $x,\ y,\ z$ attorno all'origine è possibile far sì che sia

$$Z_y = Y_z = 0,\ X_z = Z_x = 0,\ Y_x = X_y = 0.$$

Per la (71) si ha

$$X_x + Y_y + Z_z + T_t = 0 \tag{88}$$

e secondo l'espressione nella (83) si ha sempre $T_t > 0$. Nel caso particolare, quando anche Ω si annulla, segue poi dalla (81)

$$X_x^2 = Y_y^2 = Z_z^2 = T_t^2 = (\mathrm{Det}^{1/4} S)^2,$$

e T_t ed una delle tre quantità $X_x,\ Y_y,\ Z_z$ sono uguali a $+\,\mathrm{Det}^{1/4}\,S$, le altre due a $-\,\mathrm{Det}^{1/4}\,S$. Se Ω non si annulla immaginiamo che sia $\Omega_3 \neq 0$, allora per la (80) si ha in particolare

$$T_zX_t = 0,\ T_zY_t = 0,\ Z_zT_z + T_zT_t = 0$$

e si trova perciò $\Omega_1 = 0,\ \Omega_2 = 0,\ Z_z = -T_t$. Dalla (81) e tenendo conto della (88) risulta quindi

$$X_x = -Y_y = \pm\,\mathrm{Det}^{1/2}\,S,$$

$$-Z_z = T_t = \sqrt{\mathrm{Det}^{1/2} S + \varepsilon\mu\Omega_3^2} > \mathrm{Det}^{1/4}\,S. -$$

Di significato del tutto particolare sarà infine il vettore dello spazio-tempo di I specie

$$K = \mathrm{lor}\,S, \tag{89}$$

per il quale dimostreremo ora un'importante trasformazione.

Per la (78) è $S = L + fF$ e risulta immediatamente

$$\mathrm{lor}\,S = \mathrm{lor}\,L + \mathrm{lor}\,fF.$$

Il simbolo lor significa un processo di derivazione che in $\mathrm{lor}\,fF$ riguarda da un lato f, dall'altro F. Di conseguenza $\mathrm{lor}\,fF$ si spezza additivamente in una prima ed in una seconda parte. La prima parte sarà evidentemente il prodotto delle matrici $(\mathrm{lor}\,f)F$, nel quale $\mathrm{lor}\,f$ si considera per conto suo come una matrice 1×4. La seconda parte è quella parte di $\mathrm{lor}\,fF$ nella quale le derivazioni riguardano solo le componenti di F. Ora ricaviamo dalla (78)

$$fF = -F^*f^* - 2L;$$

di conseguenza questa seconda parte di $\mathrm{lor}\,fF$ sarà $-(\mathrm{lor}\,F^*)f^*$ più la parte di $-2\,\mathrm{lor}\,L$ nella quale le derivazioni riguardano solo le componenti di F. Risulta pertanto

$$\mathrm{lor}\,S = (\mathrm{lor}\,f)F - (\mathrm{lor}\,F^*)f^* + N, \tag{90}$$

dove N indica il vettore con le componenti

$$\begin{aligned} N_h = {} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f_{23}}{\partial x_h}F_{23} + \frac{\partial f_{31}}{\partial x_h}F_{31} + \frac{\partial f_{12}}{\partial x_h}F_{12} + \frac{\partial f_{14}}{\partial x_h}F_{14} + \frac{\partial f_{24}}{\partial x_h}F_{24} + \frac{\partial f_{34}}{\partial x_h}F_{34}\right) \\ & -\frac{1}{2}\left(f_{23}\frac{\partial F_{23}}{\partial x_h} + f_{31}\frac{\partial F_{31}}{\partial x_h} + f_{12}\frac{\partial F_{12}}{\partial x_h} + f_{14}\frac{\partial F_{14}}{\partial x_h} + f_{24}\frac{\partial F_{24}}{\partial x_h} + f_{34}\frac{\partial F_{34}}{\partial x_h}\right) \\ & (h = 1,\ 2,\ 3,\ 4). \end{aligned}$$

Utilizzando le equazioni fondamentali ({A}) e ({B}) la (90) si trasforma nella relazione fondamentale

$$\mathrm{lor}\,S = -sF + N. \tag{91}$$

Nel caso particolare $\varepsilon = 1$, $\mu = 1$, quando $f = F$, N si annulla identicamente.

In generale arriviamo, in base alle (55), (56) e tenendo conto dell'espressione (82) di L e della (57), alle seguenti espressioni per le componenti di N:

$$\begin{aligned} N_h = {} & -\frac{1}{2}\Phi\overline{\Phi}\frac{\partial \varepsilon}{\partial x_h} - \frac{1}{2}\Psi\overline{\Psi}\frac{\partial \mu}{\partial x_h} \\ & + (\varepsilon\mu - 1)\left(\Omega_1\frac{\partial w_1}{\partial x_h} + \Omega_2\frac{\partial w_2}{\partial x_h} + \Omega_3\frac{\partial w_3}{\partial x_h} + \Omega_4\frac{\partial w_4}{\partial x_h}\right) \quad \text{per } h = 1,\ 2,\ 3,\ 4. \end{aligned} \tag{92}$$

Se ora facciamo uso della (59) e indichiamo con $\mathfrak{W}$ il vettore spaziale che ha Ω_1, Ω_2, Ω_3 come componenti x, y, z, l'ultimo, terzo addendo della (92) si può portare anche nella forma

$$\frac{\varepsilon\mu - 1}{\sqrt{1-\mathfrak{w}^2}}\left(\mathfrak{W}\frac{\partial \mathfrak{w}}{\partial x_h}\right), \tag{93}$$

dove la parentesi indica il prodotto scalare dei due vettori in essa presenti.

§14. Le forze ponderomotrici.

Rappresentiamo ora la relazione $K = \operatorname{lor} S = -sF + N$ esplicitamente; essa dà le equazioni

$$\begin{aligned} K_1 = \frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z} - \frac{\partial X_t}{\partial t} &= \rho\mathfrak{E}_x + \mathfrak{s}_y\mathfrak{M}_z - \mathfrak{s}_z\mathfrak{M}_y \\ &-\frac{1}{2}\Phi\overline{\Phi}\frac{\partial\varepsilon}{\partial x} - \frac{1}{2}\Psi\overline{\Psi}\frac{\partial\mu}{\partial x} + \frac{\varepsilon\mu-1}{\sqrt{1-\mathfrak{w}^2}}\left(\mathfrak{W}\frac{\partial\mathfrak{w}}{\partial x}\right), \end{aligned} \tag{94}$$

$$\begin{aligned} K_2 = \frac{\partial Y_x}{\partial x} + \frac{\partial Y_y}{\partial y} + \frac{\partial Y_z}{\partial z} - \frac{\partial Y_t}{\partial t} &= \rho\mathfrak{E}_y + \mathfrak{s}_z\mathfrak{M}_x - \mathfrak{s}_x\mathfrak{M}_z \\ &-\frac{1}{2}\Phi\overline{\Phi}\frac{\partial\varepsilon}{\partial y} - \frac{1}{2}\Psi\overline{\Psi}\frac{\partial\mu}{\partial y} + \frac{\varepsilon\mu-1}{\sqrt{1-\mathfrak{w}^2}}\left(\mathfrak{W}\frac{\partial\mathfrak{w}}{\partial y}\right), \end{aligned} \tag{95}$$

$$\begin{aligned} K_3 = \frac{\partial Z_x}{\partial x} + \frac{\partial Z_y}{\partial y} + \frac{\partial Z_z}{\partial z} - \frac{\partial Z_t}{\partial t} &= \rho\mathfrak{E}_z + \mathfrak{s}_x\mathfrak{M}_y - \mathfrak{s}_y\mathfrak{M}_x \\ &-\frac{1}{2}\Phi\overline{\Phi}\frac{\partial\varepsilon}{\partial z} - \frac{1}{2}\Psi\overline{\Psi}\frac{\partial\mu}{\partial z} + \frac{\varepsilon\mu-1}{\sqrt{1-\mathfrak{w}^2}}\left(\mathfrak{W}\frac{\partial\mathfrak{w}}{\partial z}\right), \end{aligned} \tag{96}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{i}K_4 = -\frac{\partial T_x}{\partial x} - \frac{\partial T_y}{\partial y} - \frac{\partial T_z}{\partial z} - \frac{\partial T_t}{\partial t} &= \mathfrak{s}_x\mathfrak{E}_x + \mathfrak{s}_y\mathfrak{E}_y + \mathfrak{s}_z\mathfrak{E}_z \\ &+\frac{1}{2}\Phi\overline{\Phi}\frac{\partial\varepsilon}{\partial t} + \frac{1}{2}\Psi\overline{\Psi}\frac{\partial\mu}{\partial t} - \frac{\varepsilon\mu-1}{\sqrt{1-\mathfrak{w}^2}}\left(\mathfrak{W}\frac{\partial\mathfrak{w}}{\partial t}\right). \end{aligned} \tag{97}$$

È ora mia opinione che nei processi elettromagnetici la forza ponderomotrice che agisce sulla materia in un punto dello spazio-tempo x, y, z, t, calcolata per l'unità di volume, abbia come componenti x, y, z le prime tre componenti del vettore dello spazio-tempo

$$K + \left(w\overline{K}\right)w \tag{98}$$

normale al vettore dello spazio-tempo w, e che inoltre la legge dell'energia trovi la sua espressione nella quarta relazione di cui sopra.

Un articolo successivo sarà riservato a giustificare questa opinione in modo esauriente; qui darò solo un certo sostegno a questa opinione mediante alcune considerazioni sulla meccanica.

Nel caso limite $\varepsilon = 1,\ \mu = 1,\ \sigma = 0$ si ha $N = 0,\ \mathfrak{s} = \rho\mathfrak{w}$; sarà quindi $w\overline{K} = 0$, e questi risultati coincidono con quelli consueti nella teoria degli elettroni.

Appendice. Meccanica e postulato di relatività.

Sarebbe assai insoddisfacente se la nuova concezione del tempo, che si è riconosciuta grazie alla libertà delle trasformazioni di Lorentz, si potesse far valere solo in un campo limitato della fisica.

Ora molti autori affermano che la meccanica classica è in contrasto con il postulato di relatività, che qui è scelto a fondamento per l'elettrodinamica.

Per esprimere un giudizio in proposito, consideriamo una trasformazione di Lorentz speciale, rappresentata dalle equazioni (10), (11), (12), con un vettore $\mathfrak{v}$ diverso da zero diretto in qualche modo e con un modulo q che sia < 1. Penseremo per un momento ancora di non aver preso nessuna decisione riguardo al rapporto tra l'unità di lunghezza e l'unità di tempo, e di conseguenza in quelle equazioni al posto di $t,\ t',\ q$ scriveremo $ct,\ ct',\ q/c$, dove c rappresenta una certa costante positiva e dev'essere $q < c$. Le suddette equazioni si trasformano perciò in

$$\mathfrak{r}'_{\bar{\mathfrak{v}}} = \mathfrak{r}_{\bar{\mathfrak{v}}},\ \mathfrak{r}'_{\mathfrak{v}} = \frac{c\,(\mathfrak{r}_{\mathfrak{v}} - qt)}{\sqrt{c^2 - q^2}},\ \ t' = \frac{-q\mathfrak{r}_{\mathfrak{v}} + c^2 t}{c\sqrt{c^2 - q^2}};$$

ricordiamo che il vettore $\mathfrak{r}$ indica il vettore spaziale $x,\ y,\ z$, ed $\mathfrak{r}'$ il vettore spaziale $x',\ y',\ z'$.

Se in queste equazioni passiamo al limite per $c = \infty$ mentre teniamo fisso $\mathfrak{v}$, da esse risulta

$$\mathfrak{r}'_{\bar{\mathfrak{v}}} = \mathfrak{r}_{\bar{\mathfrak{v}}},\ \ \mathfrak{r}'_{\mathfrak{v}} = \mathfrak{r}_{\mathfrak{v}} - qt,\ \ t' = t.$$

Queste nuove equazioni indicheranno ora un passaggio dal sistema di coordinate spaziali $x,\ y,\ z$ ad un altro sistema di coordinate spaziali $x',\ y',\ z'$ con assi paralleli, l'origine del quale proceda rispetto al primo in linea retta con velocità costante, mentre il parametro temporale resterà del tutto immodificato.

Sulla base di questa osservazione si può dire:

La meccanica classica postula una covarianza delle leggi fisiche per il gruppo delle trasformazioni lineari omogenee dell'espressione

$$(1) \qquad -x^2 - y^2 - z^2 + c^2 t^2$$

in sé, con la determinazione $c = \infty$.

Ora sarebbe addirittura sconvolgente trovare in una parte della fisica una covarianza delle leggi per le trasformazioni dell'espressione (1) in sé per un determinato c finito, e in un'altra parte invece per $c = \infty$. Che la meccanica di Newton possieda questa covarianza solo per $c = \infty$ e che non si possa immaginare per il caso con c velocità della luce, non richiede alcuna spiegazione. Ma non dovrebbe ora essere ammissibile il tentativo di considerare quella covarianza tradizionale per $c = \infty$ solo come un'approssimazione, ricavata direttamente dall'esperienza, di una covarianza più precisa delle leggi di natura per un certo c finito?

Vorrei sostenere che mediante una riformulazione della meccanica, nella quale in luogo del postulato newtoniano di relatività con $c = \infty$ ne appaia uno con un c finito, perfino la struttura assiomatica della meccanica pare conseguire un notevole perfezionamento.

Il rapporto tra l'unità di tempo e l'unità di lunghezza sia normalizzato in modo tale che il postulato di relatività intervenga con $c = 1$.

Poiché voglio ora considerare delle figure geometriche sulla varietà delle quattro variabili $x,\ y,\ z,\ t$, può essere conveniente per una più facile comprensione di quanto segue tralasciare completamente y e z, e interpretare x e t come coordinate parallele oblique in un piano.

Un'origine dello spazio-tempo $O\,(x,\ y,\ z,\ t = 0,\ 0,\ 0,\ 0)$ sarà mantenuta fissa dalla trasformazione di Lorentz. La figura

$$-x^2 - y^2 - z^2 + t^2 = 1,\ t > 0, \tag{2}$$

una falda d'iperboloide, contiene il punto dello spazio-tempo $A(x,\ y,\ z,\ t = 0,\ 0,\ 0,\ 1)$ e tutti i punti dello spazio-tempo A', che in seguito alle trasformazioni di Lorentz appaiono come $(x',\ y',\ z',\ t' = 0,\ 0,\ 0,\ 1)$ nelle unità di misura $x',\ y',\ z',\ t'$ via via introdotte.

La direzione di un raggio vettore OA' da O ad un punto A' della (2) e le direzioni delle tangenti alla (2) in A' si diranno mutuamente normali.

Seguiamo un punto determinato della materia nella sua traiettoria a tutti i tempi t. Chiamo una linea dello spazio-tempo la totalità dei punti dello spazio-tempo $x,\ y,\ z,\ t$ che corrispondono al punto materiale a tempi t diversi.

Il problema di determinare il moto della materia è da intendere così: si deve determinare per ogni punto dello spazio-tempo la direzione della linea dello spazio-tempo che passa di lì.

Trasformare a riposo un punto dello spazio-tempo $P\,(x,\ y,\ z,\ t)$ vuol dire introdurre mediante una trasformazione di Lorentz un sistema di riferimento $x',\ y',\ z',\ t'$ in modo tale che l'asse t' giaccia nella direzione OA' che la linea dello spazio-tempo che passa per P ivi mostra. Lo spazio t' =cost., che comprenda P, lo chiameremo allora lo spazio normale in P alla linea dello spazio-tempo. All'incremento dt del tempo t di P corrisponde l'incremento[12]

$$d\tau = \sqrt{dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2} = dt\sqrt{1 - \mathfrak{w}^2} = \frac{dx_4}{w_4} \tag{3}$$

del parametro t' ora introdotto. Il valore dell'integrale

$$\int d\tau = \int \sqrt{-dx_1^2 - dx_2^2 - dx_3^2 - dx_4^2},$$

calcolato lungo la linea dello spazio-tempo da un qualche punto di partenza fisso P^0 fino ad un punto d'arrivo variabile P, si chiama il tempo proprio del punto della materia che si trova nel punto P dello spazio-tempo. (Questa è una generalizzazione del concetto di tempo locale proposto da Lorentz per moti uniformi.)

[12]Riutilizziamo la notazione con gli indici e i simboli $\mathfrak{w}$, w nel senso prima fissato (vedi §3 e §4).

Consideriamo un corpo R^0 esteso spazialmente ad un determinato tempo t^0; allora la regione individuata da tutte le linee dello spazio-tempo condotte per i punti dello spazio-tempo R^0, t^0 si chiamerà un filo dello spazio-tempo.

Se abbiamo un'espressione analitica $\Theta\,(x,\ y,\ z,\ t)$ tale che $\Theta\,(x,\ y,\ z,\ t) = 0$ intersechi ogni linea dello spazio-tempo del filo in un punto, e che sia

$$-\left(\frac{\partial\Theta}{\partial x}\right)^2 - \left(\frac{\partial\Theta}{\partial y}\right)^2 - \left(\frac{\partial\Theta}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial\Theta}{\partial t}\right)^2 > 0,\ \frac{\partial\Theta}{\partial t} > 0,$$

chiameremo la totalità Q dei punti d'intersezione una sezione del filo. In ogni punto $P\,(x,\ y,\ z,\ t)$ di una siffatta sezione possiamo introdurre mediante una trasformazione di Lorentz un sistema di riferimento $x',\ y',\ z',\ t'$ in modo che si abbia inoltre

$$\frac{\partial\Theta}{\partial x'} = 0,\ \frac{\partial\Theta}{\partial y'} = 0,\ \frac{\partial\Theta}{\partial z'} = 0,\ \frac{\partial\Theta}{\partial t'} > 0.$$

La direzione del corrispondente asse t' univocamente determinato si chiama la normale superiore della sezione Q nel punto P e la quantità $dJ = \int\int\int dx'dy'dz'$ per un intorno di P sulla sezione si dice un elemento di volume della sezione. In questo senso si indicheranno $R^0,\ t^0$ stessi come la sezione $t = t^0$ del filo normale all'asse t e il volume del corpo R^0 come il volume di questa sezione.

Se facciamo convergere lo spazio R^0 in un punto arriviamo al concetto di filo dello spazio-tempo infinitamente sottile. In uno di questi pensiamo sempre che una linea dello spazio-tempo sia in qualche modo designata come linea principale e intendiamo per tempo proprio del filo il tempo proprio fissato su questa linea principale, e per sezioni normali del filo le sue sezioni con spazi che nei punti della linea principale siano ad essa normali.

Formuliamo ora il principio di conservazione della massa.

Ad ogni spazio R ad un tempo t corrisponde una quantità positiva, la massa in R al tempo t. Se R converge ad un punto $x,\ y,\ z,\ t$, il quoziente di questa massa per il volume di R si approssima ad un valore limite $\mu\,(x,\ y,\ z,\ t)$, la densità di massa nel punto dello spazio-tempo $x,\ y,\ z,\ t$.

Il principio di conservazione della massa afferma: per un filo dello spazio-tempo infinitamente sottile il prodotto μdJ della densità di massa μ in un punto $x,\ y,\ z,\ t$ del filo (cioè della linea principale del filo) per il volume dJ della sezione normale all'asse t condotta per il punto rimane sempre costante lungo l'intero filo.

Ora si dovrà valutare come volume dJ_n della sezione normale del filo condotta per $x,\ y,\ z,\ t$

$$dJ_n = \frac{1}{\sqrt{1-\mathfrak{w}^2}}dJ = -iw_4 dJ = \frac{dt}{d\tau}dJ, \tag{4}$$

e si potrà definire

$$\nu = \frac{\mu}{-iw_4} = \mu\sqrt{1-\mathfrak{w}^2} = \mu\frac{d\tau}{dt} \tag{5}$$

come densità di massa a riposo nella posizione $x,\ y,\ z,\ t$. Quindi il principio di conservazione della massa si potrà formulare anche così:

Per un filo dello spazio-tempo infinitamente sottile il prodotto della densità di massa a riposo e del volume della sezione normale in un punto del filo è sempre costante lungo l'intero filo.

In un filo qualsiasi dello spazio-tempo si prenda una prima sezione Q^0 e pure una seconda sezione Q^1, che abbia in comune con Q^0 i punti sul contorno del filo, e solo quelli, e le linee dello spazio-tempo all'interno del filo abbiano su Q^1 dei valori di t più grandi che su Q^0. La regione di estensione finita, compresa tra Q^0 e Q^1, si chiamerà una falce dello spazio-tempo, Q^0 il bordo inferiore, Q^1 il bordo superiore della falce.

Se pensiamo di suddividere il filo in molti fili dello spazio-tempo sottilissimi, allora ad ogni ingresso di un filo sottile attraverso il bordo inferiore della falce corrisponde un'uscita attraverso il superiore, e per entrambi il prodotto νdJ_n determinato nel senso delle (4) e (5) ha sempre lo stesso valore. Pertanto è nulla la differenza dei due integrali $\int \nu dJ_n$, il primo esteso al bordo superiore, il secondo al bordo inferiore della falce. Questa differenza, secondo un noto teorema del calcolo integrale, risulta uguale all'integrale

$$\int\int\int\int \mathrm{lor} \nu \overline{w} dxdydzdt,$$

esteso all'intera regione della falce, dove (vedi la (67) nel §12)

$$\mathrm{lor}\, \nu\overline{w} = \frac{\partial \nu w_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \nu w_2}{\partial x_2} + \frac{\partial \nu w_3}{\partial x_3} + \frac{\partial \nu w_4}{\partial x_4}.$$

Se la falce si contrae in un punto $x,\ y,\ z,\ t$ dello spazio-tempo, si trova da qui l'equazione differenziale

$$\mathrm{lor}\, \nu\overline{w} = 0, \tag{6}$$

cioè la condizione di continuità

$$\frac{\partial \mu \mathfrak{w}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mu \mathfrak{w}_y}{\partial y} + \frac{\partial \mu \mathfrak{w}_z}{\partial z} + \frac{\partial \mu}{\partial t} = 0.$$

Costruiamo inoltre l'integrale

$$N = \int\int\int\int \nu dxdydzdt, \tag{7}$$

esteso all'intera regione di una falce dello spazio-tempo. Suddividiamo la falce in fili dello spazio-tempo sottili e ancora ciascuno di questi fili secondo elementi piccoli $d\tau$ del suo tempo proprio, che tuttavia siano ancora grandi rispetto alla dimensione lineare della sezione normale; poniamo $\nu dJ_n = dm$ per la massa di un filo siffatto e scriviamo τ^0 e τ^1 per il tempo proprio del filo al bordo inferiore e rispettivamente superiore della falce; allora l'integrale (7) si può anche intendere come

$$\int\int \nu dJ_n d\tau = \int \left(\tau^1 - \tau^0\right) dm$$

su tutti i fili della falce.

Ora considero le linee dello spazio-tempo all'interno di una falce dello spazio-tempo come curve sostanziali costituite da punti sostanziali e me le immagino sottoposte nel modo seguente ad una variazione continua di posizione all'interno della falce. Le intere curve saranno deformate in qualche modo mantenendo fermi gli estremi sui bordi inferiore e superiore della falce e i singoli punti sostanziali di esse saranno spostati in modo tale da procedere sempre normalmente alle curve. L'intero processo si rappresenterà analiticamente mediante un parametro ϑ, e al valore $\vartheta = 0$ corrisponderanno le curve con l'andamento delle linee dello spazio-tempo all'interno della falce che ha luogo realmente. Un siffatto processo si chiamerà una deformazione virtuale nella falce.

Supponiamo che il punto della falce a $x,\ y,\ z,\ t$ per $\vartheta = 0$ vada, per il valore ϑ del parametro, in $x + \delta x,\ y + \delta y,\ z + \delta z,\ t + \delta t$; queste ultime quantità saranno allora funzione di $x,\ y,\ z,\ t,\ \vartheta$. Consideriamo di nuovo un filo dello spazio-tempo infinitamente sottile nel punto $x,\ y,\ z,\ t$, con una sezione normale di volume dJ_n, e sia $dJ_n + \delta dJ_n$ il volume della sezione normale al punto corrispondente del filo variato; terremo conto del principio di conservazione dalla massa, e attribuiremo a questa punto variato una densità di massa a riposo $\nu + \delta\nu$ secondo la

$$(\nu + \delta\nu)\,(dJ_n + \delta dJ_n) = \nu dJ_n = dm; \tag{8}$$

con ν intendiamo la densità a riposo reale in $x,\ y,\ z,\ t$. A seguito di questo vincolo l'integrale (7), esteso sulla regione della falce, varierà per la deformazione virtuale come una certa funzione $N + \delta N$ di ϑ, e chiameremo questa funzione $N + \delta N$ l'azione della massa per la deformazione virtuale.

Introduciamo la scrittura con gli indici; sarà:

$$d\,(x_h + \delta x_h) = dx_h + \sum_k \frac{\partial \delta x_h}{\partial x_k} dx_k + \frac{\partial \delta x_h}{\partial \vartheta} d\vartheta \quad \begin{pmatrix} k = 1,\ 2,\ 3,\ 4 \\ h = 1,\ 2,\ 3,\ 4 \end{pmatrix}. \tag{9}$$

Ora è chiaro, in base alle osservazioni fatte prima, che il valore di $N + \delta N$ per il valore ϑ del parametro sarà:

$$N + \delta N = \int\int\int\int \nu \frac{d\,(\tau + \delta\tau)}{d\tau} dxdydzdt, \tag{10}$$

esteso alla falce, dove $d\,(\tau + \delta\tau)$ indica quella quantità che si ottiene da

$$\sqrt{-\left(dx_1 + d\delta x_1\right)^2 - \left(dx_2 + d\delta x_2\right)^2 - \left(dx_3 + d\delta x_3\right)^2 - \left(dx_4 + d\delta x_4\right)^2}$$

per mezzo della (9) e di

$$dx_1 = w_1 d\tau,\ dx_2 = w_2 d\tau,\ dx_3 = w_3 d\tau,\ dx_4 = w_4 d\tau,\ d\vartheta = 0;$$

risulta quindi

$$\frac{d\,(\tau + \delta\tau)}{d\tau} = \sqrt{-\sum_h \left(w_h + \sum_k \frac{\partial \delta x_h}{\partial x_k} w_k\right)^2} \quad \begin{pmatrix} k = 1,\ 2,\ 3,\ 4 \\ h = 1,\ 2,\ 3,\ 4 \end{pmatrix}. \tag{11}$$

Sottoporremo ora ad una trasformazione il valore della derivata

$$\left(\frac{d\,(N+\delta N)}{d\vartheta}\right)_{(\vartheta=0)}. \tag{12}$$

Poiché ogni δx_h come funzione degli argomenti $x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ \vartheta$ si annulla in generale per $\vartheta = 0$, così pure in generale si ha $\partial\delta x_h/\partial x_k = 0$ per $\vartheta = 0$. Poniamo ora

$$\left(\frac{\partial\delta x_h}{\partial\vartheta}\right)_{(\vartheta=0)} = \xi_h\ (h = 1,\ 2,\ 3,\ 4), \tag{13}$$

allora in base alle (10) e (11) risulta per l'espressione (12):

$$-\int\!\!\int\!\!\int\!\!\int \nu \sum_h w_h \left(\frac{\partial\xi_h}{\partial x_1}w_1 + \frac{\partial\xi_h}{\partial x_2}w_2 + \frac{\partial\xi_h}{\partial x_3}w_3 + \frac{\partial\xi_h}{\partial x_4}w_4\right) dxdydzdt.$$

Per il sistema $x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4$ al bordo della falce $\delta x_1,\ \delta x_2,\ \delta x_3,\ \delta x_4$ si annulleranno per ogni valore ϑ e quindi anche $\xi_1,\ \xi_2,\ \xi_3,\ \xi_4$ saranno ovunque nulli. Allora mediante integrazione per parti l'ultimo integrale si trasforma in

$$\int\!\!\int\!\!\int\!\!\int \sum_h \xi_h \left(\frac{\partial\nu w_h w_1}{\partial x_1} + \frac{\partial\nu w_h w_2}{\partial x_2} + \frac{\partial\nu w_h w_3}{\partial x_3} + \frac{\partial\nu w_h w_4}{\partial x_4}\right) dxdydzdt.$$

L' espressione tra parentesi è

$$= w_h \sum_k \frac{\partial\nu w_k}{\partial x_k} + \nu \sum_k w_k \frac{\partial w_h}{\partial x_k}.$$

La prima somma qui si annulla in seguito alla condizione di continuità (6), la seconda si può rappresentare come

$$\frac{\partial w_h}{\partial x_1}\frac{dx_1}{d\tau} + \frac{\partial w_h}{\partial x_2}\frac{dx_2}{d\tau} + \frac{\partial w_h}{\partial x_3}\frac{dx_3}{d\tau} + \frac{\partial w_h}{\partial x_4}\frac{dx_4}{d\tau} = \frac{dw_h}{d\tau} = \frac{d}{d\tau}\left(\frac{dx_h}{d\tau}\right),$$

dove con $d/d\tau$ si intende la derivata nella direzione della linea dello spazio-tempo di un punto materiale. Per la derivata (12) risulta perciò infine l'espressione

$$\int\!\!\int\!\!\int\!\!\int \nu \left(\frac{dw_1}{d\tau}\xi_1 + \frac{dw_2}{d\tau}\xi_2 + \frac{dw_3}{d\tau}\xi_3 + \frac{dw_4}{d\tau}\xi_4\right) dxdydzdt. \tag{14}$$

Per una deformazione virtuale nella falce abbiamo imposto la prescrizione che il punto sostanziale considerato si debba spostare normalmente alla curva da esso descritta; ciò significa per $\vartheta = 0$ che gli ξ_h devono soddisfare la condizione

$$w_1\xi_1 + w_2\xi_2 + w_3\xi_3 + w_4\xi_4 = 0. \tag{15}$$

Pensiamo agli sforzi di Maxwell nell'elettrodinamica dei corpi a riposo e consideriamo d'altra parte i nostri risultati dei §§12 e 13; risulta naturale allora un certo aggiustamento al postulato di relatività del principio di Hamilton per mezzi elastici deformati con continuità.

In ogni punto dello spazio-tempo sia nota (come nel §13) una matrice dello spazio-tempo di II specie

$$(16) \qquad S = \begin{vmatrix} S_{11}, & S_{12}, & S_{13}, & S_{14} \\ S_{21}, & S_{22}, & S_{23}, & S_{24} \\ S_{31}, & S_{32}, & S_{33}, & S_{34} \\ S_{41}, & S_{42}, & S_{43}, & S_{44} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} X_x, & Y_x, & Z_x, & -iT_x \\ X_y, & Y_y, & Z_y, & -iT_y \\ X_z, & Y_z, & Z_z, & -iT_z \\ -iX_t, & -iY_t, & -iZ_t, & T_t \end{vmatrix},$$

dove $X_x,\ Y_x,\ \ldots Z_z,\ T_x,\ \ldots X_t,\ \ldots T_t$ siano quantità reali. Per una deformazione virtuale in una falce dello spazio-tempo con i simboli prima introdotti il valore dell'integrale

$$(17) \qquad W + \delta W = \int\int\int\int \left(\sum_{h,\ k} S_{hk} \frac{\partial\,(x_k + \delta x_k)}{\partial x_h} \right) dxdydzdt,$$

esteso alla regione della falce, si può chiamare l'azione degli sforzi per una deformazione virtuale.

La somma che qui interviene, scritta esplicitamente e con quantità reali, è

$$\begin{gathered} X_x + Y_y + Z_z + T_t \\ +X_x \frac{\partial \delta x}{\partial x} + X_y \frac{\partial \delta x}{\partial y} + \cdots + Z_z \frac{\partial \delta z}{\partial z} \\ -X_t \frac{\partial \delta x}{\partial t} - \cdots + T_x \frac{\partial \delta t}{\partial x} + \cdots + T_t \frac{\partial \delta t}{\partial t}. \end{gathered}$$

Postuleremo ora il seguente principio di minimo per la meccanica:

Una falce dello spazio-tempo sia limitata; allora per ogni deformazione virtuale nella falce la somma dell'azione della massa e dell'azione degli sforzi dev'essere sempre un estremo per l'andamento delle linee dello spazio-tempo nella falce che ha luogo realmente.

Il senso di questa affermazione è che per ogni deformazione virtuale, con i simboli spiegati precedentemente, dev'essere

$$(18) \qquad \left(\frac{d\,(\delta N + \delta W)}{d\vartheta} \right)_{\vartheta = 0} = 0.$$

Con i metodi del calcolo delle variazioni da questo principio di minimo derivano, tenendo conto della condizione (15) e per mezzo della forma (14), le quattro equazioni differenziali seguenti

$$(19) \qquad \nu \frac{dw_h}{d\tau} = K_h + \kappa w_h \ (h = 1,\ 2,\ 3,\ 4),$$

dove

$$(20) \qquad K_h = \frac{\partial S_{1h}}{\partial x_1} + \frac{\partial S_{2h}}{\partial x_2} + \frac{\partial S_{3h}}{\partial x_3} + \frac{\partial S_{4h}}{\partial x_4}$$

sono le componenti del vettore dello spazio-tempo di I specie $K = \operatorname{lor} S$, e κ è un fattore, la determinazione del quale deve discendere da $w\overline{w} = -1$. Mediante moltiplicazione della (19) per w_h e successiva somma su $h = 1,\ 2,\ 3,\ 4$ si trova $\kappa = K\overline{w}$ ed evidentemente $K + (K\overline{w})\, w$ sarà un vettore dello spazio-tempo di I specie normale a w. Se scriviamo le componenti di questo vettore come

$$X,\ Y,\ Z,\ iT;$$

otteniamo le seguenti leggi per il moto della materia:

$$\begin{aligned} \nu \frac{d}{d\tau}\frac{dx}{d\tau} &= X, \\ \nu \frac{d}{d\tau}\frac{dy}{d\tau} &= Y, \\ \nu \frac{d}{d\tau}\frac{dz}{d\tau} &= Z, \\ \nu \frac{d}{d\tau}\frac{dt}{d\tau} &= T. \end{aligned} \tag{21}$$

Valgono inoltre

$$\left(\frac{dx}{d\tau}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\tau}\right)^2 + \left(\frac{dz}{d\tau}\right)^2 = \left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 - 1,$$

e

$$X\frac{dx}{d\tau} + Y\frac{dy}{d\tau} + Z\frac{dz}{d\tau} = T\frac{dt}{d\tau},$$

e in base a questa circostanza si può considerare la quarta delle equazioni (21) come una conseguenza delle prime tre.

Dalle (21) deduciamo inoltre le leggi per il moto di un punto materiale, vale a dire per l'andamento di un filo dello spazio-tempo infinitamente sottile.

Si indichi con $x,\ y,\ z,\ t$ un punto della linea principale scelta in qualche modo nel filo. Scriviamo le equazioni (21) per i punti della sezione normale del filo condotta per $x,\ y,\ z,\ t$ e le integriamo, moltiplicate per l'elemento di volume della sezione, sull'intero spazio della sezione normale. Siano $R_x,\ R_y,\ R_z,\ R_t$ gli integrali dei secondi membri di queste, e sia m la massa costante del filo; risulta allora

$$\begin{aligned} m \frac{d}{d\tau}\frac{dx}{d\tau} &= R_x, \\ m \frac{d}{d\tau}\frac{dy}{d\tau} &= R_y, \\ m \frac{d}{d\tau}\frac{dz}{d\tau} &= R_z, \\ m \frac{d}{d\tau}\frac{dt}{d\tau} &= R_t. \end{aligned} \tag{22}$$

Il vettore R con le componenti $R_x,\ R_y,\ R_z,\ iR_t$ è ancora un vettore dello spazio-tempo di I specie, che è normale al vettore dello spazio-tempo di I specie w, velocità del punto materiale, con le componenti

$$\frac{dx}{d\tau},\ \frac{dy}{d\tau},\ \frac{dz}{d\tau},\ i\frac{dt}{d\tau}.$$

Chiameremo questo vettore R la forza motrice del punto materiale. Se tuttavia si integrano le equazioni invece che sulla sezione normale del filo sulla sezione del filo normale all'asse t, condotta per $x,\ y,\ z,\ t$, allora (vedi (4)) valgono le equazioni (22) moltiplicate ancora per $d\tau/dt$, e in particolare come ultima equazione

$$m\frac{d}{dt}\left(\frac{dt}{d\tau}\right)=\mathfrak{w}_xR_x\frac{d\tau}{dt}+\mathfrak{w}_yR_y\frac{d\tau}{dt}+\mathfrak{w}_zR_z\frac{d\tau}{dt}.$$

Si avrà ora da interpretare il secondo membro come lavoro compiuto sul punto materiale nell'unità di tempo. Nell'equazione stessa si vedrà quindi la legge dell'energia per il moto del punto materiale, e l'espressione

$$m\left(\frac{dt}{d\tau}-1\right)=m\left(\frac{1}{\sqrt{1-\mathfrak{w}^2}}-1\right)=m\left(\frac{1}{2}|\mathfrak{w}|^2+\frac{3}{8}|\mathfrak{w}|^4+\dots\right)$$

si considererà l'energia cinetica del punto materiale. Poiché è sempre $dt > d\tau$, si potrebbe designare il quoziente $(dt-d\tau)/d\tau$ come l'anticipo del tempo rispetto al tempo proprio del punto materiale e quindi esprimersi così: l'energia cinetica di un punto materiale è il prodotto della sua massa per l'anticipo del tempo rispetto al suo tempo proprio.

La quaterna delle equazioni (22) mostra inoltre la simmetria completa in x, y, z, it richiesta dal postulato di relatività, laddove alla quarta equazione, come già è capitato nell'elettrodinamica, allo stesso modo va attribuita un'importanza fisica più elevata. Sulla base della prescrizione di questa simmetria si può costruire la terna delle prime tre equazioni immediatamente sul modello della quarta equazione, e tenendo conto di questa circostanza è corretto affermare: se si pone il postulato di relatività al vertice della meccanica, le leggi complete del moto derivano dalla sola legge dell'energia.

Non posso tralasciare ora di rendere plausibile il fatto che non ci si debba aspettare dai fenomeni della gravitazione una contraddizione rispetto all'assunzione del postulato di relatività[13].

Sia $B^*\,(x^*,\ y^*,\ z^*,\ t^*)$ un punto fisso dello spazio-tempo, allora l'insieme di tutti quei punti dello spazio-tempo $B\,(x,\ y,\ z,\ t)$ per i quali è

$$(x-x^*)^2+(y-y^*)^2+(z-z^*)^2=(t-t^*)^2,\ t-t^*\geq 0, \tag{23}$$

si chiamerà la struttura di radiazione del punto dello spazio-tempo B^*.

Una linea dello spazio-tempo assunta a piacere sarà intersecata da questa struttura sempre in un solo punto B dello spazio-tempo, come risulta da un lato per la convessità della struttura, dall'altro per la circostanza che tutte le direzioni delle linee dello spazio-tempo sono solo direzioni da B^* verso il lato concavo della struttura. B^* si chiama quindi un punto di luce di B.

Se nella relazione (23) si pensa fisso il punto $B\,(x,\ y,\ z,\ t)$, variabile il punto $B^*\,(x^*,\ y^*,\ z^*,\ t^*)$, la suddetta relazione rappresenta l'insieme di tutti i punti B^* dello spazio-tempo che sono punti di luce di B, e si dimostra analogamente che su un'arbitraria linea dello spazio-tempo esiste sempre un solo punto B^* che è un punto di luce di B.

[13]In modo del tutto diverso da come procedo qui, H. Poincaré (Rend. Circ. Matem. Palermo, t. XXI (1906), p. 129) ha cercato di adattare la legge d'attrazione newtoniana al postulato di relatività.

Ora un punto materiale F di massa m può sperimentare una forza motrice per la presenza di un altro punto materiale F^* di massa m^* secondo la legge seguente. Rappresentiamoci i fili dello spazio-tempo di F ed F^* con linee principali in essi. Sia BC un elemento infinitamente piccolo della linea principale di F, e inoltre B^* il punto di luce di B, C^* il punto di luce di C sulla linea principale di F^*, e poi OA' il raggio vettore dell'iperboloide fondamentale (2) parallelo a B^*C^*, infine D^* il punto d'intersezione della retta B^*C^* con lo spazio per B ad essa normale. La forza motrice sul punto materiale F nel punto dello spazio-tempo B sia ora quel vettore dello spazio-tempo di I specie normale a BC, che si compone additivamente con il vettore

$$mm^* \left(\frac{OA'}{B^*D^*}\right)^3 BD^* \tag{24}$$

nella direzione BD^* e inoltre con un opportuno vettore nella direzione B^*C^*. Si deve intendere con OA'/B^*D^* il rapporto dei due vettori paralleli considerati.

È chiaro che questa determinazione ha carattere covariante rispetto al gruppo di Lorentz.

Studiamo ora come il filo dello spazio-tempo di F si comporti nel caso che il punto materiale F^* esegua un moto di traslazione uniforme, cioè che la linea principale del filo di F^* sia una retta. Comprendiamo in essa l'origine O dello spazio-tempo, e possiamo con una trasformazione di Lorentz introdurre questa retta come asse t. Ora $x,\ y,\ z,\ t$ indichi il punto B, e sia τ^* il tempo proprio del punto B^*, calcolato da O. La nostra scelta porta adesso alle equazioni

$$\frac{d^2x}{d\tau^2} = -\frac{m^*x}{(t-\tau^*)^3},\ \frac{d^2y}{d\tau^2} = -\frac{m^*y}{(t-\tau^*)^3},\ \frac{d^2z}{d\tau^2} = -\frac{m^*z}{(t-\tau^*)^3}, \tag{25}$$

e

$$\frac{d^2t}{d\tau^2} = -\frac{m^*}{(t-\tau^*)^2}\frac{d\,(t-\tau^*)}{dt}, \tag{26}$$

dove è

$$x^2+y^2+z^2 = (t-\tau^*)^2\,, \tag{27}$$

e

$$\left(\frac{dx}{d\tau}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\tau}\right)^2 + \left(\frac{dz}{d\tau}\right)^2 = \left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 - 1. \tag{28}$$

Le tre equazioni (25) si scrivono, tenendo conto della (27), esattamente come le equazioni per il moto di un punto materiale attratto da un centro fisso secondo la legge di Newton, solo che invece del tempo t appare il tempo proprio τ del punto materiale. La quarta equazione (26) dà poi il legame tra tempo proprio e tempo per il punto materiale.

La traiettoria del punto dello spazio $x,\ y,\ z$ per i diversi τ sarà un'ellisse con semiasse maggiore a, eccentricità e, e per essa E indicherà l'anomalia eccentrica,

T l'incremento in tempo proprio per un giro completo sull'orbita, e infine si porrà $nT = 2\pi$, di modo che con opportuna origine per τ vale l'equazione di Keplero

$$n\tau = E - e \sin E. \tag{29}$$

Se ora cambiamo l'unità di tempo e indichiamo la velocità della luce con c, risulta dalla (28):

$$\left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 - 1 = \frac{m^*}{ac^2}\frac{1 + e\cos E}{1 - e\cos E}. \tag{30}$$

Tralasciando c^{-4} rispetto ad 1 risulta quindi

$$ndt = nd\tau\left(1 + \frac{1}{2}\frac{m^*}{ac^2}\frac{1 + e\cos E}{1 - e\cos E}\right),$$

dalla quale, utilizzando la (29), risulta

$$nt + \text{cost.} = \left(1 + \frac{1}{2}\frac{m^*}{ac^2}\right)n\tau + \frac{m^*}{ac^2}\sin E. \tag{31}$$

Il fattore m^*/ac^2 è il quadrato del rapporto tra una certa velocità media di F sulla sua orbita e la velocità della luce. Se si sostituisse ad m^* la massa del sole, ad a il semiasse maggiore dell'orbita terrestre, questo fattore varrebbe 10^{-8}.

Una legge di attrazione delle masse secondo la formulazione ora discussa, e legata al postulato di relatività, significherebbe parimenti una propagazione della gravitazione con la velocità della luce. Tenendo conto della piccolezza del termine periodico nella (31) non sarà possibile ottenere dalle osservazioni astronomiche una conclusione contro una legge siffatta e contro la meccanica modificata proposta, a favore della legge di attrazione di Newton con la meccanica newtoniana.

Il tensore d'energia-impulso della radiazione nei dielettrici[1]

G. Marx e K. Nagy
Istituto di Fisica dell'Università Roland Eötvös, Budapest
(presentato da K.F. Novobátzky - ricevuto il 29-6-1954)

La radiazione elettromagnetica in mezzi completamente trasparenti è di per sé in una continua interazione con la materia polarizzabile: il campo elettromagnetico provoca una polarizzazione elettrica e magnetica alternante, mentre la radiazione dei dipoli presenti altera le proprietà della radiazione primaria incidente. Ne segue che l'energia della radiazione che incide dal vuoto, anche in mezzi che non assorbono energia permanentemente, ad un dato momento solo in parte è presente sotto forma di energia elettromagnetica, mentre essa appare in parte come l'energia cinetica e potenziale delle molecole polarizzate (deformate), quindi dal punto di vista macroscopico come energia meccanica. Vari ricercatori suggeriscono in proposito che il tensore d'energia impulso completo della radiazione S_{ik}, che soddisfa le leggi di conservazione, proprio tenendo conto delle osservazioni precedenti, all'interno della materia polarizzabile vada distinto dal tensore d'energia-impulso T_{ik} del campo elettromagnetico: a T_{ik} si deve infatti aggiungere quella parte t_{ik} del tensore d'energia-impulso meccanico che descrive gli sforzi suscitati dal campo elettromagnetico. Lo scopo del presente lavoro è la derivazione della forma covariante di questo tensore espressa mediante le intensità di campo. Della determinazione del tensore completo della radiazione S_{ik} si sono occupati già vari ricercatori. *H. Ott* [1] e *F. Beck* [2] hanno costruito il tensore della radiazione S_{ik} a partire dal tensore d'energia-impulso di Minkowski (per rimuovere la sua asimmetria), mentre *G. Marx* e *G. Györgyi* [3] sono partiti dal tensore d'energia-impulso di Abraham e in base alla forza ponderomotrice sono giunti alla forma di S_{ik} ristretta a mezzi a riposo e ad onde piane. *K. Nagy* [4] ha generalizzato poi questa forma con una trasformazione di Lorentz anche al caso di dielettrici in moto. Le ricerche di *Beck* e *Marx* hanno portato, malgrado i diversi punti di partenza, ad un risultato sostanzialmente uguale, cosa che parla a favore della giustezza delle loro trattazioni.

Nella derivazione del tensore d'energia-impulso completo della radiazione si deve partire dal tensore d'energia-impulso di Abraham, che tiene conto anche delle forze di Lorentz che agiscono sulle correnti di polarizzazione presenti nel dielettrico. La sua forma è

$$T_{ik} = \frac{1}{4\pi}\left[F_{ir}G_{kr} - \frac{1}{4}\delta_{ik}F_{rs}G_{rs} - \frac{n^2-1}{\mu}\left(F_{ir}F_r - F_rF_ru_i\right)u_k\right]. \tag{1}$$

Si sono utilizzate Le notazioni consuete: F_{ik} sta per il tensore costruito con i vettori $\mathfrak{E}$ e $\mathfrak{B}$, G_{ik} per quello costruito con i vettori $\mathfrak{D}$ ed $\mathfrak{H}$, u_i è la tetravelocità costante del dielettrico misurata in unità di velocità della luce, n l'indice di rifrazione del mezzo, μla permeabilità magnetica del mezzo, s_i la densità della tetracorrente e $F_i = F_{ik}u_k$. Le equazioni di Maxwell si scrivono:

$$\frac{\partial G_{ik}}{\partial x_k} = 4\pi s_i, \tag{2}$$

[1]Der Energie-Impuls Tensor der Strahlung in Dielektrika, Acta Physica Hungarica **4**, 297-300 (1955).

$$\frac{\partial F_{ik}}{\partial x_m} + \frac{\partial F_{km}}{\partial x_i} + \frac{\partial F_{mi}}{\partial x_k} = 0. \tag{3}$$

Le equazioni materiali che accoppiano tra loro le quantità di campo sono:

$$G_{ik} = \frac{1}{\mu}\left[F_{ik} + \left(n^2 - 1\right)\left(u_i F_k - u_k F_i\right)\right]. \tag{4}$$

Le considerazioni che seguono si limiteranno all'inizio ai dielettrici a riposo. Si indichino con $\mathfrak{T}$ gli sforzi di Maxwell costituiti dalle componenti spaziali del tensore $-T_{ik}$; è noto che allora in un mezzo omogeneo, privo di cariche e di correnti (quindi trasparente) si arriva a

$$Div\mathfrak{T} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{n^2-1}{4\pi c}\mathfrak{E}\times\mathfrak{H}\right). \tag{5}$$

Si ottiene la densità di forza quando si tien conto anche della densità d'impulso del campo

$$\mathfrak{g} = \frac{1}{4\pi c}\mathfrak{E}\times\mathfrak{H}$$

formata dalle componenti di T_{i4}:

$$\mathfrak{f} = Div\mathfrak{T} - \frac{\partial \mathfrak{g}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{4\pi c}{n^2-1}\mathfrak{E}\times\mathfrak{H}\right).$$

Questa forza sarà esercitata dal campo sul dielettrico polarizzato. Se il dielettrico è fisso, la forza ponderomotrice non può nè aumentare l'impulso del dielettrico nè compiere un lavoro su di esso. In questo caso lo sforzo meccanico $\mathfrak{t}$ provocato nel dielettrico deve perciò compensare l'azione delle forze elettromagnetiche secondo la relazione

$$-\ Div\mathfrak{t} = \mathfrak{f} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{n^2-1}{4\pi c}\mathfrak{E}\times\mathfrak{H}\right). \tag{6}$$

Il tensore meccanico degli sforzi $\mathfrak{t}$ deve quindi da un lato soddisfare l'equazione (6) e dall'altro naturalmente essere simmetrico. Se si tien conto di ciò, si può assai facilmente, con un confronto delle equazioni (5) e (6), esprimere il tensore degli sforzi mediante le intensità di campo:

$$\mathfrak{t} = -\frac{n^2-1}{n^2}\mathfrak{T}. \tag{7}$$

Le componenti di $\mathfrak{t}$ costituiscono le componenti spaziali di $-t_{ik}$. Le componenti restanti, secondo le osservazioni precedenti, devono annullarsi in un dielettrico fissato rigidamente. Se si tien conto della relazione fra $\mathfrak{T}$ e T_{ik}, come pure di quella fra $\mathfrak{t}$ e t_{ik}, si può scrivere:

$$t_{ik} = -\frac{n^2-1}{n^2}T_{ik},\ \ se\ i,k = 1,2,3;\ \ t_{i4} = t_{4i} = 0.$$

Questa relazione valida per un dielettrico a riposo si può scrivere complessivamente anche nel modo seguente:

$$t_{ik} = -\frac{n^2-1}{n^2}\left(\delta_{ir}+u_i u_r\right)\left(\delta_{ks}+u_k u_s\right)T_{rs}. \tag{8}$$

La relazione ora ottenuta è quindi valida per mezzi a riposo, ma esprime pur anche una relazione tensoriale, di modo che deve avere validità in ogni sistema inerziale. Con l'Eq. (8) s'ottiene quindi la forma covariante di t_{ik} di validità generale. Da questa, introducendo

$$S_{ik} = T_{ik} + t_{ik} \tag{9}$$

si può ottenere anche il tensore d'energia-impulso della radiazione completo, e precisamente sia per il caso di una radiazione elettromagnetica qualsiasi che per il caso di un dielettrico che si sposti con velocità arbitraria.

Adoperando Le equazioni (1), (8) e (9) si può anche esprimere S_{ik} in funzione delle intensità di campo. Mediante una semplice sostituzione risulta

$$S_{ik} = \frac{1}{4\pi n^2}\left(F_{ir}G_{kr} - \frac{1}{4}\delta_{ik}F_{rs}G_{rs}\right) +$$

$$\frac{1}{4\pi\mu}\left(1-1/n^2\right)\left\{u_i F_{kr}F_r + \frac{1}{2}u_i u_k\left[\left(n^2-1\right)F_r F_r + \frac{1}{2}F_{rs}F_{rs}\right]\right\}. \tag{10}$$

(Passando alla notazione tridimensionale si può confermare che questa relazione coincide con la forma utilizzata in [4]). la traccia del tensore - a differenza di quella di T_{ik} - ora non vale più zero, con la qual cosa s'esprime il fatto che una parte dell'energia della radiazione già è presente come energia di una materia dotata di massa a riposo:

$$\mathfrak{u}_0 = -S_{ii} = \frac{n^2-1}{4\pi\mu n^2}\left[\frac{1}{4}F_{rs}F_{rs} + \frac{n^2+1}{2}F_r F_r\right] > 0.$$

Utilizzando l'equazione (10) e le equazioni di campo (2) e (3) si può anche dimostrare immediatamente per derivazione che S_{ik} in un mezzo trasparente e omogeneo è a divergenza nulla. In posti del dielettrico disomogenei e conduttori ($n \neq$ *cost.*$, \mu \neq$ *cost.*$, s_i \neq 0$) l'energia e l'impulso della radiazione presentano delle perdite:

$$-\frac{\partial S_{ik}}{\partial x_k} = \frac{1}{n^2}\left[F_{ir} + \left(n^2-1\right)u_i F_r\right]s_r$$
$$-\frac{1}{8\pi n^2}F_r F_r\frac{\partial\varepsilon}{\partial x_i} - \frac{1}{8\pi n^2\mu^2}\left(\frac{1}{2}F_{rs}F_{rs} + F_r F_r\right)\frac{\partial\mu}{\partial x_i}.$$

In questo caso però la separazione di t_{ik} dal tensore d'energia-impulso meccanico e di conseguenza anche il tensore della radiazione S_{ik} hanno già perso il loro significato. Tuttavia dove l'energia non viene assorbita in modo permanente, ma oscilla soltanto tra il campo e la materia polarizzata, S_{ik} può essere utilizzato per la descrizione delle proprietà dinamiche della radiazione che attraversa il dielettrico (per esempio del fotone che si muove nel dielettrico [4]).

Bibliografia

1. H. Ott: Ann. d. Phys. (6), **11**, 33, 1953.
2. F. Beck: Z. Phys. **134**, 136, 1953.
3. G. Marx, G. Györgyi, Acta Phys. Hung. **3**, 213, 1954.
4. K. Nagy, (*Die Quantentheorie der elektromagnetischen Strahlung in Dielektrika*) Dissertation 1954.

Osservazioni sul principio dell'azione e reazione nella dinamica generale.[1]

Max Planck (Berlin-Grunewald)

È noto che il principio newtoniano dell'uguaglianza di azione e reazione ha come vero contenuto la legge della costanza della quantità di moto ovvero dell'impulso del moto; potrei quindi parlare di quel principio anche solo nel senso di questa legge, e precisamente del suo significato per la dinamica generale, che comprende non solo la meccanica in senso stretto, ma anche l'elettrodinamica e la termodinamica.

Molti di noi ben ricordano l'impressione che si sollevò quando H.A. Lorentz nella sua costruzione dell'elettrodinamica atomistica a partire dall'etere in quiete negò la validità generale del terzo assioma di Newton, e non potè non succedere che questa circostanza fosse fatta valere come una pesante obiezione, per esempio da parte di H. Poincaré, contro la teoria di Lorentz. Un po' di calma tornò solo quando, in particolare con le ricerche di M. Abraham, si mostrò che il principio di reazione tuttavia è ancora da salvare, e nella sua completa generalità, purché oltre alla quantità di moto meccanica, la sola nota finora, si introduca anche una nuova quantità di moto, quella elettromagnetica. Abraham ha reso questo ancor più plausibile, mettendo a confronto la conservazione della quantità di moto con la conservazione dell'energia. Allo stesso modo come il principio dell'energia è violato quando non si tiene conto dell'energia elettromagnetica, ed è soddisfatto quando s'introduce questo tipo d'energia, il principio di reazione sarà violato quando si consideri solo la quantità di moto meccanica, e sarà invece soddisfatto non appena si tenga presente anche la quantità di moto elettromagnetica.

Tuttavia questo confronto di per sè certo inoppugnabile lascia intatta una differenza essenziale. Infatti dell'energia conosciamo già un'intera serie di tipi diversi: l'energia cinetica, la gravitazione, l'energia di deformazione elastica, il calore, l'energia chimica, e non significa quindi una novità di principio se a queste diverse forme si aggrega come un'ulteriore forma anche l'energia elettromagnetica. Invece di quantità di moto se ne conosceva finora una sola: proprio quella meccanica. Mentre l'energia rappresenta fin dall'inizio un concetto fisico universale, finora la quantità di moto era specificamente un concetto meccanico, il principio di reazione specificamente una legge meccanica, e quindi la generalizzazione riconosciuta come necessaria sarebbe stata pur sempre avvertita anche come una rivoluzione nei principî, mediante la quale il concetto finora relativamente semplice e unitario di quantità di moto assume un carattere notevolmente complicato.

Ora, non è possibile formare anche dal punto di vista della dinamica generale una definizione unitaria della quantità di moto, come prima succedeva nella meccanica, malgrado il fatto che essa ora comprenda sia la forma meccanica che quella elettromagnetica? Una risposta affermativa a questa domanda porterebbe in ogni caso anche a un progresso nella conoscenza del vero significato del principio di reazione.

Di fatto una tale definizione unitaria della quantità di moto sembra possibile e realizzabile, per lo meno quando contemporaneamente si assuma valida la teoria di Einstein della relatività[2]. Ora si deve altresì rilevare che questa teoria oggi come oggi ancora non si può dare affatto per sicura. Solo perché le sue deviazioni dalle

[1] Bemerkungen zum Prinzip der Aktion und Reaktion in der allgemeinen Dynamik, Physik. Zeitschr. **9**, 828-830 (1908).

[2] Vedasi in particolare F. Hasenöhrl (Sitzungsbericht d. Akad. d. Wiss. zu Wien del 31 ottobre

altre teorie considerate si limitano a termini oltremodo piccoli si può dire in ogni caso che essa può esse ritenuta valida a meno di quelle deviazioni, e fino a questo punto anche le considerazioni seguenti mantengono quindi un significato sicuro in tutti i casi.

Ora nella teoria della relatività la quantità di moto si può ricondurre del tutto in generale a quel vettore che esprime la corrente d'energia, ma non la sola corrente d'energia elettromagnetica di Poynting, bensì la corrente d'energia del tutto in generale. Considerato dal punto di vista della teoria di azione per contatto proprio ogni tipo d'energia può cambiare la sua posizione nello spazio solo mediante propagazione continua, non con variazione per salti. Perciò il principio dell'energia richiede in generale che la variazione dell'energia complessiva che si trova in un certo volume sia uguale ad un integrale di superficie, cioè alla somma algebrica dell'energia che fluisce complessivamente verso l'interno attraverso la superficie del volume. La corrente può aver luogo per irraggiamento, come con il vettore di Poynting, per conduzione, come nel caso della pressione o dell'urto e nella conduzione del calore, e per convezione, come per l'ingresso di atomi ponderabili o di elettroni attraverso la superficie considerata. In ogni caso la corrente d'energia complessiva in ogni punto dello spazio, riferita all'unità di superficie e di tempo, è un determinato vettore finito, e il quoziente di questo vettore per il quadrato della velocità della luce c è del tutto in generale la quantità di moto riferita all'unità di volume.

Prendiamo come esempio un fluido ponderabile in moto con la velocità q sottoposto alla pressione p. Attraverso un elemento di superficie df di un piano in quiete orientato normalmente a q fluisce nel tempo dt energia per conduzione e per convezione. L'energia di conduzione è il lavoro meccanico: $p \cdot df \cdot qdt$. L'energia di convezione è: $df \cdot \varepsilon \cdot qdt$, dove ε indica la densità d'energia. Di conseguenza secondo la definizione la quantità di moto dell'unità di volume è:

$$\frac{(\varepsilon + p)\, q}{c^2}.$$

Si confronti quest'espressione con la consueta quantità di moto meccanica kq, dove k indica la densità del fluido; si trova allora:

$$k = \frac{\varepsilon + p}{c^2},$$

una nota relazione della teoria della relatività[3].

Dal punto di vista delineato il principio dell'uguaglianza dell'azione e della reazione può essere indicato del tutto in generale come la "legge d'inerzia dell'energia".

Ma possiamo procedere ancora d'un passo. Come la costanza dell'energia porta con sè il concetto di corrente d'energia, così anche la costanza della quantità di moto porta necessariamente con sè il concetto di "corrente di quantità di moto", detto in breve: di "corrente d'impulso". Infatti la quantità di moto che si trova in un determinato volume può cambiare solo per azioni esterne, quindi secondo la teoria dell'azione per contatto solo mediante processi alla superficie del volume, quindi l'ammontare della variazione nell'unità di tempo è un integrale di superficie,

1907, p. 1400), che invero non parte direttamente dalla teoria della relatività, ma tuttavia, a quanto vedo, giunge esattamente agli stessi risultati di questa.

[3]Vedasi per esempio M. Planck, Ann. d. Phys. (4) **25**, 27, 1908. Equazione (48).

che può essere indicato come la corrente d'impulso complessiva entrante nell'interno del volume. Ma una differenza importante rispetto alla corrente d'energia sta tuttavia nel fatto che l'energia è uno scalare mentre la quantità di moto è un vettore. Pertanto l'energia che fluisce entro un volume sarà espressa da un solo integrale di superficie, e la corrente d'energia è un vettore. Invece la quantità di moto che fluisce in un volume sarà espressa da tre integrali di superficie, in corrispondenza alle tre componenti della quantità di moto, e la corrente d'impulso in un punto è un tripletto tensoriale, caratterizzato nella notazione di Voigt[4] da sei componenti.

Per farsi un'idea del significato di questo tripletto tensoriale, consideriamo in primo luogo la quantità di moto meccanica e la corrente d'impulso meccanica ad essa corrispondente. La corrente d'impulso complessiva verso l'interno di un volume, quindi l'incremento per unità di tempo della quantità di moto che si trova all'interno, è uguale alla forza meccanica risultante che agisce su tutta la massa che si trova nel volume. Di conseguenza la corrente d'impulso attraverso un elemento di superficie non è nient'altro che la pressione meccanica sull'elemento di superficie, e le componenti della stessa hanno la forma:

$$\begin{aligned}
X_n &= X_x \cos(nx) + X_y \cos(ny) + X_z \cos(nz),\\
Y_n &= Y_x \cos(nx) + Y_y \cos(ny) + Y_z \cos(nz),\\
Z_n &= Z_x \cos(nx) + Z_y \cos(ny) + Z_z \cos(nz),
\end{aligned}$$

dove n indica la normale interna dell'elemento di superficie. X_x, Y_y, Z_z, $X_y = Y_x$, $Y_z = Z_y$, $Z_x = X_z$ sono le sei componenti del tripletto tensoriale che rappresenta la corrente d'impulso.

In modo del tutto analogo succede con la corrente d'impulso elettromagnetica nel vuoto. Le componenti di questo tripletto tensoriale non sono nient'altro che i noti sforzi di Maxwell. La loro integrazione su di una superficie chiusa produce la corrente d'impulso complessiva verso l'interno e quindi l'incremento della quantità di moto complessiva meccanica ed elettromagnetica contenuta nello spazio racchiuso. È notevole che mediante questa legge gli sforzi di Maxwell acquistino un significato fisico anche per la teoria dell'etere in quiete. Infatti come forza di pressione questi sforzi non hanno in questa teoria alcun corretto significato, poiché ad una forza che agisca su qualcosa di assolutamente immobile non si può attribuire alcun senso[5]. Il fatto che tuttavia gli sforzi di Maxwell, malgrado essi fossero stati per così dire abrogati ufficialmente, si siano mantenuti nella teoria dell'etere in quiete, poiché si dimostrano spesso un comodo ausilio matematico per certi calcoli, avrebbe già potuto suggerire l'idea che ad essi spetti invece un qualche ruolo fisico particolare, mediante il quale essi sarebbero legittimati anche per l'etere in quiete.

È naturale estendere il concetto di corrente d'impulso anche al campo gravitazionale per il quale si dà, a prescindere dal segno fatale, un numero notevole di analogie; tuttavia una trattazione più approfondita di questo problema ci porterebbe qui troppo lontano.

[4]Vedasi M. Abraham, Enzyklopädie d. math. Wiss. IV, 14, p. 28.

[5]Vedasi H. A. Lorentz, Versuch einer Theorie der elektrischen und optischen Erscheinungen, p. 28, Leiden 1895.

Discussione.

Minkowski: a mio avviso le leggi sulla quantità di moto vanno derivate direttamente dalla legge dell'energia. Infatti la legge dell'energia nella teoria di Lorentz dipende dal sistema di riferimento per spazio e tempo. Se si scrive la legge dell'energia per ogni possibile sistema di riferimento si hanno più equazioni, e in queste sono contenute le leggi sulla quantità di moto.

Planck: certo. Però io considero l'indipendenza dal sistema di riferimento non come un risultato fisico sicuro, ma piuttosto come un'ipotesi, che tengo bensì per promettente, ma ancora in nessun modo per provata. Si ha pur da dimostrare ancora se queste relazioni sussistono anche realmente in natura. Ciò lo possiamo apprendere solo per via sperimentale, e si spera che il tempo per apprenderlo non sia più lontano.

(Ricevuto il 9 ottobre 1908)

Il campo gravitazionale di un punto materiale secondo la teoria di Einstein.[1]

K. Schwarzschild

(Ricevuto il 13 gennaio 1916.)

§1. Nel suo lavoro sul moto del perielio di Mercurio (vedi Sitzungsberichte del 18 novembre 1915) Einstein ha posto il seguente problema:

Un punto si muova secondo la legge

$$\delta \int ds = 0, \quad \text{ove } ds = \sqrt{\sum g_{\mu\nu} dx_\mu dx_\nu} \; \mu, \nu = 1, 2, 3, 4, \tag{1}$$

le $g_{\mu\nu}$ indicano funzioni delle variabili x e nella variazione le variabili x vengono mantenute fisse all'inizio e alla fine del cammino d'integrazione. In breve, il punto si muova quindi lungo una linea geodetica nella varietà caratterizzata dall'elemento di linea ds.

L'esecuzione della variazione dà le equazioni di moto del punto

$$\frac{d^2 x_\alpha}{ds^2} = \sum_{\mu,\nu} \Gamma^\alpha_{\mu\nu} \frac{dx_\mu}{ds} \frac{dx_\nu}{ds}, \; \alpha, \beta = 1, 2, 3, 4 \tag{2}$$

ove

$$\Gamma^\alpha_{\mu\nu} = -\frac{1}{2} \sum_\beta g^{\alpha\beta} \left(\frac{\partial g_{\mu\beta}}{\partial x_\nu} + \frac{\partial g_{\nu\beta}}{\partial x_\mu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\beta} \right) \tag{3}$$

e $g^{\alpha\beta}$ indica il minore normalizzato associato a $g_{\alpha\beta}$ nel determinante $|g_{\mu\nu}|$.

Secondo la teoria di Einstein questo è allora il moto di un punto privo di massa nel campo gravitazionale d'una massa che si trovi nel punto $x_1 = x_2 = x_3 = 0$, quando le "componenti del campo gravitazionale" Γ soddisfino ovunque, con l'eccezione del punto $x_1 = x_2 = x_3 = 0$, le "equazioni di campo"

$$\sum_\alpha \frac{\partial \Gamma^\alpha_{\mu\nu}}{\partial x_\alpha} + \sum_{\alpha,\beta} \Gamma^\alpha_{\mu\beta} \Gamma^\beta_{\nu\alpha} = 0 \tag{4}$$

e quando inoltre sia soddisfatta l'"equazione del determinante"

$$|g_{\mu\nu}| = -1. \tag{5}$$

Le equazioni di campo assieme all'equazione del determinante hanno la proprietà fondamentale che esse mantengono la loro forma per sostituzione di altre variabili qualsiansi al posto di x_1, x_2, x_3, x_4, purché il determinante della sostituzione sia uguale ad 1.

Le x_1, x_2, x_3 indichino coordinate ortogonali e x_4 il tempo, inoltre la massa nell'origine non varî nel tempo, e il moto all'infinito sia rettilineo e uniforme; allora

[1] Über das Gravitationsfeld eines Massenpunktes nach der Einsteinschen Theorie., S.B. Preuss. Akad. Wiss. 1916, 189-196.

secondo l'elencazione di Einstein a pag. 833 nell'opera citata devono essere ancora soddisfatte le condizioni seguenti:

1. Tutte le componenti sono indipendenti dal tempo x_4.
2. Le equazioni $g_{\rho 4} = g_{4\rho} = 0$ valgono esattamente per $\rho = 1, 2, 3$.
3. La soluzione è spazialmente simmetrica rispetto all'origine del sistema di coordinate nel senso che ci si imbatte di nuovo nella stessa soluzione quando si sottopongono x_1, x_2, x_3 ad una trasformazione ortogonale (rotazione).
4. Le $g_{\mu\nu}$ si annullano all'infinito con l'eccezione dei seguenti quattro valori limite diversi da zero:

$$g_{44} = 1, g_{11} = g_{22} = g_{33} = -1.$$

Il problema è *scoprire un elemento di linea con coefficienti tali che le equazioni di campo, l'equazione del determinante e queste quattro condizioni siano soddisfatte.*

§2. Einstein ha mostrato che questo problema porta in prima approssimazione alla legge di Newton e che la seconda approssimazione riproduce correttamente la nota anomalia nel moto del perielio di Mercurio. Il calcolo seguente dà la soluzione esatta del problema. È sempre piacevole disporre di soluzioni esatte di forma semplice. Più importante è che il calcolo assicuri anche la determinazione univoca della soluzione, sulla quale la trattazione di Einstein lascia ancora dubbi, e che per il modo come si presenta in seguito, solo ben difficilmente si potrebbe dimostrare mediante un siffatto procedimento di approssimazione. Le righe seguenti portano quindi a far risplendere il risultato di Einstein con accresciuta chiarezza.

§3. Se si chiamano t il tempo, x, y, z le coordinate ortogonali, l'elemento di linea più generale che soddisfa le condizioni 1-3 è evidentemente il seguente:

$$ds^2 = Fdt^2 - G\left(dx^2 + dy^2 + dz^2\right) - H(xdx + ydy + zdz)^2$$

dove F, G, H sono funzioni di $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

La condizione (4) richiede: per $r = \infty$: $F = G = 1, H = 0$.

Se si passa a coordinate polari con $x = r \sin\vartheta \cos\phi$, $y = r \sin\vartheta \sin\phi$, $z = r \cos\vartheta$, lo stesso elemento di linea si scrive:

$$\begin{aligned} ds^2 &= Fdt^2 - G\left(dr^2 + r^2 d\vartheta^2 + r^2 \sin^2\vartheta d\phi^2\right) - Hr^2 dr^2 \\ &= Fdt^2 - \left(G + Hr^2\right) dr^2 - Gr^2\left(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta d\phi^2\right). \end{aligned} \tag{6}$$

Ma l'elemento di volume in coordinate polari è uguale a $r^2 \sin\vartheta dr d\vartheta d\phi$, il determinante funzionale $r^2 \sin\vartheta$ dalle vecchie alle nuove coordinate è diverso da 1; quindi le equazioni di campo non resterebbero in forma immutata qualora si calcolasse con queste coordinate polari, e si dovrebbe eseguire una trasformazione complicata. È tuttavia disponibile un accorgimento più semplice per aggirare questa difficoltà. Si ponga

$$x_1 = \frac{r^3}{3},\ x_2 = -\cos\vartheta,\ x_3 = \phi. \tag{7}$$

Allora per l'elemento di volume vale: $r^2 \sin\vartheta dr d\vartheta d\phi = dx_1 dx_2 dx_3$. Le nuove variabili sono quindi *coordinate polari di determinante 1.* Esse hanno l'evidente vantaggio delle coordinate polari per la trattazione del problema, e parimenti per esse, se si assume ancora $t = x_4$, le equazioni di campo e l'equazione del determinante restano in forma immutata.

Nelle nuove coordinate polari l'elemento di linea si scrive:

$$ds^2 = Fdx_4^2 - \left(\frac{G}{r^4} + \frac{H}{r^2}\right) dx_1^2 - Gr^2 \left[\frac{dx_2^2}{1-x_2^2} + dx_3^2 \left(1 - x_2^2\right)\right], \tag{8}$$

al posto della quale scriveremo:

$$ds^2 = f_4 dx_4^2 - f_1 dx_1^2 - f_2 \frac{dx_2^2}{1-x_2^2} - f_3 dx_3^2 \left(1 - x_2^2\right). \tag{9}$$

Allora $f_1, f_2 = f_3, f_4$ sono tre funzioni di x_1 che devono soddisfare le condizioni seguenti:

1. Per $x_1 = \infty$: $f_1 = \frac{1}{r^4} = (3x_1)^{-4/3}$, $f_2 = f_3 = r^2 = (3x_1)^{2/3}$, $f_4 = 1$.
2. L'equazione del determinante: $f_1 \cdot f_2 \cdot f_3 \cdot f_4 = 1$.
3. Le equazioni di campo.
4. Le f continue, meno che per $x_1 = 0$.

§4. Per poter scrivere le equazioni di campo si devono in primo luogo costruire le componenti del campo di gravitazione che corrispondono all'elemento di linea (9). Ciò avviene nel modo più semplice se si costruiscono le equazioni differenziali della linea geodetica con l'esecuzione diretta della variazione, e da queste si ricavano le componenti. Le equazioni differenziali della linea geodetica per l'elemento di linea (9) si ottengono tramite la variazione immediatamente nella forma:

$$\begin{aligned} 0 = f_1 \frac{d^2x_1}{ds^2} &+ \frac{1}{2}\frac{\partial f_4}{\partial x_1}\left(\frac{dx_4}{ds}\right)^2 + \frac{1}{2}\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\left(\frac{dx_1}{ds}\right)^2 \\ &- \frac{1}{2}\frac{\partial f_2}{\partial x_1}\left[\frac{1}{1-x_2^2}\left(\frac{dx_2}{ds}\right)^2 + \left(1-x_2^2\right)\left(\frac{dx_3}{ds}\right)^2\right] \end{aligned}$$

$$0 = \frac{f_2}{1-x_2^2}\frac{d^2x_2}{ds^2} + \frac{\partial f_2}{\partial x_1}\frac{1}{1-x_2^2}\frac{dx_1}{ds}\frac{dx_2}{ds} + \frac{f_2 x_2}{\left(1-x_2^2\right)^2}\left(\frac{dx_2}{ds}\right)^2 + f_2 x_2 \left(\frac{dx_3}{ds}\right)^2$$

$$0 = f_2\left(1-x_2^2\right)\frac{d^2x_3}{ds^2} + \frac{\partial f_2}{\partial x_1}\left(1-x_2^2\right)\frac{dx_1}{ds}\frac{dx_3}{ds} - 2f_2x_2\frac{dx_2}{ds}\frac{dx_3}{ds}$$

$$0 = f_4\frac{d^2x_4}{ds^2} + \frac{\partial f_4}{\partial x_1}\frac{dx_1}{ds}\frac{dx_4}{ds}.$$

Il confronto con la (2) dà le componenti del campo gravitazionale:

$$\Gamma_{11}^1 = -\frac{1}{2f_1}\frac{\partial f_1}{\partial x_1},\ \Gamma_{22}^1 = +\frac{1}{2f_1}\frac{\partial f_2}{\partial x_1}\frac{1}{1-x_2^2},$$

$$\Gamma_{33}^1 = +\frac{1}{2f_1}\frac{\partial f_2}{\partial x_1}\left(1-x_2^2\right),$$

$$\Gamma_{44}^1 = -\frac{1}{2f_1}\frac{\partial f_4}{\partial x_1},$$

$$\Gamma_{21}^2 = -\frac{1}{2f_2}\frac{\partial f_2}{\partial x_1},\ \Gamma_{22}^2 = -\frac{x_2}{1-x_2^2},\ \Gamma_{33}^2 = -x_2\left(1-x_2^2\right),$$

$$\Gamma^3_{31} = -\frac{1}{2f_2}\frac{\partial f_2}{\partial x_1},\ \Gamma^3_{32} = +\frac{x_2}{1-x_2^2},$$

$$\Gamma^4_{41} = -\frac{1}{2f_4}\frac{\partial f_4}{\partial x_1},$$

(le altre nulle).

Per la simmetria di rotazione attorno all'origine basta formare le equazioni di campo solo per l'equatore ($x_2 = 0$) e quindi, poiché sarà derivato solo una volta, nelle espressioni seguenti si può porre anticipatamente $1 - x_2^2$ uguale ad 1. Allora il calcolo delle equazioni di campo dà

$$(a)\ \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{1}{f_1}\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{f_1}\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{1}{f_2}\frac{\partial f_2}{\partial x_1}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{f_4}\frac{\partial f_4}{\partial x_1}\right)^2,$$

$$(b)\ \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{1}{f_1}\frac{\partial f_2}{\partial x_1}\right) = 2 + \frac{1}{f_1 f_2}\left(\frac{\partial f_2}{\partial x_1}\right)^2,$$

$$(c)\ \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{1}{f_1}\frac{\partial f_4}{\partial x_1}\right) = \frac{1}{f_1 f_4}\left(\frac{\partial f_4}{\partial x_1}\right)^2.$$

Oltre a queste tre equazioni le funzioni f_1, f_2, f_3 devono ancora soddisfare all'equazione del determinante

$$(d)\ f_1 f_2^2 f_4 = 1 \quad \text{ovvero:} \quad \frac{1}{f_1}\frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{2}{f_2}\frac{\partial f_2}{\partial x_1} + \frac{1}{f_4}\frac{\partial f_4}{\partial x_1} = 0.$$

Trascuro per il momento (b) e determino le tre funzioni f_1, f_2, f_4 dalle (a), (c) e (d). La (c) si può porre nella forma

$$(c')\ \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{1}{f_4}\frac{\partial f_4}{\partial x_1}\right) = \frac{1}{f_1 f_4}\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\frac{\partial f_4}{\partial x_1}.$$

Essa si può integrare immediatamente e dà

$$(c'')\ \frac{1}{f_4}\frac{\partial f_4}{\partial x_1} = \alpha f_1,\ (\alpha \text{ costante d'integrazione})\ ,$$

la (a) e la (c') sommate danno

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{1}{f_1}\frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{1}{f_4}\frac{\partial f_4}{\partial x_1}\right) = \left(\frac{1}{f_2}\frac{\partial f_2}{\partial x_1}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{f_1}\frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{1}{f_4}\frac{\partial f_4}{\partial x_1}\right)^2.$$

Tenendo conto della (d) risulta

$$-2\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{1}{f_2}\frac{\partial f_2}{\partial x_1}\right) = 3\left(\frac{1}{f_2}\frac{\partial f_2}{\partial x_1}\right)^2.$$

Integrata

$$\frac{1}{\frac{1}{f_2}\frac{\partial f_2}{\partial x_1}} = \frac{3}{2}x_1 + \frac{\rho}{2}\ (\rho \text{ costante d'integrazione})$$

ovvero

$$\frac{1}{f_2}\frac{\partial f_2}{\partial x_1} = \frac{2}{3x_1+\rho}.$$

Integrata ancora una volta

$$f_2 = \lambda\,(3x_1+\rho)^{2/3} \ \ (\lambda \text{ costante d'integrazione}).$$

La condizione all'infinito richiede: $\lambda = 1$. Quindi

$$f_2 = (3x_1+\rho)^{2/3}\,. \tag{10}$$

Perciò si ottiene inoltre dalle (c") e (d)

$$\frac{\partial f_4}{\partial x_1} = \alpha f_1 f_4 = \frac{\alpha}{f_2^2} = \frac{\alpha}{(3x_1+\rho)^{4/3}}.$$

Integrata tenendo conto della condizione all'infinito

$$f_4 = 1-\alpha\,(3x_1+\rho)^{-1/3}\,. \tag{11}$$

Inoltre dalla (d)

$$f_1 = \frac{(3x_1+\rho)^{-4/3}}{1-\alpha\,(3x_1+\rho)^{-1/3}}. \tag{12}$$

Come si calcola facilmente, l'equazione (b) è automaticamente soddisfatta con le espressioni trovate di f_1 ed f_2.

Perciò tutte le condizioni sono soddisfatte, a meno della continuità. f_1 sarà discontinua quando

$$1 = \alpha\,(3x_1+\rho)^{-1/3}\,,\ 3x_1 = \alpha^3-\rho.$$

Perché questa discontinuità coincida con l'origine dev'essere

$$\rho = \alpha^3. \tag{13}$$

La condizione di continuità accoppia quindi in questo modo le due costanti d'integrazione ρ ed α.

La soluzione complessiva del nostro problema si scrive ora:

$$f_1 = \frac{1}{R^4}\frac{1}{1-\alpha/R},\ f_2 = f_3 = R^2,\ f_4 = 1-\alpha/R,$$

dove s'è introdotta la quantità ausiliaria

$$R = (3x_1+\rho)^{1/3} = \left(r^3+\alpha^3\right)^{1/3}.$$

Se si sostituiscono questi valori delle funzioni f nell'espressione (9) dell'elemento di linea e inoltre si ritorna alle consuete coordinate polari, allora l'*elemento di linea che forma* la *soluzione esatta del problema di Einstein* è:

(14)
$$ds^2 = (1-\alpha/R)\,dt^2 - dR^2\frac{1}{1-\alpha/R} - R^2\left(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta d\phi^2\right),\ R = \left(r^3+\alpha^3\right)^{1/3}.$$

Essa contiene la sola costante α che dipende dal valore della massa che si trova nell'origine.

§5. L'*unicità della soluzione* è risultata spontaneamente mediante il presente calcolo. Che fosse difficile riconoscere l'unicità con un procedimento approssimato come quello di Einstein lo si vede da quanto segue: prima di imporre la condizione di continuità era risultato:

$$f_1 = \frac{(3x_1+\rho)^{-4/3}}{1-\alpha\,(3x_1+\rho)^{-1/3}} = \frac{\left(r^3+\rho\right)^{-4/3}}{1-\alpha\,(r^3+\rho)^{-1/3}}.$$

Se α e ρ sono piccoli, lo sviluppo in serie fino a quantità del second'ordine dà:

$$f_1 = \frac{1}{r^4}\left[1+\frac{\alpha}{r} - 4/3\frac{\rho}{r^3}\right].$$

Questa espressione, assieme a quelle corrispondenti sviluppate per f_2, f_3, f_4 soddisfa con la stessa precisione tutte le condizioni del problema. La condizione di continuità non introduce nell'ambito di questa approssimazione niente di nuovo, poiché spontaneamente appaiono discontinuità solo nell'origine. Le due costanti α e ρ paiono quindi restare arbitrarie, e perciò il problema sarebbe fisicamente indeterminato. La soluzione esatta insegna che in realtà portando oltre le approssimazioni la discontinuità appare non nell'origine, *ma* nella posizione $r = \left(\alpha^3-\rho\right)^{1/3}$, e che si deve porre proprio $\rho = \alpha^3$, perché la discontinuità ritorni nell'origine. Nell'approssimazione secondo potenze di α e di ρ si dovrebbe controllare con grande attenzione la legge dei coefficienti per riconoscere la necessità di questo legame tra α e ρ.

§6. In conclusione si dovrà ancora derivare *il moto di un punto nel campo di gravitazione*, cioè la linea geodetica corrispondente all'elemento di linea (14). Dai tre fatti, che l'elemento di linea è omogeneo nei differenziali e che i suoi coefficienti sono indipendenti da t e da ρ, risultano immediatamente dalla variazione tre integrali intermedi. Ci si restringa pure al moto nel piano equatoriale ($\vartheta = 90^0,\ d\vartheta = 0$); allora questi integrali intermedi si scrivono:

$$(15)\qquad (1-\alpha/R)\left(\frac{dt}{ds}\right)^2 - \frac{1}{1-\alpha/R}\left(\frac{dR}{ds}\right)^2 - R^2\left(\frac{d\phi}{ds}\right)^2 = \text{ cost. } = h,$$

$$(16)\qquad R^2\frac{d\phi}{ds} = \text{ cost. } = c,$$

$$(17)\qquad (1-\alpha/R)\left(\frac{dt}{ds}\right) = \text{cost.} = 1 \ \ \text{(determinazione dell'unità di tempo).}$$

Da qui segue

$$\left(\frac{dR}{d\phi}\right)^2 + R^2(1-\alpha/R) = \frac{R^4}{c^2}\left[1-h(1-\alpha/R)\right]$$

ovvero con $1/R = x$

$$\left(\frac{dx}{d\phi}\right)^2 = \frac{1-h}{c^2} + \frac{h\alpha}{c^2}x - x^2 + \alpha x^3. \tag{18}$$

Se si introducono le notazioni $c^2/h = B$, $(1-h)/h = 2A$, essa è identica all'equazione (11) di Einstein nel luogo citato e dà l'osservata anomalia del perielio di Mercurio.

In generale si passa dall'approssimazione di Einstein per l'orbita alla soluzione esatta se si pone al posto di r la quantità

$$R = \left(r^3+\alpha^3\right)^{1/3} = r\left(1+\frac{\alpha^3}{r^3}\right)^{1/3}.$$

Poiché α/r è circa uguale al doppio del quadrato della velocità planetaria (unità la velocità della luce), la parentesi perfino per Mercurio è diversa da 1 solo per quantità dell'ordine di 10^{-12}. In pratica R è quindi identico ad r e l'approssimazione di Einstein sufficiente per le necessità più estreme della prassi.

Per concludere si deriverà ora la forma esatta della terza legge di Keplero per orbite circolari. Per la velocità angolare $n = d\phi/dt$ vale per le (16) e (17), quando si ponga $x = 1/R$

$$n = cx^2(1-\alpha x).$$

Per orbite circolari sia $dx/d\phi$ che $d^2x/d\phi^2$ devono esser nulli. Ciò dà per la (18)

$$0 = \frac{1-h}{c^2} + \frac{h\alpha}{c^2}x - x^2 + \alpha x^3,\ 0 = \frac{h\alpha}{c^2} - 2x + 3\alpha x^2.$$

L'eliminazione di h da queste due equazioni dà

$$\alpha = 2c^2x(1-\alpha x)^2.$$

Ne segue

$$n^2 = \frac{\alpha}{2}x^3 = \frac{\alpha}{2R^3} = \frac{\alpha}{2(r^3+\alpha^3)}.$$

Fino alla superficie solare la deviazione di questa formula dalla terza legge di Keplero è del tutto impercettibile. Tuttavia per un punto materiale ideale non risulta che la velocità angolare, come per la legge di Newton, cresca illimitatamente al diminuire del raggio dell'orbita, ma s'approssima ad un limite definito

$$n_0 = \frac{1}{\alpha\sqrt{2}}.$$

(Per un punto con la massa solare la frequenza limite è circa 10^4 per secondo). Se per le forze molecolari valessero leggi analoghe, questa circostanza potrebbe in quel caso essere d'interesse.

Teoria dei quanti

La teoria quantistica della radiazione[1]

N. Bohr, H.A. Kramers e J.C. Slater a Copenaghen

(Ricevuto il 22 febbraio 1924.)

Senza discostarci dalla legge classica della propagazione della radiazione nel vuoto, in questo lavoro si cerca di ottenere una descrizione sensata dei fenomeni ottici in stretta connessione con il significato degli spettri secondo la teoria dei quanti. Si connettono i fenomeni di radiazione continui con i processi atomici discreti mediante leggi probabilistiche secondo il procedimento di Einstein. Con l'introduzione di oscillatori virtuali, che secondo il principio di corrispondenza possono essere associati ai processi discontinui, queste leggi vengono tuttavia interpretate in un modo alquanto diverso da come accade di solito.

Introduzione

Nei tentativi di interpretare teoricamente i processi di interazione tra radiazione e materia si introducono due punti di vista distinti, in apparenza mutuamente contraddittori. Da un lato i fenomeni di interferenza, dai quali il funzionamento di tutti gli strumenti ottici dipende essenzialmente, richiedono un punto di vista continuo dello stesso tipo di quello che è contenuto nella teoria ondulatoria della luce, in particolare nella forma nella quale questa teoria è stata sviluppata sulla base dell'elettrodinamica classica. Dall'altro lato i fenomeni di scambio d'energia e di quantità di moto tra radiazione e materia, ai quali l'osservazione dei fenomeni ottici in conclusione si riconduce, richiedono un punto di vista che contiene processi essenzialmente discontinui. Così i suddetti fenomeni hanno portato alla proposta della teoria dei quanti di luce, che nella sua forma più paradossale nega addirittura la costituzione ondulatoria della luce. Allo stato attuale della conoscenza non appare molto possibile liberarsi del carattere formale dell'interpretazione dei processi atomici. Impressiona particolarmente il fatto che si rinunci provvisoriamente a descrivere più da vicino il meccanismo dei processi discontinui, nella teoria quantistica degli spettri indicati come transizioni tra stati stazionari. Invece appare possibile, come mostreremo nella presente dissertazione, delineare in connessione con il principio di corrispondenza un'immagine sensata dei fenomeni ottici, quando si connettano i processi discontinui nell'atomo con il campo di radiazione continuo in un modo alquanto diverso dal consueto. L'ipotesi essenzialmente nuova introdotta nel §2, che l'atomo ben prima della comparsa di un processo di transizione sia in grado di comunicare con gli altri atomi mediante un campo di radiazione virtuale, deriva da Slater[2]. Originariamente il suo proposito era di raggiungere in questo modo una migliore armonia tra la struttura fisica della teoria elettrodinamica della luce e la teoria dei quanti di luce, secondo la quale i processi di emissione e di assorbimento in atomi comunicanti dovrebbero apparire associati a coppie. È stato anche notato da Kramers, che la suddetta idea, invece di portare alla rappresentazione di un accoppiamento stretto di questi processi, costringe piuttosto ad assumere che i processi di transizione in atomi lontani siano mutuamente indipendenti in grado assai più alto di quanto finora assunto. Il lavoro presente costituisce il risultato

[1]Über die Quantentheorie der Strahlung, Zeitschr. f. Phys. **24**, 69-87 (1924).
[2]J.C. Slater, Nature **113**, 307 (1924).

di una discussione collettiva degli autori sul significato che queste ipotesi possono avere eventualmente per la prosecuzione della teoria dei quanti; esso può sotto diversi aspetti essere considerato come un supplemento della prima parte apparsa di recente di un lavoro di Bohr sui principi della teoria dei quanti, nel quale la maggior parte dei problemi qui toccati sono considerati ulteriormente[3].

§1. I principî della teoria dei quanti

La teoria elettrodinamica della luce non dà solo un'immagine meravigliosamente appropriata della propagazione della radiazione nello spazio vuoto, ma essa si è anche rivelata adatta in molte circostanze all'interpretazione dei fenomeni che dipendono dall'interazione della radiazione con la materia. Si può così raggiungere una descrizione generale dei fenomeni di emissione, assorbimento, rifrazione, diffusione e dispersione in base all'ipotesi che gli atomi contengano particelle elettricamente cariche, che possano eseguire oscillazioni armoniche attorno a posizioni di equilibrio stabile, e che scambino energia ed impulso con il campo di radiazione secondo le leggi elettrodinamiche classiche. D'altro canto i suddetti fenomeni rivelano notoriamente un gran numero di aspetti che contraddicono le conseguenze dell'elettrodinamica classica. Una tale contraddizione si è manifestata senza dubbio per la prima volta nel caso delle leggi della radiazione termica. Partendo dalla rappresentazione classica dell'emissione e dell'assorbimento di radiazione da parte di un oscillatore armonico, Planck ha trovato che l'accordo con gli esperimenti sulla radiazione termica si poteva ottenere solo con l'introduzione di un'ipotesi di tipo nuovo, che implica che nella distribuzione statistica di equilibrio debbano contare solo certi stati delle particelle oscillanti. L'energia in questi stati deve trovarsi uguale ad un multiplo intero del quanto $h\omega$, dove ω è la frequenza naturale dell'oscillatore, ed h è una costante universale. Indipendentemente dai fenomeni della radiazione questo risultato, come Einstein ha potuto dimostrare, riceve un sostegno immediato negli esperimenti sul calore specifico dei corpi solidi. Contemporaneamente questo autore propose la sua ben nota "teoria dei quanti di luce", secondo la quale la radiazione non dovrebbe propagarsi come i treni d'onda continui della teoria ondulatoria classica, ma piuttosto come unità discrete, che contengono in una piccola regione spaziale l'energia $h\nu$, dove h indica la costante di Planck, e ν è la quantità che nell'immagine classica significa il numero di onde transitate nell'unità di tempo. Sebbene il grande valore euristico di questa ipotesi appaia chiaro nella conferma dell'interpretazione di Einstein relativamente all'effetto fotoelettrico, tuttavia la teoria dei quanti di luce non si può considerare una soluzione soddisfacente del problema della propagazione della luce, come ben risulta chiaro dalla circostanza, che la "frequenza" ν della radiazione che compare in questa teoria è definita con esperimenti sui fenomeni d'interferenza; ma questi fenomeni richiedono evidentemente per la loro interpretazione una costituzione ondulatoria della luce.

Nonostante le difficoltà fondamentali delle idee della teoria dei quanti è risultato possibile sviluppare queste idee in connessione con risultati di origine diversa, riguardanti la struttura dell'atomo, per un'interpretazione degli esperimenti sugli spettri di emissione e di assorbimento degli elementi. Questa interpretazione si basa sul postulato fondamentale: che un atomo è capace di esistere in un numero di stati

[3]N. Bohr, Über die Anwendung der Quantentheorie auf den Atombau. I. Die Grundpostulate der Quantentheorie, Zeitschr. f. Phys. **13**, 117 (1923). Questo lavoro, che contiene anche ulteriori riferimenti alla letteratura, si citerà sempre nel seguito come G. d. Q..

assegnati, i cosidetti “stati stazionari”, ai quali si attribuisce una vera stabilità, della quale le idee dell’elettrodinamica classica non sono capaci di render conto. Questa stabilità si manifesta nella circostanza che una variazione di stato dell’atomo consiste sempre in un processo completo di transizione da uno stato stazionario ad un altro. Nei fenomeni ottici questo postulato è accoppiato all’ulteriore ipotesi che, nel caso che una transizione tra due stati stazionari sia accompagnata dall’emissione di radiazione, questa radiazione consista di un treno di onde armoniche, la cui frequenza è determinata dalla relazione

$$h\nu = E_1 - E_2, \tag{1}$$

dove E_1 ed E_2 indicano i valori dell’energia dell’atomo nello stato iniziale e finale. Si assume inoltre che il processo di transizione inverso può aver luogo in conseguenza dell’irraggiamento con luce proprio della stessa frequenza. Per l’applicabilità di queste ipotesi all’interpretazione degli spettri degli elementi si deve ringraziare la circostanza che in qualche caso è risultato possibile calcolare per mezzo di regole semplici i valori delle energie per gli stati stazionari di un atomo isolato, assumendo dei moti che con grande approssimazione sono descritti dalle consuete leggi elettrodinamiche (G. d. Q., Cap. I, §1). Le idee dell’elettrodinamica non consentono però di descrivere i dettagli del meccanismo della transizione.

Per quanto riguarda l’esistenza del processo di transizione, appare necessario allo stato attuale della conoscenza accontentarsi di considerazioni probabilistiche. Tali considerazioni sono state introdotte da Einstein[4]; con esse si perviene a dare una derivazione particolarmente semplice della legge di Planck della radiazione termica sotto l’ipotesi che un atomo in un dato stato stazionario possieda una certa probabilità di passare “spontaneamente” nell’unità di tempo ad uno stato stazionario di minore energia, e che un atomo, sotto l’azione di radiazione esterna di frequenza opportuna, possieda una certa probabilità per una transizione “indotta” ad un altro stato stazionario di maggiore o minore contenuto energetico. In connessione con la richiesta dell’equilibrio termico tra campo di radiazione e materia Einstein arrivò inoltre alla conclusione che lo scambio d’energia in un processo di transizione è sempre associato ad uno scambio di quantità di moto per l’ammontare $h\nu/c$, esattamente come avverrebbe se la transizione fosse accompagnata dal lancio o dalla frenata di una piccola entità, che possiede la velocità della luce e il contenuto d’energia $h\nu$. Egli potè concludere che la direzione di questa quantità di moto per le transizioni indotte è la stessa della direzione di propagazione delle onde luminose irraggianti, ma che per le transizioni spontanee la direzione della quantità di moto è distribuita secondo leggi probabilistiche. Questi risultati, che si assumono come un argomento per la realtà fisica dei quanti di luce, hanno di recente trovato un’importante applicazione nella spiegazione del notevole effetto di una variazione della lunghezza d’onda della radiazione diffusa da elettroni liberi, che è stato prodotto con la ricerca di A.H. Compton[5] sulla diffusione dei raggi Röntgen come luce. L’applicazione di considerazioni probabilistiche al problema dell’equilibrio tra elettroni liberi e radiazione, alla quale questa scoperta ha portato, è stata da poco trattata con successo da Pauli[6], e l’analogia formale dei suoi

[4] A. Einstein, Phys. Zeitschr. **18**, 121 (1917).

[5] A.H. Compton, Phys. Rev. **21**, 207 (1923). Vedi anche P. Debye, Phys. Zeitschr. **24**, 161 (1923).

[6] W. Pauli, Zeitschr. f. Phys. **18**, 272 (1923).

risultati con le leggi che governano le transizioni tra stati stazionari degli atomi è stata notata da Ehrenfest e Einstein[7]. Nonostante la fondamentale differenza tra l'immagine dei processi atomici della teoria dei quanti e l'immagine fondata sulle idee consuete dell'elettrodinamica, la prima deve in fin dei conti apparire in un certo senso come una naturale generalizzazione della seconda. Ciò appare particolarmente chiaro dalla richiesta che nel limite, quando trattiamo fenomeni che dipendano dall'azione complessiva statistica di un gran numero di atomi, e nei quali si abbia a che fare con stati stazionari nei quali la separazione tra stati adiacenti è relativamente piccola, la teoria classica porti all'accordo con le osservazioni. Per il caso dell'emissione e dell'assorbimento delle righe spettrali questa connessione tra le due teorie ha portato all'enunciazione del "principio di corrispondenza", che richiede una generale associazione di ognuna delle transizioni possibili tra due stati stazionari con una certa componente oscillatoria armonica nel momento elettrico dell'atomo (G. d. Q., Cap. II, §2). Questo principio ha reso possibile un fondamento per la valutazione delle probabilità di transizione ed ha in tal modo portato il problema dell'intensità e della polarizzazione delle righe spettrali in stretta connessione con il moto degli elettroni nell'atomo.

Il principio di corrispondenza ha consentito di paragonare la reazione di un atomo ad un campo di radiazione con la reazione ad un tale campo che secondo l'elettrodinamica classica ci si deve aspettare da un gran numero di oscillatori armonici "virtuali", le cui frequenze siano secondo l'equazione (1) uguali alle frequenze assegnate per le diverse transizioni possibili agli altri stati stazionari (G. d. Q., Cap. II, §3). Una tale immagine è stata utilizzata da Ladenburg nel suo tentativo di porre quantitativamente in relazione i risultati sperimentali sulla dispersione con considerazioni sulle probabilità di transizione. Anche nel caso dell'interazione tra elettroni liberi e radiazione si sottolinea la possibilità di utilizzare tali considerazioni mediante l'analogia notata da Compton tra le variazioni di lunghezza d'onda della radiazione diffusa e l'effetto Doppler classico della radiazione.

Sebbene il principio di corrispondenza mediante la valutazione delle probabilità di transizione consenta delle conclusioni sul tempo medio di permanenza di un atomo in un dato stato stazionario, il problema dell'intervallo temporale, durante il quale ha luogo l'emissione di radiazione associata ad una transizione, ha d'altra parte dato luogo a grande difficoltà. Questa difficoltà, assieme ad altri noti paradossi della teoria dei quanti, rafforza il dubbio, espresso da varie parti[8], che l'interazione tra materia e radiazione possa essere espressa in linea di principio per mezzo di una descrizione causale spaziotemporale del tipo che è stato utilizzato finora per l'interpretazione dei fenomeni naturali (G. d. Q., Cap. III, §1). Senza in qualche modo abbandonare il carattere formale della teoria, appare ora possibile, come accennato nell'introduzione, che si possa realizzare un progresso più accentuato nell'interpretazione dei fenomeni radiativi osservabili, quando si associno questi fenomeni con gli stati stazionari e con le transizioni tra essi in un modo che alquanto si differenzia da quello consueto.

§2. Radiazione e processi di transizione

Assumeremo che un dato atomo in un certo stato stazionario sia impegnato

[7]P. Ehrenfest e A. Einstein, Zeitschr. f. Phys. **19**, 301 (1924).

[8]Vedi O. W. Richardson, The Electron Theory of Matter, 2^a ed., p. 507 (Cambridge 1916), dove una tale posizione viene espressa chiaramente forse per la prima volta.

in una comunicazione costante con altri atomi, e ciò mediante un meccanismo spaziotemporale, che è virtualmente equivalente ad un campo di radiazione, che corrisponderebbe alla presenza, secondo la teoria della radiazione classica, di oscillatori armonici virtuali, associati alle diverse possibili transizioni ad altri stati stazionari. Assumiamo inoltre che la realizzazione dei processi di transizione, sia per l'atomo dato che per gli altri atomi, con i quali esso comunica, sia associata a questo meccanismo mediante leggi probabilistiche, che siano analoghe alle leggi della teoria di Einstein per le transizioni tra stati stazionari indotte da radiazione esterna. Le transizioni indicate in quella teoria come spontanee noi dal nostro punto di vista le trattiamo come indotte dal campo di radiazione virtuale, accoppiato al moto degli oscillatori virtuali associati all'atomo stesso. D'altra parte le transizioni indotte della teoria di Einstein hanno luogo a causa della radiazione virtuale emessa nello spazio circostante dagli altri atomi.

Mentre queste ipotesi da un lato non portano con sè alcuna modifica che riguardi il legame stabilito mediante la condizione (1) ed il principio di corrispondenza tra la struttura atomica e la frequenza come pure l'intensità e la polarizzazione delle righe spettrali, esse portano d'altro canto ad un'immagine di tipo nuovo della realizzazione spaziotemporale dei diversi processi di transizione, alla quale l'osservazione dei fenomeni ottici in definitiva si riduce. Il realizzarsi di una data transizione in un dato atomo dipenderà dallo stato originario di questo atomo e dagli stati di quegli atomi, con i quali esso è impegnato in una comunicazione per mezzo di un campo di radiazione virtuale, ma non dal realizzarsi di processi di transizione nei restanti atomi.

Da un lato si vedrà che il nostro punto di vista, nel caso limite in cui stati stazionari successivi sono separati solo di poco, porta ad una connessione tra la radiazione virtuale ed il moto delle particelle nell'atomo, che gradualmente diventa quella prescritta nella teoria della radiazione classica. Infatti sia il moto che la costituzione del campo di radiazione in questo caso limite subiranno a motivo della transizione tra gli stati stazionari delle modifiche sostanziali. Per quanto riguarda la comparsa di processi di transizione, che costituisce la mossa essenziale della teoria dei quanti, noi rinunciamo d'altro canto ad un accoppiamento in qualche modo causale tra le transizioni in atomi lontani, ed in particolare all'applicazione diretta del principio così caratteristico per la teoria classica della conservazione dell'energia e dell'impulso. L'applicabilità di questo principio all'interazione tra singoli sistemi atomici è nella nostra concezione ristretta a quelle interazioni nelle quali gli atomi siano così vicini, che la forza associata secondo la teoria classica con il campo di radiazione sia piccola, in confronto alla parte conservativa della forza, che deriva dalle cariche elettriche degli atomi. Interazioni di questo tipo, che noi possiamo indicare come "collisioni", forniscono notoriamente un esempio tipico per la postulata stabilità degli stati stazionari, dal momento che proprio i risultati sperimentali, quando sono interpretati in base alla legge di conservazione dell'energia e dell'impulso, sono in accordo con l'assunzione che gli atomi collidenti si trovino in stati stazionari sia prima che dopo il processo (G. d. Q., Cap. I, §4)[9]. Nelle interazioni tra atomi a

[9]Queste considerazioni valgono evidentemente solo se si può prescindere dalla radiazione associata con l'urto. Sebbene in molti casi l'energia di questa radiazione sia assai poca, la sua comparsa potrebbe essere di significato fondamentale. Ciò è stato notato da Franck in relazione alla spiegazione degli importanti risultati di Ramsauer (Ann. d. Phys. **64**, 513; **66**, 546 (1922)) riguardanti le collisioni tra atomi ed elettroni lenti, dai quali appare risultare che in certi casi l'elettrone può volare libero attraverso l'edificio atomico, senza essere influenzato dalla sua pre-

grande distanza reciproca, per le quali secondo la teoria classica non si può parlare di azione mutua simultanea, assumeremo invece un'indipendenza dei singoli processi di transizione, che contraddice in modo determinato l'ingiunzione classica della conservazione dell'energia e dell'impulso. Assumiamo quindi che una transizione indotta non ha la sua causa diretta in una transizione in un atomo lontano, per il quale la separazione di energia tra stato iniziale e stato finale sia la stessa. Infatti, quando un atomo ha contribuito all'induzione di una transizione in un atomo lontano, e ciò mediante il campo di radiazione virtuale, che origina dall'oscillatore virtuale associato ad una delle transizioni possibili agli altri stati stazionari, l'atomo può invece eseguire un'altra di queste transizioni. Invero le esperienze disponibili a prima vista non danno alcuna prova di questa ipotesi; è possibile tuttavia sperare che il grado di indipendenza del processo di transizione qui assunto possa offrire qualche possibilità di ottenere una descrizione dell'interazione tra radiazione ed atomi esente da contraddizioni, nella quale intervengano le leggi di probabilità in modo essenziale. Questa indipendenza non solo riduce ad una legge statistica la conservazione dell'energia, ma anche la conservazione dell'impulso, poichè proprio come assumiamo che ogni processo di transizione indotto dalla radiazione sia accompagnato da una variazione dell'energia dell'atomo dell'ammontare $h\nu$, assumiamo seguendo Einstein, che ogni siffatto processo sia accompagnato da una variazione della quantità di moto dell'atomo dell'ammontare $h\nu/c$. Se la transizione è indotta dal campo di radiazione virtuale di un atomo lontano, la direzione di questa quantità di moto coincide con la direzione di propagazione dell'onda nel campo. Se invece la transizione è indotta dalla radiazione virtuale propria, facciamo naturalmente l'ipotesi che la variazione della quantità di moto sia assegnata secondo leggi probabilistiche, e ciò in modo tale che le variazioni di quantità di moto, che accompagnano le transizioni indotte in altri atomi da quella radiazione, risultino compensate statisticamente per ogni direzione dello spazio.

Il fondamento dell'osservata conservazione statistica dell'energia e dell'impulso non lo cerchiamo quindi in una qualche deviazione dalla teoria elettrodinamica della luce relativamente alle leggi della propagazione della radiazione nello spazio vuoto, ma nelle particolari proprietà dell'interazione tra il campo di radiazione virtuale e gli atomi irraggiati. Assumeremo che questi atomi agiscano come sorgenti di una radiazione virtuale secondaria, che possiede la stessa frequenza della radiazione incidente e che interferisce con le onde originarie. Nel caso che la frequenza della radiazione incidente coincida approssimativamente con la frequenza di uno degli oscillatori virtuali associati alle diverse transizioni possibili, le ampiezze delle onde sferiche secondarie sono molto grandi e queste onde mostrano rispetto alle onde incidenti tali relazioni di fase, che per interferenza l'intensità del campo di radiazione virtuale sarà accresciuta o diminuita e con ciò la capacità di questo campo di indurre transizioni negli altri atomi sarà rinforzata o indebolita. Che si realizzi

---

senza. In questi casi infatti, quando per "collisione" avesse luogo davvero una modifica del moto dell'elettrone, secondo la teoria classica dovrebbe apparire una radiazione così grande, che una associazione significativa della radiazione con processi di transizione possibili, com'è richiesto dal principio di corrispondenza, potrebbe difficilmente essere ottenuta (vedi F. Hund, Zeitschr. f. Phys. **13**, 241 (1923)). Secondo la concezione considerata in questo lavoro una tale associazione potrebbe da un lato apparire in modo più naturale, se si cercasse l'origine della radiazione direttamente nel moto dell'elettrone, e non in primo luogo nel verificarsi del processo di transizione. D'altro canto si deve notare che qui abbiamo a che fare con un caso nel quale, a seguito della rilevante grandezza della reazione di radiazione classica, una distinzione netta tra moto stazionario e processi di transizione allo stato attuale della teoria non è realizzabile.

un indebolimento o un rafforzamento dipende dal fatto che l'oscillatore virtuale corrispondente sia associato ad una transizione dell'atomo ad uno stato stazionario di contenuto energetico più alto o ad uno di contenuto energetico più basso. Questa concezione è evidentemente in stretto rapporto con le idee che hanno consentito ad Einstein di introdurre probabilità per transizioni indotte di due tipi, quelle in cui l'energia dell'atomo si accresce, e quelle in cui diminuisce. Nonostante la separazione spaziotemporale per la teoria dei quanti così caratteristica dei processi di assorbimento e di emissione, possiamo aspettarci nella nostra rappresentazione un'ampia analogia formale con l'elettrodinamica classica, che riguarda l'interazione tra il campo di radiazione virtuale e il moto degli oscillatori armonici virtuali associati all'atomo. Appare infatti possibile, guidati da questa analogia, pervenire ad una descrizione coerente e abbastanza completa dei fenomeni ottici che accompagnano la propagazione della luce in un mezzo materiale, nella quale allo stesso tempo risulti chiara la stretta connessione di questi fenomeni con gli spettri degli atomi del mezzo.

§3. Capacità di interferenza delle righe spettrali

Prima di inoltrarci nel problema generale dell'interazione tra gli atomi e un campo di radiazione virtuale, tratteremo brevemente in questo paragrafo le proprietà del campo che deriva da un solo atomo, in quanto esse sono collegate con la capacità di interferenza della luce emessa da una e una sola sorgente. La costituzione di questo campo non ha evidentemente niente a che fare con le particolarità del processo di transizione, la cui durata noi assumeremo in ogni caso non grande rispetto a un periodo della radiazione o del moto delle particelle nell'atomo. Questi processi contrassegnano secondo la nostra interpretazione soltanto la conclusione dell'intervallo temporale durante il quale l'atomo è in grado di comunicare con altri atomi mediante i corrispondenti oscillatori virtuali. Un limite superiore per la capacità di interferenza sarà dato evidentemente dal tempo medio durante il quale l'atomo permane nello stato iniziale corrispondente alla transizione considerata. La valutazione di questo tempo di vita medio degli stati stazionari fondata sul principio di corrispondenza ha ottenuto una conferma generale mediante i ben noti esperimenti sulla durata della luce dei raggi canale in alto vuoto (vedi G. d. Q., Cap. II, §4). L'interpretazione di questi esperimenti risulta assai semplice alla luce della nostra nuova concezione. Si vede infatti che secondo questa concezione l'andamento dell'intensità della luce non deriva dalle particolarità della transizione, ma solo dal numero relativo di atomi nei diversi stati stazionari nelle diverse parti del raggio. Quando per esempio tutti gli atomi possiedono la stessa velocità e si trovano originalmente nello stesso stato, possiamo aspettarci che per tutte le righe spettrali, le cui transizioni sono associate a questo stato, l'intensità della luce decresca esponenzialmente in ugual misura lungo il raggio. Il materiale sperimentale oggi disponibile è a malapena sufficiente a confermare queste considerazioni.

Quando ci interroghiamo sulla capacità di interferenza delle righe spettrali, come è misurata dagli strumenti ottici, il tempo di vita medio dello stato stazionario determinerà certamente per questa capacità un limite superiore. Dobbiamo tener presente che la nettezza osservabile di una data riga spettrale, che deriva dal risultato statistico delle azioni di un gran numero di atomi, non dipende soltanto dalla lunghezza dei singoli treni d'onda troncati dalle transizioni, ma anche da una eventuale incertezza nella determinazione della frequenza di queste onde. Tenendo conto del modo in cui la frequenza delle righe spettrali è collegata mediante la relazione (1) con l'energia degli stati stazionari, è d'interesse notare che il suddetto limite superiore per la nettezza delle righe spettrali si pone in stretto rapporto con i limiti di precisione per la definizione del moto e dell'energia negli stati stazionari. Infatti il postulato della stabilità degli stati stazionari pone un limite a priori alla precisione con cui il moto in questi stati si può descrivere secondo l'elettrodinamica classica, che compare anche direttamente nella nostra idea che l'azione del campo di radiazione virtuale non consiste in una variazione continua del moto dell'atomo, ma nell'induzione di transizioni, per le quali l'energia e la quantità di moto subiscono una variazione finita (G. d. Q., Cap. II, §4). Nell'intorno del limite in cui i moti nei due stati stazionari differiscono tra loro di poco il limite superiore della capacità di interferenza del singolo treno d'onda tende a coincidere con il limite di precisione con cui la frequenza della radiazione è determinata mediante la (1), quando si tenga conto dell'effetto dell'imprecisione nella definizione dei due stati con il metodo degli errori indipendenti. Nel caso generale, in cui i moti nei due stati possono essere assai diversi tra loro, il limite superiore della capacità di interferenza del treno d'onde è strettamente connesso con la definizione del moto in quello stato stazionario che costituisce lo stato iniziale della transizione. Anche qui possiamo tuttavia notare che la nettezza osservabile delle righe spettrali si può determinare mediante l'equazione (1), purchè si componga l'effetto di una qualche imprecisione nella definizione dello stato finale con l'effetto dell'imprecisione nella definizione dello stato iniziale in modo analogo che per la composizione di errori indipendenti.

Proprio questo effetto dell'imprecisione nella definizione nei due stati stazionari sulla nettezza di una riga spettrale rende possibile l'esistenza di una reciprocità tra la struttura di una riga quando appare in emissione e quando appare in assorbimento, come anche richiede il postulato espresso dalla legge di Kirchhoff per l'equilibrio termico. In connessione a questo si ricordi, che l'apparente deviazione da questa legge, che, relativamente al numero ed al rapporto tra le righe, si manifesta nella spesso osservata differenza tra lo spettro di emissione e di assorbimento, trova nella teoria dei quanti la sua spiegazione diretta, quando si tenga conto della differenza nella distribuzione statistica degli atomi nei loro stati stazionari in circostanze esterne diverse.

Strettamente collegata con il problema su trattato, della nettezza delle righe spettrali che derivano dagli atomi sotto condizioni esterne costanti, è la questione dello spettro derivante da un atomo, quando le forze esterne si modificano considerevolmente durante un intervallo temporale dello stesso ordine di grandezza del tempo di vita medio degli stati stazionari. Un tale problema si incontra in certi esperimenti di Stark sull'effetto di un campo elettrico sulle righe spettrali. In questi esperimenti gli atomi si muovono con grande velocità, e gli intervalli di tempo durante i quali vanno da un punto ad un altro, nel quale l'intensità del campo è del tutto diversa, sono solo una piccola frazione del tempo di vita degli stati stazionari associati alla riga studiata. Malgrado ciò Stark ha trovato che, a prescindere dall'effetto Doppler del tipo solito, la radiazione emessa dagli atomi in ogni punto è influenzata dal campo elettrico nello stesso modo, come sarebbe influenzata la radiazione di atomi in quiete dall'azione costante della forza del campo in questo punto. Mentre l'interpretazione di questi risultati, come è stato notato da vari autori[10], dà luogo a difficoltà quando ci si attenga alla descrizione secondo

[10]vedi K. Försterling, Zeitschr. f. Phys. **10**, 387 (1922) e A.J. Dempster, Astrophys. Journ.

la teoria dei quanti usata finora del legame tra radiazione e processi di transizione, i risultati di Stark sono evidentemente in accordo con l'idea messa a fondamento in questa dissertazione. Infatti il moto negli stati stazionari, mentre gli atomi attraversano il campo, muterà continuamente, e lo stesso accadrà con gli oscillatori armonici virtuali, che sono associati alle transizioni possibili. Il campo di radiazione virtuale derivante dagli atomi che si muovono sarà quindi lo stesso di quando l'atomo durante il suo intero cammino si fosse mosso in un campo di intensità costante, almeno quando - come accadeva negli esperimenti di Stark - alla radiazione proveniente da altre parti del suo cammino fosse impedito di raggiungere quella parte dell'apparato dove ha luogo l'osservazione del fenomeno. Si vedrà che in un problema di questo tipo è anche assicurata una ulteriore reciprocità tra i fenomeni osservati di emissione e di assorbimento, e ciò grazie ad una simmetria propria della nostra idea riguardo all'accoppiamento tra processi di transizione in un senso o nell'altro da una parte, e campo di radiazione dall'altra parte.

§4. Teoria quantistica degli spettri e fenomeni ottici

Sebbene secondo la teoria dei quanti l'osservazione dei fenomeni ottici sia alla fine determinata da processi di transizione, l'interpretazione sensata di queste manifestazioni deve contenere, come notato nell'introduzione, quei processi continui che sono caratteristici per la teoria elettrodinamica classica della propagazione della luce attraverso mezzi materiali. Secondo questa teoria i fenomeni della riflessione, della rifrazione e della dispersione si devono attribuire ad una diffusione della luce, che ha luogo in seguito alle oscillazioni forzate delle particelle elettriche nei singoli atomi, causate dalle forze elettromagnetiche del campo di radiazione. Il postulato della stabilità degli stati stazionari porta a prima vista con sè, per quanto riguarda questo punto, una difficoltà fondamentale. Il contrasto sarebbe tuttavia alleviato in una certa misura, come notato, mediante il principio di corrispondenza, che porterebbe a confrontare la reazione di un atomo ad un campo di radiazione con la diffusione che secondo la teoria classica deriverebbe da un certo numero di oscillatori armonici virtuali, che sono associati alle diverse transizioni possibili. Si deve tuttavia pensare che l'analogia tra la teoria classica e la teoria dei quanti, com'è formulata mediante il principio di corrispondenza, è di natura essenzialmente formale, come è particolarmente sottolineato dalla circostanza, che secondo la teoria dei quanti l'assorbimento e l'emissione di radiazione sono collegati a processi di transizione diversi e quindi ad oscillatori armonici diversi. Ma è proprio questo punto così essenziale per l'interpretazione dei risultati sperimentali sugli spettri di emissione e di assorbimento, che sembra mostrare che i fenomeni di diffusione sono associati con l'azione degli oscillatori virtuali relativi all'emissione e all'assorbimento di radiazione. È intenzione mostrare in una dissertazione successiva come con la concezione attuale si possa costruire[11] una teoria quantitativa della dispersione, che è analoga a quella di Ladenburg. Qui ci accontenteremo perciò di sottolineare di nuovo il carattere continuo dei fenomeni ottici, che non pare consentire alcuna interpretazione nel senso di un collegamento causale con processi di transizione nel mezzo di propagazione.

57, 193 (1923).

[11]Nota aggiunta alla correzione. Le linee principali di una tale teoria sono descritte brevemente da Kramers in una comunicazione che apparirà tra poco su "Nature".

Incontriamo un esempio istruttivo di queste considerazioni negli esperimenti sugli spettri di assorbimento. Infatti a rigore non si può sostenere, come si fa spesso per brevità, che l'assorbimento in un vapore monoatomico per luce la cui frequenza coincida con certe righe dello spettro di emissione ha la sua origine in processi di transizione, che si verificano negli atomi del vapore, e che sono indotti da quei treni d'onda della radiazione incidente, che possiedono la frequenza delle righe di assorbimento. Della visibilità di queste righe nello spettroscopio si deve ringraziare la diminuzione dell'intensità della radiazione incidente, che ha luogo a causa delle particolarità delle onde sferiche secondarie emesse da ciascuno degli atomi illuminati; le transizioni indotte giocano soltanto il ruolo di un effetto concomitante, mediante il quale è assicurata la conservazione statistica dell'energia. La presenza dei treni d'onda secondari coerenti è parimenti responsabile della dispersione anomala associata alle righe di assorbimento e si manifesta inoltre particolarmente nel fenomeno scoperto da Wood[12] della riflessione selettiva sulla parete del contenitore di un vapore metallico a pressione abbastanza alta. La comparsa di transizioni indotte tra stati stazionari nell'assorbimento selettivo è allo stesso tempo osservata direttamente nella radiazione di fluorescenza, che per una parte importante deriva dalla presenza di un piccolo numero di atomi, che sono stati portati dall'irraggiamento in uno stato stazionario di energia più alta. È noto che la radiazione di fluorescenza si può sopprimere con il miscelamento con un gas estraneo. Per quanto riguarda la parte di radiazione derivante dagli atomi in stati stazionari più alti, questo fenomeno si spiega con collisioni, che provocano un considerevole aumento della probabilità degli atomi a tornare nel loro stato fondamentale. Allo stesso tempo la parte della radiazione di fluorescenza consistente di radiazione diffusa coerente, come i fenomeni dell'assorbimento, della dispersione e dalla riflessione subiranno per miscelamento con gas estraneo quelle variazioni, che possono essere poste in relazione con l'allargamento delle righe spettrali prodotto dagli urti[13]. Si vede che un'interpretazione dei fenomeni di assorbimento, che si discosti essenzialmente da quella su descritta, è difficilmente sostenibile, almeno quando si può dimostrare che l'assorbimento delle righe spettrali è qualitativamente indipendente dall'intensità della sorgente di radiazione, analogamente a come si può dimostrare per i consueti fenomeni della riflessione e della rifrazione, per i quali le transizioni nel mezzo non intervengono in quel modo (vedi G. d. Q., Cap. III, §3).

Un altro esempio interessante fornisce il problema della diffusione della luce da elettroni liberi. Come ha mostrato Compton con la riflessione dei raggi Röntgen da parte di cristalli, questa diffusione è accompagnata da una variazione di frequenza, che è diversa in direzioni diverse, e che è in accordo con la costituzione della radiazione emessa da una sorgente immaginaria in moto secondo la teoria classica. Compton ha raggiunto, come ricordato, un'interpretazione formale di questo fenomeno sulla base della teoria dei quanti di luce, assumendo che un elettrone assorba un quanto della luce incidente, e allo stesso tempo possa riemettere un quanto di luce in un'altra direzione. In questo processo l'elettrone acquista in una certa direzione una certa velocità, che come la frequenza della luce riemessa è determinata dalle leggi di conservazione dell'energia e della quantità di moto, nelle quali si attribuisce ad ogni quanto di luce un'energia $h\nu$ ed una quantità di moto $h\nu/c$. In contrasto con questa idea noi vediamo la diffusione della radiazione da

[12]R.W. Wood, Phil. Mag. **23**, 689 (1915).

[13]vedi per esempio Chr. Füchtbauer e G. Joos, Phys. Zeitschr. **23**, 73 (1922).

parte degli elettroni come un fenomeno continuo, al quale ogni elettrone partecipa con l'emissione di onde secondarie coerenti; la radiazione virtuale incidente dà luogo in ogni elettrone ad una reazione, analoga alla diffusione che ci si aspetterebbe nella teoria classica da un elettrone, che possedesse la velocità della sorgente di radiazione immaginaria su menzionata, e che sotto l'influenza del campo di radiazione eseguisse oscillazioni forzate. Che in questo caso l'oscillatore virtuale si muova con una velocità che è diversa da quella dell'elettrone irraggiato stesso significa certamente un passo che si contrappone alle idee classiche in modo particolarmente strano. In considerazione dei fondamentali scostamenti dalla descrizione spaziotemporale classica, insiti nell'idea degli oscillatori virtuali, non appare tuttavia corretto allo stato attuale della teoria voler condannare una interpretazione formale come quella considerata. Una tale interpretazione appare al contrario necessaria quando si voglia tener conto dei fenomeni osservati, per la descrizione dei quali la concezione ondulatoria della radiazione gioca proprio un ruolo essenziale. Proprio come nella teoria di Compton, assumiamo allo stesso tempo che l'elettrone irraggiato possieda una certa probabilità di subire in ogni direzione data una certa variazione finita della sua quantità di moto. Mediante questo effetto, che nella teoria dei quanti prende il posto del trasferimento continuo di quantità di moto, che secondo la teoria classica accompagnerebbe una diffusione del tipo descritto, viene assicurata la conservazione statistica della quantità di moto, analoga alla conservazione statistica dell'energia prima considerata nel fenomeno degli spettri di assorbimento. Di fatto le leggi probabilistiche derivate da Pauli per lo scambio di quantità di moto nell'interazione tra elettroni liberi e radiazione mostrano una analogia essenziale con le leggi di Einstein, che hanno valore per le transizioni tra stati stazionari ben definiti di un sistema atomico. Le considerazioni di Einstein e Ehrenfest ricordate nel §2 sono particolarmente idonee a far risaltare questa analogia.

Un problema analogo alla diffusione della luce da elettroni liberi lo incontriamo nella diffusione di luce da un atomo, indipendentemente dal fatto che la frequenza della radiazione sia abbastanza grande da indurre transizioni per le quali un elettrone sia completamente allontanato dall'atomo. Per assicurare la conservazione statistica della quantità di moto dobbiamo infatti assumere, come hanno notato Pauli e di nuovo Smekal[14], che possano avvenire processi di transizione nei quali la quantità di moto dell'atomo diffuso subisce una variazione finita senza che per questo, come nei soliti processi di transizione considerati nella teoria degli spettri, il moto relativo delle particelle nell'atomo cambi. Si vede che nella nostra concezione processi di transizione del tipo anzidetto sono strettamente associati ai fenomeni di diffusione ottica in un modo che è analogo all'associazione dei fenomeni spettrali con i processi di transizione, nei quali il moto interno dell'atomo cambia. A motivo della grande massa del nucleo atomico la variazione di velocità dell'atomo per tali transizioni è tuttavia così piccola, che non avrà alcun effetto osservabile sull'energia dell'atomo e sulla frequenza della radiazione diffusa. Malgrado ciò è di significato essenziale che il trasferimento di quantità di moto sia un processo discontinuo, mentre la diffusione stessa è un fenomeno essenzialmente continuo nel quale hanno parte tutti gli atomi irraggiati, indipendentemente dall'intensità della radiazione incidente. Le variazioni discontinue nella quantità di moto dell'atomo sono la causa delle azioni osservate sugli atomi, che si descrivono come pressione di radiazione. Questa interpretazione soddisfa evidentemente le condizioni per l'equilibrio

[14] A. Smekal, Naturwissenschaften **11**, 875 (1923).

termico tra un campo di radiazione (virtuale) ed una superficie riflettente, che sono state ricavate da Einstein[15] e nelle quali egli ha visto un sostegno per la teoria dei quanti di luce. Allo stesso tempo risulta quasi superfluo rilevare che essa è anche in accordo con l'apparente continuità nelle osservazioni reali sulla pressione di radiazione. Quanto infatti consideriamo un corpo solido, una variazione di $h\nu/c$ nella quantità di moto totale di questo sarà completamente inosservabile, e per luce visibile trascurabilmente piccola, rispetto alle variazioni irregolari della quantità di moto di un corpo in equilibrio termico con il suo ambiente. Nella discussione degli esperimenti reali dobbiamo tuttavia tener presente allo stesso tempo che la frequenza di tali processi è spesso così grande, che incontriamo la domanda se possiamo trascurare la durata stessa delle transizioni o, in altre parole, se è superato il limite entro il quale vale la formulazione dei principî della teoria dei quanti (vedi G. d. Q., Cap. II, §5).

Le ultime considerazioni danno un esempio di come la nostra interpretazione dei fenomeni ottici consenta una connessione naturale con la consueta descrizione continua dei fenomeni macroscopici, per l'interpretazione dei quali la teoria di Maxwell è così meravigliosamente adatta. La preferenza che sotto questo riguardo la nostra formulazione dei principî della teoria dei quanti consegue rispetto alla consueta formulazione della teoria si illustra assai significativamente nel caso del fenomeno dell'emissione di onde elettromagnetiche, cioè mediante un'antenna, come in radiotelegrafia. In questo caso una descrizione sensata dei fenomeni è possibile nel senso di un'emissione di radiazione, mentre è impossibile nel senso di processi di transizione separati successivi tra stati stazionari immaginari dell'antenna. Tenendo conto infatti della piccolezza delle variazioni di energia nelle transizioni, e anche della grandezza della radiazione di energia nell'unità di tempo, si vede che la durata dei singoli processi di transizione può essere solo una frazione straordinariamente piccola del periodo di oscillazione dell'elettricità nell'antenna, e che di conseguenza non è corretto descrivere il risultato di tali processi come l'emissione di un treno d'onde di questo periodo. Nella nostra interpretazione attuale invece descriviamo la realtà delle oscillazioni di elettricità nell'antenna come il realizzarsi di un campo di radiazione (virtuale), che secondo leggi di probabilità induce inoltre modifiche nel moto degli elettroni. Queste modifiche possiamo considerarle in questo caso come praticamente di tipo continuo, perché anche se fosse possibile mantenere una distinzione dei singoli contributi d'energia $h\nu$, la grandezza di questi contributi sarebbe del tutto trascurabile rispetto all'energia dell'antenna. In connessione a questo va osservato che la comparsa del carattere "virtuale" del campo di radiazione, che allo stato attuale dalla conoscenza appare così necessario per la descrizione sensata dei fenomeni atomici, automaticamente perde il suo significato in un caso come quello qui trattato, in cui il campo, per quanto riguarda la sua interazione osservabile con la materia, esibisce tutte quelle proprietà che nell'elettrodinamica classica si attribuiscono ad un campo elettromagnetico.

Kopenhagen, Universitetets Institut for teoretisk Fysik.

[15] A. Einstein, Phys. Zeitschr. **10**, 875 (1923).

La meccanica quantistica dei processi d'urto[1]

[Comunicazione provvisoria[2]]

Max Born, Gottinga

(ricevuto il 25 luglio 1926)

Mediante lo studio dei processi d'urto si sviluppa l'idea che la meccanica quantistica nella forma di Schrödinger permetta di descrivere non solo gli stati stazionari, ma anche i salti quantici.

La meccanica quantistica fondata da Heisenberg è stata finora applicata esclusivamente al calcolo degli stati stazionari e delle ampiezze d'oscillazione associate alle transizioni (evito di proposito la parola "probabilità di transizione"). Inoltre il formalismo ampiamente sviluppato nel frattempo sembra dare buoni risultati. Ma questa impostazione della questione riguarda solo un aspetto del problema; accanto ad essa si leva altrettanto importante la questione della natura della "transizioni" stesse. Riguardo a questo punto le opinioni appaiono divise; molti ritengono che il problema delle transizioni non sia affrontato dalla meccanica quantistica nella forma presente, e che qui saranno necessarie nuove forme concettuali. Per quanto mi riguarda, sotto l'impressione della chiusura della struttura logica della meccanica quantistica, sono giunto alla congettura che questa teoria sia completa e che debba comprendere il problema delle transizioni. Credo di essere riuscito a dimostrare questo.

Già Bohr ha diretto l'attenzione sul fatto che tutte le difficoltà di principio della rappresentazione quantistica, che incontriamo con l'emissione e l'assorbimento della luce da parte di atomi, compaiono anche nell'interazione di atomi a breve distanza, quindi nei processi d'urto. In questi si ha a che fare, invece che con campi d'onda ancora assai vaghi, esclusivamente con sistemi di particelle materiali che sottostanno al formalismo della meccanica quantistica. Ho quindi affrontato il problema di studiare l'interazione di una particella libera (raggio α o elettrone) e di un atomo qualsiasi e di stabilire se non sia possibile una descrizione del processo d'urto nell'ambito della teoria esistente.

Delle diverse forme della teoria in questo caso solo quella di Schrödinger si è dimostrata idonea, e potrei proprio per questa ragione considerarla come la versione più profonda delle leggi dei quanti. Il filo del mio ragionamento è ora il seguente:

Quando si vuole calcolare secondo la meccanica quantistica l'interazione di due sistemi è noto che non si può, come nella meccanica classica, prendere uno stato di un sistema e stabilire come questo sia influenzato da uno stato dell'altro sistema, ma tutti gli stati dei due sistemi sono accoppiati in modo complicato. Ciò vale anche in un processo aperiodico, come un urto, nel quale una particella, diciamo un elettrone, viene dall'infinito e di nuovo svanisce all'infinito. Ma qui s'impone l'idea che però sia prima che dopo l'urto, quando l'elettrone è abbastanza lontano e l'accoppiamento piccolo, dev'essere definibile uno stato determinato dell'atomo

[1]Zur Quantenmechanik der Stoßvorgänge, Zeitschr. f. Phys. **37**, 863-867 (1926).

[2]Questa comunicazione era originariamente destinata a "Naturwissenschaften", ma non ha potuto essere accettata là per mancanza di spazio. Spero che la sua pubblicazione in questo luogo non appaia superflua.

e un moto determinato, rettilineo uniforme, dell'elettrone. Si tratta di esprimere matematicamente questo comportamento asintotico delle particelle accoppiate. Ciò non m'è riuscito con la forma matriciale della meccanica quantistica, bensì con la formulazione di Schrödinger.

Secondo Schrödinger l'atomo nell'n-esimo stato quantico è un processo d'oscillazione di una quantità di stato sull'intero spazio con frequenza costante $(1/h)W_n^0$. Un elettrone che si muova rettilineamente è in particolare un siffatto processo d'oscillazione, che corrisponde ad un'onda piana. Se i due vengono in interazione si stabilisce un'oscillazione complicata. Ma si vede subito che questa può essere determinata mediante il suo comportamento asintotico all'infinito. Non si ha proprio nient'altro che un "problema di diffrazione", nel quale un'onda piana incidente su un atomo viene diffratta o diffusa; al posto delle condizioni al contorno, che si utilizzano in ottica per la descrizione dello schermo, si ha qui l'energia potenziale dell'interazione di atomo ed elettrone.

Il problema è quindi: si deve risolvere l'equazione d'onda di Schrödinger per la combinazione atomo-elettrone con la condizione al contorno che la soluzione in una determinata direzione dello spazio dell'elettrone vada asintoticamente in un'onda piana nella direzione di propagazione di questo (l'elettrone in arrivo). Della soluzione così definita ci interessa di nuovo essenzialmente il comportamento dell'onda "diffusa" all'infinito; infatti questa descrive il comportamento del sistema dopo l'urto. Esprimiamo questo un po' più precisamente. Siano $\psi_1^0(q_k), \psi_2^0(q_k), \ldots$ le autofunzioni dell'atomo imperturbato (assumiamo che si abbia solo una serie discreta); all'elettrone che si muove imperturbato (in linea retta) corrispondono le autofunzioni $\sin\left[(2\pi/\lambda)(\alpha x + \beta y + \gamma z + \delta)\right]$, che formano una molteplicità continua di onde piane, la cui lunghezza d'onda (secondo de Broglie) è collegata all'energia τ del moto di traslazione dalla relazione $\tau = h^2/(2\mu\lambda^2)$. L'autofunzione dello stato imperturbato, nel quale l'elettrone arriva dalla direzione $+z$, è quindi

$$\psi_{n\tau}^0(q_k, z) = \psi_n^0(q_k)\sin(2\pi/\lambda)z.$$

Sia ora $V(x, y, z; q_k)$ l'energia potenziale dell'interazione fra atomo ed elettrone. Si può mostrare per mezzo di facili calcoli perturbativi che esiste una soluzione determinata univocamente dell'equazione differenziale di Schrödinger che tien conto dell'interazione V, che per $z \to +\infty$ va asintoticamente nella funzione di cui sopra.

Veniamo ora a come questa funzione soluzione si comporta "dopo l'urto".

Ora il calcolo dà: l'onda diffusa, provocata dalla perturbazione, ha all'infinito asintoticamente l'espressione

$$\psi_{n\tau}^1(x, y, z, q_k) = \sum_m \int\int_{\alpha x+\beta y+\gamma z>0} d\omega \cdot \Phi_{n_\tau m}(\alpha, \beta, \gamma)\sin k_{n_\tau m}(\alpha x + \beta y + \gamma z + \delta)\psi_m^0(q_k).$$

Ciò significa: la perturbazione si può intendere all'infinito come sovrapposizione di soluzioni del processo imperturbato. Se si calcola l'energia corrispondente alla lunghezza d'onda $\lambda_{n_\tau m}$ secondo la formula prima data di de Broglie, si trova

$$W_{n_\tau m} = h\nu_{nm}^0 + \tau,$$

dove le ν_{nm}^0 sono frequenze dell'atomo imperturbato.

Se si vuole interpretare questo risultato in senso corpuscolare, solo un'interpretazione è possibile: $\Phi_{n_\tau m}(\alpha, \beta, \gamma)$ determina la probabilità[3] che l'elettrone che viene dalla direzione z venga scagliato nella direzione determinata da α, β, γ (e con una variazione di fase δ), mentre la sua energia τ è aumentata di un quanto $h\nu_{nm}^0$ a spese dell'energia dell'atomo (urto di primo tipo per $W_n^0 < W_m^0, h\nu_{nm}^0 < 0$; urto di secondo tipo per $W_n^0 > W_m^0$, $h\nu_{mn}^0 < 0$). La meccanica quantistica di Schrödinger dà quindi alla domanda circa l'effetto di un urto una risposta del tutto definita; ma non si tratta affatto di una relazione causale. Non si ottiene alcuna risposta alla domanda, "com'è lo stato dopo l'urto", ma solo alla domanda , "quant'è probabile un prefissato effetto dell'urto" (nel quale naturalmente la legge quantomeccanica dell'energia dev'essere soddisfatta).

Sorge qui l'intera problematica del determinismo. Dal punto di vista della nostra meccanica quantistica non vi è nessuna quantità che fissi causalmente nel caso singolo l'effetto di un urto; ma anche nell'esperienza non abbiamo finora alcun punto d'appoggio riguardo al fatto che esistano proprietà interne dell'atomo che determinino un certo esito dell'urto. Dobbiamo sperare di scoprire in seguito proprietà siffatte (per esempio, le fasi dei moti atomici interni) e di determinarle nel caso singolo? Oppure dobbiamo credere che la concordanza di teoria ed esperienza nell'incapacità di fornire relazioni per l'evoluzione causale sia un'armonia prestabilita che si fonda sull'inesistenza di siffatte relazioni? Da parte mia inclino a rinunciare al determinismo nel mondo atomico. Ma questa è una questione filosofica, per la quale gli argomenti fisici non sono i soli determinanti.

In pratica in ogni caso sia per il fisico sperimentale che per il teorico sussiste l'indeterminismo. La "funzione di risposta" Φ assai studiata dagli sperimentali è ora determinabile rigorosamente anche per via teorica. La si può trovare a partire dall'energia potenziale dell'interazione $V(x, y, z, q_k)$; tuttavia i procedimenti di calcolo a ciò necessari sono troppo complicati per comunicarli in questo luogo. Spiegherò solo il significato della funzione $\Phi_{n_\tau m}$ con qualche parola. Se per esempio l'atomo prima dell'urto è nello stato normale $n = 1$, risulta da

$$\tau + h\nu_{1m}^0 = \tau - h\nu_{m1}^0 = W_{1_\tau m} > 0,$$

che per un elettrone con energia minore del gradino d'eccitazione più piccolo dell'atomo dev'essere necessariamente anche $m = 1$, quindi $W_{1_\tau 1} = \tau$; ne risulta perciò "riflessione elastica" dell'elettrone con la funzione di risposta $\Phi_{1_\tau 1}$. Se τ supera il primo gradino d'eccitazione, oltre alla riflessione si ha anche eccitazione con la risposta $\Phi_{1_\tau 2}$ e così via. Se l'atomo considerato è nello stato eccitato $n = 2$ e se $\tau < h\nu_{21}^0$, si ha riflessione con la risposta $\Phi_{2_\tau 2}$ e urto di secondo tipo con la risposta $\Phi_{2_\tau 1}$. Se $\tau > h\nu_{21}^0$, compare la relativa ulteriore eccitazione e così via.

Le formule riproducono quindi perfettamente il comportamento qualitativo negli urti. All'esame quantitativo esauriente delle formule per casi speciali dev'essere riservato uno studio particolareggiato.

Non mi pare escluso che lo stretto accoppiamento di meccanica e statistica, come qui si presenta, richiederà una revisione dei concetti fondamentali termodinamico-statistici.

Credo inoltre che anche il problema dell'assorbimento e dell'emissione di luce dovrà essere trattato in modo del tutto analogo come "problema di valori al con-

[3]Nota alla correzione: un ragionamento più preciso mostra che la probabilità è proporzionale al quadrato della quantità $\Phi_{n_\tau m}$.

torno" dell'equazione d'onda e porterà ad una teoria razionale dell'assorbimento e della larghezza di riga in accordo con la concezione dei quanti di luce.

Un'esposizione dettagliata apparirà prossimamente in questo giornale.

Legge di Planck e ipotesi dei quanti di luce[1]

Bose (Università di Dacca, India)

(pervenuto il 2 luglio 1924)

Lo spazio delle fasi di un quanto di luce relativo ad un certo volume viene diviso in "celle" della dimensione h^3. Il numero delle possibili ripartizioni su queste celle dei quanti di luce di una radiazione definita macroscopicamente dà l'entropia e quindi tutte le proprietà termodinamiche della radiazione.

La formula di Planck per la ripartizione dell'energia nella radiazione del corpo nero costituisce il punto di partenza per la teoria dei quanti, che è stata sviluppata negli ultimi 20 anni e che ha portato ricchi frutti in tutti i campi della fisica. Dalla pubblicazione nell'anno 1901 sono stati presentati molti modi di derivazione di questa legge. Si è riconosciuto che le ipotesi fondamentali della teoria dei quanti sono incompatibili con le leggi dell'elettrodinamica classica. Tutte le derivazioni precedenti fanno uso della relazione

$$\rho_\nu d\nu = \frac{8\pi\nu^2 d\nu}{c^3} E,$$

cioè della relazione tra la densità di radiazione e l'energia media di un oscillatore, e fanno assunzioni sul numero dei gradi di libertà dell'etere, che interviene nell'equazione precedente (primo fattore del secondo membro). Questo fattore può tuttavia essere desunto solo dalla teoria classica. Questo è il punto insoddisfacente in tutte le derivazioni, e non c'è da stupirsi che vengano compiuti sempre nuovi tentativi di dare una derivazione che sia esente da questo difetto logico.

Una derivazione notevolmente elegante è stata data da Einstein. Questi ha riconosciuto il difetto logico di tutte le derivazioni fatte finora ed ha cercato di dedurre la formula indipendentemente dalla teoria classica. Partendo da assunzioni assai semplici sullo scambio d'energia tra molecole e campo di radiazione, egli trova la relazione

$$\rho_\nu = \frac{\alpha_{mn}}{e^{\frac{\varepsilon_m - \varepsilon_n}{kT}} - 1}.$$

Tuttavia, per portare questa formula in accordo con quella di Planck egli deve far uso della legge dello spostamento di Wien e del principio di corrispondenza di Bohr. La legge di Wien è fondata sulla teoria classica, ed il principio di corrispondenza assume che la teoria dei quanti coincida con la teoria classica in certi casi limite.

In tutti i casi le derivazioni non mi paiono abbastanza corrette dal punto di vista logico. Mi pare invece che l'ipotesi dei quanti di luce assieme alla meccanica statistica (come è stata adattata da Planck ai bisogni della teoria dei quanti) siano sufficienti per la derivazione della legge indipendentemente dalla teoria classica. Delineerò in breve il metodo in quanto segue.

La radiazione sia racchiusa nel volume V e sia data la sua energia totale E. Siano dati diversi tipi di quanti di numero rispettivamente N_s e d'energia $h\nu_s$ (s da 0 a ∞). L'energia totale E è quindi

$$E = \sum_s N_s h\nu_s = V \int \rho_\nu d\nu. \tag{1}$$

[1]Plancks Gesetz und Lichtquantenhypothese, Zeitschr. f. Phys. **26**, 178-181 (1924).

La soluzione del problema richiede quindi la determinazione degli N_s che determinano ρ_ν. Se noi possiamo dare la probabilità per ogni ripartizione caratterizzata da N_s arbitrari, la soluzione è determinata dalla condizione che questa probabilità debba essere massima mantenendo verificata la condizione aggiuntiva (1). Cercheremo ora questa probabilità.

Il quanto ha un momento dell'ammontare $h\nu/c$ nella direzione della sua propagazione. Lo stato istantaneo del quanto sarà caratterizzato dalle sue coordinate x, y, z e dai corrispondenti momenti p_x, p_y, p_z; queste sei quantità possono essere interpretate come coordinate di un punto in uno spazio esadimensionale, per il quale abbiamo la relazione

$$p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 = \left(\frac{h\nu}{c}\right)^2,$$

secondo la quale il punto suddetto è costretto a restare su una superficie cilindrica determinata dalla frequenza del quanto. All'intervallo di frequenza $d\nu_s$ appartiene in questo senso il volume di spazio delle fasi

$$\int dxdydzdp_xdp_ydp_z = V \cdot 4\pi \left(\frac{h\nu}{c}\right)^2 \frac{hd\nu}{c} = 4\pi \frac{h^3\nu^2}{c^3} V d\nu.$$

Se noi suddividiamo l'intero volume dello spazio delle fasi in celle di volume h^3, all'intervallo di frequenza $d\nu$ appartengono $4\pi V \left(\nu^2/c^3\right) d\nu$ celle. Riguardo al modo di questa suddivisione non si può dire niente di preciso. Tuttavia il numero totale delle celle dev'esser visto come il numero delle possibili configurazioni di un quanto nel volume dato. Per tener conto del fatto della polarizzazione appare offrirsi la moltiplicazione di questo numero per 2, di modo che per il numero delle celle appartenenti a $d\nu$ otteniamo $8\pi V\nu^2 d\nu/c^3$.

È facile ora calcolare la probabilità termodinamica di uno stato (definito macroscopicamente). Sia N^s il numero dei quanti che appartengono all'intervallo di frequenza $d\nu^s$. In quanti modi possono essere distribuiti tra le celle che appartengono a $d\nu^s$? Sia p_0^s il numero delle celle vuote, p_1^s il numero di quelle che contengono un quanto, p_2^s il numero delle celle che contengono due quanti, eccetera. Il numero delle possibili ripartizioni è allora

$$\frac{A^s!}{p_0^s! p_1^s! \ldots}, \text{ dove } A^s = \frac{8\pi\nu^2 d\nu^s}{c^3},$$

e dove

$$N^s = 0 \cdot p_0^s + 1 \cdot p_1^s + 2 \cdot p_2^s \ldots$$

è il numero dei quanti che appartengono a $d\nu^s$. La probabilità dello stato definito da tutti i p_r^s è evidentemente

$$\Pi_s \frac{A^s!}{p_0^s! p_1^s! \ldots}.$$

Tenendo conto del fatto che possiamo trattare i p_r^s come numeri grandi, abbiamo

$$\lg W = \sum_s A^s \lg A^s - \sum_s \sum_r p_r^s \lg p_r^s,$$

dove

$$A^s = \sum_r p_r^s.$$

Quest'espressione dev'essere un massimo sotto la condizione aggiuntiva

$$E = \sum_s N^s h\nu^s; \; N^s = \sum_r r p_r^s.$$

L'esecuzione della variazione produce le condizioni

$$\sum_s \sum_r \delta p_r^s \left(1 + \lg p_r^s\right) = 0, \; \sum_s \delta N^s h\nu^s = 0,$$

$$\sum_r \delta p_r^s = 0, \; \delta N^s = \sum_r r \delta p_r^s.$$

Da qui segue

$$\sum_s \sum_r \delta p_r^s \left(1 + \lg p_r^s + \lambda^s\right) + \frac{1}{\beta} \sum_s h\nu^s \sum_r r \delta p_r^s = 0.$$

Pertanto si ottiene immediatamente

$$p_r^s = B^s e^{-\frac{rh\nu^s}{\beta}}.$$

Poiché

$$A^s = \sum_r B^s e^{-\frac{rh\nu^s}{\beta}} = B^s \left(1 - e^{-\frac{h\nu^s}{\beta}}\right)^{-1},$$

risulta

$$B^s = A^s \left(1 - e^{-\frac{h\nu^s}{\beta}}\right).$$

Si ha inoltre

$$N^s = \sum_r r p_r^s = \sum_r r A^s \left(1 - e^{-\frac{h\nu^s}{\beta}}\right) e^{-\frac{rh\nu^s}{\beta}}$$

$$= \frac{A^s e^{-\frac{h\nu^s}{\beta}}}{1 - e^{-\frac{h\nu^s}{\beta}}}.$$

Tenendo conto del valore su trovato di A^s è quindi

$$E = \sum_s \frac{8\pi h {\nu^s}^3 d\nu^s}{c^3} V \frac{e^{-\frac{h\nu^s}{\beta}}}{1 - e^{-\frac{h\nu^s}{\beta}}}.$$

Utilizzando il risultato precedente si trova inoltre

$$S = k \left[\frac{E}{\beta} - \sum_s A^s \lg\left(1 - e^{\frac{h\nu^s}{\beta}}\right)\right],$$

dalla quale, tenendo conto che $\partial S/\partial E = 1/T$, segue che $\beta = kT$. Se si sostituisce questo nell'equazione precedente per E si ottiene

$$E = \sum_s \frac{8\pi h {\nu^s}^3}{c^3} V \frac{1}{e^{\frac{h\nu^s}{kT}} - 1} d\nu^s,$$

equazione equivalente alla formula di Planck.

(tradotto da A. Einstein.)

Nota del traduttore. Secondo la mia opinione la derivazione di Bose della formula di Planck significa un progresso importante. Il metodo qui utilizzato produce anche la teoria quantistica dei gas ideali, come esporrò altrove.

Alcune domande esplorative che riguardano la meccanica quantistica[1]

P. Ehrenfest a Leida (Olanda)

(ricevuto il 16 agosto 1932)

Alcune questioni e osservazioni a proposito di: A. L'unità immaginaria nell'equazione di Schrödinger e la teoria delle trasformazioni. - B. L'analogia difettosa tra fotone ed elettrone. - C. Il rendere più accessibile il calcolo spinoriale.

Sia consentito raccogliere nel seguito alcune domande, che si devono essere imposte a quasi tutti i docenti che abbiano da presentare introduttivamente la meccanica quantistica ad un uditorio interessato e disposto alla critica. Queste domande, in particolare quelle della presente esposizione, possono ben essere accantonate come "prive di senso", se si vuol stare comodi. La buona educazione addirittura lo esige. Allora qualcuno dovrà pur attirarsi l'antipatia, e porle tuttavia. Con la ferma fiducia che sempre si trovi un qualche ricercatore che possiede l'arte di rispondere in modo sensato, e cioè in modo chiaro e semplice, alle domande "prive di senso".

A. *L'unità immaginaria nell'equazione di Schrödinger e le relazioni di commutazione di Heisenberg-Born.* Vi è un complesso di scoperte grande e chiaramente comprensibile che porta a rappresentare il campo elettromagnetico mediante *due vettori reali* E, H o, se si vuole, mediante *un vettore complesso* $M = H + iE$, che allora soddisfa alle equazioni differenziali non reali:

$$\frac{1}{ic}\frac{\partial M}{\partial t} = \operatorname{rot} M, \tag{1}$$

$$\operatorname{div} M = i\rho. \tag{2}$$

In analogia con ciò si potrebbe ben, cioè in qualche modo assiomaticamente chiaro, comprendere perché le onde di de Broglie-Schrödinger richiedano almeno *due scalari reali* o la conveniente riunione di questi in *uno scalare complesso* ψ. *L'ulteriore* sdoppiamento per la trattazione secondo la meccanica ondulatoria dello spin Pauli l'ha fondato in modo completamente chiaro.

Osservazioni. 1. I primi lavori di de Broglie e di Schrödinger fanno supporre assai chiaramente la descrivibilità mediante *uno* scalare reale[2]. Quando in modo del tutto incidentale "per comodità" si introduce un fattore temporale complesso per trattare un'onda sinusoidale, si rileva espressamente che alla conclusione dei calcoli si deve prendere la parte reale[3]. In seguito ciò non è naturalmente più possibile, poiché il primo membro dell'equazione di Schrödinger ha ricevuto definitivamente il suo coefficiente immaginario[4]. La ricerca di come diversi autori abbiano in seguito trattato questo punto in varie esposizioni sotto forma di manuale non porta alcun aiuto[5].

[1] Einige die Quantenmechanik betreffende Erkundigungsfragen, Zeitschr. f. Phys. **78**, 555-559 (1932).

[2] L. de Broglie, Wellenmechanik, p. 64, 65, Leipzig 1929; E. Schrödinger, Abhandlungen zur Wellenmechanik, p. 25, Leipzig, Barth, 1927.

[3] E. Schrödinger, l.c. p. 57, nota 1.

[4] E. Schrödinger, l.c. p. 141, 142 e 169.

[5] Per esempio A. Sommerfeld, Wellenmechanischer Ergänzungsband pp. 8 e 46; H. Weyl, p. 44, J. Frenkel, p. 60. - Lo stesso Pauli (Müller-Pouillet, Vol. II, pp. 1820, 1821) pare qui che voglia evitare di "svegliare il can che dorme"!

2. Riguardo al ruolo dell'unità immaginaria nelle relazioni di commutazione e nell'intera teoria delle trasformazioni, sarei lieto di comprendere chiaramente in che modo già nella vecchia formulazione di Bohr del principio di corrispondenza il passaggio da serie di Fourier reali a serie esponenziali complesse significhi di più di una pura semplificazione della notazione.

B. *Limiti dell'analogia tra fotoni ed elettroni.* Nel caso di onde luminose rigorosamente monocromatiche il campo E, H fornisce per le diverse posizioni di un campo d'interferenza direttamente le probabilità relative per la presenza di un fotone, quindi il "numero" dei fotoni si distingue dall'energia da essi trasportata solo per il fattore da fissarsi $h\nu$. Ma quando si considera un campo di radiazione non monocromatico, questa corrispondenza chiara tra i valori *locali* di E ed H e la probabilità *locale* per la presenza di un fotone va perduta. Diventa necessario sviluppare prima un'analisi di Fourier del campo E, H, ossia un'operazione di integrazione essenzialmente non locale. Questo è un esempio di un difetto dell'analogia inaccettabile, ma tuttavia ancora modesto:

Per una *particella materiale* i valori della ψ che soddisfano le equazioni differenziali determinano direttamente la densità di probabilità locale per la presenza della particella. Di contro ciò *non* avviene riguardo al *fotone* per il campo $H + iE$ che soddisfa alle equazioni di Maxwell.

Il difetto dell'analogia è tuttavia, s'intende, ben più profondo: le equazioni di Maxwell classiche rappresentano una genuina teoria di campo su un continuo tetradimensionale x, y, z, t. Nella concezione originale di de Broglie anche le "onde materiali" paiono volersi ordinare in una teoria di campo tetradimensionale, per la quale inoltre anche i semplici tipi di esperimenti di interferenza possono valere come chiara conferma. La fiducia nella possibilità di una tale teoria di campo ci è tuttavia (provvisoriamente?!) sottratta, poiché Schrödinger per l'interazione tra n elettroni deve ricorrere all'aiuto di una funzione ψ definita su uno "spazio delle configurazioni" a $3n$ dimensioni, e finora tutti i tentativi di ritornare in qualche modo al continuo tetradimensionale sono naufragati.[6] Si pone quindi la domanda: come si dovrà trattare "l'analogia tra fotone ed elettrone" nell'*introduzione* alla meccanica quantistica, poiché nello stato attuale della meccanica quantistica non ci si può permettere affatto il lusso di ignorare semplicemente questo paragone così enormemente vantaggioso dal punto di vista euristico?

Osservazioni. 1. L'operatore lineare $\sqrt{\Delta}$ derivato dall'operatore di Laplace Δ, che Landau e Peierls[7] hanno introdotto come strumento per la loro trattazione del fotone, non è naturalmente un operatore differenziale, ma un operatore integrale,

[6] Ci si abitua a dimenticare il profondo conflitto che qui appare con uno dei nostri più fondamentali convincimenti fisici, cioè con la convinzione che la macchina del mondo produce un gioco d'assieme diretto, primario, soltanto tra quelle quantità di stato che corrispondono a punti $txyz$ infinitamente vicini. L'equazione differenziale di Schrödinger per due elettroni richiede di contro un gioco d'assieme dei valori di ψ in una regione infinitesima del continuo $t\ x_1\ y_1\ z_1\ x_2\ y_2\ z_2$, nella quale

$$\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

può ben essere lungo molti chilometri. Dobbiamo sempre ricordarci daccapo che la teoria delle onde di Schrödinger è una *teoria dell'azione a distanza camuffata*, che la nostalgia ci fa prendere per una teoria dell'azione per prossimità multidimensionale. Certi esperimenti concettuali, escogitati da Einstein ma mai pubblicati, sono a questo proposito assai opportuni.

[7] L. Landau e H. Peierls, Zeitschr. f. Phys. **62**, 188 (1930).

quindi essenzialmente *non locale*[8]. Pertanto, quando questi autori confrontano le ψ, ψ^* di Schrödinger non più con $H+iE$, $H-iE$, ma con le loro F, F^*, si fa bene a tener scrupolosamente presente che la quantità di Schrödinger soddisfa la sua equazione *differenziale*, mentre la F di Landau-Peierls soddisfa invece l'equazione integrale (seducentemente elegante!):

$$\frac{1}{c}\dot{F} = -\sqrt{\Delta}F. \tag{3}$$

Ed ora l'ammissione spontanea di Peierls-Landau: "Non si può tuttavia definire $F^*(1/\sqrt{\Delta})F$ come densità di probabilità, poiché questa quantità non è definita positiva". Come se non ci fosse nient'altro da dire! Se capisco correttamente, ulteriori lavori connessi con questo non hanno prodotto mutamenti riguardo alla questione qui accennata[9].

2. Si dovrebbe poter capire chiaramente che cosa significa, che si possa misurare $\psi\psi^*$ e non la ψ stessa, mentre per il campo elettromagnetico oltre ad $1/2(E^2+H^2)$ si possono misurare anche E ed H stessi. Si tratta qui di una asimmetria che ci si deve aspettare permanga anche qualora si potesse rappresentare l'interazione *reciproca* tra "materia" e "campo elettromagnetico" nella teoria meglio di ora?

3. Tutte le virtuosistiche dissertazioni sull'analogia tra le equazioni di Maxwell da un lato e in particolare l'equazione di Dirac dall'altro non hanno, se vedo giusto, prodotto assolutamente niente.

C. *Più comoda accessibilità del "calcolo spinoriale".* La ricca scorta di analogie tra vettori e campi vettoriali chiaramente assai diversi ha a più riprese molto aiutato lo sviluppo della meccanica e della fisica. La relativamente assai più ristretta scorta di analogie nel caso dei tensori di ordine due o più alto ha significato negli anni tra il 1900 e il 1905 un grande impedimento alla riflessione fisica. Lo si ravvisa nettamente con un esame dell'articolo di Abraham nell'Enciclopedia della matematica IV, 14, 1900! Perfino nella celebre trattazione di Minkowski della teoria della relatività speciale (1908) l'indicazione del campo tensoriale antisimmetrico del second'ordine come "vettore spazio-temporale del secondo tipo" lascia un po' a desiderare. Solo per primo il "Manuale di fisica dei cristalli" (1910) di Voigt e in particolare l'esposizione di Einstein del calcolo tensoriale assoluto nei "Fondamenti formali della teoria della relatività generale" (1914) segnano più o meno l'eliminazione di questo impedimento per il fisico, per quanto riguarda i *tensori*.

Ma adesso gli *spinori*?! Il fisico che conosce l'abbozzo che van der Waerden[10] ha dato[11] essenzialmente in connessione con Weyl (Gruppentheorie und Quantenmechanik) è per questo abbozzo sinceramente assai grato. Ma per ora manca pur sempre un *librettino*, dal quale si possa imparare *in modo facile* il calcolo spinoriale assieme al calcolo tensoriale.

Osservazioni. 1. Risulta pure comico, che i fisici dopo 20 anni di teoria della relatività speciale e 10 anni di quella generale apprendano soltanto ora dal lavoro di Pauli sulla meccanica ondulatoria dell'elettrone con spin e dal lavoro ad esso connesso di Dirac la notizia inquietante che lo spazio isotropo e l'universo di

[8] Vedi l.c. equazione (4).

[9] Vedi per esempio J. Solomon, Ann. de Phys. **16**, 411 (1931).

[10] Gött. Nachr. 1929, p. 100.

[11] Vedi anche B. van der Waerden, Gruppentheorische Methode in der Quantenmechanik, p. 82, Berlin, Julius Springer (1932); O. Laporte e G. Uhlenbeck, Phys. Rev. **37**, 1380 (1931).

Einstein-Minkowski possono essere popolati oltre che dai tensori anche dalla razza misteriosa degli spinori. Non solo si sarebbe generato per il primo spavento tutto lo schiamazzo sulla presunta “Maxwellizzabilità” delle equazioni di Dirac, ma anche il fin troppo acuto impiego dello spin dell'elettrone come “bussola giroscopica per il parallelismo a distanza di Einstein”, del quale per primo Fock[12] ha fatto piazza pulita, estendendo con la necessaria accuratezza l'apparato di calcolo del trasporto parallelo dai tensori *giustamente* agli spinori.

2. Non si potrebbe degnare qualcuno, che realmente domini questa materia, di esprimere in una forma leggibile anche per noi fisici vecchi ciò che è noto[13] per il gruppo delle *rotazioni reali*: in corrispondenza alla topologia del gruppo, le sue rappresentazioni irriducibili doppie e le quantità spinoriali che ad esse corrispondono, in particolare naturalmente per il gruppo delle rotazioni reali dello spazio *tetra*dimensionale? (Connessione tra tensori e quasispinori in questo caso.) Un riassunto chiaro, non professorale sarebbe assai desiderabile, in particolare se venisse data solo una traccia dei metodi di dimostrazione!

3. Non si potrebbe chiarire mediante una discussione competente fino a che punto è giusta la congettura di Weyl (Gruppentheorie und Quantenmechanik, p. 142), che in fisica giocano un ruolo fondamentale solo quei tensori, le cui componenti si trasformano secondo rappresentazioni *irriducibili* del gruppo delle rotazioni ovvero del gruppo di Lorentz? (Il tensore dell'energia e degli sforzi di un elettrone di Dirac fornisce, come ho sentito da Uhlenbeck, un controesempio.) Se si accettasse la congettura di Weyl, si desidererebbe che quel “librettino sul calcolo spinoriale e tensoriale” vi si attenesse.

4. È possibile che, nella classificazione delle relazioni fenomenologiche lineari omogenee nei cristalli, oltre ai tensori (vedi il libro prima citato di Voigt) giochino un ruolo anche gli spinori?

[12] Zeitschr. f. Phys. **57**, 261 (1929).

[13] vedi H. Weyl, Math. Zeitschr. **23**, 270 (1925); **24**, 328, 377, 789 (1926).

La teoria quantistica della radiazione[1]

A. Einstein[2]

L'analogia formale della curva della distribuzione cromatica della radiazione termica con la legge di distribuzione delle velocità di Maxwell è troppo evidente, perché potesse restare a lungo nascosta. Infatti già W. Wien nell'importante lavoro teorico, nel quale egli derivava la sua legge dello spostamento

$$\rho = \nu^3 f\left(\frac{\nu}{T}\right), \tag{1}$$

è stato portato da questa analogia ad una determinazione ulteriore della formula della radiazione. È noto che egli ha trovato la formula

$$\rho = \alpha\nu^3 \exp\left(-\frac{h\nu}{kT}\right), \tag{2}$$

che anche oggi si riconosce giusta come legge limite per grandi valori di ν/T (formula della radiazione di Wien). Oggi sappiamo che nessuna trattazione che sia costruita con la meccanica e con l'elettrodinamica classiche può produrre una formula della radiazione valida, ma che la teoria classica porta necessariamente alla formula di Rayleigh

$$\rho = \frac{k\alpha}{h}\nu^2 T. \tag{3}$$

Siccome poi Planck nella sua ricerca fondamentale ha basato la sua formula della radiazione

$$\rho = \alpha\nu^3 \frac{1}{\exp\left(\frac{h\nu}{kT}\right) - 1} \tag{4}$$

sull'ipotesi di elementi d'energia discreti, dalla quale la teoria dei quanti si è sviluppata in rapida successione, quella considerazione di Wien, che aveva portato all'equazione (2), è naturalmente ritornata nell'oblio. Ho trovato da poco una derivazione della formula della radiazione di Planck che utilizza l'originaria trattazione di Wien[3] e che si basa sull'ipotesi fondamentale della teoria dei quanti, nella quale ci si avvale della relazione tra la curva di Maxwell e la curva di distribuzione cromatica. Questa derivazione merita attenzione non solo per la sua semplicità, ma in particolare perché sembra portare una qualche chiarezza sul processo per noi così oscuro dell'emissione e dell'assorbimento della radiazione da parte della materia. Basandomi su alcune ipotesi, naturali dal punto di vista della teoria dei quanti, sull'emissione e sull'assorbimento di radiazione da parte delle molecole, mostro che molecole con una distribuzione di stati all'equilibrio termico secondo la teoria dei quanti stanno in equilibrio dinamico con la radiazione di Planck; si ottiene per

[1]Zur Quantentheorie der Strahlung, Physik. Zeitschr. **18**, 121-128 (1917).

[2]Stampato per la prima volta nelle Mitteilungen der Physikalischen Gesellschaft Zürich, Nr. **18**, 1916.

[3]Verh. d. Deutschen physikal. Gesellschaft Nr. **13/14**, 1916, p. 318. Nella presente ricerca sono ripetute le considerazioni della su citata dissertazione.

questa via la formula di Planck (4) in un modo sbalorditivamente semplice e generale. Essa risulta dalla condizione che la distribuzione tra gli stati dell'energia interna delle molecole prescritta dalla teoria dei quanti si deve stabilire solo a causa dell'assorbimento e dell'emissione di radiazione.

Se le ipotesi introdotte sull'azione reciproca di radiazione e materia toccano nel giusto, esse non devono fornire soltanto la giusta ripartizione statistica dell'energia interna delle molecole. Per assorbimento ed emissione di radiazione ha luogo infatti anche uno scambio d'impulso con le molecole; ne consegue che per la pura interazione della radiazione con le molecole si stabilisce una determinata distribuzione delle velocità di queste ultime. Essa deve evidentemente essere la stessa di quella distribuzione delle velocità, che le molecole assumono per l'azione esclusiva degli urti reciproci, cioè deve coincidere con la distribuzione di Maxwell. Si deve richiedere che l'energia cinetica media (per grado di libertà) che una molecola assume nel campo di radiazione di Planck di temperatura T sia uguale a $kT/2$; ciò deve valere indipendentemente dalla natura della molecola considerata e indipendentemente dalle frequenze da essa assorbite ed emesse. In questa dissertazione dimostreremo che questa importante condizione è effettivamente soddisfatta del tutto in generale; da ciò le nostre semplici ipotesi sui processi elementari di emissione e assorbimento ricevono un nuovo sostegno.

Perché il suddetto risultato valga occorre tuttavia una certa estensione delle ipotesi prima scelte a fondamento, che si riferiscono soltanto allo scambio dell'energia. Si pone la domanda: la molecola subisce un urto, quando assorbe o emette l'energia ε? Trattiamo a mo' d'esempio l'*Ausstrahlung* dal punto di vista dell'elettrodinamica classica. Quando un corpo irraggia l'energia ε, esso riceve un impulso di rinculo ε/c, quando tutta la quantità di radiazione ε è irraggiata nella stessa direzione. Ma se l'irraggiamento avviene con un processo spazialmente simmetrico, per esempio onde sferiche, non ha luogo alcun rinculo. Questa alternativa gioca un ruolo anche nella teoria quantistica della radiazione. Se una molecola per transizione da uno stato possibile secondo la teoria dei quanti ad un altro riceve l'energia ε sotto forma di radiazione, oppure cede l'energia in forma di radiazione, un siffatto processo elementare può esser pensato come parzialmente o totalmente orientato in senso spaziale, oppure come simmetrico (non orientato). *Ora si dimostra che perveniamo ad una teoria esente da contraddizioni solo se assumiamo quei processi elementari come processi totalmente orientati*; in ciò sta il risultato principale della trattazione che segue.

§1. Ipotesi fondamentale della teoria dei quanti. Distribuzione canonica degli stati.

Secondo la teoria dei quanti una molecola d'un certo tipo, a prescindere dalla sua orientazione e dal moto di traslazione, può ammettere solo una serie discreta di stati Z_1, $Z_2 \dots Z_n \dots$, la cui energia (interna) è ε_1, $\varepsilon_2 \dots \varepsilon_n \dots$. Se molecole di questo tipo appartengono ad un gas di temperatura T, la frequenza relativa W_n dello stato Z_n è data dalla corrispondente formula della distribuzione canonica della meccanica statistica

$$W_n = p_n \exp\left(-\frac{\varepsilon_n}{kT}\right). \tag{5}$$

In questa formula $k = R/N$ è la nota costante di Boltzmann, p_n un numero, indipendente da T, caratteristico per la molecola e per l'n-esimo stato quantico della stessa, che può essere indicato come il "peso" statistico di questo stato. La formula (5) può essere derivata dal principio di Boltzmann oppure per via puramente termodinamica. L'equazione (5) è l'espressione della generalizzazione più completa della legge della distribuzione delle velocità di Maxwell.

Gli ultimi progressi nei principi della teoria dei quanti si riferiscono alla determinazione teorica degli stati Z_n possibili secondo la teoria dei quanti, e dei loro pesi p_n. Per la presente ricerca di principio una determinazione più precisa degli stati quantici non è necessaria.

§2. Ipotesi sullo scambio d'energia mediante radiazione.

Siano Z_n e Z_m, secondo la teoria dei quanti, due stati possibili della molecola di gas, le cui energie ε_n e ε_m soddisfino alla diseguaglianza

$$\varepsilon_m > \varepsilon_n.$$

La molecola può essere in grado di passare dallo stato Z_n allo stato Z_m con l'assorbimento dell'energia della radiazione $\varepsilon_m - \varepsilon_n$; parimenti è possibile una transizione dallo stato Z_m allo stato Z_n con l'emissione di questa energia di radiazione. La radiazione in tal modo assorbita o emessa dalla molecola ha la frequenza ν caratteristica della combinazione di indici (m, n) considerata.

Riguardo alle leggi che sono competenti per questa transizione introduciamo alcune ipotesi che si ottengono trasferendo il comportamento noto secondo la teoria classica di un risuonatore di Planck a quello ancora sconosciuto della teoria dei quanti.

a) *Ausstrahlung.* Un risuonatore di Planck, che si trovi in oscillazione, secondo Hertz irraggia energia indipendentemente dal fatto che sia eccitato da un campo esterno o meno. Corrispondentemente una molecola può passare dallo stato Z_m allo stato Z_n per emissione dell'energia di radiazione $\varepsilon_m - \varepsilon_n$ di frequenza μ senza eccitazione mediante cause esterne. La probabilità che ciò avvenga veramente nel tempo elementare dt è

$$dW = A_m^n dt, \tag{A}$$

dove A_m^n indica una costante caratteristica per la combinazione di indici considerata.

La legge statistica assunta corrisponde a quella di una reazione radioattiva, il processo elementare supposto a quello di una reazione di quel tipo, in cui vengano emessi solo raggi γ. Non occorre assumere che questa transizione non richieda alcun tempo; questo tempo deve solo essere trascurabile rispetto ai tempi durante i quali la molecola è negli stati Z_1 eccetera.

b) *Einstrahlung.* Se un risuonatore di Planck si trova in un campo di radiazione, l'energia del risuonatore cambia perché il campo elettromagnetico della radiazione trasferisce lavoro sul risuonatore; questo lavoro può essere positivo o negativo a seconda delle fasi del risuonatore e del campo oscillante. In corrispondenza introduciamo le seguenti ipotesi di teoria dei quanti. Sotto l'azione della densità di radiazione ρ di frequenza ν una molecola può passare dallo stato Z_n allo stato Z_m, mentre la molecola riceve l'energia di radiazione $\varepsilon_m - \varepsilon_n$, secondo la legge di probabilità

$$dW = B_n^m \rho dt. \tag{B}$$

Per azione della radiazione è parimenti possibile una transizione $Z_m \to Z_n$, durante la quale viene liberata l'energia $\varepsilon_m - \varepsilon_n$, secondo la legge di probabilità

$$dW = B_m^n \rho dt. \tag{B'}$$

B_n^m e B_m^n sono costanti. Chiamiamo entrambi i processi "variazioni di stato per *Einstrahlung*".

Ci si interroga ora sull'impulso che viene scambiato dalla molecola nelle variazioni di stato considerate. Se un fascio di radiazione con una certa direzione compie lavoro su un risuonatore di Planck, al fascio di radiazione sarà sottratta l'energia corrispondente. A questa sottrazione d'energia corrisponde secondo la legge dell'impulso anche un trasferimento d'impulso dal fascio di radiazione al risuonatore. Quest'ultimo dà quindi luogo ad una forza nella direzione dei raggi del fascio di radiazione. Se l'energia trasferita è negativa anche l'azione della forza sul risuonatore è nella direzione opposta. Nel caso dell'ipotesi dei quanti ciò significa evidentemente quanto segue. Se per *Einstrahlung* con un fascio di radiazione ha luogo il processo $Z_n \to Z_m$ verrà trasferito alla molecola l'impulso $(\varepsilon_m - \varepsilon_n)/c$ nella direzione di propagazione del fascio. Nel processo di *Einstrahlung* $Z_m \to Z_n$ l'impulso trasferito ha lo stesso valore, ma la direzione opposta. Nel caso che la molecola sia esposta simultaneamente a più fasci di radiazione, assumiamo che l'intera energia $\varepsilon_m - \varepsilon_n$ di un processo elementare sia ricevuta o ceduta da uno di questi fasci di radiazione, in modo che anche in questo caso sia trasferito alla molecola l'impulso $(\varepsilon_m - \varepsilon_n)/c$.

Nell'emissione d'energia per *Ausstrahlung* nel caso del risuonatore di Planck in totale non viene trasferito alcun impulso al risuonatore, poiché secondo la teoria classica l'*Ausstrahlung* ha luogo con un'onda sferica. Ma si deve notare in proposito che possiamo arrivare ad una teoria quantistica esente da contraddizioni solo se assumiamo che anche il processo di *Ausstrahlung* sia un processo orientato. In ogni processo elementare di *Ausstrahlung* ($Z_m \to Z_n$) sarà trasferito alla molecola un impulso di valore $(\varepsilon_m - \varepsilon_n)/c$. Se quest'ultima è isotropa dobbiamo assumere che tutte le direzioni di *Ausstrahlung* siano equiprobabili. Se la molecola non è isotropa perveniamo alla stessa affermazione, quando l'orientamento in funzione del tempo venga scelto secondo la legge del caso. Un'ipotesi di questo tipo andrà fatta del resto anche per le leggi statistiche (B) e (B'), perché altrimenti le costanti B_n^m e B_m^n dovrebbero dipendere dalla direzione, cosa che possiamo evitare con quest'ipotesi di isotropia o di pseudoisotropia (in seguito a media temporale) della molecola.

§3. Derivazione della legge della radiazione di Planck.

Ci chiediamo ora quale densità attiva di radiazione ρ debba essere presente perché lo scambio di energia tra radiazione e molecole secondo le leggi statistiche (A), (B) e (B') non disturbi la distribuzione degli stati delle molecole secondo l'equazione (5). Per questo è necessario e sufficiente che in media nell'unità di tempo avvengano tanti processi elementari di tipo (B) quanti di tipo (A) e (B') insieme. Questa condizione porta secondo le (5), (A), (B), (B') per il processo elementare che corrisponde alla combinazione degli indici (m, n) all'equazione

$$p_n \exp\left(-\frac{\varepsilon_n}{kT}\right) B_n^m \rho = p_m \exp\left(-\frac{\varepsilon_m}{kT}\right) \left[B_m^n \rho + A_m^n\right].$$

Se inoltre ρ deve andare all'infinito con T, come assumeremo, tra le costanti B_n^m e B_m^n dovrà sussistere la relazione

$$p_n B_n^m = p_m B_m^n. \tag{6}$$

Otteniamo quindi come condizione dell'equilibrio dinamico l'equazione

$$\rho = \frac{\frac{A_m^n}{B_m^n}}{\exp\left[\frac{\varepsilon_m - \varepsilon_n}{kT}\right] - 1}. \tag{7}$$

Questa è la dipendenza della densità di radiazione dalla temperatura secondo la legge di Planck. Per la legge dello spostamento di Wien (1) ne consegue immediatamente che dev'essere

$$\frac{A_m^n}{B_m^n} = \alpha\nu^3 \tag{8}$$

e

$$\varepsilon_m - \varepsilon_n = h\nu, \tag{9}$$

dove α ed h sono costanti universali. Per determinare il valore numerico della costante α si deve avere una teoria esatta dei processi elettrodinamici e meccanici; ci si accontenta provvisoriamente di ricorrere alla trattazione del caso limite di Rayleigh delle alte temperature, per la quale la teoria classica vale nel limite.

L'equazione (9) rappresenta notoriamente la seconda regola fondamentale nella teoria di Bohr degli spettri, la quale con il completamento di Sommerfeld ed Epstein si può ben ritenere faccia parte del patrimonio sicuro della nostra scienza. Come ho mostrato, essa contiene implicitamente anche la legge dell'equivalenza fotochimica.

§4. Metodo per il calcolo del moto delle molecole in un campo di radiazione.

Ci rivolgiamo ora allo studio dei moti che le nostre molecole eseguono sotto l'influenza della radiazione. Ci serviamo di un metodo che è ben noto dalla teoria del moto browniano, e che da noi è stato più volte utilizzato in calcoli per lo studio dei moti in un campo di radiazione. Per semplificare il calcolo applichiamo quest'ultimo esclusivamente al caso in cui i moti avvengano solo in una direzione, la direzione X del sistema di coordinate. Ci accontentiamo inoltre di calcolare il valor medio dell'energia cinetica del moto, e quindi rinunciamo a dimostrare che queste velocità v sono distribuite secondo la legge di Maxwell. La massa M delle molecole sia sufficientemente grande perché le potenze superiori di v/c siano trascurabili rispetto alle inferiori; possiamo quindi applicare alla molecola la meccanica consueta. Senza una effettiva riduzione della generalità possiamo inoltre eseguire il calcolo come se gli stati con gli indici m ed n fossero i soli che la molecola può assumere.

L'impulso Mv di una molecola sperimenta nel tempo breve τ variazioni di due specie. Malgrado il fatto che la radiazione si comporti egualmente in tutte le direzioni, la molecola a causa del suo moto sperimenterà una forza che deriva dalla radiazione e che agisce opponendosi al moto. Sia questa uguale ad Rv, dove R è una costante da calcolare in seguito. Questa forza porterebbe la molecola alla quiete se l'irregolarità dell'azione della radiazione non avesse per conseguenza che nel tempo τ viene trasmesso alla molecola un impulso Δ di segno e di grandezza mutevole; l'azione non sistematica di questo, contrariamente a quanto accennato prima, manterrà un certo moto della molecola. Alla fine del tempo breve τ considerato l'impulso della molecola avrà il valore

$$Mv - Rv\tau + \Delta.$$

Poiché la distribuzione delle velocità deve rimanere costante nel tempo, il valore assoluto medio della quantità anzidetta deve essere uguale a quello della quantità Mv; i valori medi dei quadrati delle due quantità, estesi ad un tempo lungo o ad un gran numero di molecole, devono essere tra loro uguali:

$$\overline{(Mv - Rv\tau + \Delta)^2} = \overline{(Mv)^2}.$$

Poiché abbiamo tenuto conto separatamente nel calcolo dell'influenza sistematica di v sull'impulso della molecola, dobbiamo considerare trascurabile il valor medio $\overline{v\Delta}$. Sviluppando il primo membro dell'equazione si ottiene quindi

$$\overline{\Delta^2} = 2RM\overline{v^2}\tau. \tag{10}$$

Il valor medio $\overline{v^2}$, che la radiazione di temperatura T produce nelle nostre molecole mediante la sua interazione con esse deve essere uguale a quel valor medio $\overline{v^2}$ che spetta alla molecola di gas alla temperatura T secondo le leggi date dalla teoria cinetica dei gas. Infatti la presenza delle nostre molecole disturberebbe in caso contrario l'equilibrio termico tra la radiazione termica ed un gas dato a piacere della stessa temperatura. Dev'esser quindi

$$\frac{M\overline{v^2}}{2} = \frac{kT}{2}. \tag{11}$$

L'equazione (10) diventa quindi

$$\frac{\overline{\Delta^2}}{\tau} = 2RkT. \tag{12}$$

Lo studio sarà ora sviluppato come segue. Per una data radiazione $(\rho(\nu))$, $\overline{\Delta^2}$ e R saranno calcolabili con le nostre ipotesi sull'interazione tra radiazione e molecole. Sostituendo i risultati nella (12), quest'equazione dev'essere soddisfatta identicamente, quando ρ è espressa in funzione di ν e T secondo l'equazione di Planck (4).

§5. Calcolo di R.

Una molecola del tipo considerato si muova uniformemente con la velocità v lungo l'asse X del sistema di coordinate K. Chiediamo quale sia l'impulso trasmesso in media dalla radiazione alla molecola nell'unità di tempo. Per poterlo calcolare, dobbiamo valutare la radiazione da un sistema di coordinate K' che sia in quiete rispetto alla molecola considerata. Infatti le nostre ipotesi sull'emissione e sull'assorbimento le abbiamo formulate solo per molecole a riposo. La trasformazione al sistema K' è stata sviluppata più volte in letteratura, in particolare nella Berliner Dissertation di Mosengeil. Tuttavia ripeterò qui per completezza queste semplici considerazioni.

Relativamente a K la radiazione è isotropa, cioè la radiazione associata ad un certo angolo solido infinitesimo $d\kappa$ corrispondente alla direzione della radiazione, compresa nell'intervallo di frequenza $d\nu$ e per volume unitario è

$$\rho d\nu \frac{d\kappa}{4\pi}, \tag{13}$$

dove ρ dipende solo dalla frequenza ν, non dalla direzione. Questa radiazione così individuata corrisponde rispetto al sistema di coordinate K' ad una radiazione che è parimenti caratterizzata mediante un intervallo di frequenza $d\nu'$ e mediante un certo angolo solido $d\kappa'$. La densità di volume di questa radiazione così individuata è

$$\rho'\left(\nu', \varphi'\right) d\nu' \frac{d\kappa'}{4\pi}. \tag{13'}$$

ρ' è così definito. Esso dipende dalla direzione, la quale è definita in modo consueto mediante l'angolo φ' con l'asse X' e mediante l'angolo ψ' tra la proiezione sul piano $Y' - Z'$ e l'asse Y'. Questi angoli corrispondono agli angoli φ e ψ che in modo analogo fissano la direzione di $d\kappa$ rispetto a K.

È chiaro che tra la (13) e la (13') deve valere la stessa legge di trasformazione che vale per i quadrati delle ampiezze A^2 e A'^2 di un'onda piana della corrispondente direzione. Pertanto con l'approssimazione richiesta si ha

$$\frac{\rho'\left(\nu', \varphi'\right) d\nu' d\kappa'}{\rho\left(\nu\right) d\nu d\kappa} = 1 - 2\frac{v}{c}\cos\varphi \tag{14}$$

ovvero

$$\rho'\left(\nu', \varphi'\right) = \rho\left(\nu\right) \frac{d\nu}{d\nu'}\frac{d\kappa}{d\kappa'}\left[1 - 2\frac{v}{c}\cos\varphi\right]. \tag{14'}$$

La teoria della relatività dà inoltre le formule, valide all'approssimazione richiesta

$$\nu' = \nu\left[1 - \frac{v}{c}\cos\varphi\right] \tag{15}$$

$$\cos\varphi' = \cos\varphi - \frac{v}{c} + \frac{v}{c}\cos^2\varphi \tag{16}$$

$$\psi' = \psi. \tag{17}$$

Dalla (15) segue con l'approssimazione corrispondente,

$$\nu = \nu'\left(1 + \frac{v}{c}\cos\varphi'\right).$$

Quindi, ancora con l'approssimazione richiesta, risulta

$$\rho\left(\nu\right) = \rho\left(\nu' + \frac{v}{c}\nu'\cos\varphi'\right)$$

ovvero

$$\rho\left(\nu\right) = \rho\left(\nu'\right) + \frac{\partial\rho}{\partial\nu}\left(\nu'\right)\cdot\frac{v}{c}\nu'\cos\varphi'. \tag{18}$$

Inoltre secondo le (15), (16) e (17) è

$$\frac{d\nu}{d\nu'} = 1 + \frac{v}{c}\cos\varphi'$$

$$\frac{d\kappa}{d\kappa'} = \frac{\sin\varphi d\varphi d\psi}{\sin\varphi' d\varphi' d\psi'} = \frac{d(\cos\varphi)}{d(\cos\varphi')} = 1 - 2\frac{v}{c}\cos\varphi'.$$

In seguito a queste due relazioni e alla (18) la (14') diventa

$$\rho'(\nu',\varphi') = \left[(\rho)_\nu + \frac{v}{c}\nu'\cos\varphi'\left(\frac{\partial\rho}{\partial\nu}\right)_\nu\right]\left(1 - 3\frac{v}{c}\cos\varphi'\right). \tag{19}$$

Per mezzo della (19) e delle nostre ipotesi sull'*Ausstrahlung* e sull'*Einstrahlung* delle molecole possiamo facilmente calcolare l'impulso trasmesso in media alla molecola nell'unità di tempo. Prima di far questo dobbiamo tuttavia dire qualcosa a giustificazione della via intrapresa. Si può obiettare che le equazioni (14), (15), (16) sono fondate sulla teoria di Maxwell del campo elettromagnetico, non compatibile con la teoria dei quanti. Quest'obiezione riguarda tuttavia più la forma che la sostanza della questione. Infatti comunque si configuri la teoria dei processi elettromagnetici dovranno in ogni caso rimanere validi il principio di Doppler e la legge dell'aberrazione, quindi anche le equazioni (15) e (16). Inoltre la validità della relazione sull'energia (14) va sicuramente al di là della teoria ondulatoria; secondo la teoria della relatività questa legge di trasformazione vale per esempio anche per la densità d'energia di una massa, con densità a riposo infinitamente piccola, che si muova con velocità quasi pari a quella della luce. L'equazione (19) può quindi pretendere validità per ogni teoria della radiazione. -

Per la (B) la radiazione che corrisponde all'angolo solido $d\kappa'$ sarà per secondo

$$B_n^m \rho'(\nu',\varphi')\frac{d\kappa'}{4\pi}.$$

Processi elementari di *Einstrahlung* del tipo $Z_n \to Z_m$ danno luogo al fatto che la molecola dopo ognuno di tali processi ritorni immediatamente nello stato Z_n. Ma in realtà il tempo di permanenza in un secondo nello stato Z_n per la (5) è uguale a

$$\frac{1}{S}\, p_n \exp\left(-\frac{\varepsilon_n}{kT}\right),$$

dove si è posto per brevità

$$S = p_n \exp\left(-\frac{\varepsilon_n}{kT}\right) + p_m \exp\left(-\frac{\varepsilon_m}{kT}\right). \tag{20}$$

Il numero di questi processi al secondo risulta quindi in realtà

$$\frac{1}{S}\, p_n \exp\left(-\frac{\varepsilon_n}{kT}\right) B_n^m \rho'(\nu',\varphi')\frac{d\kappa'}{4\pi}.$$

Per ognuno di questi processi elementari sarà comunicato all'atomo nella direzione positiva dell'asse X' l'impulso

$$\frac{\varepsilon_m - \varepsilon_n}{c}\cos\varphi'.$$

In modo analogo troviamo, fondandoci sulla (B), che il corrispondente numero di processi elementari di *Einstrahlung* del tipo $Z_m \to Z_n$ è per secondo

$$\frac{1}{S}\, p_m \exp\left(-\frac{\varepsilon_m}{kT}\right) B_m^n \rho'(\nu',\varphi')\frac{d\kappa'}{4\pi},$$

e per ogni siffatto processo elementare sarà comunicato alla molecola l'impulso

$$-\frac{\varepsilon_m - \varepsilon_n}{c}\cos\varphi'.$$

L'impulso complessivamente comunicato per unità di tempo alla molecola per *Einstrahlung* è quindi, tenendo conto delle (6) e (9)

$$\frac{h\nu'}{cS}\, p_n B_n^m \left[\exp\left(-\frac{\varepsilon_n}{kT}\right) - \exp\left(-\frac{\varepsilon_m}{kT}\right)\right] \int \rho'(\nu', \varphi')\cos\varphi' \frac{d\kappa'}{4\pi},$$

dove l'integrazione va estesa su tutti gli angoli solidi elementari. Con l'esecuzione di quest'ultima si ottiene per la (19) il valore

$$-\frac{h\nu}{c^2 S}\left(\rho - \frac{1}{3}\nu\frac{\partial\rho}{\partial\nu}\right) p_n B_n^m \left[\exp\left(-\frac{\varepsilon_n}{kT}\right) - \exp\left(-\frac{\varepsilon_m}{kT}\right)\right]\cdot v.$$

La frequenza effettiva è indicata di nuovo con ν (al posto di ν').

Ma questa espressione rappresenta l'impulso complessivo ceduto in media nell'unità di tempo alla molecola che si muova con velocità v. È chiaro poi che i processi elementari di *Ausstrahlung* che hanno luogo senza l'intervento della radiazione, considerati dal sistema K', non possiedono una direzione privilegiata, e che quindi in media non possono trasmettere alla molecola nessun impulso. Otteniamo quindi come risultato finale della nostra trattazione:

$$R = \frac{h\nu}{c^2 S}\left(\rho - \frac{1}{3}\nu\frac{\partial\rho}{\partial\nu}\right) p_n B_n^m \exp\left(-\frac{\varepsilon_n}{kT}\right)\left[1 - \exp\left(-\frac{h\nu}{kT}\right)\right]. \tag{21}$$

§6. Calcolo di $\overline{\Delta^2}$.

È molto più facile calcolare l'effetto dell'irregolarità dei processi elementari sul comportamento meccanico delle molecole. Infatti si può utilizzare per questo calcolo una molecola a riposo con il grado di approssimazione che sin dall'inizio abbiamo tenuto per sufficiente.

Immaginiamo che accada un qualche evento, che trasmetta ad una molecola un impulso λ nella direzione X. Questo impulso è in casi diversi di segno diverso e di grandezza diversa. Vale tuttavia per λ una legge statistica tale che il valor medio $\overline{\lambda}$ è nullo. Siano λ_1, $\lambda_2 \ldots$ i valori dell'impulso che più cause che agiscono indipendentemente tra loro trasmettono nella direzione dell'asse X alla molecola, in modo che l'impulso complessivo trasmesso Δ sia dato da

$$\Delta = \sum \lambda_v.$$

Allora, poiché per i singoli λ_v i valori medi $\overline{\lambda}_v$ sono nulli:

$$\overline{\Delta^2} = \overline{\sum \lambda_v^2}. \tag{22}$$

Siano i valori medi $\overline{\lambda_v^2}$ dei singoli impulsi tra loro uguali ($= \overline{\lambda^2}$), e sia l il numero complessivo dei processi che producono impulso; allora vale la relazione

$$\overline{\Delta^2} = l\overline{\lambda^2}. \tag{22a}$$

Secondo le nostre ipotesi in ogni processo di *Einstrahlung* e di *Ausstrahlung* si comunica alla molecola l'impulso

$$\lambda = \frac{h\nu}{c} \cos\varphi.$$

Si indica con φ l'angolo tra l'asse X e una direzione scelta secondo la legge del caso. Si ottiene quindi

$$\overline{\lambda^2} = \frac{1}{3}\left(\frac{h\nu}{c}\right)^2. \tag{23}$$

Poiché assumiamo che tutti i processi elementari che hanno luogo siano da assumersi come eventi indipendenti, possiamo avvalerci della (22a). l è allora il numero di processi elementari che avvengono complessivamente nel tempo τ. Questo è il doppio del numero di processi di *Einstrahlung* $Z_n \to Z_m$ nel tempo τ. Risulta quindi

$$l = \frac{2}{S}\, p_n B_n^m \exp\left(-\frac{\varepsilon_n}{kT}\right)\rho\tau. \tag{24}$$

Dalle (23), (24) e (22) risulta

$$\frac{\overline{\Delta^2}}{\tau} = \frac{2}{3S}\left(\frac{h\nu}{c}\right)^2 p_n B_n^m \exp\left(-\frac{\varepsilon_n}{kT}\right)\rho. \tag{25}$$

§7. Risultato.

Per mostrare ora che gli impulsi esercitati dalla radiazione sulle molecole non disturbano affatto l'equilibrio termodinamico ci basta sostituire i valori calcolati (25) e (21) di $\overline{\Delta^2}/\tau$ e di R, e inoltre nella (21) la quantità

$$\left(\rho - \frac{1}{3}\nu\frac{\partial\rho}{\partial\nu}\right)\left[1 - \exp\left(-\frac{h\nu}{kT}\right)\right]$$

secondo la (4) va sostituita con $\rho h\nu/(3kT)$. Si mostra immediatamente che la nostra equazione fondamentale (12) è soddisfatta identicamente. -

Le considerazioni oramai concluse portano un forte sostegno alle ipotesi avanzate nel §2 sull'interazione tra materia e radiazione mediante processi di assorbimento e di emissione, ovvero mediante *Einstrahlung* e *Ausstrahlung*. A queste ipotesi sono stato portato dal tentativo di postulare nel modo possibilmente più semplice un comportamento della molecola secondo la teoria quantistica, che sia l'analogo di quello di un risuonatore di Planck della teoria classica. Dalle ipotesi quantiche generali per la materia si ottengono spontaneamente la seconda regola di Bohr (equazione (9)) e la formula della radiazione di Planck.

Della più grande importanza mi pare tuttavia il risultato relativo all'impulso trasmesso alla molecola per *Einstrahlung* e *Ausstrahlung*. Se si mutassero le nostre ipotesi riguardo a quest'ultimo, ne deriverebbe una violazione dell'equazione (12); non mi pare possibile restare in accordo con questa relazione imposta dalla teoria del calore altrimenti che in base alle nostre ipotesi. Possiamo considerare quanto segue come abbastanza sicuramente provato.

Si abbia un fascio di radiazione che fa assorbire o cedere (*Einstrahlung*) da una molecola la quantità d'energia $h\nu$ sotto forma di radiazione in un processo elementare; allora in ogni caso viene trasmesso alla molecola l'impulso $h\nu/c$, e precisamente nel caso di assorbimento di energia nella direzione di propagazione del fascio, nel caso di cessione nella direzione opposta. Se la molecola si trova sotto l'azione di più fasci di radiazione orientati, in un processo elementare l'*Einstrahlung* è sempre appartenente solo ad uno stesso fascio; questo fascio soltanto determina quindi la direzione dell'impulso trasmesso alla molecola.

Se la molecola subisce senza eccitazione esterna una perdita d'energia della quantità $h\nu$, cedendo quest'energia sotto forma di radiazione (*Ausstrahlung*), anche questo è un processo orientato. Non si ha *Ausstrahlung* in onde sferiche. La molecola subisce a causa del processo elementare di *Ausstrahlung* un impulso di rinculo dell'entità $h\nu/c$ in una direzione che nello stato attuale della teoria è determinata solo dal "caso".

Queste proprietà dei processi elementari imposte dall'equazione (12) fanno apparire la costruzione di un'autentica teoria quantistica della radiazione pressoché inevitabile. Il debole della teoria sta da un lato nel fatto che non ci porta più vicino alla connessione con la teoria ondulatoria, e dall'altro che lascia al "caso" il tempo e la direzione dei processi elementari; nonostante ciò io nutro piena fiducia nella validità della via intrapresa.

Qui deve trovar posto ancora un'osservazione generale. Quasi tutte le teorie della radiazione termica si fondano sulla considerazione delle interazioni tra radiazione e materia. Ma in generale ci si accontenta di considerare gli scambi di energia, senza tener conto degli scambi di impulso. Ci si sente facilmente autorizzati a ciò, poiché la piccolezza dell'impulso scambiato mediante la radiazione porta con sè che nella realtà quest'ultimo passa in seconda linea rispetto alle altre cause che provocano il moto. Ma per la trattazione teorica quelle piccole azioni sono da considerarsi completamente della stessa importanza di quelle cospicue dello scambio d'energia mediante la radiazione, poiché energia ed impulso sono tra loro collegati nel modo più stretto; si può perciò considerare corretta una teoria solo quando si è mostrato che l'impulso secondo essa trasmesso dalla radiazione alla materia porta a moti tali da essere consentiti dalla teoria del calore.

(ricevuto il 3 marzo 1917)

Considerazioni elementari sull'interpretazione dei fondamenti della meccanica quantistica[1]

A. Einstein

Institute for Advanced Study, Princeton, N.J.

L'essenza della situazione attuale io la vedo così: riguardo al formalismo matematico della teoria non esiste alcun dubbio, ma molti ce ne sono sull'interpretazione fisica delle sue asserzioni. In quale relazione sta la funzione ψ con la situazione concreta individuale, cioè con la situazione individuale di un singolo sistema? Ovvero: che cosa dice la funzione ψ sullo "stato reale" (individuale)?

Ora si può anzitutto dubitare che si possa in generale attribuire un senso a queste domande. Si può infatti assumere il seguente punto di vista: "reale" è solo il singolo risultato dell'osservazione, non un qualcosa di esistente obiettivamente nello spazio e nel tempo indipendentemente dall'atto dell'osservazione. Se si assume questo netto punto di vista positivistico, non c'è bisogno evidentemente di fare alcun pensiero su come lo "stato reale" debba essere interpretato nell'ambito della teoria dei quanti. Tale sforzo appare infatti come un tirar di scherma contro un fantasma.

Questo punto di vista positivistico netto ha tuttavia - se conseguentemente sviluppato - un'irreparabile debolezza: esso conduce a dichiarare vuote di significato tutte le proposizioni esprimibili col linguaggio. Si ha il diritto di dichiarare dotata di significato, ossia vera o falsa, una descrizione di un singolo risultato d'osservazione? Non è possibile che una tale descrizione sia fondata su bugie, ovvero su esperienze che noi possiamo interpretare come ricordo di sogni o come allucinazioni? La distinzione tra esperienze della veglia ed esperienze del sogno ha in generale un significato obiettivo? Alla fine restano "reali" solo le esperienze di un io senza una qualche possibilità di asserire qualcosa su di esse; infatti i concetti adoperati nelle asserzioni si rivelano ad un'analisi positivistica rigorosa senza eccezione vuoti di significato.

In verità i concetti indipendenti ed i sistemi di concetti utilizzati nelle nostre asserzioni sono creazioni umane, strumenti di lavoro che ci siamo creati da noi, la cui giustificazione e il cui valore consistono esclusivamente nel fatto che essi si lasciano coordinare alle esperienze "con profitto" (verifica). Altrimenti detto - questi strumenti di lavoro sono giustificati in quanto consentono di "spiegare"[2] le esperienze.

Solo da questo punto di vista della verifica si è autorizzati a giudicare concetti e sistemi di concetti. Ciò vale anche per i concetti "realtà fisica" ovvero "realtà del mondo esterno", "stato reale di un sistema". Non si ha a priori alcun diritto di postularli come necessari per il pensiero o di vietarli; ciò che decide è solo la verifica. Dietro queste parole simboliche sta un programma, che si è rivelato senz'altro determinante per lo sviluppo del pensiero fisico fino all'enunciazione della teoria dei quanti: si deve ricondurre tutto a oggetti ideali nell'ambito spaziotemporale ed alle relazioni in forma di legge che devono valere per questi oggetti. In questa

[1] Elementare Überlegungen zur Interpretation der Grundlagen der Quanten-Mechanik, Scientific Papers presented to Max Born, Hafner Publishing Company Inc., New York (1953), pp. 33-40.

[2] L'affinità linguistica tra i concetti di "wahr"e di "sich bewähren" si fonda su un'affinità di essenza; solo, questa constatazione non deve essere fraintesa in senso utilitaristico.

descrizione non compare che cosa si riferisca ad una conoscenza empirica riguardo a questi oggetti. Alla luna si attribuisce una posizione spaziale (relativamente ad un opportuno sistema di coordinate) ad ogni determinato tempo, indipendentemente dal fatto che ci siano o meno delle osservazioni su questa posizione. Si intende questo tipo di descrizione quando si parla della descrizione fisica di un "mondo reale esterno", riguardo alla quale è anche sempre possibile la scelta delle pietre da costruzione elementari (punto materiale, campo, ecc.) che si prendono a fondamento.

Della validità di questo programma non si è dubitato seriamente da parte dei fisici, finché sembrava che tutto quello che interviene nella descrizione dovesse in linea di principio potersi determinare empiricamente in ogni singolo caso. Che questa fosse un'illusione è stato mostrato per la prima volta nell'ambito dei fenomeni quantistici da Heisenberg in modo convincente per i fisici.

Ora il concetto di "realtà fisica" è diventato problematico e si son poste le domande, che cosa essa veramente sia, che cosa cerchi di descrivere la fisica teorica (mediante la meccanica quantistica), e a che cosa si riferiscano le leggi da essa enunciate. A queste domande vengono date risposte assai diverse.

Per avvicinarci ad una risposta, consideriamo che cosa afferma la meccanica quantistica sui macro-sistemi, cioè su quegli oggetti che noi avvertiamo come "direttamente percepibili". Di tali oggetti sappiamo infatti che essi e le leggi per essi valide si possono rappresentare mediante la fisica classica con precisione notevole, anche se non illimitata. Non dubitiamo che per tali oggetti ad ogni tempo si abbia una configurazione spaziale reale (posizione) come pure una velocità (ovvero un impulso), cioè una *situazione reale* - il tutto con l'approssimazione consentita dalla struttura quantica.

Ci chiediamo: la meccanica dei quanti (con l'approssimazione richiesta) implica la descrizione reale prodotta dalla meccanica classica per i corpi macroscopici? Ovvero - qualora non si possa rispondere semplicemente a questa domanda con un "sì" - in che senso ciò accade? Esamineremo ciò con un esempio concreto.

L'esempio particolare

Il sistema consista di una sfera di circa 1 mm. di diametro, che va avanti e indietro (lungo l'asse x di un sistema di coordinate) tra due pareti parallele (distanti tra loro un metro circa). Gli urti siano idealmente elastici. In questo macro-sistema idealizzato pensiamo di sostituire le pareti con espressioni dell'energia potenziale dall'andamento "ripido", nelle quali entrino solo le coordinate del punto materiale che rappresenta la sfera. "Con astuzia e perfidia" si faccia in modo che questi processi di riflessione non diano luogo ad alcun accoppiamento tra la coordinata x del baricentro della sfera e le coordinate "interne" di questa (incluse le coordinate angolari). Otteniamo così che per lo scopo da noi perseguito la posizione della sfera (a prescindere dal suo raggio) può essere descritta mediante la sola x.

Nel senso della meccanica quantistica si tratta di un processo con energia esattamente determinata. L'onda di de Broglie (funzione ψ) è quindi armonica nella coordinata temporale. Essa è inoltre diversa da zero solo tra $x = -l/2$ e $x = +l/2$. Agli estremi del cammino la connessione continua con la funzione ψ nulla al di là del cammino richiede che per $x = \pm l/2$ debba essere $\psi = 0$.

La funzione ψ è quindi un'onda stazionaria, che si può rappresentare all'interno del cammino mediante la sovrapposizione di due onde armoniche che si propagano in direzione opposta:

$$\psi = \frac{1}{2} A \exp\left[i\left(at - bx\right)\right] + \frac{1}{2} A \exp\left[i\left(at + bx\right)\right] \tag{1}$$

ovvero

$$\psi = A \exp(iat) \cos\left(bx\right). \tag{1a}$$

Si vede dalla (1a) che il fattore A nei due termini dev'essere scelto uguale, perché si possano soddisfare le condizioni al contorno agli estremi del segmento. Senza restrizione della generalità A può esser scelto reale. Secondo l'equazione di Schrödinger b è determinato da [...] e dalla massa m. Pensiamo il fattore A normalizzato nel modo noto.

Perché un confronto dell'esempio con il corrispondente problema classico sia fruttuoso dobbiamo assumere che la lunghezza d'onda di de Broglie $2\pi/b$ sia piccola rispetto ad l.

Per il significato della funzione ψ assumiamo ora nel modo consueto l'interpretazione probabilistica di Born:

$$W = \int \psi\overline{\psi} dx = A^2 \int \cos^2\left(bx\right) dx.$$

Questa è la probabilità che la coordinata x del baricentro della sfera giaccia in un dato intervallo Δx. Essa è - a prescindere da una "struttura fine" ondulatoria, la cui realtà fisica è accertata - semplicemente cost.Δx.

Come va ora con la probabilità dei valori dell'impulso ovvero della velocità della sfera? Queste probabilità si otterranno mediante sviluppo di Fourier della ψ. Se la (1) valesse da $-\infty$ a $+\infty$, la (1) sarebbe già lo sviluppo di Fourier cercato. Darebbe due valori ben definiti dell'impulso uguali e di segno opposto con uguale probabilità. Ma poiché i due treni d'onda sono limitati, si produce per ogni termine uno sviluppo continuo di Fourier con una regione spettrale tanto più stretta, quanto più grande è il numero di lunghezze d'onda di de Broglie contenute nel tratto l. Si conclude quindi che sono possibili solo due valori quasi ben definiti dell'impulso uguali e di segno opposto - valori che del resto coincidono con quelli del caso classico; inoltre entrambi hanno la stessa probabilità.

Questi due risultati statistici sono quindi, a prescindere dalle piccole deviazioni determinate dalla struttura quantica, gli stessi di quelli che si ottengono nel caso della teoria classica per una "totalità temporale" di sistemi. Pertanto fin qui la teoria è interamente soddisfacente.

Ma ora ci chiediamo: questa teoria può produrre una descrizione reale di un caso individuale? A questa domanda dobbiamo rispondere con un "no". Per questa conclusione è essenziale che si abbia a che fare con un "macro-sistema". Infatti con un macro-sistema siamo sicuri che esso si trova ad ogni tempo in uno "stato reale", che è descritto in modo approssimativamente giusto mediante la meccanica classica. Il macro-sistema individuale del tipo da noi trattato ha quindi ad ogni tempo una coordinata del baricentro quasi determinata - quanto meno mediata su un intervallo di tempo piccolo - e un impulso quasi determinato (determinato anche riguardo al segno). Nessuno di questi due risultati si può ottenere dalla funzione ψ (1). Da questa si possono ottenere (per mezzo dell'interpretazione di Born) solo quei risultati, che si riferiscono ad una *totalità statistica* di sistemi del tipo considerato.

Il fatto che per il macro-sistema considerato non succeda che ogni funzione ψ che soddisfi l'equazione di Schrödinger corrisponda approssimativamente alla descrizione reale nel senso della meccanica classica è particolarmente chiaro quando si tratti una funzione ψ che consiste di una sovrapposizione di due soluzioni del tipo (1), le cui frequenze (ovvero energie) siano notevolmente diverse tra loro. Infatti ad una tale sovrapposizione non corrisponde alcun caso reale della meccanica classica (ma ben tuttavia una totalità statistica di tali casi reali nel senso dell'interpretazione di Born).

Generalizzando concludiamo: la meccanica quantistica descrive totalità di sistemi, non il sistema individuale. La descrizione mediante la funzione ψ è in questo senso una descrizione incompleta del sistema singolo, non una descrizione dello stato reale di questo.

Osservazione: contro questa conclusione si potrebbe opporre quanto segue. Il caso da noi trattato di estrema nettezza in frequenza della funzione ψ è un caso limite per il quale il requisito dell'analogia con un problema della meccanica classica potrebbe ben in via eccezionale non valere. Se si consente un intervallo finito, anche se piccolo, di frequenze temporali, si può ottenere, con un'opportuna scelta delle ampiezze e delle fasi delle funzioni ψ sovrapposte, che la funzione ψ risultante abbia approssimativamente una posizione ed un impulso precisi. Non si potrebbe cercare di restringere secondo questo punto di vista le funzioni ψ ammissibili, e ottenere così che le funzioni ψ consentite possano essere interpretate come rappresentazione del sistema singolo?

Questa possibilità dev'essere negata in base al fatto che una tale rappresentazione non si può ottenere per tutti i tempi. -

La circostanza che l'equazione di Schrödinger assieme all'interpretazione di Born non conduce ad una descrizione dello stato reale del sistema singolo stimola naturalmente la ricerca di una teoria che sia esente da questa limitazione.

Ci sono finora due tentativi in questa direzione, che hanno in comune il mantenimento dell'equazione di Schrödinger e l'abbandono dell'interpretazione di Born. Il primo tentativo risale a de Broglie ed è stato ulteriormente sviluppato da Bohm con molta acutezza.

Come Schrödinger nella sua ricerca originale deriva l'equazione d'onda per analogia con la meccanica classica (linearizzazione dell'equazione di Jacobi della meccanica analitica), altrettanto si dovrà fondare sull'analogia l'equazione di moto del singolo sistema quantizzato - appoggiandosi ad una soluzione ψ dell'equazione di Schrödinger. La regola è questa. Si porti ψ nella forma

$$\psi = R \exp(iS).$$

Così si ottengono da ψ le funzioni (reali) delle coordinate R ed S. La derivata di S rispetto alle coordinate deve dare gli impulsi ovvero le velocità del sistema in funzione del tempo, quando per un valore determinato del tempo siano date le coordinate del sistema individuale preso in esame.

Un'occhiata alla (1a) mostra che nel nostro caso $\partial S/\partial x$ si annulla, e quindi si annulla anche la velocità. Questa obiezione, del resto mossa già da un quarto di secolo da Pauli contro questo tentativo teorico, è particolarmente grave nel caso del nostro esempio. L'annullarsi della velocità contraddice infatti il requisito ben fondato, che nel caso di un macro-sistema il moto debba coincidere approssimativamente con quello che deriva dalla meccanica classica.

Il secondo tentativo di raggiungere una descrizione reale del sistema singolo sulla base dell'equazione di Schrödinger è stato compiuto di recente da Schrödinger stesso. Il suo pensiero in breve è questo. La funzione ψ rappresenta da sè la realtà e non c'è bisogno dell'interpretazione statistica di Born. Le strutture atomiche, sulle quali finora il campo ψ doveva dire qualcosa, non esistono affatto, per lo meno non come strutture localizzate. Questo, trasferito al nostro macro-sistema, significa: i corpi macroscopici come tali non esistono affatto; in ogni caso non esiste - neppure in senso approssimato - qualcosa come la posizione del loro baricentro ad un tempo determinato. Anche qui si abbandona il requisito che la descrizione secondo la teoria dei quanti di un macro-sistema debba coincidere approssimativamente con la corrispondente descrizione secondo la meccanica classica.

Il risultato della nostra trattazione è questo. La sola interpretazione finora accettabile dell'equazione di Schrödinger è l'interpretazione statistica data da Born. Questa non fornisce tuttavia alcuna descrizione reale per il sistema singolo, ma solo asserzioni statistiche sulla totalità dei sistemi.

Secondo la mia opinione non è soddisfacente in linea di principio porre a fondamento della fisica un simile atteggiamento teorico, tanto più che non è possibile rinunciare alla descrivibilità oggettiva del *macro*-sistema individuale (descrizione dello "stato reale") senza che l'immagine del mondo fisico si dissolva per così dire in una nebbia. In conclusione è del tutto irrinunciabile l'idea che la fisica debba sforzarsi di dare una descrizione reale del sistema singolo. La natura come un tutto può esser pensata solo come un sistema individuale (che esiste unico) e non come una "totalità di sistemi".

Interpretazione delle relazioni cinematiche e meccaniche secondo la teoria dei quanti[1]

W. Heisenberg a Gottinga.

(ricevuto il 29 luglio 1925)

Nel lavoro si cercherà di ottenere i fondamenti per una meccanica della teoria dei quanti che sia basata esclusivamente su relazioni tra quantità osservabili in linea di principio.

È noto che contro le regole formali che in generale si utilizzano nella teoria dei quanti per calcolare quantità osservabili (per esempio l'energia nell'atomo di idrogeno) si può sollevare la grave obiezione che quelle regole di calcolo contengono come elemento essenziale relazioni tra quantità che apparentemente non possono essere osservate in linea di principio (come per esempio posizione, periodo dell'elettrone), che quindi a quelle regole manca evidentemente ogni fondamento fisico chiaro, purché non si voglia ancor sempre attaccarsi alla speranza che quelle quantità finora inosservabili possano forse in seguito essere rese accessibili sperimentalmente. Si potrebbe considerare questa speranza come giusta se le suddette regole fossero tra loro coerenti e applicabili ad un dominio precisamente definito di problemi della teoria dei quanti. Ma l'esperienza mostra che solo l'atomo di idrogeno e l'effetto Stark di quest'atomo ubbidiscono a quelle regole formali, e che già nel problema dei "campi incrociati" (atomo di idrogeno in campi elettrico e magnetico di direzioni diverse) appaiono difficoltà fondamentali, che la reazione dell'atomo a campi variabili periodicamente non può certamente essere descritta con le regole suddette, e che infine un'estensione delle regole quantiche alla trattazione dell'atomo con più elettroni si è dimostrata impossibile. È divenuto abituale indicare questi fallimenti delle regole della teoria dei quanti, che erano caratterizzate proprio dall'applicazione della meccanica classica, come scostamento dalla meccanica classica. Ma questa designazione non può affatto considerarsi sensata, se si pensa che già la condizione di Einstein-Bohr delle frequenze (valida del tutto in generale) rappresenta un rifiuto così totale della meccanica classica o meglio, dal punto di vista della teoria ondulatoria, della cinematica che sta alla base di questa meccanica, che anche nei problemi più semplici di teoria dei quanti non si può assolutamente pensare ad una validità della meccanica classica. In questa situazione mi sembra più consigliabile abbandonare completamente quella speranza in un'osservazione delle quantità finora inosservabili (come posizione, periodo dell'elettrone), quindi al tempo stesso ammettere che l'accordo parziale delle suddette regole quantiche con l'esperienza sia più o meno casuale, e cercare di costruire una meccanica della teoria dei quanti analoga alla meccanica classica, nella quale intervengano solo relazioni tra quantità osservabili. Come i più importanti, primi postulati di una siffatta meccanica della teoria dei quanti si possono considerare accanto alla condizione delle frequenze la teoria della dispersione di Kramers[2] ed i lavori[3] che costruiscono oltre a partire da questa teoria. Nel seguito cercheremo

[1] Über quantentheoretische Umdeutung kinematischer und mechanischer Beziehungen, Zeitschr. f. Phys. **33**, 879-893 (1925).

[2] H. v. Kramers, Nature **113**, 673, 1924.

[3] M. Born, ZS. f. Phys. **26**, 379, 1924. H.A. Kramers, W. Heisenberg, ZS. f. Phys. **31**, 681, 1925. M. Born, P. Jordan, ZS. f. Phys. (in stampa).

di proporre alcune relazioni quantomeccaniche nuove e le utilizzeremo nella trattazione completa di alcuni problemi particolari. Ci limiteremo in questo a problemi con un grado di libertà.

§1. Nella teoria classica la radiazione di un elettrone in moto (nella zona d'onda, cioè con $\mathfrak{E} \sim \mathfrak{H} \sim 1/r$) non è data solo dalle espressioni:

$$\mathfrak{E} = \frac{e}{r^3c^2}\left[\mathfrak{r}\left[\mathfrak{r}\dot{\mathfrak{v}}\right]\right],$$
$$\mathfrak{H} = \frac{e}{r^2c^2}\left[\dot{\mathfrak{v}}\mathfrak{r}\right],$$

ma in ulteriore approssimazione intervengono ancora termini per esempio della forma

$$\frac{e}{rc^3}\dot{\mathfrak{v}}\mathfrak{v},$$

che si possono indicare come "radiazione di quadrupolo"; in approssimazione ancora più alta termini per esempio della forma

$$\frac{e}{rc^4}\dot{\mathfrak{v}}\mathfrak{v}^2;$$

in questo modo l'approssimazione si può spingere avanti a piacere (in quanto sopra $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{H}$ indicano le intensità di campo nel punto corrente, e la carica dell'elettrone, $\mathfrak{r}$ la distanza dell'elettrone dal punto corrente, $\mathfrak{v}$ la velocità dell'elettrone).

Ci si può chiedere come si devono considerare nella teoria dei quanti quei termini superiori. Poiché nella teoria classica le approssimazioni superiori possono essere calcolate facilmente quando sia dato il moto dell'elettrone ovvero la sua rappresentazione di Fourier, ci si attenderà l'analogo nella teoria dei quanti. Questo problema non ha niente a che fare con l'elettrodinamica, ma è, e questo ci pare particolarmente importante, di natura puramente cinematica; possiamo porlo nella forma più semplice così: sia data una grandezza della teoria dei quanti che compare al posto della grandezza classica $x(t)$; quale grandezza della teoria dei quanti appare allora al posto di $x(t)^2$?

Prima di poter rispondere a questa domanda dobbiamo ricordarci che nella teoria dei quanti non era possibile associare all'elettrone un punto nello spazio in funzione del tempo per mezzo di quantità osservabili. Ma anche nella teoria dei quanti si può ben associare all'elettrone un irraggiamento; questa radiazione sarà descritta secondo la teoria dei quanti in primo luogo mediante le frequenze che compaiono come funzioni di due variabili, nella forma:

$$\nu(n, n-\alpha) = \frac{1}{h}\left\{W(n) - W(n-\alpha)\right\},$$

nella teoria classica nella forma:

$$\nu(n, \alpha) = \alpha \cdot \nu(n) = \alpha \frac{1}{h}\frac{dW}{dn}.$$

(Qui si è posto $n \cdot h = J$, una delle costanti canoniche).

Come caratteristiche per il confronto della teoria classica con la teoria quantistica riguardo alle frequenze si possono considerare le relazioni di combinazione:

classicamente:

$$\nu(n, \alpha) + \nu(n, \beta) = \nu(n, \alpha + \beta).$$

quantisticamente:

$$\nu(n, n - \alpha) + \nu(n - \alpha, n - \alpha - \beta) = \nu(n, n - \alpha - \beta)$$

$$\text{ovvero } \nu(n - \beta, n - \alpha - \beta) + \nu(n, n - \beta) = \nu(n, n - \alpha - \beta).$$

Accanto alle frequenze sono in secondo luogo necessarie per la descrizione della radiazione le ampiezze; le ampiezze si possono assumere come vettori complessi (ciascuno con sei componenti indipendenti) e determinano polarizzazione e fase. Anch'esse sono funzioni delle due variabili n ed α, di modo che la parte in questione della radiazione sarà data dall'espressione seguente:

quantisticamente:

$$\mathrm{Re}\left\{\mathfrak{A}(n, n - \alpha) \exp\left[i\omega(n, n - \alpha)t\right]\right\}. \tag{1}$$

classicamente:

$$\mathrm{Re}\left\{\mathfrak{A}_\alpha(n) \exp\left[i\omega(n) \cdot \alpha t\right]\right\}. \tag{2}$$

Non pare a prima vista che alla fase contenuta in $\mathfrak{A}$ si confaccia un significato fisico nella teoria dei quanti, poiché le frequenze della teoria dei quanti in generale non sono commensurabili con le armoniche superiori. Ma vedremo immediatamente che la fase anche nella teoria dei quanti ha un significato preciso, analogo a quello nella teoria classica. Consideriamo ora una determinata quantità $x(t)$ nella teoria classica; la possiamo pensare rappresentata mediante un insieme di quantità della forma

$$\mathfrak{A}_\alpha(n) \exp\left[i\omega(n) \cdot \alpha t\right],$$

che, a seconda che il moto sia periodico o no, riunite in una somma o in un integrale rappresentano $x(t)$:

$$\begin{aligned} x(n, t) &= \sum_{\alpha=-\infty}^{+\infty} \mathfrak{A}_\alpha(n) \exp\left[i\omega(n) \cdot \alpha t\right], \\ x(n, t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \mathfrak{A}_\alpha(n) \exp\left[i\omega(n) \cdot \alpha t\right] d\alpha. \end{aligned} \tag{2a}$$

Un modo siffatto di riunire le corrispondenti quantità della teoria dei quanti appare, a motivo dell'uguale importanza delle quantità n, $n - \alpha$ impossibile senza arbitrarietà e perciò non sensato; ma si può considerare la totalità delle quantità

$$\mathfrak{A}(n, n - \alpha) \exp\left[i\omega(n, n - \alpha)t\right]$$

come rappresentativa della quantità $x(t)$, e cercare di rispondere poi alla domanda: con che cosa si rappresenta la quantità $x(t)^2$?

La risposta classica è evidentemente:

$$\mathfrak{B}_\beta(n)\exp\left[i\omega(n)\beta t\right]=\sum_{\alpha=-\infty}^{+\infty}\mathfrak{A}_\alpha\mathfrak{A}_{\beta-\alpha}\exp\left[i\omega(n)(\alpha+\beta-\alpha)t\right]\tag{3}$$

$$\text{ovvero }=\int_{-\infty}^{+\infty}\mathfrak{A}_\alpha\mathfrak{A}_{\beta-\alpha}\exp\left[i\omega(n)(\alpha+\beta-\alpha)t\right]d\alpha,\tag{4}$$

e quindi

$$x(t)^2=\sum_{\beta=-\infty}^{+\infty}\mathfrak{B}_\beta(n)\exp\left[i\omega(n)\beta t\right]\tag{5}$$

$$\text{ovvero }=\int_{-\infty}^{+\infty}\mathfrak{B}_\beta(n)\exp\left[i\omega(n)\beta t\right]d\beta.\tag{6}$$

Dal punto di vista della teoria dei quanti l'ipotesi più semplice e naturale pare quella di sostituire le relazioni (3, 4) con le seguenti:

$$\begin{aligned}&\mathfrak{B}(n,n-\beta)\exp\left[i\omega(n,n-\beta)t\right]\\&=\sum_{\alpha=-\infty}^{+\infty}\mathfrak{A}(n,n-\alpha)\mathfrak{A}(n-\alpha,n-\beta)\exp\left[i\omega(n,n-\beta)t\right]\end{aligned}\tag{7}$$

$$\text{ovvero }=\int_{-\infty}^{+\infty}d\alpha\mathfrak{A}(n,n-\alpha)\mathfrak{A}(n-\alpha,n-\beta)\exp\left[i\omega(n,n-\beta)t\right],\tag{8}$$

e proprio questo modo di combinare risulta quasi spontaneamente dalla relazione di combinazione delle frequenze. Se si fanno queste ipotesi (7) e (8) si riconosce anche che le fasi delle $\mathfrak{A}$ definite dalla teoria dei quanti hanno un significato fisico altrettanto grande che nella teoria classica: solo l'origine del tempo e quindi una costante di fase comune a tutte le $\mathfrak{A}$ è arbitraria e priva di significato fisico; tuttavia le fasi delle singole $\mathfrak{A}$ intervengono in modo essenziale[4] nella quantità $\mathfrak{B}$. Un'interpretazione geometrica di tali relazioni di fase della teoria dei quanti in analogia con la teoria classica non sembra per il momento possibile.

Se ci interroghiamo inoltre sulla rappresentazione della quantità $x(t)^3$, troviamo senza difficoltà:

classicamente:

$$\mathfrak{C}(n,\gamma)=\sum_{\alpha=-\infty}^{+\infty}\sum_{\beta=-\infty}^{+\infty}\mathfrak{A}_\alpha(n)\mathfrak{A}_\beta(n)\mathfrak{A}_{\gamma-\alpha-\beta}(n),\tag{9}$$

[4]Vedasi anche H.A. Kramers e W. Heisenberg, l.c. Nell'espressione là utilizzata per il momento disperdente indotto le fasi intervengono in modo essenziale.

quantisticamente:

$$(10)\quad \mathfrak{C}(n, n-\gamma) = \sum_{\alpha=-\infty}^{+\infty} \sum_{\beta=-\infty}^{+\infty} \mathfrak{A}(n, n-\alpha)\mathfrak{A}(n-\alpha, n-\alpha-\beta)\mathfrak{U}(n-\alpha-\beta, n-\gamma)$$

ovvero gli integrali corrispondenti.

In modo analogo si possono rappresentare secondo la teoria dei quanti tutte le quantità della forma $x(t)^n$, ed evidentemente quando sia data una qualche funzione $f[x(t)]$ si può sempre, se questa funzione è sviluppabile in serie di potenze di x, trovare l'analogo della teoria dei quanti. Sorge tuttavia una difficoltà essenziale quando consideriamo due quantità $x(t)$, $y(t)$ e ci interroghiamo sul prodotto $x(t)y(t)$.

Sia $x(t)$ caratterizzata da $\mathfrak{A}$, $y(t)$ da $\mathfrak{B}$, allora si ottiene come rappresentazione di $x(t) \cdot y(t)$:

classicamente:

$$\mathfrak{C}_\beta(n) = \sum_{\alpha=-\infty}^{+\infty} \mathfrak{A}_\alpha(n)\mathfrak{B}_{\beta-\alpha}(n).$$

quantisticamente:

$$\mathfrak{C}(n, n-\beta) = \sum_{\alpha=-\infty}^{+\infty} \mathfrak{A}(n, n-\alpha))\mathfrak{B}(n-\alpha, n-\beta).$$

Mentre classicamente $x(t) \cdot y(t)$ sarà sempre uguale a $y(t)x(t)$, in generale ciò non capita nella teoria dei quanti. - In casi particolari, per esempio nella rappresentazione di $x(t)x(t)^2$, questa difficoltà non compare.

Quando si tratta, come nella questione posta all'inizio di questo paragrafo, della rappresentazione della forma

$$v(t)\dot{v}(t),$$

per la teoria dei quanti si dovrà sostituire $v\dot{v}$ con $(v\dot{v} + \dot{v}v)/2$, per ottenere che $v\dot{v}$ risulti come derivata di $v^2/2$. Analogamente si possono sempre dare in modo naturale i valori medi secondo la teoria dei quanti, i quali però sono ipotetici in grado ancor più alto che le formule (7) e (8).

A prescindere dalla difficoltà prima descritta formule del tipo (7), (8) potrebbero bastare in generale ad esprimere anche l'interazione degli elettroni in un atomo mediante le ampiezze caratteristiche.

§2. Dopo queste considerazioni che avevano per oggetto la cinematica della teoria dei quanti passeremo al problema meccanico, che ha per scopo la determinazione di $\mathfrak{A}$, ν, W dalle forze date del sistema. Nella teoria usata finora questo problema viene risolto in due passi:

1. Integrazione dell'equazione di moto

$$(11)\qquad \ddot{x} + f(x) = 0.$$

2. Determinazione della costante nei moti periodici mediante

$$(12)\qquad \oint p\,dq = \oint m\dot{x}\,dx = J\ (= nh).$$

Se ci si propone di costruire una meccanica della teoria dei quanti che sia il più possibile analoga a quella classica è assai naturale trasferire direttamente l'equazione del moto (11) nella teoria dei quanti, per la qual cosa è solo necessario - per non discostarsi dal fondamento certo delle quantità osservabili in linea di principio - in luogo delle quantità $\ddot{x}$, $f(x)$ porre le loro rappresentanti della teoria dei quanti note dal §1. Nella teoria classica è possibile cercare la soluzione della (11) mediante l'ipotesi che x sia una serie di Fourier o un integrale di Fourier con coefficienti (e frequenze) indeterminati; otteniamo però allora in generale infinite equazioni con infinite incognite ovvero equazioni integrali, che solo in casi speciali si possono trasformare in semplici formule di ricorrenza per le $\mathfrak{A}$. Nella teoria dei quanti siamo tuttavia provvisoriamente condotti a questo tipo di soluzione della (11) poiché, come prima detto, non si può definire nessuna funzione della teoria dei quanti che sia l'analogo diretto della funzione $x(n,t)$.

Ciò ha per conseguenza che la soluzione secondo la teoria dei quanti della (11) è eseguibile immediatamente solo nei casi più semplici. Prima di addentrarci in tali esempi semplici si deve ancora derivare la determinazione secondo la teoria dei quanti della costante della (12). Assumiamo quindi che il moto (classicamente) sia periodico:

$$x = \sum_{\alpha=-\infty}^{+\infty} a_\alpha(n) \exp\left[i\alpha\omega_n t\right]; \tag{13}$$

allora si ha

$$m\dot{x} = m \sum_{\alpha=-\infty}^{+\infty} a_\alpha(n) i\alpha\omega_n \exp\left[i\alpha\omega_n t\right]$$

e

$$\oint m\dot{x}dx = \oint m\dot{x}^2 dt = 2\pi m \sum_{\alpha=-\infty}^{+\infty} a_\alpha(n) a_{-\alpha}(n)\alpha^2\omega_n.$$

Poichè inoltre $a_{-\alpha}(n) = \overline{a_\alpha(n)}$ (x dev'essere reale), risulta

$$\oint m\dot{x}^2 dt = 2\pi m \sum_{\alpha=-\infty}^{+\infty} |a_\alpha(n)|^2\alpha^2\omega_n. \tag{14}$$

Finora per lo più quest'integrale di fase lo si è posto uguale ad un multiplo intero di h, cioè uguale ad $n.h$; ma una tale condizione non solo la si introduce in modo assai forzato nel calcolo meccanico; essa appare arbitraria già dal punto di vista usato finora, in base al principio di corrispondenza; infatti secondo la corrispondenza i J sono fissati come multipli interi di h solo a meno di una costante additiva, e al posto della (14) si dovrebbe naturalmente considerare l'equazione:

$$\frac{d}{dn}(nh) = \frac{d}{dn}\oint m\dot{x}^2 dt,$$

cioè

$$h = 2\pi m \cdot \sum_{\alpha=-\infty}^{+\infty} \alpha \frac{d}{dn}(\alpha\omega_n \cdot |a_\alpha|^2). \tag{15}$$

Una siffatta condizione fissa però gli a_α solo a meno di una costante, e questa indeterminazione ha empiricamente dato luogo a difficoltà nella comparsa di numeri quantici semiinteri.

Ma se chiediamo una relazione di teoria dei quanti tra quantità osservabili in corrispondenza alla (14) o alla (15), l'univocità mancante si ripristina da sè.

In particolare l'equazione (15) possiede proprio una trasformazione semplice secondo la teoria dei quanti che si collega alla teoria della dispersione di Kramers[5]

$$h = 4\pi m \sum_{\alpha=0}^{\infty} \left\{ |a(n, n+\alpha)|^2 \omega(n, n+\alpha) - |a(n, n-\alpha)|^2 \omega(n, n-\alpha) \right\} ; \tag{16}$$

questa relazione basta qui a determinare univocamente gli a; infatti le costanti momentaneamente indeterminate nelle quantità a saranno automaticamente determinate dalla condizione che debba esistere uno stato normale, dal quale non ha più luogo alcun irraggiamento; se lo stato normale è indicato con n_0, per tutte le $a(n_0, n_0 - \alpha)$ dovrà essere

$$a(n_0, n_0 - \alpha) = 0 \text{ per } \alpha > 0.$$

La questione della quantizzazione intera o semiintera perciò non dovrebbe poter comparire in una meccanica della teoria dei quanti che utilizza solo relazioni tra quantità osservabili.

Le equazioni (11) e (16) insieme contengono, quando si sappiano risolvere, una determinazione completa non solo delle frequenze e delle energie, ma anche delle probabilità di transizione della teoria dei quanti. L'esecuzione matematica effettiva riesce tuttavia per ora solo nei casi più semplici; una complicazione particolare deriva inoltre in molti sistemi, come per esempio nell'atomo di idrogeno, dal fatto che le soluzioni corrispondono a moti in parte periodici, in parte aperiodici, cosa che ha per conseguenza il fatto che le serie della teoria dei quanti (7), (8) e l'equazione (16) si spezzano sempre in una somma e in un integrale. Secondo la meccanica quantistica quindi una separazione in "moti periodici e aperiodici" in generale non si può eseguire.

Malgrado ciò le equazioni (11) e (16) si potrebbero forse considerare per lo meno in linea di principio come una soluzione soddisfacente del problema meccanico, se si potesse mostrare che questa soluzione è in accordo ovvero non è in contrasto con le relazioni quantomeccaniche finora note; che quindi una piccola perturbazione di un problema meccanico dà luogo a termini aggiuntivi nell'energia o nelle frequenze, che corrispondono proprio alle espressioni trovate da Kramers e Born - in contrasto con quelle che produrrebbe la teoria classica. Inoltre si dovrebbe cercare se in generale l'equazione (11) anche nell'interpretazione della teoria dei quanti qui proposta ammetta un integrale dell'energia $m\dot{x}^2/2 + U(x) = \text{cost.}$ e se l'energia così ottenuta - in analogia a come succede classicamente: $\nu = \partial W / \partial J$ - soddisfi la condizione: $\Delta W = h \cdot \nu$. Una risposta generale a queste domande potrebbe in primo luogo mostrare la connessione profonda tra i tentativi di meccanica quantistica fatti finora e portare ad una meccanica quantistica coerente che operi solo con quantità osservabili. A prescindere da una relazione generale tra la formula di dispersione

[5]Questa relazione è già stata data in base a trattazioni della dispersione da W. Kuhn, ZS. f. Phys. **33**, 408, 1925, e da Thomas, Naturw. **13**, 1925.

di Kramers e le equazioni (11) e (16) possiamo rispondere alle domande su poste solo nei casi del tutto particolari risolubili mediante una semplice ricorrenza.

Quella relazione generale tra la teoria della dispersione di Kramers e le nostre equazioni (11), (16) consiste nel fatto che dall'equazione (11) cioè dal suo analogo secondo la teoria dei quanti come nella teoria classica discende che l'elettrone oscillante si comporta come un elettrone libero rispetto a luce che abbia lunghezza d'onda assai più corta di tutte le oscillazioni proprie del sistema. Questo risultato discende anche dalla teoria di Kramers, quando ancora si tenga conto dell'equazione (16). Infatti Kramers trova per il momento indotto mediante l'onda $E \cos 2\pi\nu t$:

$$M = e^2 E \cos 2\pi\nu t \cdot \frac{2}{h} \sum_{\alpha=0}^{\infty} \left\{ \frac{|a(n,n+\alpha)|^2 \nu(n,n+\alpha)}{\nu^2(n,n+\alpha) - \nu^2} - \frac{|a(n,n-\alpha)|^2 \nu(n,n-\alpha)}{\nu^2(n,n-\alpha) - \nu^2} \right\},$$

quindi per $\nu \gg \nu(n,n+\alpha)$

$$M = -\frac{2Ee^2 \cos 2\pi\nu t}{\nu^2 \cdot h} \sum_{\alpha=0}^{\infty} \left\{ |a(n,n+\alpha)|^2 \nu(n,n+\alpha) - |a(n,n-\alpha)|^2 \nu(n,n-\alpha) \right\},$$

che per la (16) diventa

$$M = -\frac{e^2 E \cos 2\pi\nu t}{\nu^2 \cdot 4\pi^2 m}.$$

§3. Come esempio semplicissimo si tratterà nel seguito l'oscillatore anarmonico:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x + \lambda x^2 = 0. \tag{17}$$

Classicamente quest'equazione si soddisfa con un "Ansatz" della forma

$$x = \lambda a_0 + a_1 \cos \omega t + \lambda a_2 \cos 2\omega t + \lambda^2 a_3 \cos 3\omega t + \cdots + \lambda^{\tau-1} a_\tau \cos \tau\omega t,$$

dove gli a sono serie di potenze in λ, che cominciano con un termine privo di λ. Dal punto di vista della teoria dei quanti proviamo un "Ansatz" analogo e rappresentiamo x con termini della forma

$$\lambda a(n,n);\ a(n,n-1)\cos\omega(n,n-1)t;\ \lambda a(n,n-2)\cos\omega(n,n-2)t;$$
$$\ldots \lambda^{\tau-1} a(n,n-\tau)\cos\omega(n,n-\tau)t \ldots$$

Per le equazioni (3), (4) e rispettivamente (7), (8), la formula di ricorrenza per la determinazione di a e di ω si scrive (fino a termini dell'ordine λ inclusi):

classicamente:

$$\begin{aligned} \omega_0^2 a_0(n) + \frac{a_1^2(n)}{2} &= 0; \\ -\omega^2 + \omega_0^2 &= 0; \\ (-4\omega^2 + \omega_0^2) a_2(n) + \frac{a_1^2}{2} &= 0; \\ (-9\omega^2 + \omega_0^2) a_3(n) + a_1 a_2 &= 0; \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \end{aligned} \tag{18}$$

quantisticamente:

$$
(19) \qquad
\begin{aligned}
\omega_0^2 a_0(n) + \frac{a^2(n+1,n) + a^2(n,n-1)}{4} &= 0;\\
-\omega^2(n,n-1) + \omega_0^2 &= 0;\\
(-\omega^2(n,n-2) + \omega_0^2)a(n,n-2) + \frac{a(n,n-1)a(n-1,n-2)}{2} &= 0;\\
(-\omega^2(n,n-3) + \omega_0^2)a(n,n-3)&\\
+\frac{a(n,n-1)a(n-1,n-3)}{2} + \frac{a(n,n-2)a(n-2,n-3)}{2} &= 0;\\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots&
\end{aligned}
$$

Perciò si ha la condizione quantica

classicamente $(J = nh)$:

$$1 = 2\pi m \frac{d}{dJ} \sum_{-\infty}^{+\infty} \tau^2 \frac{|a_\tau|^2 \omega}{4}.$$

quantisticamente:

$$h = \pi m \sum_0^\infty \left[|a(n+\tau,n)|^2 \omega(n+\tau,n) - |a(n,n-\tau)|^2 \omega(n,n-\tau) \right].$$

Ciò dà in prima approssimazione, sia classicamente che quantisticamente:

$$(20) \qquad a_1^2(n), \quad \text{rispettivamente } a^2(n,n-1) = \frac{(n + \text{cost.})h}{\pi m \omega_0}.$$

Quantisticamente la costante nella (20) si determina con la condizione che nello stato normale $a(n_0, n_0 - 1)$ dev'essere zero. Se numeriamo gli n in modo che n sia uguale a zero nello stato normale, quindi $n_0 = 0$, risulta

$$a^2(n,n-1) = \frac{nh}{\pi m \omega_0}.$$

Dalle equazioni di ricorrenza (18) segue allora che nella teoria classica a_τ (in prima approssimazione in λ) sarà della forma $\kappa(\tau) n^{\frac{\tau}{2}}$, dove $\kappa(\tau)$ rappresenta un fattore indipendente da n. Nella teoria quantistica risulta dalla (19)

$$(21) \qquad a(n,n-\tau) = \kappa(\tau) \sqrt{\frac{n!}{(n-\tau)!}},$$

dove $\kappa(\tau)$ indica lo stesso fattore di proporzionalità indipendente da n. Naturalmente per grandi valori di n il valore di a_τ della teoria dei quanti tende asintoticamente a quello classico.

Per l'energia è naturale studiare l'ipotesi classica

$$\frac{m\dot{x}^2}{2} + m\omega_0^2 \frac{x^2}{2} + \frac{m\lambda}{3} x^3 = W,$$

che anche secondo la teoria dei quanti è realmente costante e per le (19), (20) e (21) ha il valore:

classicamente:

$$W = \frac{nh\omega_0}{2\pi}. \tag{22}$$

quantisticamente [secondo le (7), (8)]:

$$W = \frac{(n+\frac{1}{2})h\omega_0}{2\pi} \tag{23}$$

(fino a quantità dell'ordine λ^2 compreso).

Secondo quest'idea già per l'oscillatore armonico l'energia non è rappresentabile secondo la "meccanica classica", cioè con la (22), ma ha la forma (23).

Il calcolo più esatto anche delle approssimazioni superiori in W, a, ω si eseguirà per l'esempio più semplice di un oscillatore armonico del tipo:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x + \lambda x^3 = 0.$$

Qui si può porre classicamente:

$$x = a_1 \cos\omega t + \lambda a_3 \cos 3\omega t + \lambda^2 a_5 \cos 5\omega t + \ldots,$$

analogamente tentiamo per la teoria quantistica l'"Ansatz"

$$a(n, n-1)\cos\omega(n, n-1)t;\ \ \lambda a(n, n-3)\cos\omega(n, n-3)t; \ldots$$

Le quantità a sono di nuovo serie di potenze in λ, il primo termine delle quali, come nella (21), ha la forma

$$a(n, n-\tau) = \kappa(\tau)\sqrt{\frac{n!}{(n-\tau)!}},$$

come si ottiene calcolando le equazioni corrispondenti alle (18), (19).

Se si porta il calcolo di ω, a secondo le (18), (19) fino alle approssimazioni λ^2 e rispettivamente λ, si ottiene:

$$\omega(n, n-1) = \omega_0 + \lambda \cdot \frac{3nh}{8\pi\omega_0^2 m} - \lambda^2 \cdot \frac{3h^2}{256\omega_0^5 m^2 \pi^2}(17n^2 + 7) + \ldots \tag{24}$$

$$a(n, n-1) = \sqrt{\frac{nh}{\pi\omega_0 m}}\left(1 - \lambda\frac{3nh}{16\pi\omega_0^3 m} + \ldots\right). \tag{25}$$

$$a(n, n-3) = \frac{1}{32}\sqrt{\frac{h^3}{\pi^3\omega_0^7 m^3}n(n-1)(n-2)}\left(1 - \lambda\frac{39(n-1)h}{32\pi\omega_0^3 m}\right). \tag{26}$$

L'energia, definita come il termine costante di

$$\frac{m\dot{x}^2}{2} + m\omega_0^2\frac{x^2}{2} + \frac{m\lambda}{4}x^4,$$

(non ho saputo dimostrare in generale che i termini periodici sono tutti nulli, ma ciò accade nei termini calcolati), risulta essere

$$\begin{aligned} W = {} & \frac{(n+\frac{1}{2})h\omega_0}{2\pi} + \lambda \cdot \frac{3(n^2+n+\frac{1}{2})h^2}{8\cdot 4\pi^2\omega_0^2 \cdot m} \\ & -\lambda^2 \cdot \frac{h^3}{512\pi^3\omega_0^5 m^2}\left(17n^2 + \frac{51}{2}n^2 + \frac{59}{2}n + \frac{21}{2}\right). \end{aligned} \tag{27}$$

Quest'energia si può anche calcolare con il procedimento di Kramers-Born, assumendo il termine $m\lambda x^4/4$ come termine perturbativo dell'oscillatore armonico. Allora si ritrova proprio il risultato (27), cosa che mi pare una conferma degna di nota per le equazioni quantomeccaniche di base. Inoltre l'energia calcolata con la (27) soddisfa alla formula [vedi (24)]:

$$\frac{\omega(n,n-1)}{2\pi} = \frac{1}{h}\cdot [W(n) - W(n-1)],$$

che parimenti va considerata come condizione necessaria per la possibilità di una determinazione delle probabilità di transizione corrispondente alle equazioni (11) e (16).

Per concludere si introdurrà come esempio il rotatore e si daranno indicazioni sul rapporto delle equazioni (7), (8) con le formule dell'intensità per l'effetto Zeeman[6] e per i multipletti[7].

Il rotatore sia rappresentato da un elettrone che ruota a distanza costante a attorno ad un nucleo. Allora le "equazioni del moto" sia classicamente che secondo la teoria dei quanti dicono solo che l'elettrone descrive attorno al nucleo una rotazione piana uniforme alla distanza costante a con la velocità angolare ω. La "condizione quantica" dà secondo la (12):

$$h = \frac{d}{dn}(2\pi m a^2\omega),$$

secondo la (16):

$$h = 2\pi m\{a^2\omega(n+1,n) - a^2\omega(n,n-1)\},$$

e in entrambi i casi risulta:

$$\omega(n,n-1) = \frac{h\cdot(n+\text{cost.})}{2\pi m a^2}.$$

La condizione che nello stato normale ($n_0 = 0$) la radiazione debba essere nulla porta alla formula

$$\omega(n,n-1) = \frac{h\cdot n}{2\pi m a^2}.$$

[6]Goudsmit e R. de L. Kronig, Naturw. **13**, 90, 1925; H. Hönl, ZS. f. Phys. **31**, 340, 1925.

[7]R. de L. Kronig, ZS. f. Phys. **31**, 885, 1925; A. Sommerfeld e H. Hönl, Sitzungsber. d. Preuß. Akad. d. Wiss. 1925, p. 141; H. N. Russell, Nature **115**, 835, 1925.

L'energia sarà

$$W = \frac{m}{2} v^2$$

ovvero per le (7), (8)

$$W = \frac{m}{2} a^2 \cdot \frac{\omega^2(n, n-1) + \omega^2(n+1, n)}{2} = \frac{h^2}{8\pi^2 m a^2} \left(n^2 + n + \frac{1}{2} \right), \tag{29}$$

che di nuovo soddisfa alla relazione

$$\omega(n, n-1) = \frac{2\pi}{h} \cdot [W(n) - W(n-1)].$$

Come conferma per le formule (28) e (29) che si discostano dalla teoria finora consueta si può considerare il fatto che molti spettri a bande (anche quelli per i quali l'esistenza di un impulso dell'elettrone è improbabile) secondo Kratzer[8] appaiono richiedere formule del tipo (28), (29) (che finora per attaccamento alla teoria meccanica classica si cercava di spiegare con quantizzazione semiintera).

Per giungere, nel caso del rotatore, alle formule di Goudsmit-Kronig-Hönl, dobbiamo abbandonare l'ambito dei problemi con un grado di libertà e assumere che il rotatore, a partire da una qualsiasi direzione nello spazio, esegua una precessione $\mathfrak{v}$ attorno all'asse z di un campo esterno. Il numero quantico corrispondente a questa precessione sia m. Allora il moto sarà rappresentato dalle quantità

$$\begin{aligned} z &: a(n, n-1; m, m) \cos \omega(n, n-1)t; \\ x + iy &: b(n, n-1; m, m-1) \exp i[\omega(n, n-1) + \mathfrak{v}]t; \\ & \quad b(n, n-1; m-1, m) \exp i[-\omega(n, n-1) + \mathfrak{v}]t. \end{aligned}$$

Le equazioni di moto si scrivono semplicemente:

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2,$$

e per la (7) danno luogo alle equazioni[9]

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{2} a^2(n, n-1; m, m) + b^2(n, n-1; m, m-1) + b^2(n, n-1; m, m+1) \right\} \\ &+ \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{2} a^2(n+1, n; m, m) + b^2(n+1, n; m-1, m) + b^2(n+1, n; m+1, m) \right\} = a^2. \end{aligned} \tag{30}$$

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} a(n, n-1; m, m) a(n-1, n-2; m, m) \\ &= b(n, n-1; m, m+1) b(n-1, n-2; m+1, m) \\ &+ b(n, n-1; m, m-1) b(n-1, n-2; m-1, m). \end{aligned} \tag{31}$$

Da qui per la (16) discende la condizione quantica:

$$\begin{aligned} 2\pi m \left\{ b^2(n, n-1; m, m-1) \omega(n, n-1) - b^2(n, n-1; m-1, m) \omega(n, n-1) \right\} \\ = (m + \text{cost.}) h. \end{aligned} \tag{32}$$

[8] vedasi per esempio A. Kratzer, Sitzungsber. d. Bayr. Akad. 1922, p. 107.

[9] L'equazione (30) è essenzialmente identica alle regole di somma di Ornstein-Burger.

Le relazioni classiche corrispondenti a queste equazioni:

$$
\begin{aligned}
& \frac{1}{2}a_0^2 + b_1^2 + b_{-1}^2 = a^2; \\
(33) \qquad & \frac{1}{4}a_0^2 = b_1 b_{-1}; \\
& 2\pi m(b_{+1}^2 - b_{-1}^2)\omega = (m + \text{cost.})h
\end{aligned}
$$

bastano (a meno della costante indeterminata in m) a determinare univocamente a_0, b_1, b_{-1}.

La soluzione che si presenta più semplice delle equazioni (30), (31), (32) si scrive:

$$
\begin{aligned}
b(n, n-1; m, m-1) &= a\sqrt{\frac{(n+m+1)(n+m)}{4(n+\frac{1}{2})n}}; \\
b(n, n-1; m-1, m) &= a\sqrt{\frac{(n-m)(n-m+1)}{4(n+\frac{1}{2})n}}; \\
a(n, n-1; m, m) &= a\sqrt{\frac{(n+m+1)(n-m)}{4(n+\frac{1}{2})n}}.
\end{aligned}
$$

Queste espressioni coincidono con le formule di Goudsmit, Kronig e Hönl; non si può tuttavia vedere facilmente che queste espressioni rappresentano l'unica soluzione delle (30), (31), (32) - cosa che tuttavia mi sembra probabile tenendo conto delle condizioni al contorno (annullarsi di a, b ai "bordi", vedansi i su citati lavori di Kronig, Sommerfeld e Hönl, Russell).

Una trattazione analoga a quella qui esposta anche nel caso delle formule d'intensità dei multipletti porta al risultato che le sunnominate regole d'intensità sono in accordo con le equazioni (7) e (16). Di nuovo questo risultato dovrebbe considerarsi a sostegno in particolare della giustezza dell'equazione cinematica (7).

Se un metodo per la determinazione di dati della teoria dei quanti mediante relazioni tra quantità osservabili, come quello proposto qui, si possa già considerare soddisfacente in linea di principio, oppure se questo metodo rappresenti ancora un approccio troppo grossolano al problema fisico, per ora evidentemente assai intricato, di una meccanica della teoria dei quanti, lo si potrà conoscere solo mediante uno studio matermatico più approfondito del metodo qui usato assai superficialmente.

Göttingen, Institut für theoretische Physik.

Interpretazione quantomeccanica della teoria di Weyl[1,2]

F. London a Stoccarda.

(ricevuto il 25 febbraio 1927)

Capitolo I. La teoria di Weyl.

È noto che l'idea di una "pura geometria dell'intorno" concepita per primo da Riemann ha ricevuto recentemente da parte di Weyl un completamento straordinariamente bello e semplice. Si può considerare l'idea di spazio di Riemann come l'eliminazione del pregiudizio che le relazioni di curvatura in un posto dello spazio debbano essere vincolanti per la curvatura in tutti gli altri. Per dare un senso a quest'idea di Riemann era inizialmente necessaria l'ipotesi che il regolo che si utilizza in ogni posto per determinare i coefficienti g_{ik} della forma fondamentale metrica

$$ds^2 = g_{ik} dx^i dx^k$$

fosse un regolo "rigido".

Invece Weyl rileva giustamente che l'ipotesi di un siffatto regolo rigido è contraria ad una geometria radicale dell'intorno, poiché solo i rapporti dei g_{ik} in un posto, non il loro valore assoluto, possono essere determinati in modo significativo, e corrispondentemente pone per la variazione dl di un regolo di misura di lunghezza l sottoposto ad uno spostamento infinitesimo dx^i:

$$dl = l \varphi_i dx^i, \tag{1}$$

dove i coefficienti di proporzionalità φ_i sono funzioni della posizione, caratteristiche delle relazioni metriche dello spazio - analogamente ai g_{ik}. Ovvero, se si integra la (1):

$$l = l_0 \exp\left[\int \varphi_i dx^i\right] \tag{2}$$

($l_0 = l$ all'inizio dello spostamento). Il regolo campione dipende in generale dal cammino (non è integrabile); lo diviene allorché le quantità

$$f_{ik} = \frac{\partial \varphi_i}{\partial x^k} - \frac{\partial \varphi_k}{\partial x^i} \tag{3}$$

[1]Quantenmechanische Deutung der Theorie von Weyl, Zeitschr. f. Phys. **42**, 375-389 (1927).

[2]Presentato in parte alla seduta del Gauverein Württemberg della D. Phys. Ges. Stuttgart il 18 dicembre 1926; vedi anche una relazione riassuntiva provvisoria in Naturwiss. **15**, 187, 1927.

s'annullano. Riguardo a queste quantità f_{ik} si può secondo la loro definizione (3) esprimere l'identità (il numero di dimensioni della varietà sia 4):

$$\frac{\partial f_{ik}}{\partial x^l} + \frac{\partial f_{kl}}{\partial x^i} + \frac{\partial f_{li}}{\partial x^k} = 0, \ i \neq k \neq l, \ i, k, l = 1, 2, 3, 4. \tag{4}$$

La coincidenza formale di queste quattro equazioni con il primo sistema delle equazioni di Maxwell

$$\operatorname{rot} \mathfrak{E} + (1/c)\, \dot{\mathfrak{H}} = 0,$$
$$\operatorname{div} \mathfrak{H} = 0,$$

ed alcune altre analogie formali hanno portato Weyl alla conclusione che i φ_i siano da identificare a meno di un fattore di proporzionalità costante con le componenti Φ_i del tetrapotenziale elettromagnetico, e corrispondentemente le f_{ik} con le intensità di campo elettromagnetiche $\mathfrak{E}$,$\mathfrak{H}$. In logico completamento dell'interpretazione geometrica della gravitazione per mezzo della curvatura variabile dello spazio riemanniano, Weyl si immaginava la parte ancora restante delle azioni fisiche, il campo elettromagnetico, parimenti come una proprietà delle relazioni metriche dello spazio, specificata tramite la variabilità del regolo campione. Si scrive allora:

$$l = l_0 \exp \left[\alpha \int \Phi_i dx^i \right], \ (\alpha = \text{fattore di proporzionalità}). \tag{2a}$$

Ci si stupirà dell'enorme ardimento col quale Weyl ha scovato la sua teoria del significato geometrico dell'elettromagnetismo solo sulla base di queste attribuzioni puramente formali: nella teoria della relatività c'era un fatto fisico, il principio d'equivalenza tra massa inerziale e gravitazionale, a guidare Einstein nella sua interpretazione geometrica. Nella teoria dell'elettricità invece una circostanza del genere non era nota: non c'era nessun motivo per pensare ad un'influenza universale del campo elettromagnetico sui cosidetti regoli rigidi (ovvero orologi). Del tutto all'opposto, gli atomi come orologi per esempio rappresentano dei campioni la cui indipendenza dalla storia passata è provata dalla nettezza delle righe spettrali, in contrasto col campione non integrabile (2a), che Weyl assume in un campo magnetico. Ci voleva un convincimento metafisico insolitamente netto per non distogliere Weyl, malgrado queste esperienze così elementari, dall'idea che la natura dovesse far uso di questa bella possibilità geometrica a lei offerta. Egli ha mantenuto la sua interpretazione ed ha aggirato la discussione della contraddizione su delineata mediante una reinterpretazione alquanto oscura del concetto di "misura reale", con la qual cosa però alla teoria veniva sottratto il suo significato fisico così pregnante, ed essa perdeva perciò molta della sua forza di convinzione.

Non ho bisogno di addentrarmi qui in questa trasformazione astratta della teoria. Mostrerò invece che proprio nell'interpretazione pregnante originaria della teoria di Weyl è insita una forza molto più grande di quella che il suo autore già aveva reso effettiva, che cioè in essa si deve scorgere nientemeno che una via conseguente alla meccanica ondulatoria, e solo da questo punto di vista essa assume un senso fisico immediatamente comprensibile.

Capitolo II. La meccanica ondulatoria di de Broglie e la teoria di Weyl.

Come "teoria di de Broglie" indico quell'abbozzo ancora incompleto della meccanica ondulatoria nel quale la funzione d'onda del moto d'un elettrone (alla quale ci limitiamo qui)

$$\psi = \exp\left[\frac{2\pi i}{h} W\left(x_i\right)\right], \ i = 1, 2, 3, 4 \tag{5}$$

deriva da una soluzione completa W dell'equazione differenziale alle derivate parziali di Hamilton-Jacobi

$$\left(\frac{\partial W}{\partial x^i} - \frac{e}{c}\Phi_i\right)\left(\frac{\partial W}{\partial x_i} - \frac{e}{c}\Phi^i\right) = -m_0^2 c^2, \tag{6}$$

dove le costanti d'integrazione sono da determinarsi in modo noto in maniera tale che ψ sia una funzione dello spazio ad un sol valore, cioè che W sia additivamente periodica, con un multiplo intero della costante di Planck come periodo.

Quando si fa sul serio con l'idea radicale della materia come continuo, con la risoluzione dell'elettrone confinato con discontinuità in una grandezza di campo variabile con continuità nello spazio e nel tempo, come risulta naturale con questa teoria di de Broglie e conseguentemente con la teoria di Schrödinger considerata in seguito[3], si perviene ad una difficoltà di principio assai grave se si cerca che senso si debba attribuire alle asserzioni metriche all'interno del continuo ondulatorio. Infatti in questo mezzo oscillante e fluttuante, esteso all'infinito, che si deve considerare al posto dell'elettrone limitato, non si trova nessuna discontinuità immutabile, nessun corpo rigido, che come campione riproducibile potrebbe consentire la determinazione di una lunghezza.

Non mi occupo affatto dell'idea secondo la quale, per parlare di geometria nell'ambito atomico, si dovrebbe indicare un procedimento eseguibile di misura; di cosa siffatta non si può parlare neanche nella teoria degli elettroni. Ma se si vuole associare un qualche senso definito alla prescrizione d'una metrica, questo mi pare il minimo che si possa richiedere: che si dia un qualche oggetto reale (come "prototipo") al quale le asserzioni metriche siano riferite: un diametro dell'elettrone, o una distanza ecc., sebbene tali asserzioni possano ancora trovarsi in un rapporto assai problematico con una misura eseguibile.

Ma un siffatto oggetto reale non è disponibile nel continuo ondulatorio. Il principio di identità non si può applicare al $\pi\alpha\nu\tau\alpha$ $\rho\varepsilon\iota$ delle onde che appaiono e scompaiono, non si può fissare nel continuo nessun contrassegno atto a fornire una misura riproducibile. La posizione di principio in cui ci si è collocati sarebbe del tutto senza speranza se Weyl, nella sua generalizzazione del concetto di spazio di Riemann, non avesse già procurato un tipo di spazio nel quale la non riprodicibilità

[3]È noto che si adducono ragioni importanti per le quali è stato suggerito, prima di tutti da Born e dai suoi collaboratori, che l'intero formalismo ondulatorio vada reinterpretato in senso statistico. Se la densità di carica viene reinterpretata come una funzione peso statistica non è difficile vedere che si ha in quel caso la stessa indeterminazione rispetto all'applicabilità del principio di identità alla quale accenniamo qui. Ma poiché quella concezione in primo luogo respinge ogni interpretazione nello spazio e nel tempo, per essa il rapporto con la teoria dello spazio di Weyl è di scarso interesse.

delle unità campione viene prevista come postulato coerente di una radicale geometria dell'intorno. Se prima questa teoria nell'immagine del mondo della teoria degli elettroni discontinui era un peso superfluo, poiché si credeva di avere proprio negli elettroni dei regoli riproducibili, ora la situazione è fondamentalmente cambiata. Si è costretti addirittura a ritirar fuori il concetto generale di spazio di Weyl e a cercare di applicarlo al continuo di Schrödinger. E si scopre ora una relazione semplice.

§1. Assumiamo di possedere già un regolo l che cambi secondo la prescrizione di Weyl (2a), e portiamolo in giro nel campo ψ. E precisamente sia trasportato con la velocità di corrente della materia, con la velocità di gruppo

$$u^i = \frac{dx^i}{d\tau} = \frac{1}{m_0}\left(\frac{\partial W}{\partial x_i} - \frac{e}{c}\Phi^i\right). \tag{7}$$

Affermo che con questa prescrizione naturale sul cammino lo scalare di Weyl l sarà numericamente identico allo scalare di campo di de Broglie ψ. In proposito bisogna fare ancora due precisazioni:

Nel regolo campione di Weyl era rimasto ancora indeterminato un fattore α: per esso faccio l'ipotesi che sia uguale a $2\pi ie/hc$. Quindi ora

$$l = l_0 \exp\left[\frac{2\pi i}{h}\int \frac{e}{c}\Phi_i dx^i\right]. \tag{2a}$$

E infine ancora: non utilizzo esattamente la ψ dell'equazione (5), ma la ψ pentadimensionale dotata del fattore $\exp\left[\frac{2\pi i}{h}m_0c^2\tau\right]$ come nelle proposte di Klein, Fock e Kudar, ove per τ s'ha da intendere il tempo proprio[4]. Sia ora

$$\psi = \exp\left[\frac{2\pi i}{h}\left(W + m_0c^2\tau\right)\right] \tag{5a}$$

ovvero

$$= \exp\left\{\frac{2\pi i}{h}\left[\int \frac{\partial W}{\partial x_i}dx^i + m_0c^2\tau\right]\right\}.$$

Questa quantità ψ va confrontata col regolo di Weyl (2a) trasportato lungo la corrente del continuo. S'ottiene:

$$\frac{\psi}{l} = \frac{1}{l_0}\exp\left\{\frac{2\pi i}{h}\left[\int\left(\frac{\partial W}{\partial x^i} - \frac{e}{c}\Phi_i\right)dx^i + m_0c^2\tau\right]\right\};$$

qui i dx^i s'hanno da definire secondo la corrente data dalla (7):

$$= \frac{1}{l_0}\exp\left\{\frac{2\pi i}{h}\left[\int\left(\frac{\partial W}{\partial x^i} - \frac{e}{c}\Phi_i\right)\left(\frac{\partial W}{\partial x_i} - \frac{e}{c}\Phi^i\right)\frac{d\tau}{m_0} + m_0c^2\tau\right]\right\}.$$

[4]Questa interpretazione di τ, che risale a Kudar, Ann. d. Phys. **81**, 632, 1926, è in pieno accordo con l'interpretazione da poco discussa del moto di rotazione proprio dell'elettrone come coordinata angolare (Naturwissenschaften **15**, 15, 1927). Infatti questo angolo di rotazione si può intendere come un orologio portato con sè dall'elettrone. Esso si trasforma come il tempo proprio.

A causa dell'equazione differenziale di Hamilton-Jacobi (6) l'integrando è uguale a $-m_0c^2$ e s'ottiene

$$\frac{\psi}{l} = \frac{1}{l_0} e^{\frac{2\pi i}{h}\cdot \text{cost.}} = \text{ cost.} \tag{8}$$

Si è trovato l'oggetto fisico che si comporta come il regolo di Weyl: l'ampiezza complessa dell'onda di de Broglie; in un campo elettromagnetico essa subisce esattamente l'influenza che Weyl ha postulato per il suo regolo, e al quale egli - come ad un termine rimasto privo di significato della fisica di quel tempo - ha dovuto attribuire un'esistenza metafisica. Essa è quindi per così dire il prototipo del regolo di Weyl. E analogamente a come nella teoria della gravitazione è a nostro arbitrio parlare della deviazione dei raggi di luce e delle masse, oppure del loro moto geodetico in uno spazio riemanniano, così la (8) ci dà la possibilità di interpretare geometricamente il processo ondulatorio della materia di de Broglie e l'influenza su di esso da parte del potenziale elettromagnetico mediante uno spazio di Weyl uniformemente riempito di materia, la cui connessione metrica non è però integrabile.

In assenza di campi elettromagnetici per la (2a) il regolo dovrà esser costante. Si dovrebbe quindi ottenere anche un valore costante della funzione d'onda di de Broglie, se la si seguisse con la corrispondente velocità di corrente, cioè con la velocità di gruppo (v sempre $< c$). Ciò appare in contraddizione con i risultati più basilari di de Broglie, secondo il quale le fasi delle sue onde avanzano con una velocità di fase ben più grande $\left(u = c^2/v\right)$. Ma ciò qui non c'entra, infatti prima s'è utilizzata non esattamente la ψ di de Broglie, ma quella estesa a cinque dimensioni, che è priva di dispersione, e conseguentemente cade qui la distinzione tra velocità di gruppo e velocità di fase. Ci si convince subito facilmente che l'onda piana

$$\psi = \exp\left[-\frac{2\pi i}{h}\left(\frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\beta^2}}t - \frac{m_0 v}{\sqrt{1-\beta^2}}x - m_0c^2\tau\right)\right], \ \left(\beta = \frac{v}{c}\right)$$

se viene inseguita con la velocità v mostra fase costante.

Un'obiezione ulteriore, che noi qui si confronti ψ, una densità, con una lunghezza l, non mi pare presenti comunque nessuna difficoltà. Si dovrebbe confrontare sin dall'inizio ψ con l^{-3}, cosa che significherebbe solo un cambiamento nella scelta del fattore indeterminato α. Naturalmente si potrebbe anche, per tener conto della relazione qui scoperta, attribuire alla grandezza campione l di Weyl fin da principio le stesse dimensioni della ψ di de Broglie. Una tale idea non poteva aver posto nella teoria di Weyl, poiché in essa niente era noto sulla "natura" di l.

Una difficoltà più seria sembra presentare alla comprensione la forma complessa del trasporto del regolo. È del tutto inammissibile limitarsi alla parte reale. Si trova qui il riscontro del fatto che la funzione d'onda ψ va intesa come essenzialmente complessa, o meglio, che essa rappresenta l'unione di due grandezze di stato fisiche, cioè $\psi\bar{\psi}$ e la parte reale di $(h/2\pi i)\ln\psi$. In questo senso si deve intendere anche il fatto che nel problema variazionale della meccanica ondulatoria ψ e $\bar{\psi}$ vadano variate indipendentemente. Ma che cosa debba significare il fatto che ogni segmento vada considerato come una grandezza complessa, e che l'intera variabilità di Weyl del regolo di misura ora risulti una variazione della sola fase con la conservazione del valore assoluto, non posso ancora discuterlo.

§2. Ma c'è ancora l'obiezione, a cui abbiamo accennato prima, che l'esperienza è contro la non integrabilità del regolo campione. Si vede già fin d'ora come si deve risolvere questa difficoltà. La teoria dei quanti consente alla materia solo una sequenza discreta di stati di moto, e vien da supporre che questi moti privilegiati consentano di trasportare il regolo soltanto in modo tale che la fase al ritorno al punto di partenza abbia eseguito esattamente un numero intero di giri, sicché malgrado la non integrabilità del trasporto delle lunghezze il regolo campione è realizzato in modo unico in ogni posizione. Ci si ricordi infatti delle proprietà di risonanza delle onde di de Broglie, la stessa con la quale de Broglie per primo ha reinterpretato la vecchia condizione quantica di Sommerfeld - Epstein. Questa è altresì associata alla velocità di fase: ma in seguito all'estensione pentadimensionale della funzione d'onda il processo oscillatorio è privo di dispersione, e la nostra velocità di corrente è pertanto identica alla velocità di fase. Perciò, e a causa dell'identità della funzione d'onda ψ con il regolo di Weyl risulta già provato[5] che anche il regolo di Weyl, se lo trasporto solo seguendo la corrente di materia possibile per la teoria dei quanti, partecipa della risonanza delle onde di de Broglie e malgrado la non integrabilità dell'espressione differenziale (2a) nel campo elettromagnetico porta tuttavia ad una determinazione unica delle lunghezze in ogni punto. Se nella teoria di Weyl si fosse inclusa assiomaticamente l'univocità del concetto di lunghezza come un fatto sperimentale generalmente riconosciuto, si sarebbe stati portati in modo conseguente al sistema di stati di moto discreti della teoria dei quanti "classica" e alle sue onde di de Broglie.

Non posso abbandonare quest'argomento senza sottolineare che questa proprietà di risonanza del regolo campione di Weyl, che qui ci si presenta come legge caratteristica della meccanica ondulatoria, era stata suggerita già nel 1922 da Schrödinger[6] come una "proprietà notevole delle orbite quantiche" e dimostrata in un certo numero d'esempi, senza che allora egli ne riconoscesse il significato. Egli aveva anche considerato la possibilità $\alpha = 2\pi i \cdot (e/hc)$, ma non aveva riconosciuto la superiorità rispetto ad un'altra scelta di α. Così già allora Schrödinger aveva avuto in mano le caratteristiche periodicità quantomeccaniche che avrebbe riincontrato successivamente da un punto di vista così completamente diverso.

Perciò forse non è superfluo che io dimostri questa congettura di Schrödinger anche indipendentemente dalla connessione con la meccanica ondulatoria, come una legge della teoria dei quanti "classica", com'era intesa originariamente. Si afferma quindi: l'esponente del regolo di Weyl, trasportato su di un'orbita quantica chiusa spazialmente, è un multiplo intero della costante di Planck:

$$\oint \frac{e}{c}\Phi_i dx^i = nh. \tag{9}$$

Per dimostrarlo si utilizza la relazione già applicata nel §1:

$$\int \left(\frac{\partial W}{\partial x^i} - \frac{e}{c}\Phi_i\right) dx^i = -\int m_0 c^2 d\tau = -\int m_0 c^2 \sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2} dt.$$

A seguito delle relazioni quantiche

$$\sum_{i=1}^{3} \oint \frac{\partial W}{\partial x^i} dx^i = nh$$

[5]Questa conclusione non è esatta, ma sarà subito rettificata.

[6]E. Schrödinger, ZS. f. Phys. **12**, 13, 1922.

si ottiene da qui:

$$\oint \left(\frac{\partial W}{\partial x_4} dx_4 - \frac{e}{c} \Phi_i dx^i \right) = -nh - \oint m_0 c^2 \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2} dt.$$

Supposto che esista un integrale dell'energia, si ha

$$\frac{\partial W}{\partial x_4} dx_4 = -\left(E_{cin} + E_{pot}\right) dt,$$

quindi:

$$-\oint \frac{e}{c} \Phi_i dx^i = -nh + \oint \left(-m_0 c^2 \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2} + E_{cin} + E_{pot} \right) dt.$$

L'integrale al secondo membro si annulla a causa della generalizzazione relativistica del teorema del viriale[7] sotto l'ipotesi che il potenziale sia omogeneo di grado -1 negli x^i, dalla quale discende immediatamente l'asserto (9).

Si vede da questa derivazione che con due sole ipotesi si ottiene la dimostrazione dell'univocità del regolo di Weyl. Queste ipotesi (in particolare la prima) sono evidentemente assai importanti e certamente non si potranno aggirare del tutto. Esse garantiscono certe relazioni stabili nello spazio, per le quali è consentito di parlare di orbite spazialmente chiuse nell'universo di Minkowski, affermazione che è in generale del tutto dipendente dal sistema di riferimento. Si dovranno quindi indicare queste ipotesi come condizioni per poter applicare la legge dell'identità allo spazio.

Per lo più le orbite non saranno esattamente periodiche, ma solo quasi periodiche. Si può allora dimostrare sotto opportune ipotesi di continuità che con approssimazione sufficiente al punto d'arrivo il regolo di Weyl coincide con quello

[7]Non mi è nota dalla letteratura una dimostrazione della generalizzazione relativistica del teorema del viriale, perciò la comunico qui. Si ha

$$\oint \left(-m_0 c^2 \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2} + \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} + E_{pot} \right) dt$$

$$= \oint \left(\frac{m_0 v^2}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} + E_{pot} \right) dt = \oint \left(\sum_{i=1}^{3} p_i \frac{dx^i}{dt} + E_{pot} \right) dt.$$

Da qui per integrazione per parti, tenendo conto della condizione di periodicità:

$$= \oint \left(-\sum_{1}^{3} x^i \frac{dp^i}{dt} + E_{pot} \right) dt.$$

Poiché dp_i/dt per le equazioni del moto è $= -\partial E_{pot}/\partial x^i$, risulta

$$= \oint \left(\sum_{i=1}^{3} x^i \frac{\partial E_{pot}}{\partial x^i} + E_{pot} \right) dt.$$

L'integrale si annulla per il teorema di Eulero sulle funzioni omogenee.

di partenza a meno d'un ammontare preassegnato piccolo a piacere. Di più non occorre neppure richiedere.

Il fatto che il trasporto del regolo debba avvenire sempre con la velocità (7) della materia appare assai soddisfacente; infatti un trasporto con velocità diversa sarebbe per la teoria dei quanti (cioè meccanicamente) del tutto impossibile. Vorrei rimandare ancora una giustificazione più precisa di questa connessione e il suo inserimento in una teoria della misura epistemologicamente fondata, poiché in proposito devono esser resi noti dei punti di vista sostanzialmente diversi. Sebbene si sia visto che le idee di Weyl hanno trovato un inserimento imprevisto nelle idee fisiche correnti, non credo tuttavia che ci si possa accontentare con quanto già trovato. Ho posto in primo piano l'idea del continuo della meccanica quantistica con una unilateralità che non corrisponde alle mie convinzioni. Mi sembra pur sempre auspicabile seguire queste idee con un po' di coerenza fino alla fine. In questo senso l'esposizione del capitolo seguente va considerata del tutto provvisoria. Spero di riportare in futuro l'intera connessione sotto un punto di vista fisico più generale.

Capitolo III. Reinterpretazione quantomeccanica della teoria di Weyl.

I risultati del capitolo precedente si riferiscono espressamente all'abbozzo della meccanica quantistica designato come "teoria di de Broglie". Risulterebbero quindi falsi se si volesse trasferirli direttamente alla teoria di Schrödinger - per lo meno nella regione dove le due teorie divergono. Ma si può già comunque dire che i nostri risultati devono rimanere asintoticamentee corretti nel limite di grandi numeri quantici, poiché per essi le due teorie coincidono.

Si può caratterizzare il progresso compiuto con la forma di Schrödinger della meccanica ondulatoria con il fatto che essa è in grado di "incorporare" in un continuo ondulatorio unificante le traiettorie della meccanica classica, sulle quali de Broglie aveva sovrimposto solo superficialmente un'onda tramite la (5). Nell'ottica geometrica la trattazione delle singole traiettorie prese individualmente e quella dei fronti d'onda sono fisicamente equivalenti. Nell'ottica ondulatoria invece un singolo raggio dell'onda, quando viene incorporato in un fronte di raggi, sperimenta una certa influenza dai suoi vicini. Esprimere questa influenza è la proprietà caratteristica della teoria di Schrödinger, quando essa prescrive la funzione d'onda ψ con un'equazione d'onda invece che con l'equazione differenziale (6) di Jacobi. Separando le parti reale ed immaginaria, l'equazione d'onda di Schrödinger per $\psi = |\psi| \exp\left[\frac{2\pi i}{h} W\right]$ (W reale) si scrive:

$$\begin{gathered}\left(\frac{h}{2\pi i}\right)^2 \frac{\Box|\psi|}{|\psi|} + \left(\frac{\partial W}{\partial x^i} - \frac{e}{c}\Phi_i\right)\left(\frac{\partial W}{\partial x_i} - \frac{e}{c}\Phi^i\right) + m^2c^2 = 0, \\ \frac{\partial}{\partial x_k}\left\{|\psi|^2 \frac{e}{m}\left(\frac{\partial W}{\partial x^k} - \frac{e}{c}\Phi_k\right)\right\} = 0.\end{gathered} \tag{10}$$

In questa rappresentazione si riconosce il disaccordo con la teoria di de Broglie nella comparsa del termine $\Box|\psi|/|\psi|$. Inoltre qui risulta anche chiaro che si tratta di un problema con due funzioni incognite reali. La seconda equazione è l'equazione di continuità della corrente, le cui quattro componenti sono racchiuse nelle parentesi graffe.

Non c'è dubbio che attualmente si debba dare incondizionatamente la preferenza alla teoria di Schrödinger piuttosto che a quella di de Broglie per la sua concezione e per il suo miglior accordo con l'esperienza. Nella sua discrepanza rispetto alla teoria di Weyl non dobbiamo certo vedere nessun difetto della teoria di Schrödinger.

Se si osserva che le deviazioni si manifestano caratteristicamente per numeri quantici piccoli, non vi può esser dubbio riguardo a che cosa si debba ricondurre la difficoltà: la teoria di Weyl nella sua intera competenza per così dire si attaglia alla meccanica classica e quindi anche alla teoria di de Broglie ad essa associata. Non bisogna quindi aspettarsi o pretendere da essa che vada già bene con la teoria di Schrödinger. Il compito dev'essere invece quello di far eseguire alla teoria di Weyl, attualmente fuori moda, il passo corrispondente a quello che porta da de Broglie a Schrödinger; dev'essere per parte sua modificata in modo corrispondente alla correzione quantomeccanica delle leggi classiche.

Si può prevedere in quale direzione la modifica del regolo di Weyl debba avvenire. Finora si era assunto che solo il tetrapotenziale Φ_i, che fornisce una descrizione completa del campo elettromagnetico, fosse determinante per lo spostamento del regolo (2a). Ora la situazione si è modificata perché accanto alle quattro quantità di stato del campo Φ_i è comparsa come quinta la ψ di Schrödinger, che per molti aspetti - prima di tutto nella rappresentazione mediante un problema variazionale[8] - risulta simmetrica rispetto alle grandezze di campo Φ_i. La materia, nella concezione della teoria degli elettroni confinata fuori dal campo entro superfici limite invalicabili, o cacciata nelle singolarità dello stesso, ora si estende su tutto lo spazio, e mentre nella teoria di Weyl si pensava giustamente che un regolo nello spazio "vuoto" fosse influenzato solo dai potenziali elettromagnetici ivi presenti, si deve ora tener conto della circostanza che la vecchia separazione tra la materia "impenetrabile" ed il $\kappa\varepsilon\nu o\nu$ è abrogata e che ci si trova sempre per così dire all'interno di una nuova sostanza $|\psi|$ che tutto pervade[9].

Bisogna quindi aspettarsi che, oltre alle grandezze di campo elettromagnetiche esterne, si debba tener conto ancora di una interna, che dipende solo da $|\psi|$. Madelung[10] ha dato il "potenziale" di quest'azione interna del campo ψ su se stesso. Vorrei proporre come sua generalizzazione relativistica:

$$e\Phi_5 = m_0 c^2 \left(1 - \sqrt{1 + \left(\frac{h}{2\pi i}\right)^2 \frac{\Box|\psi|}{m_0^2 c^2 |\psi|}}\right). \tag{11}$$

La parola "potenziale" va usata con cautela. Φ_5 non corrisponde infatti al potenziale "scalare" Φ_4, che relativisticamente figura come componente temporale di un tetravettore, ma anche relativisticamente è uno scalare invariante. Di conseguenza Φ_5 non può nemmeno governare la variazione del regolo lungo una determinata direzione d'universo. Se proprio si vuole assumere un'influenza sul regolo campione, essa può dipendere solo dal modulo dello spostamento del regolo in quattro dimensioni, non dalla sua direzione. Se si introduce mediante l'elemento di linea $dx_5 = cd\tau$ (τ =tempo proprio) una quinta coordinata che non è indipendente dalle

[8]E. Schrödinger, Ann. d. Phys. **82**, 265, 1927.

[9]Infatti ψ soddisfa ad un'equazione differenziale lineare. Principio di sovrapposizione! Tuttavia sembra che la proprietà di impenetrabilità trovi la sua espressione quantomeccanica nella forma del principio di esclusione di Pauli (P. Ehrenfest, Naturwissenschaften **15**, 161, 1927).

[10]E. Madelung, ZS. f. Phys. **40**, 322, 1926.

restanti dx_i, ma che si ottiene dalla condizione[11]

$$dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 + dx_4^2 + dx_5^2 = 0, \tag{12}$$

si può supporre che

$$l = l_0 \exp\left[\frac{2\pi i}{h}\int \sum_1^5 \frac{e}{c}\Phi_i dx^i\right] \tag{13}$$

rappresenti la generalizzazione quantomeccanica del regolo di Weyl.

Per dimostrare l'identità della (13) con la funzione d'onda di Schrödinger dobbiamo prima di tutto stabilire lungo quale cammino si debba trasportare il regolo generalizzato (13). Si prescriverà ancora il trasporto con la velocità di corrente della materia. Ma in proposito si deve osservare che ora le componenti u^i della tetravelocità non sono date dalla (7), sebbene la rappresentazione della corrente nella seconda delle equazioni (10) suggerisca la separazione del fattore $e\psi\bar{\psi}$ come densità di carica a riposo. Infatti le componenti della velocità individuate in tal modo per $la\,(10_1)$ non soddisferebbero l'identità della tetravelocità[12]

$$u_k u^k = \frac{dx_k}{d\tau}\frac{dx^k}{d\tau} = -c^2. \tag{12'}$$

Si deve scrivere invece

$$\frac{dx_k}{dx_5} \equiv \frac{u_k}{c} = \frac{\psi\bar{\psi}}{\rho}\cdot\frac{e}{m_0 c}\left(\frac{\partial W}{\partial x^k} - \frac{e}{c}\Phi_k\right), \tag{7a}$$

dove il fattore

$$\rho = e\psi\bar{\psi}\sqrt{1 + \left(\frac{h}{2\pi i}\right)^2 \frac{\Box|\psi|}{m_0^2 c^2|\psi|}} = e\psi\bar{\psi}\left(1 - \frac{e}{m_0 c^2}\Phi_5\right) \tag{14}$$

viene separato come "densità di carica a riposo".

Con questa notazione s'ottiene

$$e\Phi_5 = m_0 c^2\left(1 - \frac{\rho}{e\psi\bar{\psi}}\right) \tag{11a}$$

e la prima equazione di Schrödinger in forma pentadimensionale si scrive[13]

$$\sum_{i=1}^5 \left(\frac{\partial W}{\partial x_i} - \frac{e}{c}\Phi^i\right)\left(\frac{\partial W}{\partial x^i} - \frac{e}{c}\Phi_i\right) = 0. \tag{10a}$$

[11]La comparsa di questa forma quadratica pentadimensionale è del tutto coerente nel senso della prescrizione di Weyl dell'invarianza rispetto al regolo campione. L'elemento di linea d'universo $d\tau$ ovvero dx_5 è un invariante relativistico, ma non è invariante per il cambio d'unità (il passaggio ad un'altra unità di misura cambia $d\tau$); lo è invece l'annullarsi della forma quadratica (12). - Evidentemente i postulati pentadimensionali di Kaluza vanno intesi in questo senso.

[12]Se non altrimenti dichiarato, nel seguito la sommatoria sugli indici uguali si intende sempre estesa da 1 a 4.

[13]Si deve qui osservare che Φ_5 per parte sua è ancora un'incognita da determinarsi. È noto che è ancora un prodigio incompreso il perché la stessa cosa non valga per i potenziali $\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3, \Phi_4$, come ci si dovrebbe aspettare (E. Schrödinger, Ann. d. Phys. **82**, 265, 1927). $\partial W/\partial x_5$ è uguale a $m_0 c$ [vedi (5a)].

Confrontiamo ora il regolo l (13) lungo la corrente (7a) con lo scalare di Schrödinger ψ. Si ottiene per ψ/l:

$$\frac{\psi}{l} = \frac{|\psi|}{l_0} \exp\left[\frac{2\pi i}{h} \int \sum_1^5 \left(\frac{\partial W}{\partial x_i} - \frac{e}{c}\Phi^i\right) dx_i\right],$$

la (7a) dà:

$$= \frac{|\psi|}{l_0} e^{\frac{2\pi i}{h} \int \sum_1^4 \frac{\psi\bar{\psi}}{\rho} \cdot \frac{e}{mc} \left(\frac{\partial W}{\partial x_i} - \frac{e}{c}\Phi^i\right)\left(\frac{\partial W}{\partial x^i} - \frac{e}{c}\Phi_i\right) dx_5 + \left(\frac{\partial W}{\partial x_5} - \frac{e}{c}\Phi_5\right) dx_5},$$

la (11a) dà:

$$= \frac{|\psi|}{l_0} e^{\frac{2\pi i}{h} \int \frac{\psi\bar{\psi}}{\rho} \cdot \frac{e}{mc} \sum_1^5 \left(\frac{\partial W}{\partial x_i} - \frac{e}{c}\Phi^i\right)\left(\frac{\partial W}{\partial x^i} - \frac{e}{c}\Phi_i\right) dx_5}$$

$$= \frac{|\psi|}{l_0}.$$

L'ultima per la (10a). Non s'ottiene quindi subito ψ/l =cost., ma

$$\text{(8a)} \qquad \frac{\psi}{l} = \frac{|\psi|}{l_0},$$

che è funzione univoca della posizione[14]. Ma il potenziale Φ_k è determinato fisicamente solo a meno di un gradiente additivo; se al suo posto introduco come potenziale

$$\phi_k^* = \phi_k - \frac{hc}{2\pi i e} \frac{\partial}{\partial x^k} \ln |\psi|,$$

cosa che lascia intatte le intensità di campo elettromagnetiche, risulta ψ/l = cost.

L'univocità del regolo campione trasportato con la corrente, che si fonda sulla risonanza delle onde, ora si trasferisce senz'altro dalla teoria di de Broglie a quella di Schrödinger, perciò non dobbiamo aggiunger nulla alle considerazioni del 2^0 capitolo.

Stuttgart, Physik. Inst. d. techn. Hochschule, 27 febbraio 1927.

[14] La dimostrazione si può esprimere così nel senso della geometria pentadimensionale:

$$\left(\frac{\partial W}{\partial x^i} - \frac{e}{c}\Phi_i\right) \text{ è parallelo alla pentacorrente:} j_i = \frac{e}{m}\psi\bar{\psi}\left(\frac{\partial W}{\partial x^i} - \frac{e}{c}\Phi_i\right),$$

dx^i dovrà essere scelto parallelo alla pentacorrente j^i.

La pentacorrente è ortogonale a se stessa:

$$\sum_1^5 j_i j^i = 0;$$

quindi j_i è anche ortogonale a dx^i, e quindi

$$\sum_1^5 \left(\frac{\partial W}{\partial x^i} - \frac{e}{c}\Phi_i\right) dx^i = 0.$$

Devo questa bella formulazione ad una comunicazione di A. Landé. Qui la quinta componente della pentacorrente è $j_5 = \rho c$.

Teoria quantistica in forma idrodinamica[1]

E. Madelung a Francoforte sul Meno

(Ricevuto il 25 ottobre 1926.)

Si mostra che l'equazione di Schrödinger del problema ad un elettrone si può trasformare nella forma di equazioni idrodinamiche.

Secondo Schrödinger[2] la teoria quantistica del problema ad un elettrone è retta dall'"equazione delle ampiezze":

$$\Delta\psi_0 + \frac{8\pi^2 m}{h^2}(W - U)\psi_0 = 0,\ \psi = \psi_0 e^{\frac{i2\pi W t}{h}}. \tag{1}$$

In essa W indica l'energia del sistema, U l'energia potenziale in funzione della posizione dell'elettrone, m la massa di questo. Si cerca una soluzione che sia ovunque finita e continua. Ciò è possibile solo per certi valori di W. Questi "autovalori" W_i devono essere allora le energie che il sistema possiede nei suoi "stati quantici". È noto che essi si possono constatare spettroscopicamente. La corrispondenza tra teoria ed esperienza parla del tutto a favore dell'utilità del metodo di calcolo così fissato.

Ad ogni autovalore corrisponde una "autosoluzione" che dev'essere normalizzata e dotata del fattore temporale $e^{\frac{i2\pi W t}{h}}$ e che secondo Schrödinger rappresenta quella che vale nel sistema. Schrödinger dà delle prescrizioni per un'interpretazione che in linea di principio è in accordo con quella data nel seguito. Io estenderò questa interpretazione e mostrerò che esistono ampie analogie con l'idrodinamica.

Una seconda equazione, proposta anch'essa da Schrödinger, si ottiene dalla (1) per eliminazione di W con l'inclusione del fattore temporale:

$$\Delta\psi - \frac{8\pi^2 m}{h^2}U\psi - \frac{i4\pi m}{h}\frac{\partial\psi}{\partial t} = 0. \tag{2}$$

Essa contiene come soluzioni quelle della prima equazione, ma a differenza di questa anche tutte le loro combinazioni lineari. Questo è assai importante. Se si pone infatti $\psi = \alpha\exp(i\beta)$, per la (1) solo β può essere considerato dipendere linearmente da t, mentre per la (2) sia α che β possono variare con il tempo. Con $\psi = \alpha\exp(i\beta)$ risulta dalla (2):

$$\Delta\alpha - \alpha(\operatorname{grad}\beta)^2 - \frac{8\pi^2 m}{h^2}U + \frac{4\pi m}{h}\alpha\frac{\partial\beta}{\partial t} = 0 \tag{3}$$

e

$$\alpha\Delta\beta + 2(\operatorname{grad}\alpha\operatorname{grad}\beta) - \frac{4\pi m}{h}\frac{\partial\alpha}{\partial t} = 0. \tag{4}$$

Dalla (4) con $\varphi = -\beta h/(2\pi m)$ segue:

$$\operatorname{div}(\alpha^2\operatorname{grad}\varphi) + \frac{\partial\alpha^2}{\partial t} = 0. \tag{4'}$$

[1]Quantentheorie in hydrodynamischer Form, Zeitschr. f. Phys. **40**, 322-326 (1926).

[2]E. Schrödinger, Ann. d. Phys. **79**, 361, 489; **80**, 437; **81**, 109 (1926).

La (4') ha il carattere di un'equazione di continuità idrodinamica, quando si consideri α^2 come una densità e φ come il potenziale della velocità di una corrente $\mathfrak{u} = \operatorname{grad} \varphi$.

Con questo la (3) dà:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2}(\operatorname{grad} \varphi)^2 + \frac{U}{m} - \frac{\Delta \alpha}{\alpha} \frac{h}{8\pi^2 m^2} = 0. \tag{3'}$$

Anche questa equazione corrisponde proprio ad un'equazione idrodinamica, cioè a quella di una corrente irrotazionale sotto l'azione di forze conservative[3].

La formazione del gradiente, poichè $\operatorname{rot} \mathfrak{u} = 0$, dà:

$$\frac{\partial \mathfrak{u}}{\partial t} + \frac{1}{2} \operatorname{grad} \mathfrak{u}^2 = \frac{d\mathfrak{u}}{dt} = -\frac{\operatorname{grad} U}{m} + \operatorname{grad} \frac{\Delta \alpha}{\alpha} \frac{h^2}{8\pi^2 m^2}. \tag{3''}$$

$-\operatorname{grad} U/m$ corrisponde alla quantità f/ρ (densità di forza/densità di massa), $(\Delta\alpha/\alpha)(h^2/8\pi^2 m^2)$ alla quantità $-\int dp/\rho$, che si può considerare come funzione forza delle forze "interne" del continuo.

Vediamo quindi che l'equazione (2) si può interpretare interamente in senso idrodinamico, e che una peculiarità compare solo in un termine, che rappresenta il meccanismo interno del continuo.

Nel caso dell'equazione (1) sarà $\partial\alpha/\partial t = 0$ e $\partial\varphi/\partial t = -W/m$. Le autosoluzioni della (1) producono quindi malgrado il fattore temporale la struttura di una corrente stazionaria. Secondo questa interpretazione gli stati quantici si devono considerare come stati di corrente stazionari, nel caso $\operatorname{grad} \beta = 0$ addirittura come strutture statiche.

Le soluzioni dell'equazione più generale (2) si ottengono semplicemente come combinazioni lineari delle autosoluzioni. Poniamo per esempio: $\psi = \alpha \exp(i\beta) = \psi_1 + \psi_2 = c_1\alpha_1 \exp(i\beta_1) + c_2\alpha_2 \exp(i\beta_2)$, dove ψ_1 e ψ_2 siano autosoluzioni della (1) che posseggano i fattori temporali $\exp(i2\pi Wt/h)$; sarà allora:

$$\alpha^2 = c_1^2\alpha_1^2 + c_2^2\alpha_2^2 + 2c_1c_2\alpha_1\alpha_2 \cos(\beta_2 - \beta_1)$$

e

$$\alpha^2 \operatorname{grad} \beta = c_1^2\alpha_1^2 \operatorname{grad} \beta_1 + c_2^2\alpha_2^2 \operatorname{grad} \beta_2 + c_1c_2\alpha_1\alpha_2 \operatorname{grad}(\beta_1 + \beta_2) \cos(\beta_1 - \beta_2),$$

$$\int \alpha^2 dV = c_1^2 \int \alpha_1^2 dV + c_2^2 \int \alpha_2^2 dV,$$

cioè sia la "densità" che la "intensità di corrente" contengono un termine temporale periodico con $\nu = (W_1 - W_2)/h$. La "quantità totale" risulta tuttavia costante.

Nel caso di una corrente stazionaria si trova dalla (3'):

$$W = \frac{m}{2}(\operatorname{grad} \varphi)^2 + U - \frac{\Delta\alpha}{\alpha} \frac{h^2}{8\pi^2 m}, \tag{5}$$

che si può scrivere anche, ponendo: $\alpha^2 = \sigma$, $\sigma m = \rho$, secondo la normalizzazione $\int \sigma dV = 1$:

$$W = \int dV \left\{ \frac{\rho u^2}{2} + \sigma U - \sqrt{\sigma}\Delta(\sqrt{\sigma}) \frac{h^2}{8\pi^2 m} \right\}. \tag{5'}$$

[3]Vedi per esempio Weber e Gans, Repertorium d. Physik I, 1, 304.

Questa forma dell'energia come integrale di volume sulla densità d'energia cinetica e potenziale è immediatamente intuitiva.

Non vi è evidentemente alcun motivo perchè questa forma, che si può scrivere anche

$$W = \frac{h}{2\pi}\int dV \alpha^2 \frac{\partial\beta}{\partial t}$$

non debba valere anche nel caso di una corrente non stazionaria. Che la legge di conservazione $dW/dt = 0$ sia soddisfatta lo si stabilisce facilmente tenendo conto dell'ortogonalità delle autosoluzioni.

Interessa ora la domanda: contengono le equazioni (3'), (4') e (5') tutte le caratteristiche richieste, in particolare:

1. l'esistenza discreta di stati di corrente stazionari con le energie W_i,

2. il fatto che tutti gli stati non stazionari possiedono solo periodicità della forma $\nu_{ik} = (W_i - W_k)/h$?

Evidentemente la (2) discende univocamente dalle (3') e (4'), d'altra parte la (1) lo fa da queste con la (5'). Le equazioni idrodinamiche sono quindi equivalenti a quelle di Schrödinger e danno tutto ciò che danno quelle, cioè sono sufficienti a rappresentare in modo modellistico i momenti essenziali della teoria quantistica dell'atomo.

Se il presente problema quantistico appare risolto mediante un'idrodinamica dell'elettricità distribuita con continuità con una densità di massa proporzionale alla densità di carica, rimane tuttavia una serie di difficoltà. Da un lato la densità di massa non è del tipo che ci si aspetterebbe dall'elettrodinamica, dall'altro ci si dovrebbe aspettare che la reazione di una parte dell'elettrone su un'altra, che sarebbe rappresentata dal termine $\sqrt{\sigma}\Delta(\sqrt{\sigma})h^2/(8\pi^2 m)$, non dovrebbe dipendere solo dalla densità nella posizione considerata e dalle sue derivate, ma anche dalla distribuzione complessiva della carica. Se queste due aspettazioni possano essere soddisfatte con una pura trasformazione matematica, non ho potuto determinarlo.

Come s'ha da trattare ora il problema a più elettroni? Schrödinger non dà una forma interamente determinata. Egli richiede soltanto che l'energia cinetica vada calcolata come in una rappresentazione del moto nello spazio delle fasi, cioè si deve porre: $T = \Sigma m_i u_i^2/2$ come somma sulle energie cinetiche dei singoli elettroni, come se essi esistessero l'uno accanto all'altro indipendentemente e non costituissero un solo campo di corrente.

Di fatto questa è una possibilità naturale. Dobbiamo solo decidere tra le seguenti alternative:

a) più elettroni confluiscono in una struttura più grande?

b) essi si evitano e si passa dall'uno all'altro con certe condizioni al contorno?

c) essi si compenetrano senza fondersi?

Mi pare che la c) sia la più probabile. La a) porterebbe alle stesse soluzioni del problema ad un elettrone, solo con normalizzazione cambiata, il che porta evidentemente a un risultato falso. La b) è in considerazione delle "orbite profonde" improbabile, ma concepibile.

Secondo la c) si dovrebbero definire in ciascun punto dello spazio più vettori, come pure i corrispondenti potenziali delle velocità. Il continuo avrebbe allora la qualità di uno sciame le cui parti possedessero un libero cammino infinito.

Quale forma si debba attribuire alla funzione U in modo che essa rappresenti l'interazione degli elettroni, e al "termine quantistico" dell'equazione (3'), lo si può decidere dal calcolo coronato da successo di almeno un caso.

Esiste pertanto la speranza di completare la teoria quantistica dell'atomo su questa base. Ma così i processi di radiazione saranno rappresentati solo parzialmente. Appare chiarito che un atomo in uno stato quantico non irraggia, e anche la radiazione delle giuste frequenze è correttamente rappresentata, e senza "salto", bensì con un lento passaggio in uno stato di non stazionarietà, ma molte altre cose, come per esempio il fatto dell'assorbimento di quanti, appaiono del tutto oscure. Ritengo prematuro comunicare delle speculazioni su questo.

Alcune domande esplorative che riguardano la meccanica quantistica[1]

W. Pauli a Zurigo

(ricevuto il 17 dicembre 1932)

§1. Sul ruolo dell'unità immaginaria e sul concetto di densità di probabilità spaziale di una particella nella meccanica ondulatoria. §2. L'analogia tra fotoni ed elettroni ed i suoi limiti. §3. La domanda sulla formulabilità della meccanica quantistica come teoria di azione per contatto.

Sotto il titolo suddetto P. Ehrenfest[2] ha posto in discussione più domande distinte. Poiché in occasione della redazione di un articolo di rassegna mi sono in parte scontrato con domande del tutto analoghe, mi sia concesso di pubblicare qui alcune osservazioni in proposito. Queste non pretendono né di essere nuove, né di rappresentare risposte definitive alle domande poste. Esse possono servire solo a ricacciar via l'immagine, introdotta da Ehrenfest, di un "bon ton" che pretende di porre da parte queste domande come "prive di senso", e parimenti di accennare alla connessione di queste domande con i problemi ancora irrisolti della teoria quantistica relativistica (stati d'energia negativa, energia propria dell'elettrone). Mi limito qui alle questioni sollevate nelle sezioni A e B della nota di Ehrenfest ed alle osservazioni che ne derivano, mentre le domande più matematiche e di teoria dei gruppi contenute nella sezione C di quella non le considero, poiché non mi sento competente per la loro discussione.

§1. Sul ruolo dell'unità immaginaria e sul concetto di densità di probabilità spaziale di una particella nella meccanica ondulatoria.

Per il caso di una particella, per ora in assenza di campi di forze esterni, a partire dal concetto (simbolico, cioè di per sé non direttamente osservabile) di onde nel continuo spaziotemporale tetradimensionale, cominciamo a formulare tentativamente una sequenza d'ipotesi, delle quali ciascuna vada sempre più in là della precedente. Con ciò non si ha tuttavia l'intenzione di ottenere un'assiomatica completa della meccanica ondulatoria, ma solo principalmente di sottolineare il ruolo particolare del concetto di densità di probabilità spaziale, la cui esistenza secondo me a torto viene di solito assunta come ovvia. Questo concetto è decisivo per la domanda che si porrà nel seguente §2 sull'analogia tra luce e materia e sui suoi limiti, e consente anche di riconoscere al meglio la ragione per la comparsa dell'unità immaginaria nell'equazione di Schrödinger[3].

I. 1. Si dia un campo d'onde con principio di sovrapposizione, descritto con un numero per ora indeterminato di componenti $\psi_1, \psi_2, \ldots$ Se $\psi_\rho^{(1)}(\vec{x},t)$, $\psi_\rho^{(2)}(\vec{x},t)$ sono campi possibili, è un campo possibile anche $c_1\psi_\rho^{(1)}(\vec{x},t) + c_2\psi_\rho^{(2)}(\vec{x},t)$, con costanti arbitrarie c_1 e c_2 (non contenenti l'indice ρ).

[1]Einige die Quantenmechanik betreffenden Erkundigungsfragen, Zeitschr. f. Phys. **80**, 573-586 (1933).

[2]P. Ehrenfest, Zeitschr. f. Phys. **78**, 555, 1932.

[3]Nella meccanica delle matrici di Heisenberg, Born e Jordan la ragione *formale* per la sua comparsa era la legge di *moltiplicazione delle matrici* assieme al principio di combinazione per le frequenze spettrali della luce emessa.

I. 2. In seguito a scomposizione di Fourier di $\psi_\rho(\vec{x},t)$ (in integrale o somma) risulta

$$\text{(I)} \qquad \psi_\rho(\vec{x},t) = \sum_k \left\{ a_\rho(\vec{k}) \exp\left[i(\vec{k}\cdot\vec{x} - \nu t)\right] + b_\rho(\vec{k}) \exp\left[-i(\vec{k}\cdot\vec{x} - \nu t)\right] \right\}$$

(ovvero $\int dk$ al posto di $\sum_k$), dove la quantità positiva ν è una funzione di $|k|$; le quantità ν e $\vec{k}$ sono legate alle quantità meccaniche energia-impulso secondo la relazione fondamentale

$$E = h\nu, \ \vec{p} = h\vec{k},$$

(h = quanto d'azione diviso per 2π, ν frequenza angolare). Perciò soddisfano le relazioni

$$\nu = \frac{h}{2m}|k|^2 \text{ per il punto materiale non relativistico,}$$

$$\frac{\nu^2}{e^2} = \frac{m^2c^2}{h^2} + |k|^2 \text{ per il punto materiale relativistico,}$$

$$\frac{\nu^2}{c^2} = |k|^2 \text{ per il fotone.}$$

Per ogni $\vec{k}$ dev'esserci realmente un'onda piana. Ma qui non si assumerà ancora nulla riguardo a *quali relazioni di dipendenza tra gli* $a_\rho(\vec{k}), b_\rho(\vec{k})$ (in generale complessi) *corrispondano all'onda più generale possibile appartenente ad un dato* $\vec{k}$. Potrebbe per esempio darsi che debba essere $b_\rho(\vec{k}) = 0$, o anche $b_\rho(\vec{k}) = a^*_\rho(\vec{k})$, cioè ψ_ρ reale.

I. 3. I valori assoluti $|a_\rho(\vec{k})|$, $|b_\rho(\vec{k})|$ di a_ρ e b_ρ devono essere quantità misurabili, e a meno di un fattore di normalizzazione eventualmente dipendente da $|k|$, $|a_\rho(\vec{k})|^2 + |b_\rho(\vec{k})|^2$ dev'essere proporzionale alla probabilità che l'impulso della particella (diviso per h) si trovi nella regione $\vec{k}, \vec{k} + d\vec{k}$.

Da qui discende già qualcosa, e in particolare la possibilità del passaggio al limite dell'ottica geometrica (meccanica classica), dove si può prescindere dallo sparpagliamento del pacchetto. Ciò è infatti ammesso per dimensioni lineari del pacchetto che siano grandi rispetto al reciproco del $|\vec{k}|$ "medio". Discende inoltre il fatto che

$$\vec{v} = \frac{\partial \nu}{\partial \vec{k}}$$

è la velocità di gruppo. Infine le relazioni di indeterminazione

$$\Delta\vec{x}\cdot\Delta\vec{k} \sim 1, \ \Delta t \cdot \Delta\nu \sim 1,$$

quindi

$$\Delta\vec{x}\cdot\Delta\vec{p} \sim h, \ \Delta t \cdot \Delta E \sim h,$$

come relazioni giuste quanto a ordine di grandezza. (L'estensione del pacchetto è qui ancora non definibile *quantitativamente*, ma ciò non importa.)

Fin qui il campo di Maxwell e il campo dell'onda materiale sono analoghi; anche il campo di un solo scalare reale sarebbe ancora compatibile con le ipotesi introdotte. Ora viene un *nuovo* gruppo d'ipotesi:

II. 1. La probabilità $W(\vec{x},t)dx_1dx_2dx_3$ di trovare la particella al tempo esatto t nell'elemento di volume infinitesimo $\vec{x}$, $\vec{x}+d\vec{x}$ è sempre un concetto significativo. Allora in primo luogo $W(\vec{x})$ dev'essere essenzialmente positiva:

$$W(\vec{x},t) \geq 0. \tag{1}$$

In secondo luogo dev'essere

$$\int W(\vec{x},t)dx_1dx_2dx_3 = 1, \tag{2}$$

quindi sempre indipendente da t.

Si deve qui sottolineare con particolare vigore che quest'ipotesi, che $W(\vec{x},t)$ sia sempre un concetto significativo, non è né evidente di per sé , né può essere fatta derivare dal punto di vista della complementarità (gruppo d'ipotesi I) che viene espresso nelle relazioni di indeterminazione. Infatti si tratta della determinazione della posizione della particella anche al *di là della validità della meccanica classica*, cioè in regioni dello spazio e del tempo le cui dimensioni siano piccole rispetto alla lunghezza d'onda media ovvero rispetto al periodo d'oscillazione medio del pacchetto d'onda considerato. L'esistenza di $W(\vec{x},t)$ è altresì evidente, se si può dimostrare:

II. 1$'$. Esistono sempre esperimenti dal risultato dei quali si può concludere con certezza se la particella al tempo t si trovi o no nell'elemento di volume $\vec{x}$, $\vec{x}+d\vec{x}$ (in modo tale che nel primo caso sia esclusa la contemporanea azione diretta della particella in un altro punto). Se esperimenti del genere non esistono sempre si può essere in dubbio sull'esistenza di una $W(\vec{x},t)$. Ritornerò su questo dubbio in seguito.

Vengo ora alla domanda posta all'inizio sulla necessità di almeno *due* scalari reali per le onde di de Broglie-Schrödinger. Sostengo che questa necessità e quindi anche l'unità immaginaria intervengono *perché si cerca un'espressione per la densità di probabilità W che soddisfi i requisiti (1) e (2), e che non contenga le derivate temporali di ψ.* L'ultimo requisito è necessario per rendere chiaro il concetto "numero degli scalari utilizzati". Un *singolo* scalare reale che soddisfi un'equazione differenziale del second'ordine in t è esattamente equivalente all'uso di *due* scalari reali che soddisfino equazioni differenziali del prim'ordine in t (si ponga allora $\partial\psi_1/\partial t = \psi_2$). Vale anche l'inverso, come sarà immediatamente spiegato. Enunciamo quindi l'assioma.

II. 2. Se le $\psi_\rho(\vec{x},t)$ per un determinato t_0 sono note come funzioni di $\vec{x}$, W dev'essere determinata a questo tempo t_0 solo mediante le $\psi_\rho(\vec{x},t)$, e in particolare, come possibilità più semplice, W deve dipendere quadraticamente (ovvero bilinearmente) dall'andamento funzionale delle $\psi_\rho(\vec{x},t)$.

Nota esplicativa. Un operatore bilineare $W(\vec{x},t)$ associa a due leggi funzionali $\psi_\rho^{(1)}(\vec{x})$ e $\psi_\rho^{(2)}(\vec{x})$ una funzione di $\vec{x},t$ in modo tale che

$$\begin{aligned} &W(\vec{x},t)\left\{f_\rho(\vec{x}'),\ c_1g_\rho^{(1)}(\vec{x}'')+c_2g_\rho^{(2)}(\vec{x}'')\right\} \\ &= c_1W(\vec{x},t)\left\{f_\rho(\vec{x}'),g_\rho^{(1)}(\vec{x}'')\right\}+c_2W(\vec{x},t)\left\{f_\rho(\vec{x}'),g_\rho^{(2)}(\vec{x}'')\right\}\end{aligned}$$

e

$$W(\vec{x},t)\left\{c_1 f_\rho^{(1)}(\vec{x}') + c_2 f_\rho^{(2)}(\vec{x}'), g_\rho(\vec{x}'')\right\}$$
$$= c_1 W(\vec{x},t)\left\{f_\rho^{(1)}(\vec{x}'), g_\rho(\vec{x}'')\right\} + c_2 W(\vec{x},t)\left\{f_\rho^{(2)}(\vec{x}'), g_\rho(\vec{x}'')\right\}.$$

Se l'operatore è locale, esso è una forma quadratica delle ψ_ρ e di un numero finito di derivate spaziali; se non è locale, può essere della forma

$$\sum_{\rho,\sigma}\int\int a_{\rho\sigma}(\vec{x},\vec{x}',\vec{x}'')\psi_\rho(\vec{x}',t)\psi_\sigma(\vec{x}'',t)d\vec{x}'d\vec{x}''.$$

Sarebbe naturalmente possibile a priori che si debba giungere a forme di ordine quarto o più alto, ma l'esperienza mostra che sono sufficienti forme quadratiche.

Ora la discussione è diversa nel caso relativistico e nel *caso non relativistico.* Trattiamo prima quest'ultimo. Nel caso di assenza di forze si vede immediatamente: per un determinato $\vec{k}$ non si può ottenere dalla parte reale di una sola onda della forma (I) e dalle sue derivate spaziali *nessuna* espressione quadratica nelle ampiezze, che abbia un integrale di volume costante nel tempo, poiché il termine temporale spurio dell'espressione quadratica nell'integrando ha un valore prescrivibile a piacere.

Se ora ψ è in particolare la parte di (I) che contiene solo a_ρ, ψ^* la parte di (I) che contiene solo b_ρ, allora

$$\int \psi^2 dV \quad \text{e} \quad \int \psi^{*2} dV$$

sono dipendenti dal tempo, solo

$$\int \psi\psi^* dV$$

è costante e le ψ e ψ^* così specializzate soddisfano alle equazioni differenziali del prim'ordine[4]

$$-\frac{h}{i}\frac{\partial\psi}{\partial t} = \mathbf{H}\psi,\ \frac{h}{i}\frac{\partial\psi^*}{\partial t} = (\mathbf{H}\psi)^*,\ \mathbf{H} = E_0 - \frac{h^2}{2m}\Delta,$$

quindi

$$W(\vec{x},t) = \psi^*\psi. \tag{II}$$

L'altra possibilità, introdurre un solo scalare reale U che soddisfi un'equazione differenziale del second'ordine in t, quindi esprimere ψ e ψ^* mediante un solo "potenziale" *reale* e la sua derivata prima $\partial U/\partial t$ (assumibile a piacere per t fissato) è di fatto disponibile, e non solo nel caso d'assenza di forze, ma in generale, quando H non contiene esplicitamente il tempo ed è reale. Si ponga

$$\psi = \left(-\frac{h}{i}\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{H}\right)U, \quad \text{quindi} \quad \psi^* = \left(\frac{h}{i}\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{H}\right)U \tag{3}$$

[4] $E_0 = m_0c^2$ può essere a piacimento incluso o tralasciato.

e per U reale l'equazione differenziale

$$\text{(III)} \qquad \left(-h^2\frac{\partial^2}{\partial t^2}+(\mathbf{H})^2\right)U=0,$$

quindi nel caso di assenza di forze

$$-h^2\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}+\left[E_0^2-2E_0\frac{h^2}{2m}\Delta+\left(\frac{h^2}{2m}\right)^2\Delta\Delta\right]U=0.$$

Dalla più generale soluzione reale della (III) si ottiene la più generale soluzione complessa della (II). La densità W sarà

$$\text{(4)} \qquad W(\vec{x},t)=h^2\left(\frac{\partial U}{\partial t}\right)^2+(\mathbf{H}U)^2\,,$$

la costanza temporale della quale discende anche direttamente dalla (III), sempre che $\mathbf{H}$ sia reale autoaggiunto e non contenga esplicitamente il tempo. Se $\mathbf{H}$ è hermitiano, ma non reale, anche U non è reale. Per quanto concerne il contenuto fisico della teoria con l'introduzione di U non cambia nulla, solo le formule risultano più complicate. Ciò si manifesta non solo nella teoria delle trasformazioni, ma anche nella composizione di due sistemi indipendenti in un sistema complessivo. In luogo della semplice forma prodotto $\psi=\psi_1\cdot\psi_2$ appare con U qualcosa di sostanzialmente più complicato.

Nel *caso relativistico* si deve prescrivere inoltre:

II. 3. Oltre a W esiste un vettore corrente $\vec{J}$, di modo che valga l'equazione di continuità

$$\frac{\partial W}{\partial t}+\operatorname{div}\vec{J}=0$$

e $(\vec{J}/c,\ iW)$ costituisca un tetravettore. Allora in assenza di forze s'ottiene l'equazione di Dirac come (essenzialmente) la sola possibilità. In particolare l'introduzione di quantità con rappresentazioni *doppie* del gruppo di Lorentz sarà indispensabile, se accanto alla II. 3. si vuole adempiere al requisito (1), che W sia definita positiva. Ciò risulta nel modo più semplice dall'argomentazione originaria di Dirac e perciò non la si riporterà ulteriormente qui.

§*2. Le questioni dell'analogia tra fotoni ed elettroni e dei limiti di questa.*

Si deve qui eseguire subito per l'esattezza una distinzione, non introdotta nella nota di Ehrenfest, tra due tipi diversi di campi. Chiamiamo *campi grandi* quelli che descrivono un *numero grande* e in certe circostanze *indeterminato* di particelle (indicati per la materia con Ψ_ρ, per i fotoni con $\vec{E},\vec{H}$); chiamiamo invece campi *piccoli* quelli associati a una *singola* particella (indicati per la materia con ψ_ρ, per i fotoni con $\vec{e},\vec{h}$). I campi piccoli non sono in linea di principio direttamente osservabili, ma ciò succede al più per le densità di probabilità costruite quadraticamente da essi o dalle loro componenti di Fourier. Nella teoria quantistica i campi grandi sono q-numeri (operatori o matrici); introdotti per la materia da Klein, Jordan e Wigner, per i fotoni sono da intendere come le intensità di campo elettromagnetiche misurabili classicamente con una certa precisione finita, limitata dalla finitezza del quanto d'azione. Ora si possono considerare analoghi i campi piccoli tra loro e i campi grandi tra loro [sebbene sia il campo piccolo $(\vec{e},\vec{h})$ che il campo grande $(\vec{E},\vec{H})$ nel caso di assenza di cariche soddisfino *entrambi* le equazioni di Maxwell[5]]. Ma anche queste due analogie di per sé giuste hanno i loro limiti, che saranno ora discussi.

1. Limiti dell'analogia tra i campi $(\vec{e},\vec{h})$ e ψ_ρ. Consideriamo da un lato le equazioni di Maxwell per il vuoto (assenza di cariche) per il campo $(\vec{e},\vec{h})$ di un fotone, dall'altro l'equazione di Dirac per una particella materiale in assenza di forze. Gli $(\vec{e},\vec{h})$ sono reali, le ψ_ρ possono, se si vuole, essere anche scelte reali[6]. Appare allora la differenza già rilevata da Ehrenfest:

a) Per il fotone non esiste alcun vettore tetracorrente che soddisfi l'equazione di continuità e che abbia densità definita positiva (le ipotesi II. 2. e II. 3. non possono essere soddisfatte simultaneamente). Dobbiamo concludere da qui che per il campo del fotone, al di fuori dalla validità dell'ottica geometrica (ottica dei raggi) per un campo non monocromatico il concetto di densità spazio-temporale locale $W(\vec{x},t)$ delle particelle non ha significato. Ritengo definitiva questa affermazione e condivido pienamente il punto di vista espresso da Ehrenfest nell'osservazione B, 3, che "tutte le virtuosistiche dissertazioni sull'analogia tra le equazioni di Maxwell da un lato e in particolare l'equazione di Dirac dall'altro non hanno prodotto assolutamente niente". Si può anche dire: queste dissertazioni hanno prodotto qualcosa, che è opposto all'intenzione del loro autore: cioè, che la differenza in questione non può essere rimossa neppure con formalismi così generali. L'inesistenza di una W che soddisfi le ipotesi II. è ciò che rende possibile nel caso del campo elettromagnetico di riuscire con rappresentazioni *semplici* del gruppo di Lorentz (senza spinori). La differenza fisica si rispecchia direttamente nella differenza matematica (parimenti ineliminabile con qualsiasi gioco di prestigio) tra quantità di campo che per il gruppo di Lorentz si trasformano secondo rappresentazioni *semplici*, e quantità che si trasformano secondo rappresentazioni *doppie.*

A questo punto credo anche di poter rispondere alla questione didattica, come si debbano trattare le analogie tra fotone ed elettrone nell'introduzione alla meccanica quantistica. Le analogie riguardano quelle proprietà dei campi piccoli del fotone e dell'elettrone, *che derivano già dall'ambito d'ipotesi I* e per le quali non è necessario nessun concetto esatto di densità delle particelle in regioni dello spazio-tempo che possiedano dimensioni confrontabili con lunghezza d'onda-periodo d'oscillazione (per esempio traccia di Wilson dei raggi γ = raggio del quanto di luce secondo l'ottica geometrica).

L'assenza del concetto esatto di densità di probabilità per il fotone (non solo Landau e Peierls non hanno potuto trovare l'espressione giusta per questa densità; ma per essa *non esiste nessuna* espressione giusta) si manifesta nella conseguenza: l'*annullarsi del campo* $(\vec{e},\vec{h})$ *in un punto dello spazio-tempo non ha alcun significato fisico diretto*, in contrasto con l'annullarsi del campo ψ_ρ in un punto dello spazio-tempo.

[5]Il tentativo recente di de Broglie (C.R. **195**, 536 e 862, 1932) di abbandonare la validità delle equazioni di Maxwell per il campo $(\vec{e},\vec{h})$, considerate le conseguenze fisiche che ne derivano, sembra non riuscito allo scrivente.

[6]Si osservi che nel caso d'assenza di forze con opportuna scelta delle matrici α^i, β le equazioni di Dirac possiedono soluzioni reali per ψ_ρ.

Si aggiunga qui ancora un'osservazione sui campi di radiazione *monocromatici.* In un campo siffatto i valori medi temporali (valutati su tempi lunghi rispetto alla durata dell'oscillazione) di una qualche funzione quadratica delle intensità di campo $\vec{e}$ ed $\vec{h}$ sono esattamente misurabili come funzioni spaziali. In regioni che siano piccole rispetto alla lunghezza d'onda, con gli apparati utilizzati solitamente[7] nei campi d'interferenza, non si determinerà $\overline{|e^2|}+\overline{|h^2|}$, ma solo $\overline{|e^2|}$, come notoriamente avviene negli esperimenti sulle onde stazionarie. È importante che gli "apparati $\overline{|e^2|}$" e gli "apparati $\overline{|h^2|}$" diano funzioni spaziali diverse.

b) Veniamo ora ad una *seconda* differenza del campo $(\vec{e}, \vec{h})$ rispetto al campo ψ_ρ, che viene toccata da Ehrenfest nell'osservazione B.1. e che dipende dal trattamento degli "stati d'energia negativa" che solo si può compiere in base allo stato attuale della nostra conoscenza. Questo trattamento è diverso per l'elettrone e per il fotone. Le soluzioni *reali* delle equazioni di Maxwell per il campo $(\vec{e}, \vec{h})$ hanno la proprietà che la densità d'energia $\rho = \frac{1}{2}(\vec{e}^2 + \vec{h}^2)$ (sebbene possieda un integrale di volume costante nel tempo) in un'assegnata posizione dello spazio non è costante nel tempo, ma mostra oscillazioni di frequenza 2ν, dove ν è la frequenza del campo stesso. In una teoria che è costruita come se il preciso andamento spazio-temporale di ρ, e quindi anche quelle oscillazioni fossero osservabili[8], queste soluzioni reali non descrivono quindi nessuno stato *stazionario.* Nel tentativo di trovare soluzioni delle equazioni di campo per le quali ρ in ogni posizione dello spazio sia *esattamente* costante nel tempo si è portati a *modificare il campo* $(\vec{e}, \vec{h})$ *e l'espressione per* ρ. La nostra teoria dell'emissione e dell'assorbimento della luce è fatta in modo tale che, nel caso di un fotone con frequenza e direzione di propagazione determinati, la dipendenza dal tempo della funzione d'onda sarà descritta mediante il fattore complesso $\exp[i\nu t]$, e che inoltre si possa far uso solo *della* parte del campo $(\vec{e}, \vec{h})$ per la quale la dipendenza dal tempo nello sviluppo di Fourier contenga solo $\exp[-i\nu t]$ con ν *positivo. Questa* parte di $\vec{e}$ la si chiami $\vec{f}$, l'altra $\vec{f}^*$. Si mostra allora che assieme a

$$\vec{e} = \vec{f} + \vec{f}^*$$

vale anche

$$\vec{h} = -\frac{i}{\sqrt{\Delta}}\,\mathrm{rot}(\vec{f} - \vec{f}^*).$$

La parte del campo $(\vec{e}, \vec{h})$ che possiede la dipendenza temporale $\exp[+i\nu t]$ $(\nu > 0)$ darebbe luogo ad emissione di luce nello stato fondamentale e ad assorbimento di luce in stato superiore (fotoni d'energia negativa). Inoltre $\frac{1}{2}(|e^2| + |h^2|)$ viene sostituito con l'espressione

$$\rho = 2\vec{f}\vec{f}^*,$$

che nello stato stazionario non contiene più nessuna parte dipendente dal tempo. La proprietà menzionata della teoria dell'interazione di luce e materia è di tipo assai generale, poiché essa non discende dalla scelta particolare dell'operatore hamiltoniano, ma già dal requisito che la funzione d'onda del sistema complessivo in prima approssimazione si debba scomporre in un prodotto i cui fattori si riferiscono alla sola materia e rispettivamente al solo campo elettromagnetico. L'importanza di questo requisito è già stata menzionata nel §1.)

[7] Fotocellule, lastre fotografiche.

[8] Si osservi: le oscillazioni del campo $(\vec{e}, \vec{h})$ o del campo ψ_ρ *di per sé* ovviamente non lo sono!

[Incidentalmente si osservi che una analoga scomposizione dei campi grandi (q-numeri) $(\vec{E}, \vec{H})$ in $\vec{F}$ ed $\vec{F}^*$ è necessaria se si vuole sottrarre l'energia di punto zero della radiazione.]

Ora risulta una differenza rispetto al campo materiale:

Anche nell'interazione con la materia permane l'assenza di "fotoni d'energia negativa", mentre per il campo materiale è noto che la transizione da "stati d'energia positiva" a "stati d'energia negativa" non può essere eliminata.

Queste quantità $\vec{f}$ ed $\vec{f}^*$ introducono necessariamente nella teoria l'operatore non locale $\sqrt{-\Delta}$ oppure $1/\sqrt{-\Delta}$; si ha a che fare non solo con la loro dipendenza temporale, ma anche (in assenza di cariche, che modificano la loro dipendenza temporale) addirittura con il loro comportamento *incontrollabile* rispetto alle trasformazioni di Lorentz. Si deve ricordare ancora in particolare che per le onde di Dirac la condizione aggiuntiva di utilizzare solo campi con stati d'energia positiva (Schrödinger) introdurrebbe comunque nella teoria un operatore *non locale* analogo a $\sqrt{-\Delta}$ (cioè $\sqrt{mc^2 + \Delta}$). *Questi operatori non locali*, che del tutto *in generale* si avvertono come innaturali, sono caratteristici dell'esclusione degli stati d'energia negativa.

Abbiamo qui urtato nel problema irrisolto, che ragionevolmente deve porsi con gli "stati d'energia negativa". Ci si dovrà sempre attenere alla prescrizione: "Uno stato stazionario corrisponde necessariamente ad una soluzione con la dipendenza temporale $\exp[-i\nu t]$"? Ciò naturalmente dipende da come si può descrivere l'interazione tra luce e materia.

Ancora più importante è la domanda: anche in una teoria futura del campo *materiale*, che permetta di evitare le difficoltà degli stati d'energia negativa, resterà valido il concetto della densità di probabilità W? L'autore sospetta che una tale teoria futura porterà una modifica importante del concetto di spazio-tempo (non solo del concetto di campo) in regioni della dimensione h/mc ovvero h/mc^2. In una siffatta teoria le differenze qui discusse tra fotoni ed elettroni saranno accresciute o diminuite? Dobbiamo lasciare aperta tale questione.

Veniamo ad una domanda meno difficile.

2. Differenze tra il campo Ψ_ρ e il campo $(\vec{E}, \vec{H})$. Il campo $(\vec{E}, \vec{H})$ ha la proprietà che nel limite d'un gran numero di quanti di luce è un campo misurabile classicamente, cioè un campo per il quale non solo le ampiezze, ma anche le fasi siano misurabili con precisione relativamente assai alta. Ma in proposito è essenziale e decisivo che: *ogni misura di $\vec{E}$ o di $\vec{H}$ in un intervallo di tempo finito è legata ad una variazione indeterminata del numero di fotoni presenti.* Lo si vede dal fatto che nella misura della fase di $\vec{E}$ o di $\vec{H}$ si deve utilizzare la forza di Lorentz. Il corpo di prova carico utilizzato a causa della sua accelerazione irraggerà nel campo da misurare ed emetterà o assorbirà energia (a seconda della relazione di fase con il campo di radiazione da misurare), quindi il numero di quanti di luce cambierà (dalla durata T della misura viene determinata la frequenza media $\nu \sim 1/T$ dei quanti diffusi). Questo non è un accidente del processo di misura, ma discende anche dal formalismo: il numero dei quanti di luce N ed $\vec{E}$ o $\vec{H}$ non sono commutabili, le disposizioni sperimentali per la misura di queste quantità si escludono quindi mutuamente (complementarità come nel caso di p e q).

Ora il campo Ψ_ρ ha da ubbidire alla statistica di Fermi invece che a quella di Bose e ciò già da solo rende impossibile misurarlo come un campo classico. Gli autovalori delle funzioni $\Psi_\rho(\vec{x})$ non consistono infatti nell'insieme di tutte le funzioni continue, ma in una varietà molto più ristretta di certe funzioni scalino.

Perciò in questo caso le Ψ_ρ non sono un campo nel senso consueto. Immaginiamoci altresì delle particelle elementari fittizie con statistica di Bose, oppure consideriamo particelle α, e assumiamo che esse esercitino delle forze tra loro e le avvertano sotto l'azione di campi di radiazione esterni, ma che esse non si frantumino e che si possa prescindere da effetti di struttura particolari, cioè che si comportino come particelle elementari. Allora secondo Peierls[9] risulta: in un insieme di particelle uguali, costituito da quelle con statistica di Bose, il campo Ψ_ρ è *per principio non misurabile finché non hanno luogo processi nei quali il numero totale delle particelle cambia.* Intervengono allora nella funzione di Hamilton solo elementi di matrice di $\Psi^*_\rho \Psi_\sigma$ ovvero di $\Psi^*_\rho \partial\Psi_\sigma/\partial x$ (quantità che sono commutabili con il numero totale delle particelle). La scelta della fase di Ψ_ρ e quindi della dipendenza dal punto della parte reale ed immaginaria è indifferente. *Nell'assenza di quei processi* (sui processi di annichilazione per irraggiamento non sappiamo nulla) *è contenuta anche l'assenza dell'analogo della forza di Lorentz per il campo materiale.*

§3. La domanda sulla formulabilità della meccanica quantistica come teoria di azione per contatto.

La domanda in questione è assai complessa e per essa vale in misura particolare il fatto che l'ultima parola in proposito non è stata affatto ancor detta mediante l'attuale teoria dei quanti. Tuttavia mi sembra che essa possa essere trattata anche in modo diverso da come ha fatto Ehrenfest nella sua nota.

In primo luogo non mi sembra raccomandabile senza condizioni l'identificare il concetto di *teoria multidimensionale*, cioè di una teoria che descrive le N particelle con uno spazio delle configurazioni a $3N+1$ dimensioni - con il concetto di *teoria di azione a distanza.* Anche nella meccanica statistica classica si introduce per esempio per la descrizione del comportamento statistico di un insieme di particelle uno spazio delle fasi multidimensionale (se si include il tempo come dimensione speciale, esso ha per N particelle $6N+1$ dimensioni invece che $3N+1$), e ciò anche quando le forze tra le particelle hanno una velocità di propagazione finita, nel qual caso non si può quindi parlare affatto di azione a distanza. Inoltre le $3N$ coordinate di posizione delle particelle possono essere intese come descriventi le loro posizioni nel consueto spazio tridimensionale.

Perciò la domanda in questione non sarà discussa qui dal punto di vista della possibilità del recupero del continuo tetradimensionale, ma piuttosto nel modo seguente. Nella teoria classica si passa dalla teoria d'azione a distanza a quella d'azione per contatto riscrivendo la legge di Coulomb con l'introduzione del campo elettrico come concetto intermedio nelle equazioni differenziali del campo. La questione da discutere qui è ora questa: *si può fare qualcosa d'analogo anche nella meccanica quantistica?*

Consideriamo dapprima come nella teoria originaria di Schrödinger dello spazio delle configurazioni solo l'interazione elettrostatica delle particelle, trascuriamo quindi il ritardo e l'interazione magnetica. Introduciamo allora come concetto intermedio il campo $\vec{E}(\vec{x}, t)$ dipendente dal c-numero spazio (e dal c-numero tempo). Inoltre le coordinate del *punto corrente* siano determinate da $\vec{x}$ in contrapposizione con le $3N$ coordinate $\vec{X}^{(s)}$, $s = 1, \ldots, N$ delle N particelle. Le x_1, x_2, x_3 sono

[9]Questa osservazione di Peierls deriva dalla sua non pubblicata Züricher Habilitationsvortrag sull'analogia tra luce e materia e la si utilizza qui con il suo cortese consenso.

commutabili con tutte le quantità, le $\vec{X}^{(s)}$ non sono commutabili con gli impulsi $\vec{p}^{(s)} = (h/i)\partial/\partial X^{(s)}$. Il campo $\vec{E}(\vec{x})$ è commutabile con le $\vec{X}^{(s)}$, ma non con le $\vec{p}^{(s)}$. Come sostituzione della legge di Coulomb deve valere l'equazione:

$$\text{div}\,\vec{E}(\vec{x}) = 4\pi \sum_1^N e_s \delta(\vec{x} - \vec{X}^{(s)}). \tag{*}$$

Se $r_s = |\vec{x} - \vec{X}^{(s)}|$ è la distanza della particells s-esima dal punto corrente, sarà

$$\vec{E}(\vec{x}) = \sum \frac{e_s}{r_s^2} \frac{\vec{x} - \vec{X}^{(s)}}{r_s}.$$

Come equazione di Schrödinger si deve ora assumere

$$-\frac{h}{i}\frac{\partial\psi}{\partial t} = \left[-\sum_s \frac{h^2}{2m_s}\Delta_s + \frac{1}{2}\int \vec{E}^2(\vec{x})dx_1dx_2dx_3 \right] \psi(t, \vec{X}^{(s)})$$

$$(\Delta_s = \sum_{k=1}^3 \frac{\partial^2}{\partial X_k^{(s)2}}).$$

Questa *sarebbe* identica all'equazione di Schrödinger se non valesse

$$\frac{1}{2}\int \vec{E}^2(\vec{x})dx_1dx_2dx_3 = \frac{1}{2}\sum_{s,s'} \frac{e_s e_{s'}}{r_{ss'}},$$

dove $s = s'$ *non* è escluso. I termini d'energia propria $1/r_{ss} = \infty$ sono quindi contenuti in essa. Del resto si potrebbe renderli *finiti* se nella (*) al posto della funzione δ venisse introdotta una funzione D finita, sensibilmente diversa da zero in una regione con dimensioni lineari dell'ordine di grandezza del raggio dell'elettrone, che fosse caratteristica per la forma dell'elettrone.

Il procedimento delineato si può, come è stato mostrato nell'elettrodinamica quantistica[10], generalizzare in modo tale da descrivere anche i processi magnetici e radiativi (ritardo). Si potrebbe anche introdurre la funzione D della forma dell'elettrone, solo che tale forma non sarebbe relativisticamente invariante (proprio come nella teoria classica).

Si hanno certi vantaggi ad adoperare, non il campo Ψ grande per la materia ed il campo di Landau-Peierls per i quanti di luce, ma $\vec{E}, \vec{H}$ (non commutabili!) e lo spazio delle configurazioni delle $X_k^{(s)}$ per la materia, poiché *queste* quantità sono quelle che si comportano *classicamente* nel caso limite. Per particelle puntiformi risulta allora una proprietà delle equazioni, che può essere considerata come invarianza relativistica e che (senza utilizzare il campo Ψ grande) può essere dimostrata. Ma anche a prescindere dalla questione dell'energia propria la teoria non mi pare soddisfacente: *non* a motivo di un'ipotesi d'azione a distanza, che a mio avviso *non* sussiste più, ma a seguito del singolare privilegio dello spazio rispetto al tempo, che si esprime nell'utilizzo di *un* t per il tempo in luogo dell'utilizzo di tempi di

[10]Vedi in proposito l'articolo dell'autore in Handbuch der Physik menzionato all'inizio, che si trova in stampa.

particella $t^{(s)}$ accanto al tempo t del punto corrente, che solo renderebbe la teoria più simmetrica.

È altresì probabile che il problema dell'energia propria potrà trovare una soluzione soddisfacente solo mediante una modificazione dell'attuale concetto di spazio-tempo. Una tale modificazione dovrebbe trasformare anche i concetti di "azione per contatto" e di "azione a distanza", poiché essi presuppongono essenzialmente il concetto solito di spazio-tempo.

Zürich, Physikalisches Institut der Eidgen. Technischen Hochschule.

Dall'Istituto di Cristallografia dell'Università di Marburg/Lahn

Misure senza perturbazione dell'oggetto della misura[1 2]

M. Renninger

(ricevuto il 25 febbraio 1959)

Per mezzo di un esperimento concettuale si dimostra che, contro l'opinione corrente, esistono ben dei processi di misura che non esercitano nessuna azione sull'oggetto della misura. Queste misure "negative" consistono nella determinazione sperimentale dell'assenza di accadimenti che ci si attendeva con una determinata probabilità, determinazioni che - contrassegno di una misura "vera" - danno nuove predizioni sull'oggetto della misura, quindi causano "riduzione della funzione d'onda" esattamente come le osservazioni normali, "positive", che perturbano l'oggetto della misura. Da ciò segue necessariamente che il fondamento assai consueto e intuitivo della relazione di indeterminazione nella pretesa azione inevitabile di ogni processo di misura sull'oggetto della misura è inammissibile. Essa ha invece il suo vero fondamento nell'interazione che tutta la materia dell'intorno vicino e lontano di una particella esercita ininterrottamente su di questa, indipendentemente dal fatto che essa faccia parte o meno di un apparato di misura.

La relazione di indeterminazione di Heisenberg risulta in generale come espressione del fatto - o quanto meno in relazione con il fatto - che l'azione del processo di misura sull'oggetto della misura non può essere resa in linea di principio arbitrariamente piccola[3 4 5]. Poiché questa tesi è stata più volte ripetuta di recente, per esempio da Heisenberg[6] (1958)[7], da Brillouin[8], appare all'autore importante indicare una categoria di processi di misura, nei quali non si ha alcuna influenza sull'oggetto, ovvero, per utilizzare l'espressione adottata da Heisenberg, non si ha alcun "intervento sull'evento, che si possa completamente distinguere dall'evento". Essi consistono nella determinazione sperimentale dell'assenza di accadimenti possibili e saranno designati nel seguito come osservazioni "negative". Che cosa si intenda con ciò lo può chiarire il seguente esperimento concettuale:

Da un punto P ad un istante $t = 0$ noto entro limiti stretti venga emesso un fotone[9 10]. Il punto P è circondato da uno schermo sferico S_1 di raggio R_1, che visto da P lascia libero un angolo solido Ω, ossia esso si estende su un angolo solido

---

[1] Messungen ohne Störung des Meßobjekts, Zeitschrift für Physik **158**, 417-421 (1960).

[2] Il manoscritto ha raggiunto la Redazione già nel febbraio 1959 e in base alle discussioni intervenute nel frattempo ha subìto soltanto delle modifiche inessenziali nella formulazione (la Redazione).

[3] vedasi per esempio Bohr (1931), p. 35 oppure Jordan (1936), p. 307: "Risulta inevitabile che ogni misura sia *per legge naturale legata* ad un *intervento* non trascurabile sull'oggetto".

[4] Bohr, N.: Atomtheorie und Naturbeschreibung. Berlin 1931.

[5] Jordan, P.: Anschauliche Quantentheorie. Berlin 1936.

[6] Heisenberg, W.: Naturwiss. **45**, 227 (1958).

[7] Per l'idea di Heisenberg in proposito vedasi tuttavia la postfazione del presente lavoro.

[8] Brillouin, L.: Nature, Lond. **183**, 501 (1959).

[9] Una possibilità in linea di principio per realizzare ciò è già stata offerta dall'autore (Renninger 1953).

[10] Renninger, M.: Z. Physik **136**, 251 (1953).

$4\pi - \Omega$. A distanza maggiore R_2 si trova un altro schermo S_2 sull'intero angolo solido 4π, cioè una sfera completa.

La funzione d'onda del fotone ha ora sotto le condizioni iniziali e al contorno così definite la sua forma esattamente determinabile. Nello spazio all'interno di S_1 essa è un'onda sferica, fuori è più complicata, deve contenere tra l'altro i fenomeni di diffrazione che originano dal bordo di S_1. Tuttavia anche senza conoscere la sua forma esatta la predizione data da essa sulle probabilità W_1 e W_2 di urto del fotone contro S_1 ed S_2 è immediatamente evidente, ossia:

$$W_1 = \frac{4\pi - \Omega}{4\pi}, \ W_2 = \frac{\Omega}{4\pi}.$$

La predizione si può naturalmente verificare, purché si costruiscano gli schermi S_1 ed S_2 come schermi a scintillazione che operino quantitativamente, e si esegua l'esperimento con un numero grande di fotoni. Allora le scintillazioni registrate su S_1 stanno a quelle su S_2 come W_1 sta a W_2. Tutto ciò è triviale.

Ma l'istante della possibile registrazione di un singolo fotone in S_1 precede temporalmente quello per S_2. Se si osserva in S_1 (al tempo $t_1 = R_1/c$) un lampo, ha luogo quello che la meccanica quantistica designa come "riduzione della funzione d'onda": la probabilità dell'arrivo del fotone al tempo successivo R_2/c - che fino all'osservazione del lampo in S_1 era $\Omega/4\pi$ - si annullerà istantaneamente, assieme alla funzione d'onda in tutto lo spazio tra S_1 ed S_2. Questo è il caso discusso di solito, per il quale giustamente si parla di un intervento sull'evento: il fotone è assorbito o quanto meno diffuso inelasticamente dallo schermo S_1, quindi non è più affatto nello stesso stato di prima dell'osservazione.

Però - e questo è il punto essenziale, sul quale vorrei richiamare l'attenzione - "riduzione della funzione d'onda" non ha luogo soltanto quando il fotone in S_1 viene *osservato*, ma anche quando esso *non* viene osservato. O meglio, detto in positivo, quando viene osservato che esso *non* ha urtato S_1 al tempo critico $t = R_1/c$. Infatti anche allora la probabilità per l'urto successivo contro S_2 varia con un salto, ma in questo caso va al valore 1 invece che a zero! Poiché il fotone non si è mostrato su S_1, esso dovrà pervenire su S_2 *con certezza.* Si ha a che fare qui con una nuova predizione sull'oggetto sulla base di un'*osservazione che non è intervenuta sull'evento*, di una osservazione "negativa"[11].

Poiché una siffatta osservazione senza perturbazione esiste è dimostrato che la pretesa "necessità secondo le leggi di natura" dell'intervento di ogni misura sull'oggetto non sussiste, e che quindi non è ammesso chiamarla in causa per una comprensione più profonda o anche solo per una maggiore intuibilità della relazione di indeterminazione. Questa risulta invece immediatamente dal formalismo della teoria dei quanti e vale allo stesso modo sia per misure nelle quali non si intervenga

[11]Evidentemente l'esempio discusso costituisce solo *una* delle molte diverse possibilità di suddivisione di un certo fascio di radiazione in fasci parziali coerenti. Mediante separazione per riflessione parziale, per doppia rifrazione o via dicendo le circostanze di principio sono esattamente le stesse che qui con la separazione trasversale. Il tratto essenziale dell'esperimento qui descritto e dell'argomentazione ad esso collegata non è in primo luogo la creazione di fasci parziali distinti (già discussa molte volte) ma il fatto che il cammino di uno dei fasci parziali è *ostruito* da un ostacolo che può al tempo stesso servire da strumento di osservazione. Che nel nostro esempio questo ostacolo coincida con la separazione (uno dei fasci parziali è quello intercettato da S_1) è del tutto inessenziale.

sull'evento che per quelle nelle quali lo si faccia[12][13][14]. Ciò è immediatamente evidente anche nel nostro esempio, se lo specializziamo in modo che Ω sia assai piccolo, cioè che S_1 diventi una sfera intera con un foro piccolo: per un fotone che passi attraverso questa apertura il fatto del suo passaggio equivale ad una misura di posizione, e una quantità corrispondente, per l'incertezza sull'impulso trasversale regolata dalla relazione di indeterminazione, cioè la direzione di propagazione oltre lo schermo, ha di conseguenza un'incertezza che si manifesta in una distribuzione di probabilità (figura di diffrazione) per il punto d'incidenza su S_2, tanto più estesa quanto più piccolo è il foro in S_1. Quindi anche l'eventuale osservazione "negativa" in S_1, ossia che al tempo R_1/c un fotone dev'essere sfuggito da questo foro, non ci permette nessuna predizione riguardo al *luogo* d'incidenza su S_2 che vada al di sotto della relazione di indeterminazione.

In discussioni epistolari è stato obbiettato più volte all'autore che la sola *esistenza* dell'ostacolo S_1, cioè la *possibilità* di un'osservazione significa un'influenza sull'oggetto della misura, anche per le particelle che superano S_1. Ciò non sarà da me affatto negato. È proprio quest'influenza che produce la figura di diffrazione su S_2. Affermo tuttavia che ciò *non* avviene *a causa del processo di misura*, ma, come ricordato all'inizio, dev'essere già contenuto nella funzione d'onda primaria. Essa non produce affatto nuova informazione, questo lo fa soltanto l'osservazione realmente avvenuta. Riassumendo si può quindi affermare:

1. Un processo di misura, indifferentemente "positivo" o "negativo", significa *una* netta "riduzione della funzione d'onda"; ogni osservazione vera, ogni acquisizione di informazione riduce la funzione d'onda. E viceversa: ogni riduzione della funzione d'onda dà luogo ad un'acquisizione di informazione.

2. *Possibilità* di osservazione e osservazione *di fatto* sono cose distinte. *Possibilità* di osservazione offre in fondo ogni processo di propagazione che sia qualcosa di più del moto imperturbato di una particella singola nel vuoto (onda sferica imperturbata), quindi sistemi intrecciati, o il moto di una particella in mezzi assorbenti, diffondenti o rifrangenti, ed essa non è altro che una conseguenza del fatto che la particella considerata non è sola nell'universo. Soltanto l'osservazione di fatto significa riduzione dello stato.

Ringrazio sentitamente il Prof. Süssmann, Hamburg, per una presa di posizione epistolare chiarificatrice.

Postfazione

In uno scambio epistolare diretto il signor Prof. Heisenberg ha avuto la gentilezza di farmi sapere, circa il manoscritto a lui trasmesso delle presenti considerazioni, la sua opinione, che posso riassumere con il suo cortese consenso come segue:

È un errore credere che l'interpretazione di Copenhagen della teoria dei quanti, quando asserisce l'inevitabilità in linea di principio della perturbazione dell'oggetto

---

[12] Assai riposta e non facilmente accessibile, la stessa affermazione si trova nella dissertazione fondamentale "Über den Meßvorgang" di G. Süssmann (1958, p. 30). Il signor Süssmann è stato così gentile da comunicarmelo personalmente. Non fu possibile chiarire bene con una discussione epistolare in che misura la stessa cosa sia intesa con la formulazione di Finkelburg (1956, pp. 176/77).

[13] Süssmann, G.: Über den Meßvorgang. Bayer. Akad. Ber., München H. 88, 1958.

[14] Finkelburg, W.: Einführung in die Atomphysik. Berlin 1956.

misurato a causa della misura, si riferisca ad un "processo" di misura vero e proprio, la cui presa di conoscenza eventualmente successiva riduca "retroattivamente" la funzione d'onda. Un "processo di misura" inteso in questo senso non si può oggettivare in tutti i casi immaginabili. Oggettivabile è soltanto la presa di conoscenza del risultato della misura, che riduce lo stato, e che può quindi essere ricondotta al "taglio" tra oggetto della misura e apparato di misura. Ma ciò che si intende con l'inevitabile intervento della misura sull'evento è già la possibilità della misura, cioè l'esistenza dell'apparato di misura. Infatti è questa che produce quell'interazione parzialmente indeterminata tra l'apparato di misura e l'oggetto da misurare, che con l'esecuzione dell'esperimento porta alla relazione di indeterminazione. Invece l'atto della registrazione, che porta alla riduzione dello stato, non è veramente un processo fisico, ma per così dire un processo matematico. Naturalmente con la variazione discontinua della nostra conoscenza varia con discontinuità anche la rappresentazione matematica della nostra conoscenza.

Se quest'idea così delineata dal signor Heisenberg fosse in generale tenuta per buona, le mie considerazioni sarebbero di fatto vanificate, poiché esse vanno fondamentalmente a finire nella stessa cosa, come si riconosce dai tre ultimi paragrafi. Però mi pare che in generale si affermi un processo di misura vero e proprio, al quale l'acquisizione di conoscenza che riduce lo stato si riferisce (come un - presente o assente - segno d'un impulso su un grafico di registrazione da sviluppare in seguito), e il cui istante temporale può essere inoltre determinato più o meno esattamente con la misura. Che quest'idea sia in generale tenuta per buona mi pare poco credibile, se si tien conto della formulazione ovunque predominante in letteratura. Si parla quasi senza eccezione espressamente dell'inevitabile perturbazione prodotta dall'*atto* dell'osservazione, dal *processo* di misura, o anche più nettamente, dell'impossibilità di "considerare" l'atto dell'osservazione "come un puro prender conoscenza di uno stato di fatto *comunque presente*" (Jordan, op. cit., p. 308). E proprio questo, il *prender conoscenza di uno stato di fatto comunque presente*, si realizza nell'esperimento concettuale ora discusso, sicché la comunicazione di quest'ultimo potrebbe essere in ogni caso di qualche utilità chiarificatrice. Le conclusioni finali in essa mostrate possono essere mantenute integralmente e possono valere come indicazione aggiuntiva che ogni affermazione del tipo ora citato che travalichi il limite su esposto dal signor Heisenberg è inammissibile, che quindi non si può parlare di perturbazione in linea di principio inevitabile dovuta al *processo* di misura.

Principio di Doppler e condizione delle frequenze di Bohr[1]

Erwin Schrödinger

Se ci si rammenta di come nella teoria delle bande di Schwarzschild, Heurlinger, Lenz la frequenza della singola riga della banda si realizza mediante 1. il termine elettronico o di configurazione, 2. il termine di oscillazione nucleare, 3. il termine di rotazione, non si può fare a meno di proseguire tentativamente questa serie decrescente di grandezze e interrogarsi sul possibile significato di un 4. termine di traslazione. Nel caso che esso abbia in primo luogo un significato, esso - e naturalmente non solo per gli spettri di bande - può solo essere in rapporto con l'allargamento Doppler delle righe spettrali. Questa idea si accorda qualitativamente assai bene col fatto che - come Bohr[2] ha dimostrato in modo convincente - il moto di traslazione, come moto non periodico, non può essere quantizzato, ma presenta una sequenza continua di valori consentiti dell'energia; perciò esiste uno spettro *continuo* all'interno di una certa regione - nel caso presente la *riga spettrale allargata in modo finito.*

Ora Försterling[3] ha già cercato di giungere al principio di Doppler applicando la condizione delle frequenze di Bohr in un sistema di riferimento nel quale il baricentro della molecola abbia una velocità di traslazione. Il risultato era poco incoraggiante. Risultava infatti soltanto l'"effetto Doppler trasversale", ovvero, altrimenti detto, solo la nota piccola correzione relativistica al valore classico dell'effetto Doppler. In proposito W. Pauli jun. ha detto nella sua recensione (Physik. Ber. **2**, 489, 1921): "Va tuttavia osservato che la formula di trasformazione per l'energia emessa usata dall'autore è giusta solo quando ... *complessivamente non venga emesso alcun impulso lineare*".

Ma questo non è vero in nessun sistema di riferimento; piuttosto sulla base data da Einstein alla teoria della radiazione[4] il quanto emesso $h\nu$ porta con sé sempre - e in particolare in ogni sistema di riferimento - l'impulso lineare $h\nu/c$, il massimo che in linea di principio possa essere associato a questo ammontare di energia. Nel seguito dimostriamo che il "salto di velocità" prodotto in tal modo per la condizione delle frequenze di Bohr dà proprio lo spostamento Doppler, e con tutte le sottigliezze che sono richieste dalla teoria della relatività.

La situazione di gran lunga più facile salta agli occhi al meglio se si fanno i conti in modo approssimato e solo per il caso lineare, cioè se si fa coincidere la direzione dell'impulso emesso con la direzione della velocità del baricentro della molecola già presente prima. Sia questa v_1, e dopo l'emissione v_2; inoltre sia m la massa della molecola. Allora il "termine di traslazione" che dà lo spostamento Doppler è

$$d\nu = \frac{1}{h}\left(\frac{m}{2}v_1^2 - \frac{m}{2}v_2^2\right). \tag{1}$$

Per la legge dell'impulso è

$$mv_1 = \frac{h\nu}{c} + mv_2 \tag{2}$$

[1]Dopplerprinzip und Bohrsche Frequenzbedingung, Physik. Zeitschr. **23**, 301-303 (1922).

[2]N. Bohr, Kopenhagener Akademie 1918, seconda parte, p. 99.

[3]K. Försterling, Zeitschr. f. Phys. **3**, 404, 1920.

[4]A. Einstein, Zeitschr. f. Phys. **18**, 121, 1917.

ossia

$$m\,(v_1 - v_2) = \frac{h\nu}{c}.$$

Sostituendo nella (1) questo dà

$$\frac{d\nu}{\nu} = \frac{v_1 + v_2}{2c}. \tag{3}$$

Questa è la formula di Doppler elementare, soltanto che in essa come velocità della molecola interviene la media aritmetica delle velocità prima e dopo l'emissione. Un esame particolareggiato mostra che anche il segno è quello giusto: se la molecola si muove con velocità considerevole verso di me e mi lancia contro il suo quanto, sarà frenata dal rinculo, il termine di traslazione (1) è positivo, lo spostamento risulta verso il violetto.

Calcoleremo ora in modo più esatto. Ma manteniamo ancora provvisoriamente l'ipotesi semplificatrice che l'impulso emesso cada nella direzione della velocità originaria della molecola (oppure in quella opposta). Dobbiamo ora tener conto che anche la massa della molecola cambia durante l'emissione, e prima di tutto che il concetto "differenza d'energia di una determinata transizione" e quindi anche il concetto "frequenza non spostata" perdono il loro significato netto ed univoco, poichè la molecola prima e dopo l'emissione non si trova a riposo nello stesso *sistema di riferimento consentito* .

Dobbiamo assumere che ad un determinato stato stazionario corrisponda un'energia E esattamente determinata in un sistema di riferimento nel quale il baricentro della molecola è a riposo. Siano E_1 ed E_2 questi valori dell'energia per la transizione quantica considerata e siano questi proprio i *valori assoluti* dell'energia, di modo che

$$\frac{E_1}{c^2},\ \frac{E_2}{c^2}$$

siano le corrispondenti *masse a riposo.* Il sistema di riferimento nel quale prima e rispettivamente dopo il rinculo la molecola ha la velocità v_1 e rispettivamente v_2 lo chiameremo per brevità "lo spettrometro". Le energie riferite allo spettrometro sono quindi

$$\frac{E_1}{\sqrt{1 - v_1^2/c^2}},\ \frac{E_2}{\sqrt{1 - v_2^2/c^2}} \tag{4}$$

e la condizione delle frequenze di Bohr si scrive

$$h\nu = \frac{E_1}{\sqrt{1 - v_1^2/c^2}} - \frac{E_2}{\sqrt{1 - v_2^2/c^2}}. \tag{5}$$

Inoltre il bilancio dell'impulso rispetto allo spettrometro risulta

$$\frac{E_1 v_1}{c^2\sqrt{1 - v_1^2/c^2}} = \frac{E_2 v_2}{c^2\sqrt{1 - v_2^2/c^2}} + \frac{h\nu}{c}. \tag{6}$$

La (5) e la (6) servono al calcolo di ν e di v_2 per v_1 dato, inoltre E_1 ed E_2 devono naturalmente valere come quantità date - dalla natura della transizione quantica.

La dipendenza così fissata della frequenza ν dalle velocità v_1 e v_2 è *una generalizzazione naturale del principio di Doppler della teoria della relatività* - è del tutto comprensibile che la comparsa di due valori della velocità, che si scambiano proprio nell'istante dell'emissione, porti con sé una certa complicazione.

Per dimostrarlo eliminiamo dalle (5) e (6) la frequenza ν e troviamo facilmente

$$E_1\sqrt{\frac{c-v_1}{c+v_1}} = E_2\sqrt{\frac{c-v_2}{c+v_2}}. \tag{7}$$

Sia per brevità

$$\varphi_i = \sqrt{\frac{c-v_i}{c+v_i}},\ i=1,2. \tag{8}$$

Risulta perciò

$$E_1\varphi_1 = E_2\varphi_2. \tag{7a}$$

Inoltre si calcola facilmente

$$v_i = c\frac{1-\varphi_i^2}{1+\varphi_i^2},\ \sqrt{c^2-v_i^2} = \frac{2c\varphi_i}{1+\varphi_i^2}. \tag{9}$$

Sostituita nella (5) questa dà

$$h\nu = E_1\frac{1+\varphi_1^2}{2\varphi_1} - E_2\frac{1+\varphi_2^2}{2\varphi_2}$$

e per la (7a)

$$h\nu = \frac{1}{2}\left(\frac{E_1}{\varphi_1} - \frac{E_2}{\varphi_2}\right) = \frac{1}{2}\frac{E_1^2-E_2^2}{E_1\varphi_1} = \frac{1}{2}\frac{E_1^2-E_2^2}{E_2\varphi_2} \tag{5a}$$

ovvero formando la media geometrica

$$h\nu = \frac{1}{\sqrt{\varphi_1\varphi_2}}\frac{E_1^2-E_2^2}{2\sqrt{E_1E_2}}. \tag{10}$$

Introduciamo la frequenza ν^*

$$\nu^* = \frac{E_1^2-E_2^2}{2h\sqrt{E_1E_2}}, \tag{11}$$

il cui significato risulterà chiaro immediatamente, e badiamo al significato di φ secondo la (8); otteniamo

$$\nu^* = \nu\sqrt{\varphi_1\varphi_2} = \nu\sqrt{\frac{c-v_1}{\sqrt{c^2-v_1^2}}\cdot\frac{c-v_2}{\sqrt{c^2-v_2^2}}}. \tag{12}$$

Si confronti con questa la relazione che sussisterebbe secondo la teoria dell'effetto Doppler tra le frequenze ν^* e ν, qualora la prima fosse la frequenza a riposo, la seconda la frequenza in un sistema di riferimento nel quale la molecola volasse verso l'osservatore con la velocità v. Questa relazione si scriverebbe

$$\nu^* = \nu \frac{c - v}{\sqrt{c^2 - v^2}}. \tag{13}$$

La frequenza ν^* definita dalla (11) gioca quindi il ruolo della frequenza a riposo. Da essa si deriva secondo la (12) la frequenza osservata ν per mezzo di un fattore che è la media geometrica dei due fattori che secondo la teoria consueta sono costruiti dalle due velocità v_1 e v_2, prima e rispettivamente dopo l'atto di emissione.

La frequenza ν^* ha il semplice significato seguente: sarà $\nu = \nu^*$ per $v_2 = -v_1$. Ciò si verifica quando la velocità iniziale della molecola è esattamente uguale a quella che in senso inverso si ha dopo il rinculo.

Dobbiamo ancora liberarci dalla restrizione che l'impulso emesso sia parallelo alla direzione iniziale. Quindi ora v_1 e v_2 saranno i valori assoluti delle velocità iniziale e finale, ϑ_1 e rispettivamente ϑ_2 gli angoli che esse individuano con la direzione dell'impulso emesso - tutte le affermazioni si riferiscono allo "spettrometro". La condizione delle frequenze (5) rimane immutata, al posto della (6) intervengono le due equazioni per l'impulso

$$\frac{E_1 v_1 \cos\vartheta_1}{c^2\sqrt{1 - v_1^2/c^2}} = \frac{E_2 v_2 \cos\vartheta_2}{c^2\sqrt{1 - v_2^2/c^2}} + \frac{h\nu}{c}, \tag{6'}$$

$$\frac{E_1 v_1 \sin\vartheta_1}{c^2\sqrt{1 - v_1^2/c^2}} = \frac{E_2 v_2 \sin\vartheta_2}{c^2\sqrt{1 - v_2^2/c^2}} \tag{6''}$$

Dalla (5) e dalla (6') risulta

$$\frac{E_1\left(c - v_1\cos\vartheta_1\right)}{\sqrt{c^2 - v_1^2}} = \frac{E_2\left(c - v_2\cos\vartheta_2\right)}{\sqrt{c^2 - v_2^2}}. \tag{7'}$$

Dalla (6") moltiplicando per c

$$\frac{E_1 v_1 \sin\vartheta_1}{\sqrt{c^2 - v_1^2}} = \frac{E_2 v_2 \sin\vartheta_2}{\sqrt{c^2 - v_2^2}}. \tag{7''}$$

Poniamo per brevità

$$\varphi_i = \frac{c - v_i\cos\vartheta_i}{\sqrt{c^2 - v_i^2}},\ \psi_i = \frac{v_i \sin\vartheta_i}{\sqrt{c^2 - v_i^2}},\ i = 1, 2. \tag{8'}$$

Sarà allora

$$E_1\varphi_1 = E_2\varphi_2,\ E_1\psi_1 = E_2\psi_2 \tag{7a'}$$

e si trova

$$\sqrt{c^2 - v_i^2} = \frac{2c\varphi_i}{1 + \varphi_i^2 + \psi_i^2}. \tag{9'}$$

Questa, sostituita nella (5) dà

$$h\nu = E_1 \frac{1+\varphi_1^2+\psi_1^2}{2\varphi_1} - E_2 \frac{1+\varphi_2^2+\psi_2^2}{2\varphi_2}$$

e per la (7a')

$$h\nu = \frac{1}{2}\left(\frac{E_1}{\varphi_1} - \frac{E_2}{\varphi_2}\right). \tag{5a'}$$

Questa coincide formalmente con la (5a), solo con significato mutato di φ_i secondo la (8'). Si ottiene ora al posto della (12)

$$\nu^* = \nu \sqrt{\frac{c - v_1 \cos\vartheta_1}{\sqrt{c^2 - v_1^2}} \cdot \frac{c - v_2 \cos\vartheta_2}{\sqrt{c^2 - v_2^2}}}. \tag{12'}$$

ν^* è la stessa frequenza di prima. Riguardo alla formula (12') si devono fare le stesse osservazioni come prima per la (12). Essa si differenzia dalla consueta formula di Doppler relativistica solo per il fatto che il fattore di ν è la media geometrica di quei due valori che si avrebbero in quella formula per la velocità iniziale e finale.

La velocità acquistata in seguito al rinculo è in generale assai piccola rispetto a quella termica, cioè la variazione di velocità dovuta all'emissione è relativamente assai piccola. Altrimenti sarebbe di notevole interesse verificare l'interpretazione quantistica dell'effetto Doppler qui esposta, come pure l'assai controversa presenza di un rinculo, così difficilmente conciliabile con l'ottica classica, mediante la larghezza sperimentale di righe spettrali adatte - se cioè essa corrisponde all'agitazione termica o è un po' più grande. Ma, come detto, anche sotto le condizioni più favorevoli - quando si faccia assorbire ultravioletto di Millikan estremo ($\lambda = 200 \mathring{A}$) in un gas a bassa temperatura - la variazione della velocità per una molecola di gas ammonta tuttavia solo a pochi per mille della velocità termica media.

Zurigo, 7 giugno 1922.

(Ricevuto il 7 giugno 1922)

Una proprietà notevole delle orbite quantiche di un elettrone singolo[1].

Erwin Schrödinger a Zurigo.

(ricevuto il 5 ottobre 1922)

Nella geometria d'universo di Weyl[2] interviene oltre alla nota forma quadratica del differenziale, che determina la metrica nel singolo punto d'universo, anche una forma lineare

$$\varphi_0 dx_0 + \varphi_1 dx_1 + \varphi_2 dx_2 + \varphi_3 dx_3 = \varphi_i dx_i,$$

che fissa la *connessione metrica* dei punti d'universo tra loro. Il suo significato geometrico è che la lunghezza di un "segmento" l (quadrato del valore assoluto di un vettore) non rimane immutata per "trasporto congruente" del segmento in un punto adiacente, ma subisce la variazione

$$dl = -l\varphi_i dx_i. \tag{1}$$

Weyl ha scoperto che mediante le due insieme (metrica del singolo punto d'universo + connnessione metrica) si determina una connessione affine dell'universo (cioè il concetto di trasporto parallelo d'un vettore), purché solo si ammetta che per spostamento parallelo di un vettore anche la sua lunghezza debba essere trasportata in modo congruente. Per trasporto congruente di un segmento lungo un tratto finito di una linea d'universo - per esempio a seguito del trasporto parallelo di un vettore lungo un simile tratto - la lunghezza del segmento risulta moltiplicata per il fattore

$$e^{-\int \varphi_i dx_i}, \tag{2}$$

dove l'integrale di linea va naturalmente esteso al tratto di linea d'universo in considerazione e *dipende essenzialmente dal cammino*, purché le quantità

$$f_{ik} = \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k} - \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_i} \tag{3}$$

non si annullino identicamente. - *Dal punto di vista fisico* le componenti della connessione affine su menzionata costituiscono il campo di gravitazione, e le f_{ik} il campo elettromagnetico. Se le circostanze sono tali - e se la scelta delle coordinate è così fatta - , che almeno in una regione d'universo con una certa approssimazione x_0 sia il tempo (in sec) e x_1 x_2 x_3 siano coordinate cartesiane (in cm), a meno di un fattore costante di proporzionalità universale le φ_i sono i potenziali elettromagnetici nel senso usuale:

$$V, -\frac{1}{c}\mathfrak{A}_x,\ -\frac{1}{c}\mathfrak{A}_y,\ -\frac{1}{c}\mathfrak{A}_z. \tag{4}$$

Se scriviamo questo fattore come $\gamma^{-1}e$, dove e è il quanto elementare in unità CGS elettrostatiche, quindi

$$\varphi_0 = \gamma^{-1}eV,\ \varphi_1 = -\gamma^{-1}\frac{e}{c}\mathfrak{A}_x,\ \varphi_2 = -\gamma^{-1}\frac{e}{c}\mathfrak{A}_y,\ \varphi_3 = -\gamma^{-1}\frac{e}{c}\mathfrak{A}_z,$$

---

[1] Über eine bemerkenswerte Eigenschaft der Quantenbahnen eines einzelnen Elektrons, Zeitschr. f. Phys. **12**, 13-23 (1923).

[2] Vedasi in proposito H. Weyl, Raum, Zeit, Materie, IV ed., Berlin, Springer, 1921 - Citato in seguito con Weyl, RZM.

risulta allora che φ_0 ha la dimensione $\sec^{-1}$, eV la dimensione "energia", γ la dimensione di un'azione (g cm^2 sec^{-1}). - Il "fattore d'allungamento" (2) sarà

$$e^{-\frac{e}{\gamma}\int(V dt - \mathfrak{A}_x dx - \mathfrak{A}_y dy - \mathfrak{A}_z dz)}. \tag{5}$$

La proprietà delle orbite quantiche annunciata nel titolo, che a me pare notevole, è che le condizioni quantiche "pure", cioè quelle che sono sufficienti a determinare l'energia e quindi lo spettro, sono anche proprio sufficienti a rendere l'*esponente del fattore di allungamento (5) un multiplo intero di* $\gamma^{-1}h$ (che per quanto sopra è un numero puro) *per tutti i periodi approssimati del sistema.* Lo dimostrerò subito per i singoli casi, perché ci sono ancora dei se e dei ma da aggiungere se si esprime la legge nella forma semplice, come successo or ora. Discuterò poi l'eventuale significato del fatto, riguardo al quale però - per dirla tutta - non sono andato molto avanti.

A. *Orbita di Keplero imperturbata*[3]. L'effetto della relatività sarà per ora trascurato e trattato separatamente più avanti (punto E). Allora la sola condizione quantica "pura" è[4]

$$J = 2\tau\bar{T} = nh \tag{6}$$

(τ = periodo, $\bar{T}$ = media temporale dell'energia cinetica). Sia inoltre V il potenziale del nucleo positivo alla posizione dell'elettrone, scelto in modo che si annulli all'infinito. Allora è noto che si ha (consideriamo e in valore assoluto)

$$\bar{T} = (1/2)e\bar{V}, \tag{6a}$$

quindi, sostituendo nella (6),

$$e\tau\bar{V} = e\int_0^\tau V dt = nh. \tag{7}$$

L'esponente del fattore d'allungamento (5) sarà quindi - nh/γ per un periodo. - Il solo "se e ma" di questo caso semplicissimo è la normalizzazione della costante additiva in V.

B. *Effetto Zeeman.* Meccanicamente si tratta ora della precessione di Larmor con la frequenza (= numero di giri di precessione al secondo)

$$\frac{1}{\vartheta} = \frac{eH}{4\pi mc}. \tag{8}$$

Dal punto di vista della teoria dei quanti rimane valida la condizione precedente ed assicura "l'interezza dell'esponente d'allungamento". (come diremo per brevità) per il *primo* quasi periodo τ, sempre approssimato. Una trattazione più accurata mostra che la (7) resta valida fino a termini che sono *quadratici* in H, poiché il

[3]Come il Prof. Weyl mi ha comunicato per lettera, la legge per questo caso era nota a Fokker già da due anni, e lo ha anche portato a contemplare la possibilità di valori di φ_i immaginari puri (vedi il seguito).

[4]Seguiamo in tutto la concezione di Bohr, in particolare la sua teoria dei sistemi periodici debolmente perturbati, com'è esposta nella parte II della serie di dissertazioni ancora incompleta dell'accademia di Copenaghen. Kopenhagener Akademieschriften, Naturw. u. Mathem. Abt., serie 8^a, **1**, 2, 1918. Citata nel seguito come Bohr, l.c.

teorema di Larmor vale in questa approssimazione e per un sistema d'assi ruotato valgono, dal punto di vista meccanico e della teoria dei quanti, le stesse condizioni che, nel caso A, valgono per un sistema in quiete. Se ora ci chiediamo se l'interezza sussista anche per il *secondo* quasiperiodo ϑ, possiamo trascurare il termine V, poiché esso produce certamente un contributo intero (cioè tante volte $-nh$, quanti giri semplici comprende il ciclo di Larmor. - Ora è noto che la seconda condizione quantica richiede che per il momento angolare attorno all'asse del campo sia

$$2m\frac{f}{\tau} = \frac{n'h}{2\pi}. \tag{9}$$

f è la proiezione della superficie dell'ellisse sul piano equatoriale. Dalla (8) e dalla (9) risulta

$$Hf \cdot \frac{\vartheta e}{\tau c} = n'h. \tag{10}$$

Hf è il flusso di forza attraverso l'ellisse, quindi

$$Hf = \int (\mathrm{rot}\,\mathfrak{A})_n df = \int_{(\tau)} \mathfrak{A}_x dx + \mathfrak{A}_y dy + \mathfrak{A}_z dz, \tag{11}$$

pertanto, secondo la (10), per l'intero ciclo di Larmor sarà

$$\frac{e}{c}\int_{(\vartheta)} \mathfrak{A}_x dx + \mathfrak{A}_y dy + \mathfrak{A}_z dz = n'h; \tag{12}$$

la condizione quantica aggiuntiva richiede quindi proprio l'"interezza" del termine aggiuntivo magnetico nell'esponente d'allungamento, esteso su un periodo di Larmor.

C. *Effetto Stark*[5]. Meccanicamente interviene qui una variazione secolare non solo della giacitura, ma anche della forma dell'ellisse di Keplero; tuttavia la variazione secolare (con l'approssimazione che interviene sperimentalmente) è puramente periodica, cioè quando l'ellisse di Keplero dopo l'esecuzione di un ciclo secolare ha ripreso la stessa forma, essa ha anche riassunto la stessa giacitura nello spazio. Il ciclo orbitale si può descrivere nel modo più semplice così. Si determini il baricentro della solita orbita di Keplero tenendo conto del tempo di permanenza dell'elettrone nelle singole parti dell'orbita (baricentro "elettrico"); si trova così il punto di bisezione della parte lontana dal nucleo della linea dei fuochi. Questo "baricentro elettrico" esegue ora in un piano perpendicolare alla direzione del campo semplicemente delle oscillazioni armoniche, *in generale oscillazioni ellittiche*. Oltre a ciò, come prima detto, la forma dell'ellisse di Keplero deve variare, e precisamente non cambia il suo semiasse maggiore (e quindi neppure l'energia, nè il periodo orbitale) ma solo la sua eccentricità, che è quindi fissata univocamente dalla posizione assunta via via dal baricentro elettrico. La giacitura via via assunta dal piano dell'orbita è determinata dal fatto che, sebbene il momento angolare complessivo cambi con l'eccentricità, la componente nella direzione del campo resta invariata.

[5]Bohr, l.c., par. 4, pag. 69.

La *condizione quantica aggiuntiva* consiste nel fatto che alla distanza del nucleo dal piano menzionato, perpendicolare alla direzione del campo, nel quale il baricentro elettrico esegue le sue oscillazioni armoniche secolari, sono consentiti solo certi valori discreti. Ancora più comoda per il nostro scopo è un'altra formulazione di questa condizione quantica aggiuntiva, che deriva ancora immediatamente dalla teoria di Bohr dei sistemi periodici perturbati. L'energia aggiuntiva, che è semplicemente uguale all'energia potenziale dell'elettrone nel campo esterno mediata su un periodo di Keplero (il valor medio è *secolarmente costante*) - quest'energia, dico, secondo Bohr sta col periodo secolare ϑ esattamente nello stesso rapporto come l'energia totale di un oscillatore armonico semplice col suo periodo, cioè dev'essere

$$\Delta E = n'h \cdot \frac{1}{\vartheta} \tag{13}$$

(Δe = energia aggiuntiva, n' = numero intero). Sia ora V' il potenziale del campo esterno, che in questa trattazione (cioè perché le affermazioni precedenti siano giuste) *dev'essere normalizzato in modo tale da annullarsi nel nucleo*; si riconosce allora facilmente che

$$\Delta E = -e\bar{V}' = -\frac{e}{\tau}\int_t^{t+\tau} V'dt. \tag{14}$$

Dalle (13) e (14) segue

$$\frac{e\vartheta}{\tau}\int_t^{t+\tau} V'dt = \int_t^{t+\vartheta} V'dt = -n'h. \tag{15}$$

Un'occhiata alla (5) mostra che allora l' *"interezza" del termine elettrico aggiuntivo nell'esponente d'allungamento è provata per un "periodo di Stark" secolare* - in completa analogia con il risultato per il periodo di Larmor nell'effetto Zeeman.

Nel caso dell'effetto Zeeman, a causa del carattere particolarmente semplice della perturbazione secolare, dall'interezza del termine aggiuntivo abbiamo potuto concludere immediatamente riguardo all'interezza dell'esponente d'allungamento complessivo. Qui ciò sarebbe prematuro, infatti il valor medio del potenziale nucleare V su un'ellisse di Keplero produce perturbazioni del prim'ordine, che possono assommare ad un contributo finito su un periodo secolare ϑ[6]. Per andare del tutto sul sicuro, riconsideriamo la condizione quantica principale del problema perturbato in forma esplicita. Siano q_1, q_2, q_3 le coordinate *rettangolari* dell'elettrone, p_1, p_2, p_3 gli impulsi; allora dev'essere

$$\int_t^{t+\vartheta}(p_1\dot{q}_1 + p_2\dot{q}_2 + p_3\dot{q}_3)dt = -nh, \tag{16}$$

[6]Invero Bohr ha mostrato - e ciò discende immediatamente dalla costanza secolare di $\bar{V}'$ - che il valor medio della funzione energia totale del problema imperturbato su un'orbita di Keplero subisce solo perturbazioni del second'ordine. Ma per noi qui si tratta della sola energia potenziale, e per questa non si può concludere nulla, poiché il campo perturbativo rimuove la relazione semplice (6a) tra i due valori medi dell'energia.

dove ora ϑ - più precisamente - indica un semiperiodo esatto del sistema, dopo il quale le coordinate e gli impulsi si riproducono con maggiore approssimazione. Di conseguenza dev'essere

$$\int_t^{t+\vartheta} \frac{d}{dt}\left(\sum p_i q_i\right) dt = 0.$$

Quindi al posto della (16) si può anche scrivere

$$\int_t^{t+\vartheta} (q_1\dot{p}_1 + q_2\dot{p}_2 + q_3\dot{p}_3)dt = -nh, \tag{16'}$$

ovvero, se

$$U = -e(V + V')$$

è l'energia potenziale, per le equazioni di moto dalla (16') discende:

$$\int_t^{t+\vartheta} \left(q_1\frac{\partial U}{\partial q_1} + q_2\frac{\partial U}{\partial q_2} + q_3\frac{\partial U}{\partial q_3}\right) dt = nh. \tag{16''}$$

Ma i due addendi di U sono funzioni omogenee di q_i, e precisamente V è omogenea di grado -1, V' omogena di primo grado. Quindi segue dalla (16")

$$\int_t^{t+\vartheta} e(V - V')dt = nh. \tag{16'''}$$

Tenendo conto della (15) risulta quindi

$$\int_t^{t+\vartheta} e(V + V')dt = (n - 2n')h, \tag{17}$$

e la dimostrazione è conclusa. - Un'osservazione aggiuntiva necessaria riguardo alla nostra legge nel caso dell'effetto Stark è la normalizzazione già prima rilevata del potenziale del campo esterno, fatta in modo tale che esso si annulli nel nucleo.

D. *Effetti Zeeman e Stark combinati con assi paralleli*[7]. Secondo la teoria di Bohr di sistemi periodici perturbati, per sovrapposizione di un campo elettrico omogeneo e di un campo magnetico omogeneo, nel caso che le perturbazioni che ogni campo di per sè produrrebbe siano dello stesso ordine di grandezza, si ottengono orbite quantiche ben definite solo quando[8] gli assi dei campi siano paralleli. Ci limitiamo quindi a questo caso. Dal punto di vista meccanico il ciclo dell'effetto Stark trattato nella sezione precedente avviene semplicemente rispetto ad una terna d'assi che segue la rotazione di Larmor (8), e va osservato che la frequenza di Larmor dipende solo dalle costanti dell'elettrone e dall'intensità del campo magnetico, ma non dalla forma e dalla giacitura dell'orbita, sicché anche ora la rotazione di Larmor avviene in maniera uniforme. Anche le condizioni quantiche per così dire si sovrappongono. Al semiasse maggiore dell'ellisse di Keplero sono consentiti gli stessi valori che nell'atomo imperturbato, alla distanza dal nucleo del piano nel quale oscilla il

[7] Bohr, l.c. p.91.
[8] Bohr, l.c., p. 93.

baricentro elettrico gli stessi valori che nell'effetto Stark puro; e il campo magnetico richiede che la componente del momento angolare nella direzione del campo (che anche nell'effetto Stark puro era costante, ma non quantizzata) ancora debba essere un multiplo intero di $h/2\pi$. Naturalmente adesso la perturbazione complessiva non è più periodica pura, ma compaiono due periodi secolari di uguale ordine di grandezza, in generale incommensurabili: in un sistema di coordinate che segue la precessione di Larmor la forma e la giacitura dell'ellisse di Keplero si riproducono dopo un periodo ϑ_s dell'effetto Stark, mentre l'ellisse, che il baricentro elettrico percorre armonicamente, ruota una volta di 360^0 attorno alla direzione del campo in un periodo di Larmor, diciamo ϑ_l. Poiché sia dal punto di vista meccanico che da quello della teoria dei quanti si hanno rispetto al sistema rotante esattamente le stesse relazioni che nell'effetto Stark puro si hanno rispetto ad un sistema fermo, e poiché inoltre il campo elettrico è portato in se stesso dalla rotazione di Larmor, si riconosce facilmente che le prime due condizioni quantiche hanno per conseguenza che

$$\int_t^{t+\vartheta_s} e(V+V')dt = nh. \tag{18}$$

Per quanto riguarda la condizione quantica magnetica, si deve osservare che sia il periodo di Keplero che il momento nella direzione del campo, quindi anche la proiezione dell'ellisse di Keplero sul piano equatoriale ovvero *il flusso dell'intensità del campo magnetico attraverso l'ellisse di Keplero* sono costanti secolari. Perciò dalla condizione quantica magnetica discende esattamente allo stesso modo come in B che

$$\frac{e}{c}\int_{(\vartheta_l)} \mathfrak{A}_x dx + \mathfrak{A}_y dy + \mathfrak{A}_z dz = n'h; \tag{19}$$

l'integrale va esteso su un ciclo di Larmor. Non importa nulla che l'ellisse di Keplero dopo un tale ciclo non ritorni affatto alla sua forma e giacitura di partenza.

Le formule (18) e (19) rappresentano solo una parte dell'esponente d'allungamento, e precisamente la (18) la parte elettrica, la (19) quella magnetica. Esse si riferiscono inoltre a intervalli temporali del tutto distinti ϑ_s e ϑ_l, *nessuno dei quali costituisce un quasiperiodo del moto.* Un quasiperiodo siffatto si realizzerà in generale con una certa approssimazione per multipli assai elevati degli pseudoperiodi ϑ_s e ϑ_l, che siano approssimativamente tra loro uguali, ovvero

$$\mathfrak{n}_s\vartheta_s = \mathfrak{n}_l\vartheta_l = \vartheta.$$

Scegliamo $\mathfrak{n}_s$ *esattamente* intero, e invece $\mathfrak{n}_l$ in modo tale che la relazione precedente sia *esattamente* soddisfatta; moltiplichiamo la (18) per $\mathfrak{n}_s$, la (19) per $\mathfrak{n}_l$ e sottraiamo. Si ottiene

$$e\int_{(\vartheta)} \left\{(V+V')dt - \frac{1}{c}\left(\mathfrak{A}_x dx + \mathfrak{A}_y dy + \mathfrak{A}_z dz\right)\right\} = (\mathfrak{n}_s n - \mathfrak{n}_l n')h. \tag{20}$$

A meno d'un fattore $-\gamma^{-1}$ a primo membro si ha l'intero esponente d'allungamento per il quasiperiodo ϑ; a secondo membro si ha un multiplo intero di h, intero con la stessa approssimazione con la quale ϑ si può definire quasiperiodo. n' è il consueto numero quantico magnetico, quindi, almeno per le orbite quantiche basse, un numero intero piccolo; il piccolo scostamento di $\mathfrak{n}_l$ dall'interezza non sarà sostanzialmente accresciuto dalla moltiplicazione per n'. (Non così per n; n è un numero assai grande dell'ordine di grandezza del numero delle rivoluzioni di Keplero durante un periodo di Stark; ma ciò non cambia nulla, perché $\mathfrak{n}_s$ è *esattamente* intero e deve esser scelto così perché anche la fase si riproduca sull'orbita di Keplero.) - Pare alquanto insoddisfacente a prima vista che per la derivazione della (20) si debba utilizzare solo una certa combinazione lineare delle due condizioni quantiche (18) e (19) "pure" (cioè necessarie per la determinazione dell'energia). Mi pare tuttavia che le (18) e (19) siano necessarie individualmente per assicurare che la (20) sia soddisfatta per ogni quasiperiodo. Infatti se per esempio $\mathfrak{n}_s = 7$, $\mathfrak{n}_l = 12$ danno luogo ad un quasiperiodo, non $\mathfrak{n}_s = 70$, $\mathfrak{n}_l = 120$ ma, diciamo, $\mathfrak{n}_s = 69$, $\mathfrak{n}_l = 118$ ne produrranno un altro, all'incirca dieci volte più lungo. D'altra parte in tali considerazioni non si possono accettare multipli arbitrariamente grandi dei periodi secolari, perché non intervengano termini quadratici nelle intensità di campo, nel qual caso trova un limite non solo la validità dei calcoli approssimati qui fatti, ma anche la reale possibilità di definire fisicamente le orbite quantiche.

E. *La variabilità relativistica della massa.* Si è finora trascurato il fatto che interviene nei casi B, C, D, cioè che la perturbazione dovuta al campo esterno sia supposta grande rispetto alla "perturbazione" dell'orbita esattamente periodica di Keplero dovuta alla variabilità relativistica della massa. Se ora la teniamo in conto, già l'atomo in assenza di forze ha due quasiperiodi, il periodo breve di Keplero τ e il periodo ϑ della precessione del perielio. Per τ l'"interezza dell'esponente d'allungamento" sarà naturalmente garantita dalla stessa condizione quantica come nel caso non relativistico. Ci si chiede se ciò avvenga anche per ϑ. Si determini ϑ - più precisamente come quasiperiodo, cioè in modo tale che le coordinate e gli impulsi si riproducano con grande approssimazione; allora s'ottiene immediatamente in coordinate polari

$$\int_t^{t+\vartheta} (p_r \dot{r} + p_\varphi \dot{\varphi}) dt = n'h \tag{21}$$

[r, φ sono coordinate polari, p_r, p_φ gli impulsi relativistici corrispondenti; la formula (21) è una combinazione lineare intera delle consuete condizioni quantiche "radiali" e "azimutali", e precisamente il numero dei giri di φ è esattamente maggiore di 1 del numero delle oscillazioni in r]. L'integrando è invariante per trasformazioni puntuali, quindi anche in coordinate rettangolari vale

$$\int_t^{t+\vartheta} (p_x \dot{x} + p_y \dot{y}) dt = n'h. \tag{21'}$$

Poichè $(xp_x + yp_y)$ ritorna ai suoi valori iniziali, al posto di questa possiamo scrivere

$$\int_t^{t+\vartheta} (x\dot{p}_x + y\dot{p}_y) dt = -n'h, \tag{21''}$$

$\dot{p}_x, \dot{p}_y$ anche nella meccanica relativa sono uguali a meno le derivate parziali dell'energia potenziale; questa è $-eV$ ed omogenea di grado -1 in x, y. Quindi segue dalla (21")

$$\int_t^{t+\vartheta} eVdt = n'h. \tag{21"'}$$

Con ciò la validità della nostra legge per l'orbita relativistica imperturbata è dimostrata.

L'effetto Zeeman, è noto, risulta molto facile con l'approccio relativistico[9], si aggiunge semplicemente la rosetta relativistica alla precessione di Larmor. Compaiono quindi due periodi secolari, come nel caso trattato in D di due campi paralleli. La trattazione è così completamente analoga a quella data là, che la si risparmia del tutto - può essere intuita senza calcoli e naturalmente conduce di nuovo alla conferma della nostra legge.

L'effetto Stark con relatività, che Kramers[10] ha studiato qualche tempo fa in un lavoro assai bello, non l'ho ancora dimostrato secondo il punto di vista seguito qui - tuttavia non si può certo dubitare che risultino relazioni del tutto analoghe a quelle del caso D e dell'effetto Zeeman.

Per quanto ne so, il caso D con la relatività non è stato studiato, sebbene esso (a causa della sua simmetria di rotazione) debba portare a orbite ben definite. Ma esso offre un interesse assai limitato.

Discussione del risultato.

Riassumendo, abbiamo la seguente situazione. Se l'elettrone portasse con sé lungo l'orbita un "segmento", che venisse trasportato senza modifiche a causa del moto, allora, se si partisse da un punto qualsiasi dell'orbita, la lunghezza di questo segmento apparirebbe moltiplicata sempre per una potenza ad esponente con grande approssimazione intero di

$$e^{\frac{h}{\gamma}}, \tag{22}$$

al ritorno dell'elettrone con grande precisione al punto di partenza e simultaneamente nello stato di moto iniziale.

Risulta difficile credere che questo risultato sia esclusivamente una conseguenza matematica casuale delle condizioni quantiche e non abbia un significato fisico più profondo. La forma alquanto imprecisa della legge approssimata con la quale esso ci si presenta non cambia nulla; sappiamo infatti che le orbite quantiche già fisicamente non sono definite con precisione totale[11] per due motivi: in primo luogo per la forza di reazione della radiazione, che sicuramente non esiste nella forma prescritta dall'elettrodinamica classica, ma alla quale dal punto di vista della teoria dei quanti corrisponde altrettanto sicuramente qualcosa di ugual ordine di grandezza, altrimenti il tempo di decadimento non si potrebbe calcolare correttamente dal principio di corrispondenza[12]. Ma in secondo luogo un'indeterminazione delle orbite quantiche deriva anche dal fatto che nella maggior parte dei casi il moto è condizionatamente periodico solo con una certa approssimazione [per esempio nell'effetto

[9] Trattato per la prima volta da A. Sommerfeld, Phys. ZS. **17**, 491, 1916 e P. Debye, ibidem, p. 507.

[10] ZS. f. Phys. **3**, 199, 1920.

[11] Bohr, l.c., pp. 50, 61, 66, 97.

[12] A. Sommerfeld e W. Heisenberg, ZS. f. Phys. **10**, 393, 1922.

Zeeman i termini quadratici nell'intensità di campo devono per principio essere trascurati; ed anche l'effetto Stark, se si tien conto della correzione relativistica, non appartiene più ai problemi rigorosamente separabili[13]].

Che l'elettrone porti davvero con sé nel suo moto un qualche "segmento" è più che discutibile. È assai più probabile che esso lo "instauri" continuamente nel senso di Weyl[14] durante il suo moto. Si può vedere che il significato della nostra legge va cercato nel fatto che all'elettrone non è consentito qualsiasi ritmo di instaurazione, ma che questo deve risultare invece da una certa dipendenza dal ciclo orbitale quasiperiodico.

Ci si sente tentati di indovinare quale valore debba avere la costante universale γ. Ci sono ben familiari due costanti universali con la dimensione di un'azione, cioè h ed e^2/c (io per parte mia sono convinto che esse *non siano indipendenti). Se fosse* $\gamma \approx e^2/c$, il fattore universale (22) sarebbe un numero assai grande[15] dell'ordine di grandezza di e^{1000}. L'altra possibilità, $\gamma \approx h$, suggerisce l'idea se per γ non sia pensabile il valore immaginario puro

$$\gamma = \frac{h}{2\pi\sqrt{-1}},$$

di modo che il fattore universale (22) sarebbe uguale all'unità e la lunghezza di un segmento trasportato verrebbe riprodotta dopo ogni quasiperiodo. - Non mi sento di decidere se una cosa simile potrebbe aver senso nella geometria d'universo di Weyl.

Del resto è naturale pensare che e, h, c non sono le sole costanti universali che conosciamo. Se si tira in ballo la (consueta) costante di gravitazione k ed una qualche massa universale, per esempio la massa dell'elettrone, allora[16]

$$\frac{e^2}{km^2} = \text{ numero puro } \approx 10^{+40}.$$

Quindi

$$\frac{he^2}{km^2}$$

è un "quanto d'azione universale" dell'ordine di grandezza 10^{+13} ergsec. - Ma in proposito ricorderemo soltanto che dalle sole considerazioni dimensionali in questa materia non si può cavar proprio nulla.

Arosa, 3 ottobre 1922.

[13]H.A. Kramers, ZS. f. Phys. **3**, 201, 1920.

[14]Weyl, RZM, p . 280.

[15]$2\pi e^2/(hc)$ è la cosidetta costante di struttura fine, uguale a $7,29 \times 10^{-3}$.

[16]Vedasi anche Weyl, RZM, p. 238.

La nuova ipotesi di Bohr sulla radiazione e la legge dell'energia[1]

E. Schrödinger, Zurigo.

Nel numero di maggio del Phil. Mag. (contemporaneamente in tedesco in Zeitschr. f. Phys. **24**, 69) Bohr, Kramers e Slater sviluppano una nuova concezione della connessione dei processi radiativi con i cosidetti "salti quantici", che sollecita un interesse altrettanto grande dal punto di vista del fisico e da quello del filosofo. Infatti con essa l'idea espressa già da più parti[2] che forse il singolo processo molecolare non sia determinato da "leggi" esclusivamente causali, assume per la prima volta una forma tangibile. Le caratteristiche fondamentali della nuova concezione, che del resto da un altro aspetto significa un'ampia ripresa della teoria elettromagnetica classica della radiazione col rifiuto di ogni "ipotesi dei quanti di luce", sono in breve le seguenti:

Gli atomi e le molecole generano onde sferiche con quelle proprietà generali che si sono assunte nella teoria elettromagnetica classica. Essi emettono radiazione di questa forma *in primo luogo* spontaneamente, ma non, come la teoria dei quanti finora assumeva, in quanti determinati e come diretta conseguenza della *transizione* da uno stato stazionario[3] ad un altro con energia inferiore, bensì non appena e *finché* essi si trovano in uno stato stazionario, dal quale siano *possibili* una o più transizioni in stati di energia minore ("permesse" secondo il principio di corrispondenza). E precisamente saranno emesse simultaneamente e continuamente proprio *tante* onde sferiche monocromatiche quante sono le transizioni possibili, ognuna "corrisponde" ad una determinata transizione ed ha il valore della frequenza che si calcola dalla differenza d'energia ad essa relativa dividendo per h. Durante questa emissione di radiazione *lo stato stazionario non cambia.* L'emissione di radiazione è unicamente associata all'esistenza di una certa *probabilità* λdt, costante nel tempo, che la transizione corrispondente abbia luogo realmente nel prossimo intervallino di tempo dt. Se sono possibili più transizioni le diverse probabilità competono tra loro e dipende dal caso quale si compia, esattamente come nel decadimento radioattivo ramificato. L'effettivo accadere di una transizione non ha per la *radiazione* nessun'altra conseguenza del fatto che essa s'*interrompe* nella forma tenuta precedentemente e da ora si instaura in quella forma che corrisponde alle eventuali ulteriori transizioni possibili dal livello d'energia ora raggiunto a livelli ancora più profondi. Il *bilancio dell'energia* è assicurato *solo in media*, e questo per il fatto che ogni coefficiente di probabilità λ sta con l'*intensità* della radiazione corrispondente in un rapporto esattamente determinato, in modo che la quantità d'energia ceduta in forma di radiazione di una determinata frequenza durante il tempo di permanenza *medio* nel livello superiore è esattamente uguale al prodotto della perdita d'energia reale dell'atomo nella transizione *corrispondente* per la percentuale dei casi nei quali sarà scelta proprio questa transizione (nel caso che siano possibili *più* transizioni; altrimenti la suddetta percentuale è uno, e l'espressione si semplifica.

[1]Bohrs neue Strahlungshypothese und die Energiesatz, Die Naturwissenschaften **12**, 720-724 (1924).

[2]O.W. Richardson, The electron theory of matter, seconda ed., p. 507, Cambridge 1916; F. Exner, Vorlesungen über die physikalischen Grundlagen der Naturwissenschaften. p. 645-702, Wien: Deuticke 1919.

[3]Stato stazionario = livello d'energia.

Si calcola facilmente che in *ogni* caso dev'essere semplicemente

$$s = \lambda\varepsilon,$$

dove s è l'energia di radiazione di una determinata frequenza emessa nell'unità di tempo, ε la corrispondente perdita d'energia dell'atomo, λ il coefficiente di probabilità già prima introdotto per la transizione considerata).

Oltre a queste onde sferiche "spontanee" si devono assumere ancora onde sferiche "indotte", potremmo anche dire "diffuse", che compaiono non appena radiazione esterna incida sull'atomo o sulla molecola. Ad esse corrisponde una probabilità di transizione "indotta", che è dello stesso tipo di quella spontanea, salvo che in primo luogo il suo coefficiente di probabilità dipende dall'intensità della radiazione incidente e si annulla con esso, e che in secondo luogo tale probabilità di transizione sarà indotta anche per la transizione ad un livello di *energia superiore.* (Queste ipotesi corrispondono interamente a quelle di Einstein nel suo celebre lavoro sulla radiazione del 1917). Distingueremo ora due casi, tra i quali però non si deve assumere in verità una separazione netta, cioè *primo caso*: la frequenza dell'onda primaria incidente è esattamente *uguale* ad una frequenza spontanea di quello stato nel quale l'atomo si trova, cioè ad una frequenza spontanea per la quale il livello considerato è livello di partenza *oppure* di arrivo; *secondo caso*: la frequenza dell'onda primaria non coincide con *nessuna* frequenza spontanea. In *entrambi* i casi la frequenza dell'onda *indotta* è uguale alla *frequenza primaria.* Nel *primo* caso, che ora più precisamente consideriamo, l'onda indotta sta con la primaria in una tale relazione di fase che per interferenza sottrae o aggiunge le stesse quantità d'energia *intese* in senso relativo. Un calcolo ben noto nella teoria classica della dispersione insegna che per l'azione simultanea di più sistemi "diffusori" dello stesso tipo questa sottrazione o aggiunta di energia avviene principalmente *nella direzione* dell'onda primaria: abbiamo o *assorbimento* o *rafforzamento orientato* dell'onda primaria. Quale dei due, dipende dalla *fase* delle onde indotte, e questa a sua volta dipenderà dal fatto che la corrispondente transizione indotta porti ad un livello *più alto* o *più profondo.* (Che il rafforzamento orientato, che corrisponde al *secondo* caso, non si possa mai *osservare* realmente, ha la sua origine nel fatto che proprio in tutti gli esperimenti siano presenti *più* atomi nel livello *inferiore* di una data transizione che nel livello superiore, di modo che l'assorbimento prevale). - Naturalmente l'energia che compare o che sparisce come radiazione deve sempre essere uguale *in media* all'energia persa o acquistata dagli atomi. Pertanto nel caso ora trattato le probabilità di transizione devono essere *intese* in senso relativo, in concomitanza con l'influenza energetic*a* relativamente *importante* dell'onda primaria, e devono del resto essere *proporzionali* all'intensità della radiazione incidente, poiché ciò vale sperimentalmente per l'influenza energetica (assorbimento).

Passiamo ora *in secondo luogo* al caso nel quale la frequenza primaria *non* coincida con una frequenza spontanea. Allora l'atomo, come detto, dovrà reagire ugualmente con un'onda sferica con la frequenza primaria. Ma l'influenza *energetica* dell'onda primaria tramite l'onda sferica e quindi la probabilità di transizione indotta sono ora *assai trascurabili.* Ma ciò non significa che l'onda primaria *in generale* sia influenzata solo in modo trascurabile. L'esiguità dell'influenza *energetica* sarà accompagnata da una mutata *relazione di fase*, e questa favorisce nel caso di molti sistemi di ugual potere diffondente proprio un *tale* influsso sull'onda primaria, quale si può osservare nei mezzi trasparenti come velocità di fase variabile (dispersione), in altri casi (per esempio nell'azzurro del cielo) come diffusione, per le superfici metalliche piane come riflessione, per i raggi X nei cristalli come figure di diffrazione (su questi problemi si pone in evidenza un lavoro specialistico di Kramers[4]).

Il caso nel quale - secondo la vecchia concezione - l'$h\nu$ dell'onda primaria basta alla ionizzazione dell'atomo, cioè basta a scagliare uno dei suoi elettroni su un'orbita aperiodica, che lo allontana permanentemente dall'atomo a riposo, è da annoverare con *quello di cui* s'è *parlato per primo*: la frequenza primaria coincide con quella frequenza che l'atomo emetterebbe con continuità spontaneamente per la *presenza originaria di quell'orbita aperiodica*, associata a una certa "probabilità di mangiarsi" l'elettrone. Dobbiamo assumere in proposito che quando una radiazione primaria capace di ionizzare incide sull'atomo integro immediatamente si instauri una radiazione indotta che indebolisce *sensibilmente* la radiazione primaria, e come pendant energetico di questo una *sensibile* probabilità di transizione, cioè in questo caso una *probabilità di ionizzazione*. Proprio in questo caso si ha inoltre una circostanza di grande significato che finora abbiamo implicitamente passato sotto silenzio, ma che in verità bisogna *sempre* tener presente: oltre al *bilancio dell'energia* anche il *bilancio dell'impulso* dev'essere rispettato *in media*. Succede che per ogni "transizione" l'atomo come un tutto subisce una piccola spinta e quindi risulta inoltre la necessità di ammettere siffatte piccole spinte anche per conto loro come transizioni indotte, senza legame con un'altra variazione d'energia. Il pendant fenomenologico della spinta è la pressione di radiazione. Mentre ora la spinta, come detto, viene in generale ricevuta dall'atomo come un tutto, e per questo a causa della grande massa del nucleo è abbastanza insignificante dal punto di vista energetico, si deve assumere che nella *ionizzazione acquisti probabilità* un altro tipo di reazione, per il quale l'*elettrone interessato* riceve da *solo* tutto l'impulso, quando il prodotto caratteristico $h\nu$ della radiazione primaria supera di molte volte l'energia di ionizzazione. Questo tipo di reazione si realizza con esattezza totale con un elettrone *libero*, per il quale essa è la sola possibile. Strettamente sulla scorta della teoria di Compton (Phys. Rev. **21**, 483, 1923) un elettrone libero (a riposo) risponderà all'incidere di un'onda primaria immediatamente con un'onda sferica, come secondo la teoria classica *sarebbe* irraggiata da un elettrone che si *muovesse* nella direzione del raggio primario con velocità determinata, dipendente dalla frequenza primaria. In connessione con ciò sussiste una certa probabilità di transizione dell'elettrone ad una di quelle velocità che devono essere possibili anche secondo la teoria di Compton-Debye, fondata sulla vecchia concezione.

Infine si può ancora accennare in breve ad una circostanza importante: il suddividersi della radiazione atomica in treni d'onda di lunghezza finita, che secondo la nuova concezione dipende dalle transizioni, promette di dare una rappresentazione della *larghezza* delle righe spettrali e insieme della *durata* media *della luce* dell'atomo, studiata direttamente da W. Wien; "naturali", cioè non falsate dall'effetto Stark, dall'effetto Doppler, dagli urti molecolari et similia; due cose che per la teoria classica e per la percezione intuitiva di ogni fisico sono strettamente connesse, senza che la "vecchia teoria dei quanti" fosse in grado di produrre più che spunti del tutto vaghi per una tale connessione.

Dopo questa esposizione dei fondamenti della nuova concezione di Bohr, come se la raffigura lo scrivente, aggiungeremo alcune altre considerazioni. Per così dire

[4]Nota aggiunta alla correzione delle bozze: vedasi anche Kramers, Nature **113**, 673, 1924.

la più inquietante di esse è l'abbandono per principio della legge dell'energia e dell'impulso per ogni processo radiativo. Quest'abbandono non è proprio qualcosa di insignificante. Per esempio, un atomo abbia raggiunto il suo secondo livello energetico, con un'eccedenza d'energia ε sopra il livello fondamentale, e ritorni dopo qualche tempo al suo livello fondamentale sotto l'influenza della probabilità di transizione spontanea; si dia ora alla costante di tempo della legge di decadimento "radioattivo" un valore tale che la radiazione irraggiata con continuità nel frattempo assuma *in media* il valore ε; si verifica allora facilmente che *nel caso singolo* sussiste una probabilità nient'affatto trascurabile per un valore maggiore di 2ε, o anche per un valore minore di $\varepsilon/10$. Le probabilità corrispondenti sono rispettivamente 0,135 e 0,095). Per l'"errore" medio che l'atomo fa su un siffatto ammontare d'energia ε, risulta: ε, cioè in media il 100% (per "errore medio" intendiamo la radice quadrata del valore medio quadratico dei contributi in meno o in più nell'energia di radiazione prodotta). Ora sappiamo dagli esperimenti di W. Wien che i tempi di permanenza medi sono straordinariamente brevi, nel caso delle righe dell'idrogeno $\tau = 2 \cdot 10^{-8}$ sec.. Ad alta temperatura, non appena ε diventa paragonabile all'energia media di traslazione di una molecola di gas $3kT/2$, ogni corpo ha una frazione non trascurabile del suo contenuto energetico accumulata sotto forma di una tale energia d'eccitazione. Tra questa parte dell'energia e il contenuto di radiazione del sistema ha luogo uno scambio continuo, e precisamente ogni "porzione d'energia" ε viene convertita in media $2/\tau$ volte al secondo. (*Due* volte $1/\tau$, perché al decadimento spontaneo devono corrispondere altrettante eccitazioni "indotte"; prescindiamo dai decadimenti *indotti*). Ogni atomo eccitato dà quindi luogo all'incirca 10^8 volte per secondo ad una *anomalia* dell'energia del valore medio ε! A una considerazione a prima vista appare inevitabile che il nostro corpo già in una frazione di secondo debba sottostare a variazioni assai considerevoli, del tutto irregolari del suo contenuto energetico. Davvero lo si può paragonare ad una persona che in successione rapida punti sempre nuove, cospicue parti del suo patrimonio nel gioco d'azzardo - anche se in uno *giusto*, cioè con uguali probabilità di vincere e di perdere.

Ma proprio il paragone con questo risolve la difficoltà. Pensiamo ad una persona che possieda un patrimonio di 10000 marchi d'oro, ossia di 10^{16} marchi di carta. Essa punti il suo *intero* patrimonio al gioco, ma in giocate di *un singolo marco di carta, una giocata per ogni banconota* e con chances del tutto uguali di perderlo o di vincerne un altro. Sebbene la persona abbia puntato al gioco per davvero tutto il suo patrimonio, essa corre tuttavia solo un rischio estremamente piccolo, con altrettanto esigue possibilità di vincita. Infatti essa perderà *quasi esattamente* la metà delle 10^{16} giocate, ed il calcolo delle probabilità precisa questo "quasi esattamente" nel senso che la probabilità di un *eccesso* di vincite o di perdite sostanzialmente maggiore di qualche $10^8 (= \sqrt{10^{16}})$ giocate singole è piccola in modo del tutto trascurabile. Con una probabilità rasentante la certezza la variazione totale del patrimonio non supererà sostanzialmente qualche centinaio di milioni di marchi di carta, cioè qualche centesimo di pfennig d'oro. Se la nostra persona ripetesse la sequenza delle giocate molte volte, ogni volta, come abbiamo detto, con la possibilità di vincere o perdere circa 10^8 marchi di carta, sarebbe naturalmente in errore se da ciò desumesse che 10^8 *siffatte serie di giocate* potrebbero produrre una variazione consistente del suo patrimonio. Infatti per la stessa legge i risultati delle *serie* di giocate si compenserebbero nella stragrande parte dei casi e darebbero solo un guadagno o una perdita dell'ordine di grandezza $10^8 \cdot \sqrt{10^8} = 10^{12}$ marchi di carta

$= 1$ marco d'oro. Solo 10^{16} *serie* di giocate (di 10^{16} giocate singole) potrebbero provocare con probabilità consistente una *consistente* variazione del patrimonio!

Andiamo ora a vedere come stanno realmente le relazioni numeriche in natura. Considereremo un caso relativamente "estremo", cioè uno che porti ad oscillazioni vere dell'energia relativamente grandi. Per questo prima di tutto la temperatura dev'essere abbastanza alta, perché intervengano stati eccitati con sbilanciamenti rapidi d'energia di ammontare percettibile. Assumiamo che l'energia d'eccitazione sia uguale alla differenza d'energia della riga rossa dell'idrogeno ($\varepsilon = 3 \cdot 10^{-13}$ erg), sicchè la temperatura T dev'essere di circa 3000^o(kT/ε sarà allora uguale a 1,3). Un *grammoatomo* potrebbe allora contenere benissimo la quantità d'energia $(1/2)RT$(= energia di un grado di libertà) in una forma siffatta, e non è irragionevole desumere la frequenza $(2/\tau)$ degli sbilanciamenti dal tempo di permanenza $\tau = 2 \cdot 10^{-8}$ sec. misurato da W. Wien sulle righe dell'idrogeno. Il numero degli atomi di volta in volta eccitati è

$$\frac{RT}{2\varepsilon}.$$

Il numero totale delle transizioni atomiche (decadimenti *ed* eccitazioni) è quindi

$$\frac{RT}{\varepsilon\tau}.$$

Ognuna provoca in media il "difetto d'energia" ε. A seguito della "legge della radice quadrata" ciò dà per l'oscillazione totale vera dell'energia per secondo

$$\Delta_w(\text{sec}) = \varepsilon\sqrt{\frac{RT}{\varepsilon\tau}} = \sqrt{\frac{\varepsilon RT}{\tau}}. \tag{1}$$

Con $RT = 8,3 \cdot 10^7 \cdot 3000 = 2,5 \cdot 10^{11}$ erg, e con i valori numerici precedenti per ε e τ risulta

$$\Delta_w(\text{sec}) = 1900 \ \text{ erg } \ = 4,5 \cdot 10^{-5} \ \text{ cal.}$$

È interessante confrontare questa oscillazione "vera" dell'energia del sistema isolato con le ben note oscillazioni dell'energia che il nostro sistema mostrerebbe anche secondo la vecchia concezione in un *bagno termico* - per distinguerle le chiameremo oscillazioni di scambio. Le piccole irregolarità nello scambio d'energia del sistema con il bagno termico hanno per conseguenza una scostamento medio dell'energia del sistema dal suo valor medio dell'ammontare

$$\Delta_a = \sqrt{kT \cdot CT}. \tag{2}$$

Qui k è la costante di Boltzmann, C la *capacità termica* del sistema. Se confrontiamo questa con la (1), kT è con le nostre ipotesi dell'ordine di grandezza di ε, e C è sicuramente dell'ordine di grandezza R (*maggiore* di $3R/2$, poiché per ipotesi i gradi di libertà interni dell'atomo partecipano al contenuto termico già in modo percettibile). Una differenza nell'*ordine di grandezza* la provoca solo il denominatore $\sqrt{\tau}$ in Δ_w. L'oscillazione vera *per secondo* è quindi nel nostro caso qualche migliaio di volte maggiore dell'oscillazione *media* di scambio. Ma il significato del denominatore $\sqrt{\tau}$ non sta tanto nel fatto che τ sia un numero *piccolo*. Questa è una circostanza accidentale, legata alla scelta dell'unità di tempo. Bensì questo denominatore ci rammenta che Δ_w è di dimensione fisica diversa rispetto a Δ_a, cioè erg sec$^{-1/2}$, non erg. L'oscillazione vera *cresce con* la *radice quadrata del tempo* d'*osservazione*, per esempio nel caso nostro per *un anno* ($3,15 \cdot 10^7$ sec) varrebbe

$$\Delta_w(anno) = 0,25\ cal. \tag{3}$$

Il suo rapporto con l'oscillazione di scambio sarebbe indicato meglio *così*: l'oscillazione vera raggiunge il valore dell'oscillazione di scambio già dopo *un* tempo di permanenza medio.

Ciononostante l'ampiezza delle oscillazioni (1) e (3) di per sé non proprio così trascurabile non contraddice affatto l'esperienza esistente, e non sarebbe facile coglierle sperimentalmente. La difficoltà sta nell'isolamento termico del sistema oscillante, in particolare a temperatura così alta. Ma la temperatura alta è, come detto, necessaria perché i gradi di libertà con uno sbilanciamento d'energia così rapido possano partecipare sensibilmente al contenuto energetico.

Meglio che dal valore assoluto dell'oscillazione la rilevanza o irrilevanza del fenomeno risalta dal rapporto di quello con l'ammontare complessivo dell'energia "che può oscillare" (che abbiamo assunto $= RT/2$). Se dividiamo la (1) per $RT/2$ otteniamo

$$\Delta_{rel}(\text{sec}) = \sqrt{\frac{2\varepsilon}{RT\tau}} = 1,5 \cdot 10^{-8} \tag{4}$$

nel caso calcolato. Per un anno risulta

$$\Delta_{rel}(\text{anno}) = 0,87 \cdot 10^{-4}.$$

Dalla comparsa di RT al denominatore si riconosce (cosa che è ben nota dalle oscillazioni di scambio), che le oscillazioni *relative* anche qui sono *inversamente* proporzionali alla radice quadrata dell'ammontare dell'energia passibile di oscillazione, quindi ceteris paribus alla radice della *massa* del sistema. Rimpicciolendo il sistema isolato si può quindi ottenere per l'oscillazione relativa un ammontare assai consistente - cosa che non stupisce, dato che per l'*atomo* isolato si raggiunge già nel tempo τ il valore 1! Ma naturalmente la difficoltà dell'isolamento termico sale già ben prima fino all'impossibilità.

Di assai grande influenza dev'essere la *frequenza* della radiazione, poiché si ha a che fare con la sua energia di eccitazione. Trattiamo il suo effetto sull'oscillazione relativa secondo la (4). Possiamo assumere ε/RT come indipendente dalla frequenza, se solo scegliamo la temperatura abbastanza alta perché i gradi di libertà in questione partecipino già in modo sensibile all'equilibrio termico. Invece il tempo medio di permanenza τ varia di certo fortemente con la frequenza. Secondo la teoria classica sarebbe inversamente proporzionale al quadrato della frequenza. Che ciò accada realmente come ordine di grandezza lo si può tenere per accertato secondo il punto di vista della *corrispondenza*, che è confermato dal fatto che la teoria classica nella regione ottica, dove conosciamo τ dagli esperimenti di W. Wien, dà il giusto ordine di grandezza (altrimenti uno dovrebbe ritenere questa coincidenza come un caso). Pertanto l'*oscillazione relativa sarebbe proporzionale alla frequenza*. Se quindi nel nostro esempio sostituiamo alla frequenza della riga H_α (lunghezza d'onda 6563 $\mathring{A}$) la frequenza della radiazione dura di Röntgen (lunghezza d'onda $0,2$ $\mathring{A}$, rapporto di frequenza $\approx 3 \cdot 10^4$), arriviamo ad un'oscillazione relativa di

1/2 per mille al secondo; si raggiungerebbe il 100% in qualche mese. La temperatura corrispondente è dell'ordine di grandezza di cento milioni di gradi. Si vede che una considerevole indefinitezza del concetto di temperatura interviene solo a temperature alle quali non corrisponde in pratica alcun significato.

Se non si pronostica un calcolo più accurato in casi particolari o un metodo sperimentale geniale, che qualcuno potrebbe escogitare, possiamo quindi ben ritenere pacifico il risultato della nostra prima valutazione grossolana, che la nuova concezione da questo lato non è in contrasto con le esperienze compiute finora.

Tuttavia la conclusione che la *legge dell'energia* non debba essere una legge esatta della natura ha un grande significato di principio, malgrado la piccolezza delle deviazioni osservabili. Essa sarebbe completamente in linea con la legge dell'*entropia*, un'idea alla quale Franz Exner[5] è giunto alcuni anni fa da un punto di vista completamente diverso, più filosofico[6]. Questa ammissione avrebbe conseguenze teoriche di gran lunga più profonde che a suo tempo la medesima ammissione per la legge dell'entropia. Il fatto che la legge dell'entropia sia una legge puramente probabilistica sottrae ad ogni affermazione sul comportamento di un sistema nello stato di equilibrio termodinamico *in ogni istante* il suo carattere apodittico, e permette di aspettarsi *in ogni istante* certe piccole deviazioni, e con certezza deviazioni arbitrariamente grandi col passaggio di un tempo d'osservazione sufficientemente lungo. Tuttavia le affermazioni della termodinamica mantengono una validità del tutto *esatta* se le si considera come affermazioni sul comportamento medio, ovvero sul comportamento di un sistema *isolato*, *mediato* su un tempo d'osservazione sufficientemente lungo - con rigore totale nel limite tempo d'osservazione $= \infty$. Il sistema *compie degli scarti* sempre rispetto ad uno stato medio e questo è quello che la termodinamica dà esattamente.

Le cose vanno in modo del tutto diverso per quanto concerne la concezione di Exner-Bohr della legge dell'energia. Infatti un sistema *isolato* mostra *approssimativamente* solo per tempi relativamente *brevi* un determinato comportamento medio. Nel limite $t = \infty$ il suo comportamento sarà *completamente indeterminato*, poiché il suo *contenuto energetico* si discosta dal valore di partenza su una rosa di valori *secondo* una legge $\sqrt{t}$. Possiamo ridurre la dispersione solo aumentando la *dimensione* del sistema, oppure trattandolo come sistema parziale di un sistema più voluminoso ("bagno termico"). La validità *esatta* della termodinamica si può ora al massimo affermare ancora per un sistema in bagno termico, e precisamente con il doppio passaggio al limite: "limite per il bagno termico $= \infty$" e "limite per $t = \infty$". Tuttavia questo doppio passaggio al limite riserva difficoltà concettuali ben più grandi che prima quello semplice.

Si può anche dire così: una certa stabilità del divenire dell'universo sub specie aeternitatis può sussistere soltanto mediante la *connessione* di ogni sistema singolo con tutto il restante universo. Il singolo sistema separato sarebbe, visto come unità, caos. C'è bisogno della connessione come *elemento regolatore* permanente, senza il quale esso, nel suo comportamento energetico, vagherebbe disordinatamente. - È un ozioso gioco mentale, se uno si fa venire in mente l'analogia con i fenomeni sociali, etici, culturali?

[5] F. Exner, l.c.

[6] Lo scrivente ha fatto proprio il punto di vista di Exner nel suo Züricher Antrittsrede del 9 XII 1922 (non pubblicato).

Quantizzazione come problema agli autovalori[1]

E. Schrödinger

(prima comunicazione)

§1. In questa comunicazione posso anzitutto mostrare nel caso più semplice dell'atomo di idrogeno (non relativistico e imperturbato) che la consueta prescrizione di quantizzazione si può sostituire con un altro requisito, nel quale non si parla più di "numeri interi". Invece l'interezza compare nello stesso modo naturale, come l'interezza del *numero dei nodi* di una corda musicale oscillante. La nuova interpretazione è passibile di generalizzazione e, come credo, giunge assai in profondo nella vera essenza delle prescrizioni quantiche.

La forma consueta di queste ultime è associata all'equazione differenziale alle derivate parziali di Hamilton:

$$H\left(q, \frac{\partial S}{\partial q}\right) = E. \tag{1}$$

Si cercherà una soluzione di questa equazione che si rappresenti come *somma* di funzioni ciascuna di una delle variabili indipendenti q.

Introduciamo ora per S una nuova incognita ψ in modo tale che ψ risulti come un *prodotto* delle funzioni delle singole coordinate che intervengono. Poniamo cioè

$$S = K \lg \psi. \tag{2}$$

La costante K si deve introdurre per ragioni dimensionali; essa ha le dimensioni di un'*azione*. Si ottiene quindi

$$H\left(q, \frac{K}{\psi}\frac{\partial \psi}{\partial q}\right) = E. \tag{1'}$$

Ora *non* cerchiamo una soluzione dell'equazione (1'), ma imponiamo il seguente requisito. L'equazione (1') sempre, quando si trascuri la variabilità della massa, e tenendo conto di questa almeno quando si tratti del problema a *un* elettrone, si può portare nella forma: espressione quadratica di ψ e delle sue derivate prime $= 0$. Cerchiamo le funzioni reali ψ nell'intero spazio delle configurazioni a un sol valore, finite e due volte ovunque differenziabili, che rendono *estremo* l'integrale della forma quadratica suddetta[2] esteso all'intero spazio delle configurazioni. *Sostituiamo le condizioni quantiche con questo problema variazionale.*

Sostituiremo ad H la funzione di Hamilton del moto di Keplero e mostreremo che il requisito proposto può essere soddisfatto per *tutti* i *valori positivi*, ma soltato per un *insieme discreto di valori di E negativi.* Cioè il problema variazionale suddetto ha uno spettro di autovalori discreto ed uno continuo. Lo spettro discreto corrisponde ai termini di Balmer, quello continuo alle energie delle orbite iperboliche. Perché si abbia accordo numerico, K deve assumere il valore $h/2\pi$.

---

[1]Quantisierung als Eigenwertproblem, Annalen der Physik **79**, 361-376 (1926).

[2]Non mi sfugge che questa formulazione non è del tutto univoca.

Poiché per la formulazione delle equazioni variazionali la scelta delle coordinate è irrilevante, scegliamo quelle cartesiane ortogonali. Allora la $(1')$ si scrive nel nostro caso (e, m sono la carica e la massa dell'elettrone):

$$(1") \qquad \left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)^2-\frac{2m}{K^2}\left(E+\frac{e^2}{r}\right)\psi^2=0.$$

$$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}.$$

Il nostro problema variazionale si scrive

$$(3) \quad \delta J=\delta\int dxdydz\left[\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)^2-\frac{2m}{K^2}\left(E+\frac{e^2}{r}\right)\psi^2\right]=0;$$

l'integrale si estende sull'intero spazio. Da qui si trova in modo noto

$$(4) \qquad \frac{1}{2}\delta J=\int df\delta\psi\frac{\partial\psi}{\partial n}-\int dxdydz\delta\psi\left[\Delta\psi+\frac{2m}{K^2}\left(E+\frac{e^2}{r}\right)\psi\right]=0.$$

Si deve quindi avere in primo luogo

$$(5) \qquad \Delta\psi+\frac{2m}{K^2}\left(E+\frac{e^2}{r}\right)\psi=0$$

e in secondo luogo si deve avere per l'integrale esteso ad una superficie chiusa all'infinito

$$(6) \qquad \int df\delta\psi\frac{\partial\psi}{\partial n}=0.$$

(Risulterà che secondo quest'ultimo requisito il nostro problema variazionale va completato con una prescrizione riguardo al comportamento di $\delta\psi$ all'infinito, per la quale lo spettro di autovalori *continuo* prima dichiarato esiste realmente. Su questo vedi in seguito).

La soluzione della (5) si può effettuare (*per esempio*) nelle coordinate spaziali r, ϑ, φ, assumendo che ψ sia il prodotto di una funzione di r per una di ϑ per una di φ. Il metodo è abbastanza noto: Per la dipendenza dagli angoli polari si ottiene una *funzione sferica*, per la dipendenza da r - indicheremo la funzione con χ - si ottiene facilmente l'equazione differenziale:

$$(7) \qquad \frac{d^2\chi}{dr^2}+\frac{2}{r}\frac{d\chi}{dr}+\left(\frac{2mE}{K^2}+\frac{2mE^2}{K^2r}-\frac{n\,(n+1)}{r^2}\right)\chi=0.$$

$$n=0,1,2,3\ldots.$$

La restrizione a valori interi di n è notoriamente *necessaria*, perché la dipendenza dagli angoli polari sia *univoca*. - Abbiamo bisogno di soluzioni della (7) che risultino finite per tutti i valori reali non negativi di r. Ora l'equazione (7) ha[3] nel piano r complesso *due* singolarità, per $r = 0$ e $r = \infty$, delle quali la seconda è un "punto di indeterminazione" (punto singolare essenziale) per *tutti* gli integrali, la prima invece no (per nessun integrale). Queste due singolarità costituiscono proprio gli *estremi del nostro intervallo reale*. In un tal caso si vede che la condizione di *finitezza* negli estremi si traduce per la funzione χ in una *condizione* al *contorno*. L'equazione non ha *in generale* nessun integrale che risulti finito in *entrambi* gli estremi, ma un tale integrale esiste solo per certi valori particolari delle costanti che compaiono nell'equazione. Si tratta di determinare questi valori particolari.

La circostanza ora menzionata è il *punto di partenza* dell'intera questione.

Trattiamo prima il punto singolare $r = 0$. La cosidetta *equazione fondamentale risolvente*, che determina il comportamento dell'integrale in questo punto è

$$\rho\,(\rho - 1) + 2\rho - n\,(n + 1) = 0 \tag{8}$$

con le radici

$$\rho_1 = n,\ \rho_2 = -(n + 1). \tag{8'}$$

I due integrali canonici in questo punto corrispondono quindi agli esponenti n e $-(n + 1)$. Di questi, poiché n è non negativo, solo il primo è utilizzabile per noi. Poiché corrisponde agli esponenti *più grandi*, esso sarà rappresentato con una consueta serie di potenze, che comincia con r^n. (L'altro integrale, che non ci interessa, può, a causa della differenza intera tra gli esponenti, contenere un logaritmo). Poiché il punto singolare più vicino sta all'infinito, la suddetta serie di potenze converge uniformemente e costituisce una *trascendente*. Affermiamo:

La *soluzione cercata (a meno di un fattore costante inessenziale)* è *una trascendente determinata univocamente, che in* $r = 0$ *corrisponde all'esponente* n.

Si tratta ora di trovare il comportamento di questa funzione all'*infinito* dell'asse reale positivo. Per ciò semplifichiamo l'equazione (7) mediante la sostituzione

$$\chi = r^{\alpha} U, \tag{9}$$

dove α sarà scelto in modo tale che il termine con $1/r^2$ sparisca. Per questo α deve avere uno dei due valori n, $-(n + 1)$, come si verifica facilmente. L'equazione (7) assume la forma:

$$\frac{d^2U}{dr^2} + \frac{2(\alpha + 1)}{r}\frac{dU}{dr} + \frac{2m}{K^2}\left(E + \frac{e^2}{r}\right)U = 0. \tag{7'}$$

I *suoi* integrali corrispondono per $r = 0$ agli esponenti 0 e $-2\alpha - 1$. Per il primo valore di α, $\alpha = n$, il *primo*, per il secondo valore di α, $\alpha = -(n + 1)$, il *secondo* di questi integrali è trascendente e porta secondo la (9) alla soluzione *cercata*, che è proprio univoca. Non trascuriamo nulla se ci restringiamo ad *uno* dei due valori di α. Scegliamo

$$\alpha = n. \tag{10}$$

[3]Per la guida nella trattazione dell'equazione (7) sono debitore di moltissimi ringraziamenti a Hermann Weyl. Rimando per le affermazioni nel seguito non dimostrate a L. Schlesinger, Differentialgleichungen (Collana Schubert Nr. 13, Göschen 1900, in particolare Cap. 3 e 5.)

La nostra soluzione corrisponde quindi per $r = 0$ all'esponente 0. I matematici indicano l'equazione (7') come equazione di Laplace. Il tipo generale è

$$U'' + (\delta_0 + \delta_1/r)\, U' + (\varepsilon_0 + \varepsilon_1/r)\, U = 0. \tag{7''}$$

Nel nostro caso le costanti hanno i valori

$$\delta_0 = 0, \delta_1 = 2\,(\alpha + 1)\,,\ \varepsilon_0 = 2mE/K^2,\ \varepsilon_1 = 2me^2/K^2. \tag{11}$$

Questo tipo di equazione è relativamente facile da trattare perché la cosidetta trasformazione di Laplace, che in generale dà *ancora* un'equazione del *second'*ordine, *in questo caso* porta ad una del *prim'*ordine, che è risolubile mediante quadrature. Ciò permette una rappresentazione delle soluzioni della (7") mediante integrali in campo complesso. Riporto qui solo il risultato[4]. L'integrale

$$U = \int_L e^{zr} (z - c_1)^{\alpha_1 - 1} (z - c_2)^{\alpha_2 - 1} dz \tag{12}$$

è una soluzione della (7") per un cammino d'integrazione L per il quale

$$\int_L \frac{d}{dz} \left[e^{zr} \,(z - c_1)^{\alpha_1}\, (z - c_2)^{\alpha_2} \right] dz = 0. \tag{13}$$

Le costanti c_1, c_2,α_1,α_2 hanno i seguenti valori. c_1 e c_2 sono le radici dell'equazione quadratica

$$z^2 + \delta_0 z + \varepsilon_0 = 0 \tag{14}$$

e

$$\alpha_1 = \frac{\varepsilon_1 + \delta_1 c_1}{c_1 - c_2},\ \alpha_2 = \frac{\varepsilon_1 + \delta_1 c_2}{c_2 - c_1}. \tag{14'}$$

Nel caso dell'equazione (7') sarà per le (11) e (10)

$$\begin{gathered} c_1 = +\sqrt{\left(\frac{-2mE}{K^2}\right)},\ c_2 = -\sqrt{\left(\frac{-2mE}{K^2}\right)}; \\ \alpha_1 = \frac{me^2}{\left[K \sqrt{_+ - 2mE}\right]} + n + 1,\ \alpha_2 = -\frac{me^2}{\left[K \sqrt{_+ - 2mE}\right]} + n + 1. \end{gathered} \tag{14''}$$

La rappresentazione integrale (12) non permette soltanto di cogliere il comportamento asintotico del complesso delle soluzioni quando r va all'infinito in modo determinato, ma anche di dare questo comportamento per una soluzione *determinata*, il che è sempre molto più difficile.

[4]Vedi L. Schlesinger, l.c.. La teoria si deve a H. Poincaré e a J. Horn.

Escluderemo per ora il caso in cui α_1 e α_2 siano numeri reali interi. Il caso si verifica, se si verifica, sempre per entrambe le quantità insieme e più precisamente quando e solo quando

$$\frac{me^2}{K\sqrt{-2mE}} = \text{ numero reale intero.} \tag{15}$$

Assumiamo quindi ora che la (15) non sia soddisfatta.

Il comportamento del complesso delle soluzioni per un modo determinato di andare all'infinito di r - penseremo sempre ad un infinito da valori reali positivi - è quindi[5] caratterizzato dal comportamento di due soluzioni linearmente indipendenti, che si possono ottenere mediante le seguenti *due specializzazioni* del cammino d'integrazione L, e che chiameremo U_1 e U_2. *Entrambe* le volte z viene dall'infinito e vi ritorna per lo stesso cammino, e in una direzione tale che

$$\lim_{z=\infty} e^{zr} = 0, \tag{16}$$

cioè la parte reale di zr dev'essere infinita negativa. In tal modo la condizione (13) è soddisfatta. In *un* caso (soluzione U_1) si girerà una volta attorno al punto c_1, nell'*altro* caso (soluzione U_2) attorno al punto c_2.

Queste due soluzioni sono rappresentate *asintoticamente* (nel senso di Poincaré) per valori reali positivi molto grandi di r da

$$\begin{aligned} U_1 &\approx e^{c_1 r} \cdot r^{-\alpha_1} \cdot (-1)^{\alpha_1} \cdot \left(e^{2\pi i \alpha_1} - 1\right) \Gamma\left(\alpha_1\right) \left(c_1 - c_2\right)^{\alpha_2 - 1}, \\ U_2 &\approx e^{c_2 r} \cdot r^{-\alpha_2} \cdot (-1)^{\alpha_2} \cdot \left(e^{2\pi i \alpha_2} - 1\right) \Gamma\left(\alpha_2\right) \left(c_2 - c_1\right)^{\alpha_1 - 1}, \end{aligned} \tag{17}$$

ove ci accontentiamo del primo termine dell'intera serie asintotica di potenze di r intere negative.

Dobbiamo ora distinguere i due casi $E > 0$, $E < 0$.

1. **$\underline{\mathbf{E > 0}}$** Notiamo prima di tutto che in questo caso il non verificarsi della (15) è eo ipso garantito, perché questa quantità è immaginaria pura. Inoltre secondo la (14") anche c_1 e c_2 sono immaginari puri. Le funzioni esponenziali nella (17) sono quindi, poiché r è reale, funzioni periodiche finite. I valori di α_1 e di α_2 secondo la (14") mostrano che U_1 e U_2 vanno a zero *entrambe* come r^{-n-1}. La *stessa cosa deve valere per* la *nostra intera soluzione trascendente* U, il cui comportamento cerchiamo, *perché essa si può sempre costruire per combinazione lineare di* U_1 e U_2. Inoltre la (9) tenendo conto della (10) mostra che la funzione χ, cioè l'intera soluzione trascendente dell'equazione *originariamente considerata* (7), va sempre a zero come $1/r$, poiché essa deriva da U per moltiplicazione per r^n. Possiamo quindi affermare:

L'equazione differenziale di Eulero (5) del nostro problema variazionale ha soluzioni per ogni E positivo, che sono a un sol valore finite e continue sull'intero spazio e che all'infinito vanno a zero come $1/r$ *con oscillazioni costanti.* - Si dovrà ancora parlare della condizione di superficie (6).

2. **$\underline{\mathbf{E < 0.}}$** In questo caso la possibilità (15) non è *eo ipso* esclusa, quindi ci atteniamo per il momento alla sua predetta esclusione. Allora U_1 secondo la (14")

[5] Quando la (15) è soddisfatta almeno uno dei due cammini d'integrazione descritti nel testo non è utilizzabile, poiché produce un risultato nullo.

e la (17) cresce oltre ogni limite per $r = \infty$, mentre U_2 si annulla *esponenzialmente.* La nostra trascendente (e lo stesso vale per χ) resterà finita quando e solo quando Uè identica ad U_2 a meno di un fattore numerico. Ma *questo non succede.* Lo si riconosce così: si scelga nella (12) per il cammino d'integrazione L un cammino chiuso che circondi *entrambi* i punti c_1 e c_2, cammino che per l'interezza della somma $\alpha_1+\alpha_2$ è *realmente* un cammino *chiuso* sulla superficie riemanniana dell'integrando, dunque eo ipso soddisfa la condizione (13), cosicché si può dimostrare facilmente che l'integrale (12) rappresenta la nostra trascendente U. Esso si può infatti sviluppare in una serie di potenze positive di r, che converge sempre per r sufficientemente piccolo, perciò soddisfa l'equazione differenziale (7'), quindi deve coincidere con quella di U. Allora: Uè rappresentato dalla (12), quando Lè un cammino chiuso attorno ad entrambi i punti c_1 e c_2. Questo cammino chiuso si può deformare in modo che risulti costruito per *combinazione additiva* dei due cammini d'integrazione che corrispondono a U_1 e U_2, e in particolare *con fattori non nulli*, cioè 1 e $\exp 2\pi i\alpha_1$. Pertanto U non può coincidere con U_2, ma deve contenere anche U_1. C.v.d..

La nostra trascendente U, che sola interviene nelle soluzioni della (7') per la soluzione del problema, con le assunzioni fatte *non* rimane finita per r grandi. - Con riserva della ricerca della *completezza*, cioè della prova che il nostro procedimento fa trovare *tutte* le soluzioni del problema linearmente indipendenti, possiamo quindi affermare:

Per E negativi, che non soddisfano la *condizione* (15), il nostro problema variazionale non ammette soluzione.

Dobbiamo ora studiare solo quell'insieme discreto di valori di E negativi che *soddisfano* la *condizione* (15). Allora α_1 ed α_2 sono entrambi interi. Dei due cammini di integrazione, che ci hanno prodotto prima il sistema fondamentale U_1, U_2, il primo deve essere sicuramente mutato, per dar luogo a un risultato non nullo. Poiché $\alpha_1 - 1$ è sicuramente positivo, , il punto c_1 non è né un punto di diramazione né un polo dell'integrando, ma un normale punto di zero. Anche c_2 può essere regolare, quando cioè anche $\alpha_2 - 1$ non è negativo. In *ogni* caso si possono facilmente dare due cammini di integrazione adatti e l'integrazione si può ricondurre a quella in forma chiusa di funzioni note, di modo che si può completamente cogliere il comportamento delle soluzioni.

Sia infatti

(15') $$\frac{me^2}{K\sqrt{-2mE}} = 1;\ l = 1, 2, 3, 4 \ldots$$

Allora secondo la (14")

(14"') $$\alpha_1 - 1 = l + n, \alpha_2 - 1 = -l + n.$$

Si hanno ora da distinguere i due casi $l \le n$ e $l > n$. Sia

a) $l \le n$. Allora c_1 e c_2 perdono ogni carattere singolare, e acquistano la capacità di fungere da punto iniziale o finale del cammino d'integrazione per soddisfare la condizione (13). Un terzo punto adatto per questo è l'infinito reale negativo. Ogni cammino tra due di questi tre punti produce una soluzione, e di queste tre soluzioni due sono linearmente indipendenti, come si verifica facilmente, quando si calcoli l'integrale in forma chiusa. In particolare l'*intera funzione trascendente* sarà data mediante il cammino d'integrazione tra c_1 e c_2. Che *questo* integrale rimanga regolare per $r = 0$ lo si riconosce immediatamente, senza calcolarlo. Osservo questo, perché il calcolo effettivo è piuttosto adatto a nascondere questa circostanza. Di contro *esso* mostra che l'integrale per r positivo infinitamente grande cresce oltre ogni limite. Resta *finito* per grandi r uno dei due *altri* integrali, ma quello che è infinito per $r = 0$.

Nel caso $l \leq n$ non otteniamo quindi *nessuna* soluzione.

b) $l > n$. Allora secondo la (14"') c_1 è un punto di zero, c_2 un polo almeno del prim'ordine dell'integrando. Si possono dare quindi due integrali indipendenti: quello lungo il cammino che da $z = -\infty$, evitando per precauzione il polo, porta al punto di zero; l'altro attraverso il *residuo* nel polo. *Quest'ultimo* è la trascendente. Daremo il suo valore calcolato, moltiplicato per r^n, di modo che otteniamo secondo le (9) e (10) la soluzione χ dell'equazione (7) considerata originariamente. (La costante moltiplicativa irrilevante è aggiustata liberamente). Si trova

$$\chi = f\left(r\frac{\sqrt{-2mE}}{K}\right);\ f(x) = x^n e^{-x} \sum_{k=0}^{l-n-1} \frac{(-2x)^k}{k!} \binom{l+n}{l-n-1-k}. \tag{18}$$

Si riconosce che questa è veramente una soluzione utilizzabile, poiché essa resta finita per tutti gli r reali non negativi. Inoltre mediante il suo andare a zero esponenzialmente all'infinito la condizione di superficie (8) è garantita. Riassumiamo i risultati per E negativo:

Per E negativo il nostro problema variazionale ha soluzione quando e solo quando E soddisfa la condizione (15). Al numero intero n, che dà l'ordine della funzione sferica che compare nella soluzione, si possono dare sempre solo valori minori di l (di essi sempre almeno uno è disponibile). La parte della soluzione dipendente da r è data dalla (18).

Contando le costanti nelle funzioni sferiche (notoriamente $2n+1$) si trova inoltre:

La soluzione trovata contiene per una combinazione (l, n) consentita $2n + 1$ costanti arbitrarie; per un dato valore di l quindi l^2 costanti arbitrarie.

Abbiamo con questo confermato nelle linee essenziali le affermazioni fatte all'inizio, ma restano tuttavia delle lacune.

In primo luogo la prova della completezza del sistema *complessivo* di autofunzioni trovato. Di ciò non mi occuperò in questa Nota. Secondo ulteriori esperienze si può supporre che non abbiamo tralasciato nessun autovalore.

In secondo luogo bisogna ricordare che le autofunzioni trovate per E positivo non risolvono senz'altro il problema variazionale nella forma che è stata data all'inizio, poiché esse vanno a zero all'infinito solo come $1/r$, e $\partial\psi/\partial r$ va a zero su una sfera grande solo come $1/r^2$. L'integrale di superficie (6) risulta quindi proprio dell'ordine di $\delta\psi$ all'infinito. Se si vuole quindi davvero tenere lo spettro continuo, si deve aggiungere al *problema* una condizione: che $\delta\psi$ si annulli all'infinito, o almeno che debba tendere ad un valore costante, indipendente dalla direzione nella quale si va all'infinito spaziale; in quest'ultimo caso le funzioni sferiche portano all'annullarsi dell'integrale di superficie.

§2. La condizione (15) dà

$$-E_l = \frac{me^4}{2K^2l^2}. \tag{19}$$

Si hanno quindi i ben noti livelli d'energia di Bohr, che corrispondono ai termini di Balmer, quando si attribuisca alla costante K, che dobbiamo introdurre nella (2) per ragioni dimensionali, il valore

$$K = \frac{h}{2\pi}. \tag{20}$$

Allora risulta proprio

$$-E_l = \frac{2\pi^2 me^4}{h^2 l^2}. \tag{19'}$$

Il nostro l è il numero quantico principale. $n+1$ è analogo al numero quantico azimutale; l'ulteriore suddivisione di questo numero con la determinazione più precisa delle funzioni sferiche si può porre in analogia con la suddivisione del numero quantico azimutale in un quanto "equatoriale" e in uno "polare". Questi numeri determinano *qui* il sistema delle linee nodali sulla sfera. Anche il "numero quantico radiale", $l-n-1$, determina proprio il numero di "sfere nodali", poiché ci si persuade facilmente che la funzione $f(x)$ nella (18) ha proprio $l-n-1$ radici reali. - I valori di E positivi corrispondono al continuo delle orbite iperboliche, alle quali si può assegnare in un certo senso il numero quantico ∞. Ciò corrisponde al fatto che, come abbiamo visto, le funzioni delle soluzioni corrispondenti si estendono verso l'infinito oscillando *costantemente*.

È interessante che la regione entro la quale le funzioni (18) sono sensibilmente diverse da zero, ed entro la quale avvengono le loro oscillazioni, è sempre dell'*ordine di grandezza generale* dell'asse maggiore della corrispondente ellisse. Il fattore, moltiplicato per il quale il raggio vettore compare come argomento della funzione f priva di costanti è - evidentemente - il reciproco di una lunghezza, e questa lunghezza è

$$\frac{K}{\sqrt{-2mE}} = \frac{K^2 l}{me^2} = \frac{h^2 l}{4\pi^2 me^2} = \frac{a_l}{l}, \tag{21}$$

dove a_l è il semiasse dell'orbita ellittica l-esima. (Le equazioni derivano dalla (19) assieme alla nota condizione $E_l = -e^2/(2a_l)$). La quantità (21) dà l'ordine di grandezza della regione delle radici per l e n numeri piccoli; allora si può assumere che le radici di $f(x)$ abbiano ordine di grandezza uno. Naturalmente ciò non accade più quando i coefficienti del polinomio siano numeri grandi. Non posso ora addentrarmi in una stima più precisa delle radici, ma credo che l'affermazione precedente sarà sostanzialmente confermata.

§3. È evidentemente assai naturale associare la funzione ψ a *un processo di oscillazione* nell'atomo, che gli si adatta in maggior misura della oggi assai dubitata realtà delle traiettorie elettroniche. Avevo originariamente l'intenzione di fondare la nuova forma della prescrizione quantica in questo modo più intuitivo, ma ho presentato poi la forma matematica neutrale di cui sopra, perché essa fa risaltare l'essenziale in modo più chiaro. E l'essenziale mi pare sia che nella prescrizione quantica non si abbia più la misteriosa "condizione di interezza", ma che questa sia per così dire conseguenza di un ulteriore passo: essa si fonda sulla finitezza e sull'univocità di una certa funzione spaziale.

Non posso ancora inoltrarmi nella discussione delle possibilità di rappresentazione riguardo a questo processo di oscillazione, prima che casi abbastanza complicati siano trattati con successo con la nuova idea. Non è certo che questi nei loro risultati siano una pura copia della consueta teoria quantistica. Per esempio il problema di Keplero relativistico, quando lo si tratta esattamente secondo la prescrizione data all'inizio, porta stranamente a quanti *frazionari seminteri* (quanto radiale e azimutale).

Tuttavia siano permesse qui alcune osservazioni sul processo di oscillazione. Tra l'altro non posso non menzionare che io devo ringraziare per lo spunto a queste riflessioni in primo luogo la tesi geniale di Louis de Broglie[6] e le considerazioni sull'andamento spaziale di quelle "onde di fase", riguardo alle quali egli ha dimostrato che, se contate lungo la traiettoria, se ne ha sempre un *numero intero* per un periodo o quasiperiodo dell'elettrone. La differenza principale sta nel fatto che de Broglie pensa ad onde progressive, mentre noi, quando attribuiamo alle nostre formule il significato di un processo di oscillazione, siamo condotti a oscillazioni proprie stazionarie. Ho mostrato da poco[7] che si può fondare la teoria di Einstein dei gas sulla considerazione di tali oscillazioni proprie stazionarie, per le quali si supponga la legge di dispersione delle onde di fase di de Broglie. La precedente trattazione per l'atomo si potrebbe considerare come generalizzazione di alcune riflessioni sul modello dei gas.

Se si assume che le singole funzioni (18), moltiplicate per un'armonica sferica di ordine n, descrivano il processo di oscillazione propria, allora la quantità E deve avere qualche cosa a che fare con la *frequenza* del processo considerato. Ora è noto che nei problemi di oscillazione il "parametro" (di solito chiamato λ) è proporzionale al *quadrato* della frequenza. Ma in primo luogo una tale ipotesi nel caso presente porterebbe per valori di E *negativi* a frequenze *immaginarie*, in secondo luogo al teorico dei quanti l'intuito dice che l'energia dev'essere proporzionale alla frequenza e non al suo quadrato.

La contraddizione si risolve nel modo seguente. Per il "parametro" E dell'equazione variazionale (5) non è fissato per ora *nessun livello di zero naturale*, in particolare perché la funzione incognita ψ, oltre che per E appare moltiplicata per una funzione di r che , per la corrispondente variazione del livello di zero di E, può essere variata di una costante. Di conseguenza l'"aspettativa dei teorici delle oscillazioni" si deve correggere così, che ci si aspetta che non E di per sé - come l'abbiamo chiamato e come continueremo a chiamarlo - ma E accresciuto di una certa costante sia proporzionale al quadrato della frequenza. Sia ora questa costante *assai grande* rispetto a tutti i possibili valori di E [che sono fissati dalla (15)]. Allora in primo luogo le frequenze sono reali, e in secondo luogo i nostri valori di E, che corrispondono solo a relativamente piccole *separazioni* in frequenza, sono di fatto con grande approssimazione proporzionali a queste separazioni. Questo è tutto quello che il "naturale intuito" dei teorici dei quanti può pretendere, fin tanto che il livello di zero dell'*energia* non è fissato. L'idea che la frequenza del processo oscillatorio sia data all'incirca da

$$\nu = C'\sqrt{C+E} = C'\sqrt{C} + C'E/2\sqrt{C} + \dots \tag{22}$$

dove C è una costante assai grande rispetto a tutti gli E, ha tuttavia un'altra assai notevole proprietà. *Essa permette una comprensione della regola delle frequenze di*

[6]L. de Broglie, Ann. de Physique (10) **3**, 22, 1925 (Thèses, Paris 1924)

[7]Appare tra poco su Physik. Zeitschr.

Bohr. Secondo quest'ultima le *frequenze di emissione* sono proporzionali alle *differenze di E*, e quindi per la (22) anche alle differenze tra le frequenze proprie ν di quell'ipotetico processo oscillatorio. E inoltre le frequenze proprie sono tutte assai grandi rispetto alle frequenze di emissione, sono quasi accordate tra loro. Le frequenze di emissione appaiono allora in sostanza come "suoni di battimento" bassi delle oscillazioni proprie stesse che avvengono con frequenza assai più alta. Che durante il passaggio dell'energia da una ad un'altra oscillazione normale *qualcosa* - intendo l'onda luminosa - appaia, che abbia come *frequenza* quella *differenza* di frequenze, è assai comprensibile; è necessario solo immaginare che l'onda luminosa sia accoppiata causalmente con i *battimenti* che necessariamente si verificano in ogni punto dello spazio durante la transizione, e che la frequenza della luce sia determinata dal numero di volte al secondo con il quale si ripete il massimo d'intensità del processo di battimento.

Si possono sollevare dubbi, poiché questa conclusione si fonda sulla relazione (22) nella sua forma *approssimata* (mediante sviluppo della radice quadrata), per cui la regola delle frequenze di Bohr assume apparentemente il carattere di una formula di approssimazione. Ciò è solo apparente, ed è completamente evitato quando si sviluppi la teoria *relativistica*, mediante la quale è veramente consentita una comprensione più profonda. La grande costante additiva C in modo naturale si identifica strettamente con l'energia di riposo mc^2 dell'elettrone. Anche l'apparentemente *ripetuta* e *indipendente* introduzione della costante h [quella che è stata introdotta mediante la (20)] nella regola delle frequenze è chiarita o evitata mediante la teoria relativistica. Ma purtroppo il suo sviluppo rigoroso è provvisorio per certe difficoltà prima ricordate.

Non è necessario rilevare quanto più simpatica sarebbe l'idea che in una transizione quantica l'energia passi da un modo di oscillazione ad un altro, dell'idea dell'elettrone che salta. La variazione del modo di oscillare si può seguire con continuità nello spazio e nel tempo, essa può ben durare a piacimento, come secondo l'esperienza (esperimento dei raggi canale di W. Wien) dura il processo di emissione: e tuttavia accade che, se durante queste transizioni l'atomo è esposto per un tempo relativamente corto ad un campo elettrico, le frequenze proprie cambiano, parimenti risultano cambiate le frequenze di battimento, e questo proprio fin tanto che il campo agisce. Questi fatti sperimentalmente accertati opponevano finora alla comprensione le più grandi difficoltà, si veda per esempio il noto tentativo di soluzione di Bohr-Kramers-Slater.

D'altra parte, nella gioia per il fatto che l'uomo si avvicini a tutte queste cose, non si può dimenticare che l'idea che l'atomo oscilli, quando non irraggia, di volta in volta nella forma di *una* oscillazione propria, che quest'idea, dico, si discosta assai dall'immagine *naturale* di un sistema oscillante. È noto infatti che un sistema macroscopico non si comporta così, ma mostra un potpourri delle sue oscillazioni proprie. Ma non si può decidere prematuramente la propria opinione su questo punto. Anche un potpourri di frequenze proprie nel singolo atomo non andrebbe escluso, purché non compaiano altre frequenze di battimento che quelle della cui emissione l'atomo secondo l'esperienza è capace *in date circostanze*. Inoltre nessun esperimento contraddice la possibile emissione simultanea di più d'una di queste righe spettrali da parte dello stesso atomo. Si può ben pensare che solo nello stato fondamentale (e in modo approssimato in certi stati "metastabili") l'atomo oscilli con *una* frequenza propria e proprio per questo *non* irraggi, perché non si ha alcun battimento. L'*eccitazione* consisterebbe in una attivazione simultanea di una o più ulteriori frequenze proprie, per cui si verificano battimenti, che provocano l'emissione di luce.

In ogni caso penso che le autofunzioni che appartengono ad una *stessa* frequenza siano tutte eccitate simultaneamente. La molteplicità degli autovalori corrisponde infatti nel linguaggio della teoria precedente alla *degenerazione*. La riduzione della quantizzazione di un sistema degenere potrebbe corrispondere all'arbitraria ripartizione dell'energia tra le autofunzioni che appartengono ad *un* autovalore.

Aggiunta alla correzione il 28 II 1926.

Nel caso della meccanica classica di sistemi conservativi il procedimento variazionale si può formulare meglio di come mostrato all'inizio, senza riferirsi allo scopo all'equazione differenziale alle derivate parziali di Hamilton. Siano $T(q,p)$ l'energia cinetica in funzione delle coordinate e dell'impulso, V l'energia potenziale, $d\tau$ l'elemento di volume dello spazio delle configurazioni "misurato razionalmente", cioè non semplicemente il prodotto $dq_1 dq_2 \ldots dq_n$, ma questo diviso per la radice quadrata del discriminante della forma quadratica $T(q,p)$. (Vedi Gibbs, Statistische Mechanik.) Allora ψ dovrà rendere *stazionario* l'"integrale hamiltoniano"

$$\int d\tau \left\{ K^2 T \left(q, \frac{\partial \psi}{\partial q} \right) + \psi^2 V \right\} \tag{23}$$

sotto la *condizione aggiuntiva normalizzante*

$$\int \psi^2 d\tau = 1. \tag{24}$$

Gli *autovalori* di questo problema variazionale sono notoriamente i *valori stazionari* dell'integrale (23) e forniscono secondo la nostra tesi i *livelli quantici dell'energia*.

Riguardo alla (14") si osservi che nella quantità α_2 si ha essenzialmente la nota espressione $-B/A^{1/2} + C^{1/2}$ di Sommerfeld (vedi "Atombau", IV ed., pag. 775).

Zürich, Physikalische Institut der Universität.

(ricevuto il 27 gennaio 1926.)

Quantizzazione come problema agli autovalori[1]

E. Schrödinger

(seconda comunicazione)[2]

§1. L'analogia di Hamilton tra meccanica ed ottica.

Prima di dedicarci a trattare il problema agli autovalori della teoria dei quanti per ulteriori sistemi particolari chiariremo meglio la connessione *generale* che sussiste tra l'equazione differenziale alle derivate parziali di Hamilton di un problema meccanico e la "corrispondente" *equazione d'onda*, cioè nel caso del problema di Keplero l'equazione (5) della prima comunicazione. Avevamo descritto questa connessione provvisoriamente solo in breve nella sua struttura analitica esterna mediante la trasformazione (2) di per sé incomprensibile e con l'altrettanto incomprensibile passaggio dal *porre a zero* una espressione all'ingiunzione che l'*integrale spaziale* della suddetta espressione debba essere stazionario[3].

La connessione *interna* della teoria di Hamilton con il processo di propagazione ondosa non è per niente nuova. Non solo era ben nota ad Hamilton stesso, ma ha costituito per lui il punto di partenza della sua teoria della meccanica, che è sortita dalla sua *ottica dei mezzi disomogenei*[4]. Il principio variazionale di Hamilton può essere inteso come *principio* di Fermat per una propagazione ondosa nello spazio delle configurazioni (spazio-q), cioè l'equazione differenziale alle derivate parziali di Hamilton esprime il *principio* di Huygens per questa propagazione ondosa. Purtroppo questo ambito di idee di Hamilton, potente e gravido di conseguenze, nella maggior parte delle ripresentazioni moderne viene spogliato della sue veste intuitiva come di un accessorio superfluo a favore di una rappresentazione più incolore delle relazioni analitiche[5].

Consideriamo il problema generale della meccanica classica di sistemi conservativi. L'equazione differenziale alle derivate parziali di Hamilton completa si scrive:

$$\frac{\partial W}{\partial t} + T\left(q_k, \frac{\partial W}{\partial q_k}\right) + V(q_k) = 0. \tag{1}$$

---

[1]Quantisierung als Eigenwertproblem, Annalen der Physik **79**, 489-527 (1926).

[2]Vedi questi Annali **79**, 361, 1926. Per la comprensione non è incondizionatamente necessario leggere la prima comunicazione prima della seconda.

[3]Questo procedimento di calcolo *non sarà più seguito* nella presente comunicazione. Esso doveva servire solo per un'orientazione grossolana provvisoria sulla connessione esterna tra l'equazione d'onda e l'equazione differenziale alle derivate parziali di Hamilton. Rispetto alla funzione d'azione di un determinato moto la ψ non sta realmente nella relazione assunta nell' equazione (2) della prima comunicazione. - Invece la connessione tra l'equazione d'onda e il risultato della variazione è evidentemente assai reale: l'integrando dell'integrale stazionario è la funzione di Lagrange per il processo ondulatorio.

[4]Vedasi per esempio E.T. Whittaker, Analitische Dynamik (edizione tedesca presso Springer, 1924) Cap. 11, pp. 306 e seguenti.

[5]Felix Klein dall'estate 1891 nelle sue lezioni sulla meccanica ha riproposto la teoria di Jacobi sviluppandola da considerazioni quasi-ottiche in spazi superiori non euclidei. Vedasi F. Klein, Jahresber. d. Deutsch. Math. Ver. **1**, 1891 e Ztschr. f. Math. und Phys. **46**, 1901. (Ges. Abh. pp. 601 e 603). Nella seconda nota Klein afferma con un leggero rimprovero che la sua presentazione alla riunione degli scienziati ad Halle, nella quale egli dieci anni prima aveva esposto questa connessione e aveva sottolineato il grande significato delle considerazioni ottiche di Hamilton, "non aveva ricevuto tutta l'attenzione che mi sarei aspettato". - Devo l'indicazione riguardo a Klein ad una amichevole comunicazione per lettera del Prof. Sommerfeld. Vedi anche "Atombau", IV ed., pag. 803.

W è la funzione d'azione, cioè l'integrale rispetto al tempo della funzione di Lagrange $T - V$ lungo un cammino del sistema in funzione della posizione finale e del tempo. q_k rappresenta le coordinate di posizione, T è l'energia cinetica in funzione delle coordinate di posizione e di quelle d'impulso, una funzione quadratica delle seconde, al posto delle quali secondo la prescrizione sono state introdotte le derivate parziali di W rispetto a q_k. V è l'energia potenziale. Per risolvere l'equazione si fa l'ipotesi

$$W = -Et + S(q_k), \tag{2}$$

per la quale la stessa diventa

$$2T\left(q_k, \frac{\partial W}{\partial q_k}\right) = 2(E - V). \tag{1'}$$

E è una prima costante d'integrazione arbitraria e notoriamente significa l'energia del sistema. In contrasto con l'uso comune abbiamo lasciato nella (1') la funzione W stessa, invece di introdurre al suo posto, come d'abitudine, la funzione delle coordinate S indipendente dal tempo. Questa è una pura esteriorità.

Il contenuto dell'equazione (1') si può esporre ora in modo assai semplice se si utilizza il modo di esprimersi di Heinrich Hertz. Esso risulta, come tutte le asserzioni geometriche nello spazio delle configurazioni (spazio delle variabili q_k), particolarmente semplice e chiaro se si introduce in questo spazio per mezzo dell'energia cinetica del sistema una metrica non euclidea. Se $\bar{T}$ è l'energia cinetica in funzione delle *velocità* $\dot{q}_k$, non degli *impulsi* come prima, si pone per l'elemento di linea

$$ds^2 = 2\bar{T}(q_k, \dot{q}_k)\, dt^2. \tag{3}$$

Il secondo membro contiene dt solo esteriormente; esso indica (mediante $\dot{q}_k dt = dq_k$) una forma quadratica di dq_k.

È noto che con questa definizione si può, di concetti come: angolo tra due elementi di linea, ortogonalità, divergenza e rotore di un vettore, gradiente di uno scalare, operatore di Laplace (= div grad) per uno scalare, ed altro, fare lo stesso semplice uso come nello spazio euclideo tridimensionale, si può impunemente utilizzare nei ragionamenti la rappresentazione euclidea tridimensionale; soltanto le espressioni analitiche per questi concetti saranno un tantino più complicate, poiché in generale al posto dell'elemento di linea euclideo deve comparire l'elemento di linea (3). *Assumiamo che nel seguito tutte* le *affermazioni geometriche nello spazio delle q vadano intese in questo senso non euclideo.*

Per il calcolo uno dei cambiamenti più importanti è che si deve distinguere scrupolosamente tra componenti covarianti e controvarianti di un vettore o di un tensore. Ma questa complicazione non è più grave di quella che si ha già nel caso di un sistema di assi cartesiani obliqui.

I dq_k sono il prototipo di un vettore controvariante. I coefficienti dipendenti da q_k della forma $2\bar{T}$ hanno quindi carattere covariante, essi costituiscono il tensore fondamentale covariante. Se $2T$ è la forma controvariante corrispondente a $2\bar{T}$, è noto che allora le coordinate d'impulso costituiscono il vettore covariante corrispondente al vettore velocità $\dot{q}_k$; l'impulso è il vettore velocità in forma covariante. Il primo membro della (1') non è nient'altro che la forma fondamentale controvariante, nella quale si sono introdotte come variabili le $\partial W/\partial q_k$. Queste ultime costituiscono le componenti del vettore

$$\operatorname{grad} W$$

per sua natura covariante. (*Questo* significato ha quindi la ridefinizione dell'energia cinetica con gli impulsi invece che con le velocità, che in una forma controvariante possono intervenire solo componenti vettoriali covarianti, se deve risultare qualcosa di sensato, cioè invariante).

L'equazione (1') coincide quindi con la semplice affermazione

$$(\operatorname{grad} W)^2 = 2\,(E - V) \tag{1''}$$

ovvero

$$|\operatorname{grad} W| = \sqrt{2\,(E - V)}. \tag{1'''}$$

Questa prescrizione è facile da analizzare. Supponiamo che si sia trovata una funzione W [della forma (2)] che soddisfa questa prescrizione. Allora si può sempre rappresentare questa funzione per un t determinato in modo intuitivo, tracciando nello spazio delle q la famiglia di superfici W =cost. e apponendo su ciascuna di esse il corrispondente valore di W.

Ora da un lato, come subito dimostreremo, l'equazione (1"') dà una prescrizione esatta per costruire da una qualsiasi superficie di questa famiglia, *quando essa* e il *suo valore di W siano noti*, passo passo tutte le altre ed il loro valore di W. D'altro canto il solo dato necessario per questa costruzione, cioè la *singola* superficie ed il suo valore di W, si può *assegnare in modo del tutto arbitrario* e poi secondo la regola costruttiva si può integrare in *due* modi in una funzione W che soddisfi la prescrizione. In tutto ciò consideriamo provvisoriamente il tempo come costante. - La prescrizione costruttiva *esaurisce* quindi il contenuto dell'equazione differenziale, si può ottenere *ciascuna* delle sue soluzioni da una superficie opportunamente scelta più il valore di W.

E adesso la prescrizione costruttiva. Sia quindi assegnato, come in Fig. 1, ad una superficie arbitraria il valore W_0. Per trovare la superficie che corrisponde al valore $W_0 + dW_0$, si contrassegni a piacere un lato della superficie data come positivo, si costruisca in ogni punto della superficie la perpendicolare e si prenda su di essa (tenendo conto del segno di dW_0), il *tratto*

$$ds = \frac{dW_0}{\sqrt{2\,(E - V)}}. \tag{4}$$

I punti d'arrivo delle perpendicolari riempiono la superficie $W_0 + dW_0$. Procedendo così passo passo si può costruire la famiglia di superfici su entrambi i lati.

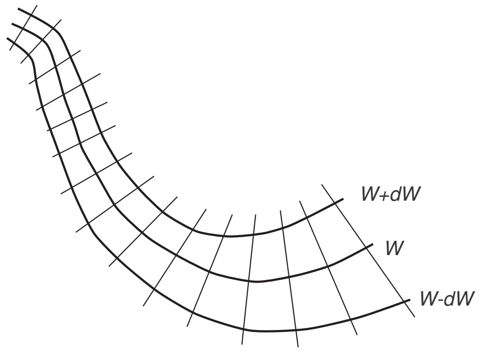


Fig. 1

La costruzione è *duplice*, infatti nel compiere il primo passo si sarebbe potuto indicare anche l'*altro* lato come quello positivo. Per i passi successivi questa ambiguità non c'è più, cioè in un qualsiasi stadio successivo del processo non si può cambiare ad arbitrio il segno del lato della superficie alla quale si è giusto pervenuti, infatti ciò comporterebbe in generale una discontinuità delle derivate prime di W. Per il resto le due famiglie di superfici sono identiche, soltanto i valori di W apposti su di esse procedono in versi opposti.

Se consideriamo ora la semplicissima dipendenza dal *tempo*, l'equazione (2) mostra che anche in un qualsiasi istante successivo (o precedente) $t+t'$ l'andamento di W individua la *stessa* famiglia di superfici, solo sulle singole superfici sono apposti degli altri valori di W, e precisamente ad ogni valore di W apposto per il tempo t va sottratto Et'. Per così dire i valori di W viaggiano con una certa legge semplice da superficie a superficie, e precisamente per E positiva nel verso dei valori di W crescenti. Invece di questo ci si può raffigurare che siano le *superfici* a viaggiare, ciascuna assumendo la forma e la posizione di quella subito successiva, e nel far ciò *portando con* sé il suo valore di W. La legge di propagazione delle superfici è data dal fatto che per esempio la superficie W_0 al tempo $t+dt$ deve aver raggiunto la posizione che al tempo t occupava la superficie $W_0 + Edt$. Secondo la (4) ciò risulterà se si fa avanzare ogni punto della superficie W_0 di

$$ds = \frac{Edt}{\sqrt{2(E-V)}} \tag{5}$$

nella direzione della perpendicolare con verso positivo. Cioè le superfici si spostano con una *velocità normale*

$$u = \frac{ds}{dt} = \frac{E}{\sqrt{2\,(E-V)}}, \tag{6}$$

che, assegnata la costante E, è una pura funzione della posizione.

Ora si riconosce che il nostro sistema di superfici W =cost. si può intendere come il sistema di superfici d'onda di un moto ondoso progressivo ma stazionario nello spazio delle q, per il quale il valore della velocità di fase in ogni punto dello spazio è dato dalla (6). Allora la costruzione delle perpendicolari si può evidentemente sostituire con la costruzione delle onde elementari di Huygens [con il raggio (5)] e del loro inviluppo. L'"indice di rifrazione" è proporzionale al reciproco della (6), dipende dalla posizione ma non dalla direzione. Lo spazio delle q è quindi otticamente disomogeneo ma isotropo. Le onde elementari sono sfere, ma - come qui si è già detto espressamente - sfere nel senso dell'elemento di linea (3).

La funzione d'azione W gioca per il nostro sistema di onde il ruolo della *fase*. L'equazione differenziale alle derivate parziali di Hamilton è l'espressione del principio di Huygens. Se si formula il principio di Fermat

$$0 = \delta \int_{P_1}^{P_2} \frac{ds}{u} = \delta \int_{P_1}^{P_2} \frac{ds\sqrt{2(E-V)}}{E} = \delta \int_{t_1}^{t_2} \frac{2T}{E} dt = \frac{1}{E} \delta \int_{t_1}^{t_2} 2T dt, \tag{7}$$

si è portati direttamente al principio di Hamilton nella forma di Maupertuis (nel quale l'integrale sul tempo va inteso come al solito cum grano salis, cioè $T+V = E =$ cost. anche durante la variazione). I "raggi", cioè le traiettorie ortogonali alle superfici d'onda sono quindi *cammini* del sistema per il valore E dell'energia, in accordo con il ben noto sistema d'equazioni

$$p_k = \frac{\partial W}{\partial q_k}, \tag{8}$$

che afferma che da ogni funzione d'azione particolare può essere derivata una famiglia di cammini del sistema, come una corrente dal suo potenziale delle velocità[6]. (L'impulso p_k costituisce semplicemente il vettore velocità covariante, e le equazioni (8) affermano che esso è uguale al gradiente della funzione d'azione).

Sebbene nelle considerazioni presenti si parli di superfici d'onda, di velocità di propagazione, di principio di Huygens, esse non vanno tuttavia veramente considerate come relative a un'analogia della meccanica con l'ottica *ondulatoria*, bensì con l'ottica *geometrica*. Infatti il concetto di *raggio*, al quale per la meccanica fondamentalmente si perviene, appartiene all'ottica *geometrica*, è il *suo* solo concetto preciso. Anche il principio di Fermat si può intendere in termini di pura ottica geometrica con il solo uso del concetto di indice di rifrazione. E il sistema di superfici W, inteso come superfici d'onda, è per il momento in una relazione alquanto lasca con il moto meccanico, poiché il punto immagine del sistema meccanico non procede affatto lungo il raggio con la velocità dell'onda u, ma all'opposto la sua velocità (per E costante) è proporzionale ad$1/u$. Essa risulta direttamente dalla (3) come

$$v = \frac{ds}{dt} = \sqrt{2T} = \sqrt{2(E-V)}. \tag{9}$$

Questa discordanza è lampante. In primo luogo secondo la (8): la velocità del sistema è *grande* quando grad W è grande, cioè quando le superfici W si addensano fittamente, ossia quando u è piccolo. In secondo luogo, dal significato di W come integrale sul tempo della funzione di Lagrange: questa *cambia* naturalmente durante il moto [di $(T-V)dt$ nel tempo dt] , quindi il punto immagine non *può* restare continuamente in contatto con la stessa superficie W.

E inoltre concetti anche importanti della teoria delle onde, come ampiezza, lunghezza d'onda, frequenza - o parlando più in generale la *forma* d'onda - non

[6]Vedasi in particolare A. Einstein, Verh. d. D. Physik. Ges. **19**, 77, 82 , 1917. L'interpretazione delle condizioni quantiche ivi data è di gran lunga preferibile a tutte le interpretazioni precedenti. Anche de Broglie si è rifatto ad essa.

compaiono nell'analogia, manca per essi un corrispettivo meccanico; neppure della funzione d'onda stessa si può parlare: W ha per le onde solo il significato di fase - invero alquanto nebuloso a causa dell'indeterminatezza della *forma* d'onda - .

Se si vede nell'intero parallelo niente più che un felice modo per visualizzare, questo difetto non disturba affatto, e si avvertirà il tentativo di rimuoverlo come un gioco ozioso: l'analogia *sussiste* con l'ottica *geometrica* o, se proprio si vuole, con un'ottica ondulatoria assai primitiva, e non con l'ottica ondulatoria nella sua costruzione completa. Che l'ottica geometrica costituisca per la *luce* solo un'approssimazione grossolana non cambia nulla. Per l'ulteriore costruzione dell'ottica dello spazio q nel senso della teoria delle onde si dovrebbe, per *conservare* l'analogia, badare proprio a che non ci si allontani sensibilmente dal caso limite dell'ottica geometrica, cioè che si scelga sufficientemente piccola la *lunghezza d' onda*[7], piccola rispetto a tutte le dimensioni dei cammini. Ma allora l'ingrediente non insegna niente di nuovo, esso decora l'immagine con roba superflua.

Così si potrebbe intendere a prima vista. Ma già il primo tentativo di una trasformazione nel senso della teoria delle onde porta a cose così sorprendenti, che sorge un sospetto del tutto diverso: *oggi sappiamo che* la *nostra meccanica classica fallisce per dimensioni dei cammini assai piccole* e *per curvature dei cammini assai forti.* Forse questo fallimento è completamente analogo al fallimento dell'ottica geometrica, cioè dell'"ottica per lunghezze d'onda infinitamente piccole", che avviene notoriamente quando gli "schermi" o le "aperture" non sono più grandi rispetto alla lunghezza d'onda reale, finita. Forse la nostra meccanica classica è *completamente* analoga all'ottica geometrica e come tale è falsa, non è in accordo con la realtà, fallisce quando i raggi di curvatura e le dimensioni del cammino non sono più grandi rispetto ad una certa lunghezza d'onda, che nello spazio delle q assume significato reale. Allora vale la pena di cercare una "meccanica ondulatoria"[8] - e la via più naturale per questo è certo lo sviluppo nel senso della teoria delle onde dell'idea di Hamilton.

§2. **Meccanica "geometrica" e "ondulatoria".**

Facciamo subito l'ipotesi che una costruzione più adeguata dell'analogia consista nell'assumere il sistema di onde prima considerato come onde *sinusoidali.* Essa è la più facile e la più naturale, tuttavia si deve sottolineare l'*arbitrarietà* che in essa è contenuta, di fronte al *significato fondamentale* di questa ipotesi. La funzione d'onda deve quindi contenere il tempo solo nella forma di un fattore $\sin(\dots)$, l'argomento del quale è una funzione lineare di W. Poiché W è un'azione, ma la fase di un seno è un numero puro, il coefficiente di W deve avere la dimensione del reciproco di un'azione. Assumiamo che esso sia universale, cioè indipendente non solo da E, ma anche dalla natura del sistema meccanico. Lo possiamo ben indicare subito con $2\pi/h$. Il fattore temporale si scrive quindi

$$\sin(\frac{2\pi W}{h} + \text{cost.}) = \sin(-\frac{2\pi Et}{h} + \frac{2\pi S(q_k)}{h} + \text{cost.}). \tag{10}$$

[7]Vedi per il caso ottico A. Sommerfeld e Iris Runge, Ann. d. Phys. **35**, 290, 1911. Ivi si mostra (sviluppando un'osservazione verbale di P. Debye), come l'equazione del *prim'*ordine e di *secondo* grado per la *fase* ("equazione di Hamilton") si possa derivare esattamente dall'equazione del *second'*ordine e di *primo* grado per la *funzione d'onda* "equazione d' onda") nel caso limite di lunghezza d'onda che si annulla.

[8]Vedi anche A. Einstein, Berl. Ber. p. 9 segg., 1925.

Allora la frequenza delle onde risulta essere

$$\nu = E/h. \tag{11}$$

Quindi senza palese artificio la frequenza delle onde nello spazio delle q risulta proporzionale all'energia del sistema[9]. Certamente ciò ha senso solo quando E è fissato in modo assoluto, non, come nella meccanica classica, solo a meno di una costante additiva. *Indipendente* da questa costante additiva è la *lunghezza d'onda*, secondo la (6) e la (11)

$$\lambda = \frac{u}{\nu} = \frac{h}{\sqrt{2(E-V)}}, \tag{12}$$

infatti il radicando è il doppio dell'energia cinetica. Se facciamo un confronto grossolano e del tutto provvisorio con le dimensioni dell'orbita di un elettrone dell'idrogeno, come le dà la meccanica classica, si deve osservare che in conseguenza della (3) un "segmento" nel nostro spazio delle q non ha la dimensione di una lunghezza, ma di una lunghezza $\times\sqrt{massa}$. Le stesse dimensioni ha λ. Abbiamo quindi (come si vede facilmente) da dividere λ per la dimensione dell'orbita, diciamo a (cm), moltiplicata per la radice quadrata della massa m dell'elettrone. Il rapporto è dell'ordine di grandezza

$$\frac{h}{mva},$$

dove v è per il momento la velocità dell'elettrone (cm/sec). Il denominatore mva ha l'ordine di grandezza del momento angolare meccanico. Che questo, per orbite di Keplero di dimensioni atomiche, raggiunga almeno l'ordine di grandezza 10^{-27}, discende dai noti valori della carica e della massa dell'elettrone prima di qualsiasi teoria dei quanti. Otteniamo quindi in effetti per i *confini del dominio di validità approssimativo della meccanica classica* il giusto ordine di grandezza, se identifichiamo la nostra costante h con il quanto d'azione di Planck. - Questo solo per un orientamento provvisorio.

Se si esprime nella (6) E mediante ν secondo la (11), si ottiene

$$u = \frac{h\nu}{\sqrt{2(h\nu - V)}}. \tag{6'}$$

La dipendenza della velocità dell'onda dall'energia del sistema diviene quindi una dipendenza d'un certo tipo dalla *frequenza*, cioè una *legge di dispersione* per le onde. Questa legge di dispersione offre grande interesse. Abbiamo rammentato nel §1 che la superficie d'onda che si propaga ha solo un rapporto lasco con il moto del punto del sistema, poiché le loro velocità non sono e non possono essere uguali. Ma secondo le (9), (11) e (6') la velocità v del sistema ha anche per le onde un significato assai concreto. Si verifica immediatamente che

[9]Nella prima comunicazione questa relazione era risultata nell'ambito di una pura speculazione solo come un'equazione approssimata.

$$v = \frac{d\nu}{d\left(\frac{\nu}{u}\right)}, \tag{13}$$

cioè che la velocità del punto del sistema è quella di un *gruppo* d'*onde*, che coprono un piccolo intervallo di frequenze (velocità del segnale). Si ritrova qui una legge che de Broglie, facendo riferimento in modo essenziale alla teoria della relatività, aveva derivato per le "onde di fase" dell'elettrone, nelle belle ricerche[10] alle quali devo lo spunto per questo lavoro. Si vede che si tratta di un teorema di grande generalità, che non deriva dalla teoria della relatività, ma vale anche per ogni sistema conservativo della meccanica consueta.

Questa circostanza si può ora utilizzare per stabilire un legame assai più profondo di prima tra propagazione ondosa e moto del punto immagine. Si può provare a costruire un gruppo d'onde che in tutte le direzioni abbia dimensioni relativamente piccole. Un tale gruppo d'onde seguirà allora prevedibilmente le stesse leggi del moto del singolo punto immagine del sistema meccanico. Esso potrà fornire per così dire un *surrogato* del punto immagine, purché lo si possa considerare approssimativamente puntiforme, ossia purché si possa trascurare la sua estensione rispetto alle dimensioni del cammino del sistema. Ciò accadrà altresì solo quando le dimensioni del cammino, in particolare i raggi di curvatura del cammino, saranno assai grandi rispetto alla lunghezza d'onda. Allora per l'analogia con l'ottica consueta è a priori evidente che le dimensioni del gruppo d'onde non solo non si possono comprimere al di sotto dell'ordine di grandezza della lunghezza d'onda, ma che anzi il gruppo si deve estendere in tutte le direzioni per un gran numero di lunghezze d'onda, se esso è *approssimativamente monocromatico*. Ma questo lo dobbiamo richiedere perché il gruppo d'onda deve propagarsi come un tutto con una certa velocità di gruppo e corrispondere ad un sistema meccanico d'*energia determinata* (vedi equazione 11).

Per quanto vedo, tali gruppi d'onde si possono costruire, e proprio con lo stesso criterio costruttivo col quale Debye[11] e von Laue[12] hanno risolto nell'ottica consueta il problema di dare la rappresentazione analitica esatta d'un cono di raggi o d'un fascio di raggi. Risulta inoltre una relazione assai interessante con una parte della teoria di Jacobi-Hamilton ancora non discussa nel §1, cioè la ben nota derivazione delle equazioni di moto in forma compatta per derivazione di un integrale completo dell'equazione differenziale alle derivate parziali di Hamilton rispetto alle costanti d'integrazione. Come si vede subito, il suddetto sistema di equazioni di Jacobi coincide con l'affermazione: il punto immagine del sistema meccanico coincide costantemente con *quel* punto nel quale i treni d'onda appartenenti ad un certo continuo si incontrano *con ugual fase*.

Nell'ottica la rappresentazione esatta nella teoria delle onde di un "fascio di raggi" con sezione finita "nettamente" delimitata che viaggia da un fuoco ad un altro si ottiene secondo Debye nel modo seguente: si sovrappongano onde *piane*, ciascuna delle quali per conto suo riempirebbe l'intero spazio, e precisamente si sovrapponga un *continuo* di siffatti treni d'onda, facendo variare la normale d'onda entro un assegnato angolo solido. Le onde si cancellano allora quasi completamente per

[10] L. de Broglie, Annales de Physique (10) **8**, p. 22, 1925. (Thèses, Paris 1924.)
[11] P. Debye, Ann. d. Phys. **30**, 755, 1909.
[12] M. v. Laue, ibidem **44**, 1197 (§2), 1914.

interferenza all'esterno d'un certo cono doppio; esse rappresentano in modo esatto secondo la teoria delle onde il fascio delimitato di raggi che si cercava, con tutti i fenomeni di diffrazione necessariamente imposti dalla delimitazione. - Allo stesso modo di uno *finito*, si può così rappresentare anche un cono di raggi infinitesimo, se si lascia variare la normale d'onda del gruppo solo all'interno di un angolo solido infinitesimo. Questo ha utilizzato v. Laue nella sua famosa dissertazione sui gradi di libertà dei fasci di raggi[13]. Invece di lavorare, come finora tacitamente assunto, con onde esattamente monocromatiche, si può infine lasciar variare anche la *frequenza* entro un intervallo infinitesimo, e con opportuna distribuzione delle ampiezze e delle fasi si può restringere l'eccitazione ad una regione che anche nella direzione longitudinale sia relativamente piccola. S'ottiene così la rappresentazione analitica di un "pacchetto d'energia" di dimensioni relativamente piccole che si propaga con la velocità della luce o, se è presente dispersione, con la velocità di gruppo. Inoltre la *posizione* via via occupata dal pacchetto d'energia - quando non si venga alla sua struttura dettagliata - è data in modo assai plausibile come quel punto dello spazio dove *tutte* le onde piane sovrapposte si incontrano con fase *esattamente* coincidente.

Trasporteremo ora questa trattazione alle onde nello spazio delle q. Scegliamo ad un determinato tempo t un certo punto P dello spazio delle q, dove dovrà passare il pacchetto d'onde al tempo t in una direzione assegnata R. Sia inoltre prescritta la frequenza media ν ovvero il valor medio di E per il pacchetto d'onde. Queste assegnazioni corrispondono esattamente, per il sistema meccanico, a prescrivere che esso debba partire ad un dato tempo t da una data configurazione con date componenti della velocità (energia più direzione uguale componenti della velocità).

Per trasferire ora la costruzione ottica abbiamo bisogno in primo luogo di *una* famiglia di superfici d'onda della frequenza richiesta, cioè di *una* soluzione delle equazioni differenziali alle derivate parziali di Hamilton (1') per il valore assegnato di E, che chiamiamo W, la quale abbia la proprietà seguente: la superficie che al tempo t passa per il punto P, diciamo

$$W = W_0, \tag{14}$$

dovrà avere nel punto P la sua perpendicolare nella direzione prescritta R. Ma ciò non è tuttavia sufficiente. Invece dobbiamo ora poter variare infinitamente poco la famiglia di onde W con molteplicità n ($n =$ numero dei gradi di libertà), in modo che la normale d'onda nel punto P riempia un angolo solido ad $n-1$ dimensioni infinitamente piccolo, e la frequenza E/h un intervallo monodimensionale infinitamente piccolo; nel far ciò si deve aver cura che tutti i membri di questo continuo n-dimensionale infinitamente piccolo di famiglie d'onde si incontrino al tempo t nel punto P con fasi esattamente coincidenti. Si dovrà dimostrare poi *dove* si trovi in un qualsiasi altro istante quel punto per il quale ha luogo questa coincidenza di tutte le fasi.

Per far ciò basterà che disponiamo di una soluzione W delle equazioni differenziali alle derivate parziali di Hamilton, che oltre che dalla costante E, che d'ora in poi indicheremo con α_1, dipenda da altre $n-1$ costanti $\alpha_2, \alpha_3 \dots \alpha_n$ in modo tale che essa non possa essere scritta come una funzione di meno di n combinazioni di queste n costanti. Allora infatti possiamo in primo luogo impartire ad α_1 il valore prescritto per E, e possiamo in secondo luogo determinare $\alpha_2, \alpha_3 \dots \alpha_n$ in modo che

[13] luogo citato.

la superficie della famiglia che passa per il punto P abbia nel punto P la direzione assegnata R. Intendiamo d'ora in poi con $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_n$ *questi* valori, e la (14) sia la superficie di *questa* famiglia che al tempo t passi per il punto P. Consideriamo allora il *continuo di famiglie* che appartiene ai valori α_k di una regione infinitesima degli α_k. Un membro di questo continuo, cioè una *famiglia*, sarà dato da

$$W + \frac{\partial W}{\partial \alpha_1} d\alpha_1 + \frac{\partial W}{\partial \alpha_2} d\alpha_2 + \cdots + \frac{\partial W}{\partial \alpha_n} d\alpha_n = \text{ cost.} \tag{15}$$

per una sequenza di valori $d\alpha_1, d\alpha_2 \ldots d\alpha_n$ *fissi*, e al variare della costante. Quel membro di *questa famiglia*, cioè quindi quella superficie singola, che al tempo t passa per il punto P, sarà determinato dalla seguente scelta della costante:

$$W + \frac{\partial W}{\partial \alpha_1} d\alpha_1 + \cdots + \frac{\partial W}{\partial \alpha_n} d\alpha_n = W_0 + \left(\frac{\partial W}{\partial \alpha_1}\right)_0 d\alpha_1 + \cdots + \left(\frac{\partial W}{\partial \alpha_n}\right)_0 d\alpha_n, \tag{15'}$$

dove $(\partial W/\partial \alpha_1)_0$ eccetera sono quelle *costanti* che si ottengono quando si introducono nelle derivate corrispondenti le coordinate del punto P e il valore t del tempo (del resto quest'ultimo interviene realmente soltanto in $\partial W/\partial \alpha_1$).

Le superfici (15') per tutte le possibili sequenze di valori $d\alpha_1, d\alpha_2 \ldots d\alpha_n$ costituiscono per conto loro *una famiglia*. Tutte queste al tempo t passano dal punto P, le loro normali d'onda riempiono con continuità un piccolo angolo solido (con $n-1$ dimensioni); inoltre il loro parametro E varia in un intervallo piccolo. La famiglia di superfici (15') è così fatta che ognuna delle famiglie di superfici (15) ha nella (15') *un* rappresentante, cioè quel membro che al tempo t passa per il punto P.

Assumeremo ora che gli angoli di fase delle funzioni d'onda che appartengono alle famiglie (15) coincidano proprio per questi rappresentanti inviati alla (15'). Essi quindi coincidono al tempo t nel punto P.

Ci chiediamo adesso: anche ad *un tempo qualsiasi* esiste un punto nel quale tutte le superfici della famiglia (15') si taglino e *quindi nel quale* tutte le funzioni d'onda che appartengono alle famiglie (15), coincidano in fase? La risposta è: il punto di coincidenza delle fasi *esiste*, ma *non* è il punto comune d'intersezione delle superfici della famiglia (15'), infatti ad un tempo arbitrario un punto siffatto *non esiste più*. Invece il punto di coincidenza delle fasi si realizza in modo *tale*, che le famiglie (15) *cambiano continuamente* il rappresentante che mandano nella (15').

Lo si riconosce così. Per il punto d'intersezione comune a tutti i membri della (15') ad un certo tempo dev'essere simultaneamente

$$W = W_0, \frac{\partial W}{\partial \alpha_1} = \left(\frac{\partial W}{\partial \alpha_1}\right)_0, \ \frac{\partial W}{\partial \alpha_2} = \left(\frac{\partial W}{\partial \alpha_2}\right)_0, \ldots \ \frac{\partial W}{\partial \alpha_n} = \left(\frac{\partial W}{\partial \alpha_n}\right)_0, \tag{16}$$

mentre i $d\alpha_1$ sono arbitrari all'interno d'un piccolo intervallo. In queste $n+1$ equazioni vi sono a secondo membro costanti, a primo membro funzioni delle $n+1$ quantità $q_1, q_2 \ldots q_n, t$. Le equazioni sono soddisfatte per il sistema di valori iniziali, cioè per le coordinate del punto P e per l'istante iniziale t. Per un altro valore arbitrario di t non ammettono *nessuna* soluzione in $q_1 \ldots q_n$, ma *sovradeterminano* il sistema di queste n quantità.

Si può anche procedere nel modo seguente. Si lascia provvisoriamente da parte la prima equazione, $W = W_0$, e si determinano le q_k in funzione del tempo e delle costanti con le n equazioni restanti. Chiamiamo questo punto Q. Per esso la *prima* equazione naturalmente *non* sarà soddisfatta, ma il suo primo membro sarà diverso dal secondo di un certo ammontare. Se si ritorna alla genesi del sistema di equazioni (16) dalle (15'), quanto ora detto significa che Q non è un punto comune per la famiglia di superfici (15'), ma piuttosto per una famiglia di superfici che si ottiene dalla ($15'$) se si varia il secondo membro della (15') di un ammontare costante per tutte le superfici della famiglia. Chiamiamo ($15''$) la famiglia così ottenuta. Per essa quindi Q è punto comune. Essa si ottiene, come prima anticipato, dalla famiglia (15') quando ciascuna delle famiglie (15) cambia il suo rappresentante inviato nella (15'). Questo cambiamento avviene con la variazione della costante nella (15) *dello stesso ammontare* per tutti i rappresentanti. Ma in questo modo l'*angolo di fase* sarà cambiato dello stesso ammontare per tutti i rappresentanti. Come i vecchi, così anche i nuovi rappresentanti, cioè i membri della famiglia che chiamiamo (15"), e che si intersecano nel punto Q, coincidono nell'angolo di fase. Ciò significa quindi:

Il punto Q, determinato in funzione del tempo dalle n equazioni

$$\frac{\partial W}{\partial \alpha_1} = \left(\frac{\partial W}{\partial \alpha_1}\right)_0, \ldots \frac{\partial W}{\partial \alpha_n} = \left(\frac{\partial W}{\partial \alpha_n}\right)_0 \tag{17}$$

è costantemente un punto di coincidenza delle fasi per l'intera famiglia di famiglie di onde (15).

Delle n superfici, per le quali Q risulta dalle (17) punto d'intersezione, solo la prima è mobile, le altre stanno ferme [solo la prima delle equazioni (17) contiene il tempo]. Le $n-1$ superfici ferme determinano la *traiettoria* del punto Q come loro linea d'intersezione. Si può dimostrare facilmente che questa linea d'intersezione è una traiettoria ortogonale alla famiglia W =cost.. Infatti per ipotesi W soddisfa identicamente in $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_n$ l'equazione differenziale alle derivate parziali di Hamilton (1'). Se ora si deriva tale equazione rispetto ad α_k $(k = 2, 3, \ldots n)$ si ottiene la proprietà, che la normale alla superficie d'una superficie $\partial W/\partial \alpha_k =$ cost. è in ogni punto di questa superficie *ortogonale* alla normale alla superficie della superficie $W =$ cost. che passa per lo stesso punto, cioè che ognuna delle due superfici *contiene* la normale dell'altra. Se la linea d'intersezione delle $n-1$ superfici (17) ferme non è ramificata, come certo accade in generale, ogni elemento della linea d'intersezione, essendo il *solo* elemento *comune* delle $n-1$ superfici, coincide con la normale delle superfici W che passano dallo stesso punto, cioè la linea di intersezione è traiettoria ortogonale delle superfici W, c. v. d..

In modo assai più breve, per così dire stenograficamente, le considerazioni alquanto prolisse che ci hanno portato alle equazioni (17) si possono anche riassumere nel modo seguente: W significa, a meno di una costante universale $(1/h)$, l'angolo di fase della funzione d'onda. Se si ha non solo *uno*, ma una varietà continua di sistemi d'onda e se gli stessi sono ordinati in modo continuo da un qualche parametro continuo α_i, le equazioni $\partial W/\partial \alpha_i =$ cost. esprimono il fatto che tutti gli individui (sistemi di onde) infinitamente vicini di questa varietà hanno fase coincidente. Queste equazioni determinano quindi il luogo geometrico dei punti di coincidenza delle fasi. Se le equazioni sono sufficienti, questo luogo si riduce ad un punto, e allora le equazioni determinano il *punto* di coincidenza delle fasi in funzione del tempo.

Poiché il sistema d'equazioni (17) coincide col noto secondo sistema d'equazioni di Jacobi, abbiamo quindi dimostrato che:

Il punto di coincidenza della fase per certe varietà infinitesime ad n parametri di sistemi di onde si muove con la stessa legge del punto immagine del sistema meccanico.

Ritengo che sia un compito assai difficile dimostrare esattamente che la sovrapposizione di questi sistemi di onde dia davvero un'eccitazione sensibile solo in un intorno relativamente piccolo del punto di coincidenza delle fasi, mentre essa si cancella ovunque per interferenza fino ad essere impercettibile, oppure che quanto detto accade almeno per un'opportuna scelta delle ampiezze, ed eventualmente per una scelta particolare della *forma* delle superfici d'onda. Farò l'ipotesi fisica, che assocerò a quanto è da provare, senza addentrarmi oltre nel problema. La fatica sarà compensata solo quando l'ipotesi risulterà vera e quando la sua applicazione richiederà quell'analisi.

Invece si può star sicuri che la regione entro la quale si può confinare l'eccitazione misura ancora almeno un gran numero di lunghezze d'onda in ogni direzione. Ciò è subito evidente; infatti finché ci si sposta dal punto di coincidenza delle fasi solo di *poche* lunghezze d'onda, la coincidenza delle fasi viene a malapena toccata, l'interferenza è ancora quasi altrettanto favorevole come in quel punto stesso. In secondo luogo basta il riferimento al caso euclideo tridimensionale dell'ottica consueta per esser certi che si ha questo comportamento, per lo meno in generale.

Ciò che credo con grande determinazione è quanto segue:

Gli eventi meccanici reali vengono in modo opportuno compresi ovvero rappresentati mediante i *processi ondulatori* nello spazio delle q e non mediante il moto del *punto immagine* in questo spazio. Lo studio del moto del punto immagine, che costituisce l'oggetto della meccanica classica, è solo un procedimento approssimato e come tale ha esattamente la stessa giustificazione che ha l'ottica geometrica o dei raggi riguardo ai processi ottici reali. Un processo meccanico macroscopico verrà rappresentato come un segnale ondulatorio del tipo sopra descritto, che con approssimazione sufficiente si possa considerare puntiforme se confrontato con la struttura geometrica della traiettoria. Abbiamo visto che allora per un segnale o gruppo d'onde siffatto valgono davvero proprio le stesse leggi del moto che la meccanica classica enuncia per il punto immagine. Questo approccio perde tuttavia ogni senso quando la struttura del cammino non è più assai grande rispetto alla lunghezza d'onda, o addirittura è confrontabile con essa. Allora *deve* intervenire la trattazione rigorosa della teoria delle onde, cioè per farsi un'immagine della varietà dei processi possibili si deve partire dall'*equazione* d'*onda* e non dalle equazioni fondamentali della meccanica. Queste ultime sono altrettanto inutilizzabili per la spiegazione della struttura microscopica degli eventi meccanici quanto lo è l'ottica geometrica per la spiegazione dei *fenomeni di diffrazione*.

Laddove una certa interpretazione di questa struttura microscopica in connessione con la meccanica classica, però con ipotesi aggiuntive assai artificiose, è stata sostanzialmente raggiunta, ed ha vantato risultati pratici del più alto valore, mi pare assai significativo che questa teoria - intendo la teoria dei quanti nella forma preferita da Sommerfeld, Schwarzschild, Epstein ed altri - sia nel rapporto più stretto proprio con l'equazione differenziale alle derivate parziali di Hamilton e con la teoria delle soluzioni di Hamilton-Jacobi, cioè con quella forma della meccanica classica che già contiene l'indicazione più chiara riguardo al vero carattere ondulatorio degli eventi meccanici. L'equazione differenziale alle derivate parziali di Hamilton esprime proprio il principio di Huygens (nella sua vecchia forma intuitiva, non in quella rigorosa di Kirchoff). E come questo, integrato con alcune prescrizioni del tutto incomprensibili all'ottico geometrico (costruzione delle zone di Fresnel) già rende conto in misura rilevante dei fenomeni di diffrazione, così dalla teoria della funzione d'azione potrebbe venir luce sui processi nell'atomo. Altrimenti ci si dovrebbe invischiare in contraddizioni insolubili, se - come però era assai naturale - si cercasse di conservare direttamente il concetto di *traiettoria del sistema* anche per questi processi atomici; allo stesso modo come ci si perde in cose incomprensibili, se nell'ambito d'un fenomeno di diffrazione si prova a seguire l'andamento dei *raggi di luce.*

Si pensi un po' quanto segue. Non darò con questo ancora nessuna immagine appropriata dell'evento reale, che non si deve ottenere affatto in questo modo, ma si deve ottenere solo dallo studio dell'equazione d'onda; illustrerò solo la situazione in modo puramente qualitativo. Si pensi quindi ad un gruppo d'onde con la proprietà prima descritta, posto in qualche modo su un' "orbita" piccola, all'incirca chiusa, le cui dimensioni siano solo dell'ordine di grandezza della lunghezza d'onda, quindi *piccole* rispetto alle dimensioni del gruppo d'onda stesso. È chiaro che allora la "traiettoria del sistema" nel senso della meccanica classica, ossia il cammino del punto della coincidenza di fase esatta, perderà completamente il suo ruolo privilegiato, poiché davanti, dietro e accanto a questo punto si estende un intero continuo di punti nei quali sussiste ancora coincidenza di fase quasi altrettanto completa, e che descrivono "orbite" del tutto diverse. Detto altrimenti: il gruppo d'onde occupa l'intera regione dell'orbita non come un tutto unico, ma arriva in esso da fuori da tutte le direzioni, anche distanti.

In *questo* senso interpreto, seguendo de Broglie, le "onde di fase" che accompagnano l'orbita dell'elettrone, nel senso cioè che almeno nell'ambito atomico la traiettoria dell'elettrone non assume affatto un significato privilegiato, ed ancor meno la posizione dell'elettrone sulla sua traiettoria. E in questo senso interpreto il convincimento che oggi viene sempre più sulla breccia: *in primo luogo*, che alla *fase* del moto dell'elettrone nell'atomo vada attribuito significato reale; *in secondo luogo*, che non si possa nemmeno affermare che l'elettrone si trovi ad un determinato istante su *una determinata* orbita quantica tra quelle selezionate dalle condizioni quantiche; *in terzo luogo*, che le leggi vere della meccanica quantistica non consistano in prescrizioni determinate per la *singola orbita*, ma che in queste leggi vere gli elementi dell'intera varietà di orbite di un sistema siano legati tra loro da equazioni, di modo che apparentemente sussista una certa interazione tra le diverse orbite[14].

Non è incomprensibile che un'analisi accurata dei risultati sperimentali debba condurre ad affermazioni di questo tipo, se i risultati sperimentali sono la conseguenza di una struttura siffatta degli eventi reali, come noi la rappresentiamo qui. Tutte queste affermazioni impongono sistematicamente d'abbandonare i concetti "posizione dell'elettrone" e "traiettoria dell'elettrone", e se si decide di non abbandonarli, essi restano pieni di contraddizioni. Queste contraddizioni s'avvertono così fortemente che ci si chiede se gli eventi nell'atomo si possano in generale incorporare nel modo di pensare spazio-temporale. Dal punto di vista filosofico una decisione definitiva in questo senso la riterrei una completa resa delle armi. Infatti non possiamo cambiare realmente le forme di pensiero, e ciò che all'interno di noi stessi non possiamo comprendere, non lo possiamo comprendere in generale. Esistono cose del genere - ma non credo che la struttura dell'atomo sia tra queste. - Dal

[14]Vedansi in particolare i lavori citati in seguito di Heisenberg, Born, Jordan, Dirac; inoltre N. Bohr, Die Naturwissenschaften, gennaio 1926.

nostro punto di vista non c'è ragione per un dubbio di questo tipo, sebbene o, per meglio dire, *poiché* il suo affiorare è assai comprensibile. Allo stesso modo anche un ottico geometrico che, nelle esperienze da lui condotte, costantemente fallisse nello spiegare i fenomeni di interferenza per mezzo del concetto di raggio, trovato valido nell'ottica macroscopica, potrebbe, dico, forse arrivare da ultimo all'idea che le *leggi della geometria* non siano applicabili ai fenomeni di interferenza, poiché egli sarebbe costantemente portato davanti al fatto che i raggi di luce, a lui noti come *rettilinei* e mutuamente *indipendenti*, ora addirittura in un mezzo omogeneo mostrano le più strane *curvature* e palesemente si *influenzano tra loro*. Ritengo quest'analogia *assai stretta*. Perfino delle *curvature* immotivate non manca l'analogo nell'atomo - si pensi alla "costrizione non meccanica" escogitata per interpretare l'effetto Zeeman anomalo.

In qual modo si dovrà procedere per la trasformazione in senso ondulatorio della meccanica nei casi in cui essa si rivela necessaria? Si deve partire, invece che dalla equazioni fondamentali della meccanica, da un'equazione d'onda per lo spazio delle q, e trattare la varietà dei processi possibili *secondo questa*. La funzione d'onda in questa comunicazione non si è ancora utilizzata esplicitamente, e soprattutto non la si è ancora enunciata. Il solo dato riguardante la sua enunciazione è la *velocità delle onde* data dalla (6) o dalla (6') in funzione del parametro dell'energia meccanica ovvero della frequenza, e da questo dato l'equazione d'onda evidentemente non è fissata in modo univoco. Non è in particolare garantito che essa debba essere proprio del secon'ordine, solo la ricerca della semplicità induce a tentare in primo luogo così. Si assumerà allora per la funzione d'onda ψ

$$\operatorname{div}\operatorname{grad}\psi - \frac{1}{u^2}\ddot{\psi} = 0, \tag{18}$$

valida per processi che dipendano dal tempo solo mediante un fattore $\exp[2\pi i\nu t]$. Ciò vuol dire quindi, tenendo conto delle (6), (6') e (11)

$$\operatorname{div}\operatorname{grad}\psi + \frac{8\pi^2}{h^2}(h\nu - V)\psi = 0, \tag{18'}$$

ovvero

$$\operatorname{div}\operatorname{grad}\psi + \frac{8\pi^2}{h^2}(E - V)\psi = 0. \tag{18''}$$

L'operatore differenziale va evidentemente inteso in relazione all'elemento di linea (3). - Ma anche sotto l'ipotesi del secondo ordine, questa non è l'unica equazione compatibile con la (6), sarebbe possibile la generalizzazione consistente nel sostituire $\operatorname{div}\operatorname{grad}\psi$ con

$$f(q_k)\operatorname{div}\left(\frac{1}{f\,(q_k)}\operatorname{grad}\psi\right), \tag{19}$$

dove f può essere una funzione qualsiasi di q_k, che però plausibilmente dovrebbe dipendere in qualche modo da E, $V(q_k)$ e dai coefficienti dell'elemento di linea (3) (si potrebbe per esempio pensare $f = u$). La nostra ipotesi è di nuovo dettata dalla ricerca della semplicità, tuttavia stavolta non ritengo esclusa un'eccezione[15].

[15]L'introduzione di $f(q_k)$ significa che non solo la "densità", ma anche l'"elasticità" varia con la posizione.

La sostituzione di un'equazione differenziale *alle derivate parziali* al posto delle equazioni fondamentali della dinamica per i problemi atomici appare ora a prima vista sommamente spiacevole a causa dell'enorme varietà di soluzioni che una tale equazione ammette. Già la dinamica classica aveva portato non ad una varietà ristretta, ma ad una assai ampia di soluzioni, cioè ad una famiglia continua, mentre secondo ogni esperienza solo un insieme discontinuo di queste soluzioni appare realizzato. Il compito della teoria dei quanti è, secondo l'idea dominante, proprio quello di selezionare mediante le "condizioni quantiche", dalla famiglia continua delle orbite possibili secondo la meccanica classica, la famiglia discreta di quelle che si trovano realmente. Sembra un cattivo inizio per un nuovo tentativo in questa direzione, che esso cominci con l'*accrescere* il numero delle soluzioni, il suo ordine di grandezza trascendente, invece che diminuirlo.

Invero anche il problema della dinamica classica si può ammantare nella veste di un'equazione *alle derivate parziali*, cioè proprio nell'equazione differenziale alle derivate parziali di Hamilton. Ma la molteplicità delle soluzioni del problema non corrisponde alla molteplicità delle soluzioni dell'equazione di Hamilton. Una qualsiasi soluzione "completa" dell'equazione di Hamilton risolve *interamente* il problema meccanico; qualunque *altra* soluzione completa produce le stesse traiettorie, solo con un'altro modo di riassumere la varietà dei cammini.

Per quanto ora concerne il timore espresso riguardo all'equazione (18) come fondamento della dinamica atomica, non sosterrò affatto che ulteriori condizioni aggiuntive non debbano intervenire in questa equazione. Esse però non hanno più presumibilmente un carattere così totalmente strano e incompreso come le precedenti "condizioni quantiche", ma sono di quel tipo, che ci aspetteremmo in fisica per un'equazione differenziale: condizioni iniziali o al contorno. Esse non risultano in alcun modo *analoghe* alle condizioni quantiche. Però si dimostra in tutti i casi della dinamica classica, che io finora ho studiato, che l'equazione (18) *porta in sé le condizioni quantiche.* In certi casi, e in particolare in quelli per i quali l'esperienza parla in questo senso, essa seleziona *spontaneamente* certe frequenze o livelli d'energia come i soli possibili per processi stazionari, senza nessun'altra ipotesi aggiuntiva riguardo alla funzione ψ oltre al requisito quasi ovvio per una quantità fisica: che essa sia in tutto lo spazio delle configurazioni ad un sol valore, finita e continua.

Il timore espresso si muta così nel suo opposto, tutte le volte che si ha a che fare con i livelli d'energia o, diciamo più cautamente, con le frequenze. (Infatti che cosa si intenda con "energia delle oscillazioni" è una questione a parte; non ci si deve dimenticare che solo nel caso del problema ad un corpo si ha a che fare con qualcosa che ammette direttamente il significato di oscillazioni nello spazio tridimensionale reale). La determinazione dei livelli quantici *non avviene più* in due tappe sostanzialmente distinte: 1. determinazione di tutte le orbite dinamicamente possibili. 2. *Rigetto* di una stragrande parte delle soluzioni ottenute sub 1. e selezione di alcune poche mediante condizioni particolari; invece i livelli quantici sono determinati *in un colpo solo come gli autovalori dell'equazione (18), la quale porta in sé le proprie condizioni al contorno naturali.*

In che misura in tal modo nei casi complicati si ottenga anche una semplificazione analitica, ancora si sottrae al mio giudizio. Ma tendo a supporlo. La maggior parte degli analisti ha la sensazione che nel procedimento a tappe descritto sopra sub 1. si dovrebbe richiedere che la soluzione di un problema complicato sia fatta in vista del risultato finale: energia funzione razionale per lo più assai semplice dei numeri quantici. È noto che già l'applicazione del metodo di Hamilton-Jacobi porta una grande semplificazione, in quanto il calcolo effettivo della soluzione meccanica viene aggirato. Basta valutare gli integrali che rappresentano gli impulsi, invece che con un estremo superiore variabile, solo per un cammino d'integrazione chiuso in campo complesso, cosa che richiede molta meno fatica. Se la soluzione completa delle equazioni differenziali alle derivate parziali di Hamilton dev'essere pur sempre nota, cioè rappresentata mediante quadrature, l'integrazione del problema meccanico dev'essere fatta in linea di principio per valori iniziali arbitrari.

- Nella ricerca degli autovalori di un'equazione differenziale si procede altresì nella prassi per la maggior parte dei casi cercando in primo luogo la soluzione senza tener conto di condizioni al contorno o di continuità, e dalla forma della soluzione si desumono quei valori dei parametri per i quali la soluzione soddisfa le condizioni suddette. Un esempio al riguardo lo dà la nostra prima comunicazione. Ma si riconosce anche in questo esempio - cosa tipica per i problemi agli autovalori - che la soluzione, che *in generale* era data solo in forma analitica assai difficile da ottenere [Eq. (12), loc. cit.], per gli autovalori corrispondenti alle "condizioni al contorno naturali" si semplifica moltissimo. Non sono abbastanza informato sul fatto se già oggi siano stati elaborati dei metodi *diretti* per il calcolo degli autovalori. È noto che ciò accade per la distribuzione degli autovalori con *numero* d'*ordine grande*. Ma questo caso limite qui *non* c'interessa proprio, esso corrisponde alla meccanica classica, macroscopica. Per la spettroscopia e per la fisica atomica in generale interessano proprio i *primi* 5 o 10 autovalori, già il *primo* da *solo* sarebbe un grande risultato, esso determina il *potenziale di ionizzazione*. Per l'idea acuta, per la quale ogni problema agli autovalori si può porre come problema di massimo-minimo senza un riferimento diretto all'equazione differenziale, mi sembra assai probabile che si debbano poter trovare metodi diretti per il calcolo almeno approssimato degli autovalori, qualora ve ne fosse la necessità *urgente*. Quanto meno dovrebbe esser possibile trovare in singoli casi se autovalori *noti* numericamente con tutta la precisione desiderabile *soddisfino* al problema oppure no. -

Non potrei a questo punto passare sotto silenzio il fatto che attualmente da parte di Heisenberg, Born, Jordan e di qualche altro eminente scienziato[16] è in corso un tentativo di rimuovere la difficoltà dei quanti, che ha già portato a risultati così notevoli, che sarebbe difficile dubitare che esso contenga comunque una parte di verità. Come *tendenza* il tentativo di Heisenberg è assai vicino al presente, del quale abbiamo già parlato prima. È diverso nel metodo così toto genere, che non sono riuscito finora a trovare l'anello di congiunzione. Coltivo la speranza del tutto determinata che questi due tentativi non si combattano tra loro, ma che, proprio a causa dell'enorme diversità del punto di partenza e del metodo, si completino a vicenda, di modo che l'uno aiuti a procedere dove l'altro fallisce. La forza del programma di Heisenberg sta nel fatto che si propone di dare le *intensità delle righe*, una questione che noi qui abbiamo finora tenuto lontano. La forza del tentativo presente - se mi è consentito esprimere un parere in proposito - sta nel punto di vista fisico di guida, che getta un ponte tra gli eventi meccanici macroscopici e quelli microscopici, e che rende comprensibile l'apparentemente diversa modalità di trattamento che essi richiedono. Per me personalmente c'è un particolare fa-

[16]W. Heisenberg, ZS. f. Phys. **33**, 879, 1925; M. Born e P. Jordan, ibidem **34**, 858, 1925; M. Born, W. Heisenberg e P. Jordan, ibidem **35**, 557, 1926; P. Dirac, Proc. Roy. Soc. London **109**, 642, 1925.

scino nell'idea delle frequenze emesse come "battimenti", menzionata alla fine della comunicazione precedente, riguardo alla quale credo anche che permetterà una comprensione intuitiva delle formule dell'intensità.

§3. **Esempi di applicazione.**

Aggiungeremo ora al problema di Keplero trattato nella prima comunicazione alcuni altri esempi. Sono i più semplici tra tutti, poiché provvisoriamente siamo limitati alla meccanica *classica* senza campo magnetico[17].

1. L'oscillatore di Planck. La questione della degenerazione.

Trattiamo in primo luogo l'oscillatore monodimensionale: La coordianta q sia l'elongazione moltiplicata per la radice quadrata della massa. Le due forme dell'energia cinetica sono allora

$$\overline{T} = \frac{1}{2}\dot{q}^2, \ T = \frac{1}{2}p^2. \tag{20}$$

L'energia potenziale è

$$V(q) = 2\pi^2\nu_0^2 q^2, \tag{21}$$

dove ν_0 è la frequenza propria nel senso della meccanica. Allora l'equazione (18) per questo caso si scrive:

$$\frac{d^2\psi}{dq^2} + \frac{8\pi^2}{h^2}\left(E - 2\pi^2\nu_0^2 q^2\right)\psi = 0. \tag{22}$$

Sia per brevità

$$a = \frac{8\pi^2 E}{h^2}, \ b = \frac{16\pi^4\nu_0^2}{h^2}, \tag{23}$$

quindi

$$\frac{d^2\psi}{dq^2} + \left(a - bq^2\right)\psi = 0. \tag{22'}$$

Introduciamo come variabile indipendente

$$x = qb^{1/4} \tag{24}$$

e otteniamo

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \left(\frac{a}{\sqrt{b}} - x^2\right)\psi = 0. \tag{22"}$$

[17]Nella meccanica relativistica e tenendo conto di un campo magnetico le predizioni dell'equazione di Hamilton sono più complicate. Nel caso d'un elettrone singolo essa afferma che il gradiente *tetradimensionale* della funzione d'azione, *diminuito* di un vettore dato (il tetrapotenziale), ha valore costante. La trasposizione di questa asserzione nella teoria delle onde comporta parecchie difficoltà.

Gli autovalori e le autofunzioni di questa equazione sono *noti*[18]. Con il segno usato qui gli autovalori sono

$$\frac{a}{\sqrt{b}} = 1,\ 3,\ 5 \dots (2n+1) \dots \tag{25}$$

Le autofunzioni sono le *funzioni ortogonali di Hermite*

$$\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) H_n(x). \tag{26}$$

$H_n(x)$ indica l'n-esimo polinomio di Hermite, che si può definire come

$$H_n(x) = (-1)^n \exp[x^2] \frac{d^n \exp[-x^2]}{dx^n} \tag{27}$$

ovvero esplicitamente

$$\begin{aligned} H_n(x) = (2x)^n &- \frac{n(n-1)}{1!}(2x)^{n-2} \\ &+ \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2!}(2x)^{n-4} - + \dots \end{aligned} \tag{27'}$$

I primi di questi polinomi si scrivono

$$\begin{aligned} &H_0(x) = 1,\ H_1(x) = 2x,\ H_2(x) = 4x^2 - 2, \\ &H_3(x) = 8x^3 - 12x,\ H_4(x) = 16x^4 - 48x^2 + 12 \dots\dots \end{aligned} \tag{27''}$$

Se consideriamo gli autovalori, risulta dalle (25) e (23)

$$E_n = \frac{2n+1}{2} h\nu_0;\ n = 0,\ 1,\ 2,\ 3, \dots \tag{25'}$$

Come livelli quantici appaiono quindi i cosidetti multipli "semiinteri" dei "quanti d'energia" propri dell'oscillatore, cioè i multipli *dispari* di $h\nu_0/2$. Le separazioni dei livelli, che solo importano per la radiazione, sono le stesse che nella teoria usata finora. È stupefacente che i nostri livelli quantici siano *esattamente* gli stessi che nella teoria di Heisenberg! - Per la teoria del *calore specifico* questo scostamento dalla teoria usata finora non è senza significato; tuttavia esso entra in gioco solo quando, in conseguenza della dilatazione termica, la frequenza propria ν_0 *varia.* Formalmente si tratta della vecchia questione dell'"energia di punto zero", che già era stata considerata in relazione al dilemma: prima o seconda interpretazione della teoria di Planck. - Il termine $h\nu_0/2$ ha influenza anche sulla legge degli *estremi di banda.*

Se si reintroduce, secondo le (24) e (23), la quantità originaria q, le *autofunzioni* (26) si scrivono:

$$\psi_n(q) = \exp\left[-\frac{2\pi^2\nu_0 q^2}{h}\right] H_n\left(2\pi q\sqrt{\frac{\nu_0}{h}}\right). \tag{26'}$$

[18]Vedi Courant-Hilbert, Methoden der mathematischen Physik I (Berlin, Springer 1924) V, §9, p. 261, Eq. 43, inoltre II, §10, 4, p. 76.

Dalla (27") si apprende che la prima autofunzione è una "curva d'errore gaussiana", che la seconda si annulla nell'origine e corrisponde per x positivi ad una "distribuzione di Maxwell delle velocità" in due dimensioni; essa è continuata in forma dispari per x negativi. La terza autofunzione è di nuovo pari, negativa nell'origine, ed ha due punti di zero simmetrici $\pm 1/\sqrt{2}$; eccetera. Si può facilmente riconoscere e tracciare l'andamento qualitativo; al riguardo si deve tener presente che le radici di polinomi successivi si *separano* mutuamente. Dalla (26') si riconosce che i punti caratteristici delle autofunzioni, come ampiezza a mezza altezza (per $n = 0$), punti di zero, massimi, per ordine di grandezza stanno nell'ambito delle oscillazioni d'un oscillatore classico. Infatti per *l'ampiezza* classica dell'oscillazione n-esima si trova facilmente

$$q_n = \frac{\sqrt{E_n}}{2\pi\nu_0} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{h}{\nu_0}}\sqrt{\frac{2n+1}{2}}. \tag{28}$$

Tuttavia, a quanto vedo, in generale il valore *esatto* dell'ascissa del *punto di svolta* classico non ha alcun significato preciso nel comportamento dell'autofunzione. Si potrebbe sospettare che i punti di svolta abbiano per l'onda nello spazio delle fasi *il* significato che ivi il quadrato della velocità di propagazione diventi *infinito* e per distanze maggiori *negativo*. Ma ciò nell'equazione differenziale (22) significa solo *l'annullarsi* del coefficiente di ψ e non dà luogo ad alcuna singolarità.

Non posso reprimere qui l'osservazione valida in generale, non solo per l'oscillatore: che però questo annullarsi e diventare immaginaria della velocità di propagazione è qualcosa di assai caratteristico. È la base analitica per la selezione di autovalori netti mediante la sola condizione di finitezza della funzione. Spiego meglio. È noto che un'equazione d'onda con velocità di propagazione *reale* significa questo: il valore della funzione col passare del tempo *risulta accresciuto* tanto più, quanto più esso stia *sotto* al valor medio della funzione nell'intorno spaziale del punto considerato; e vice versa. Un'equazione siffatta ha per conseguenza, anche se non istantaneamente e in modo continuo, come *l'equazione del calore*, col passar del tempo un *ritorno all'equilibrio* delle escursioni estreme e non dà luogo in nessun punto ad un accrescimento senza limite della funzione. - Un'equazione delle onde con velocità di propagazione *immaginaria* significa l'esatto contrario: valori della funzione, che stanno sopra il valor medio dell'intorno *risultano accresciuti* e vice versa. Si comprende che una funzione governata da un'equazione siffatta corre il grosso rischio di crescere oltre ogni limite. Per evitare questo pericolo bisogna guidarla con molta precisione, e l'ente che rende ciò possibile è proprio l'autovalore esattamente determinato. Infatti si può vedere anche nell'esempio trattato nella prima comunicazione che la richiesta di autovalori netti sparisce in un batter d'occhio, non appena si scelga *positiva* la quantità là chiamata E, e quindi con una velocità reale dell'onda in tutto lo spazio.

Dopo questa digressione ritorniamo all'oscillatore e chiediamoci se cambia qualcosa, quando diamo all'oscillatore due o più gradi di libertà (oscillatore spaziale, corpo rigido). Se alle singole coordinate appartengono frequenze meccaniche (valori di ν_0) *diverse* non cambia nulla. Si assume ψ come *prodotto* di funzioni di ciascuna coordinata ed il problema si separa in tanti problemi singoli del tipo prima trattato quante sono le coordinate presenti. Le autofunzioni sono prodotti di funzioni ortogonali di Hermite, gli autovalori del problema complessivo si rappresentano come la somma degli autovalori dei problemi singoli in tutte le combinazioni possibili.

Nessun autovalore (del sistema totale) sarà multiplo, se si assume che tra i valori di ν_0 non sussista alcuna relazione razionale.

Se invece ciò accade, questo modo di trattare il problema è ancora *possibile*, ma non è certo *l'unico*. Si ha a che fare con autovalori multipli, e la "separazione" si può certamente eseguire anche in altre coordinate, per esempio nel caso dell'oscillatore spaziale isotropo in coordinate spaziali polari[19]. Gli autovalori che si ottengono sono tuttavia in ogni caso esattamente gli stessi, purché si possieda la "dimostrazione di completezza" per il sistema di autofunzioni ottenuto in *un* modo. Si riconosce in tutto ciò il parallelo completo delle relazioni ben note a cui va incontro il metodo di quantizzazione usato finora nel caso della *degenerazione*. Se si applicano le condizioni di Sommerfeld-Epstein *senza* tener conto d'una eventuale degenerazione è noto che si ottengono gli stessi livelli d'energia, ma si arriva ad asserzioni diverse riguardo alle orbite ammesse a seconda della scelta delle coordinate. Ciò qui *non* succede. Si arriva invece ad un sistema del tutto diverso di *autofunzioni* se per esempio si tratta il problema delle oscillazioni del moto di Keplero imperturbato in coordinate *paraboliche* invece che in coordinate polari, come abbiamo fatto nella prima comunicazione. Tuttavia come *possibile stato di oscillazione* non si deve scegliere proprio la singola oscillazione propri, ma un aggregato lineare arbitrario, finito o infinito di queste. E come tali le autofunzioni trovate in un secondo modo possono sempre essere rappresentate come aggregato lineare di autofunzioni trovate in un modo scelto a piacere, purché queste costituiscano un sistema *completo*.

Ma non si può girare attorno continuamente alla questione che finora non è stata affrontata affatto, come in realtà l'energia si ripartisca tra le oscillazioni proprie in un caso determinato. Ad imitazione della teoria dei quanti usata finora si inclina ad assumere che nel caso degenere solo l'energia della totalità delle oscillazioni proprie, che corrispondono ad un determinato autovalore, deve avere un certo ammontare prescritto, che nel caso non degenere appartiene ad una singola oscillazione. Provvisoriamente lascerei la questione *completamente* aperta - anche *riguardo al* punto, se i "livelli d'energia" trovati sono realmente gradini d'energia *del processo oscillatorio* oppure se per questo hanno *soltanto* il significato di frequenza. Se si accetta la teoria dei battimenti, per il realizzarsi delle frequenze nette di emissione l'interpretazione come livelli d'energia non è più richiesta.

Il rotatore con asse fisso nello spazio.

Per la mancanza dell'energia potenziale con un elemento di linea *euclideo* questo costituisce il più facile esempio pensabile per la teoria delle oscillazioni. Sia A il momento angolare, φ l'angolo di rotazione; come equazione delle oscillazioni s'ottiene evidentemente

$$\frac{1}{A}\frac{d^2\psi}{d\varphi^2} + \frac{8\pi^2 E}{h^2}\psi = 0. \tag{29}$$

[19]Si introdurrà inoltre un'equazione in r che va trattata esattamente con gli stessi metodi che sono stati applicati nella prima comunicazione al problema di Keplero. Anche l'oscillatore *mono*dimensionale porta del resto alla stessa equazione, se si introduce q^2 come variabile. Originalmente avevo risolto il problema direttamente in *questo* modo. Ringrazio il signor E. Fues per l'indicazione che si tratta dell'equazione differenziale dei polinomi di Hermite. - Il polinomio che compare nel problema di Keplero (equazione (18) della prima comunicazione) è la derivata di ordine $2n + 1$ del polinomio di Laguerre di ordine $n + l$, come ho in seguito riconosciuto.

Essa ha la soluzione

$$\psi = \frac{\sin}{\cos}\left[\sqrt{\frac{8\pi^2 EA}{h^2}} \cdot \varphi\right]. \tag{30}$$

Qui l'argomento dev'essere un multiplo *intero* di φ semplicemente in base al fatto che altrimenti ψ in funzione della coordinata φ o non sarebbe univoco o non sarebbe continuo; infatti $\varphi + 2\pi$ è lo stesso che φ. Questa condizione dà il risultato ben noto

$$E_n = \frac{n^2 h^2}{8\pi^2 A} \tag{31}$$

in *completo* accordo con la quantizzazione usata finora.

Questo risultato non ha tuttavia *nessun* valore per l'applicazione agli spettri a bande. Infatti verremo a conoscenza della circostanza peculiare, che la nostra teoria per il rotatore con asse *libero* dà un risultato *diverso. E ciò vale in generale.* Nelle applicazioni della meccanica ondulatoria non è consentito, per semplificare il calcolo, pensare la libertà di moto del sistema più ristretta di quanto essa *lo sia* realmente, anche quando in base all'integrazione delle equazioni meccaniche si sappia che il sistema nel moto particolare non faccia uso di certi gradi di libertà. Per la micromeccanica il sistema delle equazioni fondamentali meccaniche non è affatto competente, in essa le singole traiettorie, delle quali esso parla, non hanno alcuna esistenza individuale. Un processo ondulatorio riempie *l'intero* spazio delle fasi. È ben noto che per un processo ondulatorio proprio il *numero* delle dimensioni, nelle quali esso avviene, è qualcosa di molto importante.

3. Il rotatore rigido con asse libero.

Se si introducono come coordinate gli angoli polari ϑ, φ della congiungente dei nuclei, l'energia cinetica in funzione dell'impulso si scrive

$$T = \frac{1}{2A}\left(p_\vartheta^2 + \frac{p_\varphi^2}{\sin^2\vartheta}\right). \tag{32}$$

La forma è quella dell'energia cinetica di un punto materiale vincolato ad una superficie sferica. L'operatore di Laplace è quindi semplicemente quello della parte dipendente dagli angoli polari dell'operatore di Laplace spaziale e l'equazione delle oscillazioni (18") ottiene la forma seguente

$$\frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{\partial\psi}{\partial\vartheta}\right) + \frac{1}{\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi^2} + \frac{8\pi AE}{h^2}\psi = 0. \tag{33}$$

Il requisito che la ψ sulla superficie sferica sia univoca e continua porta notoriamente alla condizione agli autovalori

$$\frac{8\pi^2 A}{h^2}E = n(n+1);\ n = 0,\ 1,\ 2,\ 3\ldots \tag{34}$$

È noto che le autofunzioni sono le funzioni della superficie sferica. - I livelli d'energia sono quindi

$$E_n = \frac{n(n+1)h^2}{8\pi^2 A};\ n = 0,\ 1,\ 2,\ 3\ldots \tag{34'}$$

Questa determinazione si discosta da tutte le precedenti (eccetto forse quella di Heisenberg?). Tuttavia dagli esperimenti si era stati condotti a porre per n nella formula (31) valori "semiinteri", con varie ragioni. Si riconosce che la (34') in pratica fa da sola quello che la (31) fa con n semiinteri. Si ha infatti

$$n(n+1) = \left(n + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}.$$

La differenza sta solo in una piccola costante additiva, le *differenze* dei livelli nella (34') sono le stesse che nella "quantizzazione semiintera". Ciò vale anche per l'applicazione alle bande con onde corte, per le quali il momento d'inerzia a causa del "salto elettronico" è diverso negli stati iniziale e finale. Allora compare al più per *tutte* le linee di una banda un piccolo termine aggiuntivo costante, che viene incorporato nel grande "termine elettronico" ovvero anche nel "termine d'oscillazione dei nuclei". Del resto la nostra analisi, di questo piccolo termine aggiuntivo, vale a dire di

$$\frac{1}{4}\frac{8\pi^2}{h^2}\left(\frac{1}{A} - \frac{1}{A'}\right)$$

finora non consente affatto di parlare in modo ben definito. La raffigurazione del momento d'inerzia fissato mediante "condizioni quantiche" per i moti elettronici e per le oscillazioni nucleari cade al di fuori dell'intero cerchio di idee seguito qui. Al prossimo numero mostreremo che per lo meno in modo approssimato si possono trattare simultaneamente le oscillazioni nucleari e le rotazioni della molecola biatomica con la sintesi dei casi trattati in 1. e 3.[20] - Si deve ancora ricordare che il valore $n = 0$ non corrisponde *all'annullarsi* della funzione d'onda ψ, ma ad un valore *costante* della stessa, dunque ad un'oscillazione di ampiezza costante su tutta la superficie sferica.

4. Il rotatore non rigido (molecola biatomica).

In seguito all'osservazione fatta alla fine del N. 2 per sua natura il problema va impostato con tutti i sei gradi di libertà, che esso realmente possiede. Scegliamo quindi le coordinate cartesiane x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2 dei due atomi, le cui masse siano m_1, m_2. r sia la distanza mutua. L'energia potenziale è

$$\begin{aligned} V &= 2\pi^2\nu_0^2\mu(r - r_o)^2; \\ r &= \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}. \end{aligned} \tag{35}$$

Qui

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \tag{36}$$

rappresenta la "massa risultante". ν_0 è la frequenza propria meccanica dell'oscillazione dei nuclei quando la congiungente dei nuclei è fissa. r_0 è la distanza alla quale l'energia potenziale è minima. Tutto questo va inteso nel senso della meccanica consueta.

[20]Vedi A. Sommerfeld, Atombau und Spektrallinien, 4^a ed. p. 833. Non prendiamo in considerazione qui i termini aggiuntivi anarmonici nell'energia potenziale.

Per l'equazione delle oscillazioni (18") si ottiene quanto segue

$$\begin{aligned}\frac{1}{m_1}\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial y_1^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial z_1^2}\right)+\frac{1}{m_2}\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial x_2^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial y_2^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial z_2^2}\right)&\\ +\frac{8\pi^2}{h^2}\left[E-2\pi^2\nu_0^2\mu(r-r_0)^2\right]\psi=0.&\end{aligned}\tag{37}$$

Introduciamo come nuove variabili x, y, z, ξ, η, ζ:

$$\begin{aligned}x&=x_1-x_2,\ (m_1+m_2)\xi=m_1x_1+m_2x_2,\\ y&=y_1-y_2,\ (m_1+m_2)\eta=m_1y_1+m_2y_2,\\ z&=z_1-z_2,\ (m_1+m_2)\zeta=m_1z_1+m_2z_2.\end{aligned}\tag{38}$$

Il calcolo dà

$$\begin{aligned}\frac{1}{\mu}\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}\right)+\frac{1}{m_1+m_2}\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial \xi^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial \eta^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial \zeta^2}\right)&\\ +\left[a''-b'(r-r_0)^2\right]\psi=0,&\end{aligned}\tag{37'}$$

dove si è posto per brevità

$$a''=\frac{8\pi^2E}{h^2},\ b'=\frac{16\pi^4\nu_0^2\mu}{h^2}.\tag{39}$$

Ora possiamo sostituire al posto di ψ il prodotto di una funzione delle coordinate relative x, y, z e di una funzione delle coordinate del baricentro ξ, η, ζ:

$$\psi=f(x,y,z)g(\xi,\eta,\zeta).\tag{40}$$

Per g si ottiene l'equazione

$$\frac{1}{m_1+m_2}\left(\frac{\partial^2 g}{\partial \xi^2}+\frac{\partial^2 g}{\partial \eta^2}+\frac{\partial^2 g}{\partial \zeta^2}\right)+\text{Cost}.g=0.\tag{41}$$

Essa ha la stessa forma di quella che si otterrebbe per il moto in assenza di forze di un punto materiale di massa m_1+m_2. In questo caso la costante assumerebbe il significato

$$\text{Cost.}=\frac{8\pi^2E_t}{h^2},\tag{42}$$

dove E_t è l'energia di traslazione del suddetto punto materiale. Immaginiamo di sostituire questo valore nella (41). Quali valori per E_t siano ammessi come autovalori dipende ora dal fatto se per le coordinate originarie e quindi per le coordinate del baricentro sia a disposizione l'intero spazio, senza che compaiano nuove energie potenziali. Nel primo caso ogni valore non negativo è ammesso, ogni valore negativo proibito. Allorquando E_t è non negativo, e *solo* allora, la (41) possiede soluzioni che non si annullano identicamente e che restano tuttavia finite nell'intero spazio. Ma se la molecola si trova in una "scatola", bisogna prendere questa come condizione al contorno per la funzione g, o esprimendosi in modo coerente: l'equazione (41) alle pareti della scatola, in seguito alla comparsa di energia potenziale aggiuntiva, muterà assai bruscamente la sua forma. Di conseguenza un insieme discreto di valori di E_t verranno selezionati come autovalori. Si tratta della "quantizzazione del moto di traslazione", per la quale di recente ho delineato i tratti principali, e ho mostrato che conduce alla teoria dei gas di Einstein[21].

Per il fattore f della funzione delle oscillazioni ψ dipendente dalle coordinate relative risulta ora l'equazione:

$$\frac{1}{\mu}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\right)+\left[a'-b'(r-r_0)^2\right]f=0, \tag{43}$$

dove s'è posto per abbreviazione

$$a'=\frac{8\pi^2(E-E_t)}{h^2}. \tag{39'}$$

Introduciamo ora al posto delle x, y, z coordinate polari r, ϑ, φ (in accordo con l'uso fatto finora del simbolo r). Moltiplicando per μ si ottiene

$$\begin{aligned}\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial f}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\left\{\frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{\partial f}{\partial\vartheta}\right)+\frac{1}{\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2 f}{\partial\varphi^2}\right\}&\\ +\left[\mu a'-\mu b'(r-r_0)^2\right]f=0.&\end{aligned} \tag{43'}$$

Nuova suddivisione di f. Il fattore dipendente dagli angoli polari è una funzione della superficie sferica. Di ordine n. La parentesi graffa vale $-n(n+1)f$. Pensiamo di sostituire questo valore, e per semplicità lasciamo il simbolo f per il fattore dipendente da r. Poi si introdurrà come nuova variabile *dipendente*

$$\chi=rf, \tag{44}$$

e poi come nuova variabile *indipendente*

$$\rho=r-r_0. \tag{45}$$

Il calcolo dà

$$\frac{\partial^2\chi}{\partial\rho^2}+\left[\mu a'-\mu b'\rho^2-\frac{n(n+1)}{(r_0+\rho)^2}\right]\chi=0. \tag{46}$$

Fin qui il calcolo si può eseguire esattamente. Ora introduciamo un'approssimazione che, lo so bene, avrebbe bisogno d'un fondamento più solido di quello che darò qui. Confrontiamo la (46) con l'equazione (22') trattata prima, con la quale coincide nella struttura, solo si distingue nei coefficienti della funzione incognita per termini dell'ordine di grandezza relativo ρ/r_0. Si vede che se si esegue lo sviluppo:

$$\frac{n(n+1)}{(r_0+\rho)^2}=\frac{n(n+1)}{r_0^2}\left(1-\frac{2\rho}{r_0}+\frac{3\rho^2}{r_0^2}-+\ldots\right), \tag{47}$$

[21] Physik. Zeitschr. **27**, p. 95 (1926).

lo si sostituisce nella (46), si ordina per potenze di ρ/r_0 e al posto di ρ si sostituisce la variabile che se ne distingue solo per una costante piccola:

$$\rho' = \rho - \frac{n(n+1)}{r_0^2\left(\mu b' + \frac{3n(n+1)}{r_0^4}\right)}. \tag{48}$$

L'equazione (46) assume allora la forma

$$\frac{\partial^2\chi}{\partial\rho'^2} + \left(a - b\rho'^2 - \left[\frac{\rho'}{r_0}\right]\right)\chi = 0, \tag{46'}$$

con le abbreviazioni

$$\begin{aligned} a &= \mu a' - \frac{n(n+1)}{r_0^2}\left(1 - \frac{n(n+1)}{r_0^4\mu b' + 3n(n+1)}\right), \\ b &= \mu b' + \frac{3n(n+1)}{r_0^4}. \end{aligned} \tag{49}$$

Il simbolo $[\rho'/r_0]$ nella (46') indica termini che siano piccoli rispetto al più piccolo termine dell'ordine ρ'/r_0 ancora preso in considerazione.

Sappiamo dall'equazione (22'), con la quale confrontiamo ora la (46'), che le sue *prime* autofunzioni sono sensibilmente diverse da zero solo in un piccolo intervallo su entrambi i lati rispetto all'origine. Solo per numero d'ordine più alto esse si allargano gradualmente. Per un numero d'ordine più piccolo l'intervallo per l'equazione (46'), quando in essa *si trascuri* il termine $[\rho'/r_0]$ e si sostituisca l'ordine di grandezza delle costanti molecolari, è effettivamente piccolo rispetto ad r_0. Da qui traiamo la conclusione, lo ripeto, non rigorosa, che in questo modo si ottenga un'approssimazione utilizzabile per le prime autofunzioni all'interno della regione dove esse sono sensibilmente diverse da zero, ed anche per i primi *autovalori*. Dalla precedente condizione per gli autovalori (25) si derivano con un calcolo facile, riespandendo le abbreviazioni (49), (39') e (39) e introducendo la quantità piccola

$$\varepsilon = \frac{n(n+1)h^2}{16\pi^4\nu_0^2\mu^2 r_0^4} = \frac{n(n+1)h^2}{16\pi^4\nu_0^2 A^2} \tag{50}$$

come nuova abbreviazione, i seguenti *gradini d'energia*:

$$\begin{aligned} &E = E_t + \frac{n(n+1)h^2}{8\pi^2 A}\left(1 - \frac{\varepsilon}{1+3\varepsilon}\right) + \frac{2l+1}{2}h\nu_0\sqrt{1+3\varepsilon}, \\ &(n = 0,\ 1,\ 2, \cdots;\ l = 0,\ 1,\ 2, \cdots), \end{aligned} \tag{51}$$

dove ora si scrive

$$A = \mu r_0^2 \tag{52}$$

per il *momento d'inerzia*.

Nel linguaggio della meccanica classica ε è il quadrato del rapporto tra la frequenza di rotazione e quella di oscillazione ν_0; è quindi, nel caso d'applicazione ad una molecola, una quantità davvero piccola e la formula (51) ha, prescindendo da questa piccola correzione e dalle deviazioni di cui s'è parlato prima, la struttura desiderata. Essa è la sintesi delle (25') e (34'), dove ora E_t interviene come rappresentante dell'energia di traslazione. Va sottolineato che la bontà dell'approssimazione non deriva solo dalla piccolezza di ε, occorre anche che l non sia troppo grande. *Nella pratica* tuttavia per l intervengono solo numeri piccoli.

Le correzioni ε nella (51) *ancora non* tengono conto della deviazione delle oscillazioni dei nuclei dal tipo armonico puro. Perciò un confronto con la formula di Kratzer (vedi Sommerfeld, l.c.) e con l'esperienza ancora non è fattibile. Volevo portare il caso provvisoriamente come esempio di come il concetto intuitivo di *configurazione d'equilibrio* del sistema dei nuclei mantenga il suo significato anche nella meccanica ondulatoria, quando l'ampiezza dell'onda ψ è in pratica diversa da zero solo in un intorno piccolo della configurazione d'equilibrio. L'interpretazione immediata di questa funzione d'onda dipendente da *sei* variabili nello spazio *tri*dimensionale urta altresì contro difficoltà di natura concettuale.

Sul problema della rotazione-oscillazione della molecola biatomica si dovrà tornare prossimamente *tenendo conto* dei termini anarmonici nell'energia di legame. L'ipotesi scelta con gran talento da Kratzer per la trattazione di meccanica classica è pure quella adatta per la meccanica ondulatoria. Si deve però, per spingere il calcolo così lontano, com'è necessario per le finezze della struttura delle bande, far uso della teoria delle *perturbazioni degli autovalori e delle autofunzioni*, cioè della variazione che un dato autovalore e le corrispondenti autofunzioni di un'equazione differenziale subiscono, quando si aggiunga ai coefficienti della funzione incognita nell'equazione differenziale un piccolo "termine perturbativo". Questa "teoria delle perturbazioni" è l'esatta controparte di quella della meccanica classica, è solo più facile, perché nella meccanica ondulatoria ci muoviamo sempre nell'ambito di relazioni *lineari*. In prima approssimazione vale l'asserzione che la perturbazione dell'autovalore è uguale al termine perturbativo mediato "sul moto imperturbato".

La teoria delle perturbazioni allarga straordinariamente il campo d'applicazione analitico della nuova teoria. Come importante risultato pratico posso qui già addurre il fatto che *l'effetto Stark* del prim'ordine è stato trovato in accordo davvero completo con la formula di Epstein, divenuta indiscutibile a seguito della conferma sperimentale.

Zürich, Physikalische Institut der Universität.

(ricevuto il 23 febbraio 1926)

Quantizzazione come problema agli autovalori[1]

E. Schrödinger
(quarta comunicazione[2])

Sommario: §1. Eliminazione del parametro dell'energia nell'equazione delle oscillazioni. La vera equazione d'onda. Sistemi non conservativi. - §2. Estensione della teoria perturbativa a perturbazioni che contengono esplicitamente il tempo. Teoria della dispersione. - §3. Complementi al §2: atomi eccitati, sistemi degeneri, spettro continuo. - §4. Discussione del caso della risonanza. - §5. Generalizzazione per una perturbazione arbitraria. - §6. Generalizzazione relativistico-magnetica delle equazioni fondamentali. - §7. Sul significato fisico dello scalare di campo.

§1. Eliminazione del parametro dell'energia nell'equazione delle oscillazioni. La vera equazione d'onda. Sistemi non conservativi

L'equazione d'onda (18) ovvero (18") di pag. 510 della seconda comunicazione

$$\Delta\psi - \frac{2(E-V)}{E^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = 0 \tag{1}$$

ovvero

$$\Delta\psi + \frac{8\pi^2}{h^2}(E-V)\psi = 0, \tag{1'}$$

che costituisce il *fondamento* dei nuovi principi della meccanica tentati in questa serie di comunicazioni, soffre dell'inconveniente che essa non esprime la legge di variazione dello "scalare di campo meccanico" ψ *univocamente e in generale*. L'equazione (1) contiene infatti il parametro dell'energia o della frequenza E, ed è, come espressamente notato nel luogo citato, valida per un valore *fissato* di E per processi che dipendono dal *tempo* esclusivamente attraverso un fattore periodico *fissato*

$$\psi \approx P.R. \left(\exp \pm \frac{2\pi i E t}{h}\right). \tag{2}$$

L'equazione (1) è quindi in realtà non più generale dell'equazione (1'), che il calcolo produce nella circostanza ora menzionata e che non contiene più il tempo.

Quando abbiamo chiamato incidentalmente l'equazione (1) o (1') "equazione delle onde", è stato propriamente scorretto, avremmo dovuto chiamarla equazione delle "oscillazioni" o delle "ampiezze". Trovavamo con essa le ampiezze, poiché a *queste* si riferisce il problema agli autovalori di Sturm-Liouville - proprio come nel problema matematicamente del tutto analogo delle oscillazioni libere di corde e membrane - e non alla *vera* equazione d'onda.

Abbiamo finora sempre assunto che l'energia potenziale V sia funzione soltanto delle coordinate e *non* dipenda esplicitamente dal tempo. Si ha tuttavia la necessità

[1] Quantisierung als Eigenwertproblem, Annalen der Physik **81**, 109-139 (1926).

[2] vedi Ann. d. Phys. **79**, 361, 489; **80**, 437 (1926); inoltre sulla corrispondenza con la teoria di Heisenberg: ibidem **79**, 734.

stringente di estendere la teoria a sistemi *non conservativi*, perché solo in questo modo si può studiare il comportamento del sistema sotto l'azione di forze esterne assegnate, per esempio un'onda luminosa o un atomo esterno che sopraggiunge. Ma se V dipende esplicitamente dal tempo è evidentemente *impossibile* soddisfare l'equazione (1) o (1') mediante una funzione ψ che dipenda dal tempo solo secondo la (2). Non si tratta più di trovare le ampiezze con l'equazione delle ampiezze, ma bisogna attenersi alla vera equazione d'onda.

Essa si ottiene facilmente per sistemi conservativi. La (2) è equivalente a

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = -\frac{4\pi^2 E^2}{h^2}\psi. \tag{3}$$

Dalla $(1')$ e dalla (3) si può eliminare E per differenziazione e si ottiene, con scrittura simbolica facilmente comprensibile

$$\left(\Delta - \frac{8\pi^2}{h^2}V\right)^2 \psi + \frac{16\pi^2}{h^2}\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0. \tag{4}$$

Quest'equazione deve essere soddisfatta da ogni ψ che dipenda dal tempo secondo la (2), ma con E *arbitrario*; quindi anche da ogni ψ che si possa sviluppare in serie di Fourier rispetto al tempo (naturalmente con funzioni delle coordinate come coefficienti). L'equazione (4) è pertanto evidentemente l'*equazione d'onda unica* e *generale per lo scalare di campo* ψ.

Essa è, come si vede, niente di più rispetto al tipo semplicissimo della membrana vibrante; inoltre è del *quart*'ordine e di un tipo assai simile a quella che interviene[3] in moltissimi problemi di teoria dell'elasticità. Non c'è da temere nessuna eccessiva complicazione della teoria, nè la necessità di una revisione dei metodi dati prima, connessi all'equazione (1'). Se V *non* dipende dal tempo si può, a partire dalla (4), introdurre l'ipotesi (2) e dividere l'operatore nella (4) nel modo seguente:

$$\left(\Delta - \frac{8\pi^2}{h^2}V + \frac{8\pi^2}{h^2}E\right)\left(\Delta - \frac{8\pi^2}{h^2}V - \frac{8\pi^2}{h^2}E\right)\psi = 0. \tag{4'}$$

Si può *tentativamente* dividere quest'equazione in due equazioni connesse da un "aut-aut", cioè nell'equazione (1') e in un'altra, che si distingue dalla (1'), perché in essa il parametro dell'autovalore *risulta* meno E invece che più E, cosa che per la (2) non porta a nuove soluzioni. La suddivisione della (4') non è necessaria, perché per gli operatori non vale la legge, che "un prodotto si può annullare solo se si annulla almeno *un* fattore". Questa mancanza di necessarietà è strettamente inerente ai metodi per la soluzione delle equazioni differenziali alle derivate parziali. Il procedimento trova la sua giustificazione a posteriori con la dimostrazione della *completezza* delle autofunzioni trovate come funzioni delle coordinate. È possibile soddisfare condizioni iniziali arbitrarie per ψ e per $\partial\psi/\partial t$, grazie al fatto che non solo la parte reale, ma anche la parte immaginaria della (2) soddisfa l'equazione (4).

Vediamo quindi che l'equazione d'onda (4), la quale contiene la legge della dispersione, può essere assunta come fondamento della teoria finora sviluppata dei sistemi

[3]per esempio per una piastra vibrante: $\Delta\Delta u + \partial^2 u/\partial t^2 = 0$. Vedi Courant-Hilbert, Cap. V, §8, pag. 256.

conservativi. La sua generalizzazione per il caso di una funzione potenziale variabile nel tempo richiede pur sempre una certa precauzione, poiché possono comparire termini con derivate temporali di V, riguardo ai quali l'equazione (4), per il modo in cui è stata ottenuta, non ci può dare naturalmente alcuna informazione. Difatto ci si distoglie dal tentativo di estendere l'equazione (4) così com'è a sistemi non conservativi per complicazioni che appaiono derivare da un un termine con $\partial V/\partial t$. Nel seguito ho considerato una via alquanto diversa, che dal punto di vista dei calcoli è straordinariamente più semplice e che ritengo essenzialmente corretta.

Non occorre elevare l'ordine dell'equazione d'onda fino al quarto per eliminare in essa il parametro dell'energia. La dipendenza della ψ dal tempo richiesta per la validità della (1') si può esprimere, invece che con la (3), con

$$\frac{\partial\psi}{\partial t} = \pm\frac{2\pi i}{h}E\psi. \tag{3'}$$

Si arriva allora ad una delle due equazioni

$$\Delta\psi - \frac{8\pi^2}{h^2}V\psi \mp \frac{4\pi i}{h}\frac{\partial\psi}{\partial t} = 0. \tag{4''}$$

Richiederemo che la funzione d' onda complessa ψ soddisfi una di queste due equazioni. Poiché poi la funzione complessa coniugata $\bar{\psi}$ soddisfa all'*altra* equazione, si potrà considerare come funzione d'onda reale (quando sia necessario) la parte reale di ψ. - Nel caso di un sistema conservativo la (4") è essenzialmente identica alla (4) poiché, se V non contiene il tempo, l'operatore reale si può decomporre nel prodotto di due complessi coniugati.

§2. Estensione della teoria perturbativa a perturbazioni che contengono esplicitamente il tempo. Teoria della dispersione

L'interesse principale non si rivolge a sistemi nei quali l'ordine di grandezza delle variazioni temporali dell'energia potenziale V sia lo stesso che per le variazioni spaziali, ma piuttosto a sistemi che, in sé conservativi, siano *perturbati* per l'aggiunta di una piccola funzione assegnata del tempo (e delle coordinate) all'energia potenziale. Poniamo quindi

$$V = V_0(x) + r(x,t) \tag{5}$$

dove x, come ripetutamente prima, sta a rappresentare il complesso delle coordinate configurazionali. Diamo per *risolto* il problema agli autovalori imperturbato ($r = 0$). Allora il problema perturbativo si può risolvere con *quadrature*.

Non tratteremo tuttavia il problema generale, ma nel gran numero di sviluppi importanti, che rientrano nel problema su impostato, a causa del suo particolare significato, sceglieremo quello che in ogni caso merita una trattazione separata, il problema della *teoria della dispersione*. L'azione perturbante provenga da un campo elettrico alternato che oscilla in modo omogeneo e sincrono nella regione dell'atomo; dobbiamo quindi, quando si tratti di luce monocromatica polarizzata linearmente di frequenza ν, assumere per il potenziale perturbativo:

$$r(x,t) = A(x)\cos 2\pi\nu t \tag{6}$$

quindi

$$V = V_0(x) + A(x)\cos 2\pi\nu t. \tag{5'}$$

Qui $A(x)$ è il prodotto cambiato di segno dell'ampiezza della luce per quella funzione delle coordinate che *secondo* la *meccanica consueta* rappresenta la componente del momento elettrico dell'atomo nella direzione del vettore elettrico della luce ($-F\sum e_i z_i$, dove F è l'ampiezza della luce, e_i, z_i sono le cariche e le coordinate z dei punti materiali, e la luce è polarizzata nella direzione z (prendiamo la parte *variabile nel tempo* della funzione potenziale dalla meccanica solita con altrettanta o altrettanto poca ragione, come prima quella *costante*, per esempio nel problema di Keplero)).

Con la posizione (5') l'equazione (4') si scrive:

$$\Delta\psi - \frac{8\pi^2}{h^2}(V_0 + Acos2\pi\nu t)\psi \mp \frac{4\pi i}{h}\frac{\partial\psi}{\partial t} = 0. \tag{7}$$

Per $A = 0$ queste equazioni con la posizione:

$$\psi = u(x)\exp \pm\frac{2\pi i E t}{h}, \tag{8}$$

(che ora *non* va intesa come "pars realis", ma nel senso vero) si trasformano nell'equazione delle ampiezze (1') del problema imperturbato, e si sa (vedi §1) che in questo modo si trova la totalità delle soluzioni del problema imperturbato. Siano:

$$E_k \text{ ed } u_k(x);\ \ k = 1, 2, 3\ldots$$

gli autovalori e le autofunzioni normalizzate del problema imperturbato, che assumiamo *noti*, e che per non smarrirci in questioni ulteriori, che richiedono una trattazione particolare, assumeremo *discreti e distinti* (sistema non degenere senza spettro continuo).

Le soluzioni del problema perturbato le dobbiamo cercare, proprio come nel caso di un potenziale di perturbazione indipendente dal tempo, in prossimità di *ogni* possibile soluzione del problema imperturbato, quindi in prossimità di una combinazione lineare arbitraria a coefficienti costanti degli $u_k(x)$ [a cui vanno aggiunti secondo la (8) i corrispondenti fattori temporali $\exp(\pm 2\pi i E_k t/h)$]. La soluzione del problema perturbato in prossimità di una *determinata* combinazione lineare avrà fisicamente il significato, che *essa* è quella che si realizza subito, quando all'arrivo dell'onda luminosa le oscillazioni proprie libere presentano esattamente questa determinata combinazione lineare (forse con piccole variazioni dovute alla "testa d'onda").

Poiché anche l'equazione del problema perturbato è *omogenea* - questo difetto nell'analogia con le "oscillazioni forzate" dell'acustica va sottolineato! - basta evidentemente cercare la soluzione perturbata nell'intorno di ogni *singola*

$$u_k(x)\exp \pm\frac{2\pi E_k t}{h}, \tag{9}$$

ed esse possono poi essere combinate linearmente ad libitum, esattamente come le soluzioni imperturbate.

Poniamo quindi per la soluzione della prima equazione (7)

$$\psi = u_k(x) \exp \frac{2\pi i E_k t}{h} + w(x,t). \tag{10}$$

[Il segno inferiore, cioè la seconda equazione (7), lo lasciamo perdere d'ora in poi, perché non darebbe niente di nuovo]. Il termine aggiuntivo $w(x,t)$ lo si considererà piccolo, e il suo prodotto con il potenziale di perturbazione sarà trascurabile. Sostituendo la (10) nella (7) e tenendo conto che $u_k(x)$ ed E_k sono autofunzione ed autovalore del problema imperturbato, risulta:

$$\Delta w - \frac{8\pi^2}{h^2} V_0 w - \frac{4\pi i}{h}\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{8\pi^2}{h^2} A cos 2\pi\nu t \cdot u_k \exp \frac{2\pi i E_k t}{h}$$

$$= \frac{4\pi^2}{h^2} A u_k \left[\exp \frac{2\pi i t(E_k + h\nu)}{h} + \exp \frac{2\pi i t(E_k - h\nu)}{h} \right]. \tag{11}$$

Questa equazione si soddisfa semplicemente ed essenzialmente *solo* con la posizione:

$$w = w_+(x) \exp \frac{2\pi i t(E_k + h\nu)}{h} + w_-(x) \exp \frac{2\pi i t(E_k - h\nu)}{h}, \tag{12}$$

ove le due funzioni $w_\pm$ soddisfano rispettivamente alle due equazioni

$$\Delta w_\pm + \frac{8\pi^2}{h^2}(E_k \pm h\nu - V_0) w_\pm = \frac{4\pi^2}{h^2} A u_k. \tag{13}$$

Questo risultato è essenzialmente *unico*. In un primo momento parrebbe possibile aggiungere alla (12) una combinazione arbitraria di oscillazioni proprie imperturbate. Ma questa combinazione deve risultare piccola del prim'ordine (poiché si è fatta questa ipotesi per w) e non presenta per il momento alcun interesse, poiché richiede tutt'al più perturbazioni del second'ordine.

Troviamo finalmente nelle equazioni (13) delle equazioni *non omogenee*, che potevamo aspettarci di incontrare - malgrado il summenzionato difetto nell'analogia con le vere oscillazioni forzate. Questo difetto nell'analogia è straordinariamente importante e si manifesta nelle equazioni (13) con le seguenti due circostanze. *In primo luogo* compare come "secondo membro" ("forza eccitatrice") non *soltanto* la funzione perturbante $A(x)$, ma il suo *prodotto* per l'ampiezza di oscillazione libera. È irrinunciabile, per render conto correttamente dei fatti fisici, che la reazione dell'atomo ad un'onda luminosa incidente dipenda in modo essenziale dallo *stato* nel quale l'atomo si trova, mentre le oscillazioni forzate di una membrana, di un disco, eccetera, sono notoriamente del tutto indipendenti da eventuali oscillazioni proprie sovrapposte, e dunque produrrebbero una descrizione del tutto inadatta. *In secondo luogo* al primo membro della (13) appare al posto dell'autovalore, cioè come "frequenza d'eccitazione" non *solo* la frequenza ν della forza perturbante, ma in un caso questa sommata, nell'altro caso questa sottratta a quella dell'oscillazione libera. Anche questo è un requisito irrinunciabile, perché altrimenti le frequenze proprie, che corrispondono alle frequenze dei *termini*, agirebbero da *frequenze di risonanza*, e non come bisogna richiedere, e come l'equazione (13) realmente dà, le *differenze* delle frequenze proprie, e, come inoltre si riconosce con soddisfazione:

solo le differenze tra una frequenza propria, *che è realmente eccitata*, e tutte le altre, *non* le differenze tra coppie di frequenze, delle quali *nessuna* sia eccitata.

Per comprendere questo più precisamente, terminiamo il procedimento di soluzione. Con metodi noti[4] troviamo come soluzioni *uniche* della (13):

$$w_{\pm}(x) = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a'_{kn}u_n(x)}{E_k - E_n \pm h\nu} \tag{14}$$

con

$$a'_{kn} = \int A(x)u_k(x)u_n(x)\rho(x)dx. \tag{15}$$

$\rho(x)$ è la "funzione densità", cioè quella funzione delle coordinate per la quale l'equazione (1') va moltiplicata, per farla diventare autoaggiunta. Le $u_n(x)$ sono assunte normalizzate. Si assume inoltre che $h\nu$ *non coincida esattamente con nessuna delle differenze degli autovalori* $E_k - E_n$. Di questo "caso risonante" si parlerà in seguito (vedi §4).

Costruiamo ora dalla (14) secondo la (12) e la (10) l'oscillazione complessiva perturbata; si ottiene:

$$\psi = u_k(x)\exp\frac{2\pi i E_k t}{h}$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} a'_{kn}u_n(x)\left(\frac{\exp\frac{2\pi i t(E_k+h\nu)}{h}}{E_k - E_n + h\nu} + \frac{\exp\frac{2\pi i t(E_k-h\nu)}{h}}{E_k - E_n - h\nu}\right). \tag{16}$$

Nel caso di perturbazione quindi *assieme* a ciascuna oscillazione *libera* $u_k(x)$ oscillano con piccola ampiezza tutte quelle oscillazioni $u_n(x)$ per le quali $a'_{kn} \neq 0$. Sono proprio quelle che, quando coesistono con u_k come oscillazioni libere, danno luogo ad una radiazione che (totalmente o parzialmente) è polarizzata nella direzione di polarizzazione della radiazione incidente. Ma a'_{kn} è proprio, a meno d'un fattore, nient'altro che la componente dell'ampiezza in questa direzione di polarizzazione del *momento elettrico* dell'atomo *secondo* la *meccanica ondulatoria*, oscillante con la frequenza $(E_k - E_n)/h$, che compare per la coesistenza[5] di u_k e di u_n. - Le oscillazioni aggiuntive non si trovano però alla frequenza propria E_n/h originaria di queste oscillazioni, e neppure alla frequenza ν della luce, ma in corrispondenza della somma o della differenza di E_k/h (cioè della frequenza della *singola* oscillazione *libera* esistente) e di ν.

Come soluzione *reale* si può considerare la parte reale o la parte immaginaria della (16). - Opereremo tuttavia nel seguito con la soluzione complessa.

Per riconoscere il significato dei nostri risultati per la teoria della dispersione si deve cercare la radiazione che origina dalla coesistenza delle oscillazioni forzate eccitate con l'oscillazione libera preesistente. Allo scopo costruiamo secondo il procedimento prima usato[6] - una critica segue nel §7 - il prodotto della funzione

---

[4] vedi III comunicazione §§1 e 2, testo dall'equazione (8) alla (24).

[5] vedi il seguito e il §7.

[6] vedi Ann. d. Phys. **79**, 755 (1926); inoltre il calcolo delle intensità dell'effetto Stark nella terza comunicazione. Nel primo luogo citato veniva proposta invece di $\psi\bar{\psi}$ la parte reale di $\psi\frac{\partial\bar{\psi}}{\partial t}$. Era una mossa falsa che è stata corretta nella terza comunicazione.

d'onda complessa (16) per il valore complesso coniugato, quindi la norma della funzione d'onda complessa ψ. Teniamo conto che i termini perturbativi sono piccoli, cosicchè i loro quadrati e i prodotti tra loro si possono trascurare. Si ottiene con una facile riduzione[7]:

$$\psi\bar{\psi} = u_k(x)^2 + 2\cos 2\pi\nu t \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(E_k - E_n)a'_{kn}u_k(x)u_n(x)}{(E_k - E_n)^2 - h^2\nu^2}. \tag{17}$$

Secondo l'*ipotesi euristica* sul significato elettrodinamico dello scalare di campo ψ, che nel caso dell'effetto Stark dell'idrogeno ci ha portato alle corrette regole di selezione e di polarizzazione e ad una soddisfacente descrizione dei rapporti delle intensità, la presente quantità - a meno di una costante moltiplicativa - rappresenta la densità dell'elettricità in funzione delle coordinate spaziali e del tempo, *quando x rappresenta solo tre coordinate*, cioè quando si tratta del problema a *un* elettrone. Con generalizzazione sensata di questa ipotesi - sulla quale ulteriormente al §7 - consideriamo ora, come densità dell'elettricità che è "accoppiata" con *uno* dei punti materiali della meccanica classica, o che "deriva da esso", o che "ad esso corrisponde secondo la meccanica ondulatoria", quanto segue: a meno di una certa costante moltiplicativa, uguale alla "carica" classica del punto materiale considerato, l'*integrale* di $\psi\bar{\psi}$ esteso a tutte quelle coordinate del sistema, che determinano secondo la meccanica classica la posizione dei *restanti* punti materiali. La densità di carica complessiva in un punto dello spazio sarà rappresentata dalla *somma* dei suddetti integrali estesa a tutti i punti materiali.

Per trovare una qualche componente spaziale del *momento di dipolo* complessivo secondo la meccanica ondulatoria in funzione del tempo, secondo questa ipotesi si deve moltiplicare l'espressione (17) per quella funzione delle coordinate, che *secondo* la *meccanica classica* dà il corrispondente momento di dipolo in funzione della configurazione dei punti del sistema, ossia per esempio per

$$M_y = \sum e_i y_i, \tag{18}$$

quando si tratti del momento di dipolo nella direzione y. Poi si deve integrare su *tutte* le coordinate configurazionali.

Eseguiamo. Poniamo per abbreviazione

$$b_{kn} = \int M_y(x)u_k(x)u_n(x)\rho(x)dx. \tag{19}$$

Esplicitiamo inoltre la definizione di a'_{kn} secondo la (15), ricordando che, quando il vettore elettrico della luce è dato da

$$\mathfrak{E}_z = Fcos2\pi\nu t, \tag{20}$$

$A(x)$ significa

$$A(x) = -F \cdot M_z(x), \quad \text{dove} \quad M_z(x) = \sum e_i z_i. \tag{21}$$

[7]Assumiamo per semplicità, come sempre prima, che le autofunzioni $u_n(x)$ siano *reali,* ma osserviamo che in certi casi risulta assai più comodo lavorare con combinazioni complesse delle autofunzioni reali, per esempio nel caso delle autofunzioni del problema di Keplero con $\exp(\pm m\varphi i)$ invece che con $\cos m\varphi$ e con $\sin m\varphi$.

Si ponga, in analogia con la (19)

$$a_{kn} = \int M_z(x)u_k(x)u_n(x)\rho(x)dx, \tag{22}$$

allora $a'_{kn} = -Fa_{kn}$ e si trova, eseguendo l'integrazione progettata:

$$\int M_y\psi\bar{\psi}\rho dx = a_{kk} + 2Fcos2\pi\nu t \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(E_n - E_k)a_{kn}b_{kn}}{(E_k - E_n)^2 - h^2\nu^2} \tag{23}$$

per il *momento elettrico risultante, che va attribuito alla radiazione secondaria*, alla quale dà origine l'onda incidente (20).

La radiazione deriva naturalmente solo dalla seconda parte variabile nel tempo, mentre la prima rappresenta il momento di dipolo costante nel tempo, al quale è eventualmente associata l'originaria oscillazione libera. Questa parte variabile è del tutto ragionevole e può soddisfare tutti i requisiti che si suole imporre ad una "formula di dispersione". Si consideri tra l'altro la comparsa anche di quei termini cosidetti "negativi" che - secondo il consueto modo di esprimersi - corrispondono alla possibilità di transizione ad un livello più profondo ($E_n < E_k$) ed alla quale per primo Kramers[8] sulla base di considerazioni di corrispondenza ha rivolto l'attenzione. Va sottolineato soprattutto che la nostra formula - malgrado la notazione e l'interpretazione assai diverse - è formalmente identica alla formula della radiazione secondaria di Kramers. L'importante connessione tra i coefficienti della radiazione secondaria e i coefficienti della radiazione spontanea a_{kn}, b_{kn} è posta in evidenza e inoltre la radiazione secondaria è descritta correttamente anche riguardo ai suoi stati di polarizzazione[9].

Per quanto riguarda il valore assoluto della radiazione reirraggiata ovvero del momento di dipolo indotto, posso credere che anch'esso sia dato correttamente dalla formula (23), sebbene esista la possibilità di un errore di fattore numerico nell'assunzione dell'ipotesi euristica prima introdotta. La dimensione fisica è senz'altro quella giusta, quindi, poiché l'integrale del quadrato delle autofunzioni è normalizzato ad uno, gli a_{kn}, b_{kn} sono secondo le (18), (19), (21), (22) momenti elettrici. Il rapporto tra il momento di dipolo indotto e quello spontaneo, quando ν è lontano dalla frequenza di emissione considerata, è come ordine di grandezza uguale al rapporto tra l'energia potenziale aggiuntiva Fa_{kn} e il "termine d'energia" $E_k - E_n$.

§3. Complementi al §2: atomi eccitati, sistemi degeneri, spettro continuo

Per chiarezza nel paragrafo precedente si sono fatte alcune assunzioni speciali e si sono tralasciate alcune questioni, che ora vanno considerate.

[8]H.A. Kramers, Nature 10 maggio 1924; ibidem 30 agosto 1924; H.A. Kramers e W. Heisenberg, Zeitschr. f. Phys. **31**, 681 (1925). La descrizione secondo il principio di corrispondenza della polarizzazione della luce diffusa (Eq.27) data nell'ultimo luogo citato è formalmente quasi identica alla nostra.

[9]È quasi superfluo dire che le due direzioni, che abbiamo contrassegnato come "direzione z" e "direzione y", non vanno intese come necessariamente perpendicolari. Una è la direzione di polarizzazione dell'onda incidente, l'altra corrisponde alla componente della polarizzazione di cui ci si occupa.

In primo luogo: che cosa accade, quando l'onda luminosa incontra l'atomo in uno stato nel quale non è eccitata, come prima assunto, *una sola* oscillazione libera u_k, ma più d'una, diciamo stavolta due, u_k ed u_l? Come osservato prima, nel caso perturbativo le due soluzioni perturbative (16) corrispondenti agli indici k ed l vanno semplicemente unite additivamente, dopo averle dotate di coefficienti costanti (eventualmente complessi), che corrispondono alle *intensità* preassegnate per le oscillazioni libere e al rapporto di fase delle loro eccitazioni. Si vede subito, senza fare effettivamente il calcolo, che allora nell'espressione per $\psi\bar{\psi}$ e anche nell'espressione (23) per il momento elettrico risultante non compare *soltanto* la combinazione lineare dei termini che si ottenevano prima, cioè delle espressioni (17) e rispettivamente (23), scritte una volta con k, una seconda volta con l, ma compaiono inoltre dei "termini di combinazione", e in particolare *in primo luogo*, all'ordine di grandezza più alto, un termine con

$$u_k(x)u_l(x)\exp\left[2\pi i(E_k - E_l)t/h\right] \tag{24}$$

che rappresenta la radiazione *spontanea*, associata alla coesistenza delle due oscillazioni *libere*; *in secondo luogo* dei termini perturbativi al prim'ordine, che sono proporzionali all'ampiezza del campo perturbante e corrispondono all'azione congiunta delle oscillazioni forzate associate a u_k con l'oscillazione libera u_l - e delle oscillazioni forzate associate a u_l con u_k. La *frequenza* di questi nuovi termini che compaiono nella (17) e rispettivamente nella (18), come si vede anche senza eseguire il calcolo, *non* è ν, bensì

$$|\nu \pm (E_k - E_l)/h|. \tag{25}$$

(*Non* compaiono tuttavia in questi termini nuovi *"denominatori di risonanza"*). Si ha quindi a che fare con una radiazione secondaria la cui frequenza non coincide nè con la frequenza della luce eccitante, nè con una frequenza spontanea del sistema, ma con una frequenza combinazione di queste due.

L'esistenza di questo tipo singolare di radiazione secondaria è stato per la prima volta postulato da Kramers e Heisenberg nel luogo citato in base a considerazioni fondate sul principio di corrispondenza, e poi da Born, Heisenberg e Jordan in base alla meccanica quantistica di Heisenberg[10]. Per quanto mi risulta, non ve n'è in alcun caso prova sperimentale. La *presente* teoria consente ora anche di riconoscere assai chiaramente che la comparsa di questa radiazione è associata a condizioni particolari, che richiedono esperimenti da realizzarsi apposta per questo scopo. In primo luogo devono essere *fortemente* eccitate *due* oscillazioni proprie u_k e u_l, di modo che si eliminano tutti gli esperimenti che sono stati compiuti con atomi nello stato fondamentale - e questi sono la stragrande maggioranza. In secondo luogo deve *esistere* almeno *un* terzo stato di oscillazione propria u_n (s'intende *possibile*, non occorre che sia *eccitato*), che in combinazione sia con u_k che con u_l dia luogo a emissione spontanea robusta. Allora il prodotto dei coefficienti di emissione spontanea in questione ($a_{kn}b_{ln}$ e $a_{ln}b_{kn}$) è proporzionale alla radiazione diffusa straordinaria da trovarsi. La combinazione (u_k, u_l) non dovrebbe di per sé emettere fortemente, non nuocerebbe se - nel linguaggio della vecchia teoria - questa fosse una "transizione proibita". In pratica si deve aggiungere anche questa condizione, che la linea (u_k, u_l) durante l'esperimento sia fortemente irraggiata,

[10] Born, Heisenberg e Jordan, Zeitschr. f. Phys. **35**, 572 (1926).

poiché questo è veramente il solo mezzo per assicurarsi che davvero siano eccitate fortemente *entrambe* le oscillazioni proprie, e in particolare in uno stesso individuo atomico, e per un numero sufficiente di questi. Se si pensa ora che nelle serie di termini forti e più studiate, cioè nelle solite serie $s-$, $p-$, $d-$, $f-$, i rapporti per lo più sono tali che due termini, che si combinano fortemente con un terzo, non lo fanno tra loro, appare davvero necessaria una scelta particolare dell'oggetto da sperimentare e delle condizioni dell'esperimento, per potersi aspettare con certezza la radiazione diffusa di cui si parla, in particolare perché essa ha un'altra frequenza rispetto alla luce incidente e *perciò* non dà luogo a dispersione o a polarizzazione rotatoria, ma può essere osservata solo come luce diffusa in ogni direzione.

La succitata teoria della dispersione quantomeccanica di Born, Heisenberg e Jordan non consente, per quanto vedo, malgrado la sua grande somiglianza formale con la presente, *nessuna* considerazione del tipo ora introdotto. Essa parla solo di *un* modo di reagire dell'atomo alla radiazione incidente. Essa tratta l'atomo come un tutto senza tempo e non permette finora di dire come questo fatto indubitabile, che l'atomo a tempi diversi si può trovare in stati *diversi* e quindi come è stato dimostrato reagisce in modo diverso alla radiazione incidente[11], si può esprimere nel suo linguaggio,.

Ci rivolgiamo ora ad un'altra questione. Nel §2 tutti gli autovalori sono stati assunti *discreti* e tra loro *distinti*. Lasciamo cadere la seconda ipotesi e chiediamo: che cosa cambia quando intervengono autovalori *multipli*, cioè quando si ha *degenerazione*? Ci si aspetta forse che compaiano complicazioni analoghe a quelle che si incontrano nel caso di una perturbazione costante nel tempo (terza comunicazione, §2), cioè che in primo luogo si debba determinare con la soluzione di una "equazione secolare" un sistema di autofunzioni dell'atomo imperturbato adattato alla particolare perturbazione, e lo si debba usare nell'esecuzione del calcolo perturbativo. Questo capita infatti nel caso di una perturbazione *arbitraria* $r(x,t)$ come è stata assunta nell'equazione (5), ma proprio nel caso di perturbazione mediante un'onda luminosa, Eq. (6), ciò non accade, almeno nella prima approssimazione precedentemente sviluppata e purchè ci si attenga all'ipotesi che la frequenza ν della luce non coincida con nessuna delle frequenze di emissione spontanea che intervengono. Allora infatti il parametro nella doppia equazione (13) per l'ampiezza della parte perturbativa delle oscillazioni *non* è un autovalore e la coppia di equazioni ha sempre la coppia unica di soluzioni (14), nelle quali non compare alcun denominatore nullo, anche quando E_k è un autovalore multiplo. Inoltre i termini della somma per i quali $E_n = E_k$ *non* vanno soppressi, esattamente come per il termine $n = k$ stesso. È notevole che tramite questi termini - quando compaiano realmente, ossia con un a_{kn} non nullo - anche la frequenza $\nu = 0$ appaia tra le frequenze di risonanza. Questi termini *non* danno certamente contributo alla "consueta" radiazione diffusa, come si riconosce dalla (23), poiché $E_k - E_n = 0$. La semplificazione, che non si debba dedicare particolare attenzione ad una eventuale degenerazione, almeno in prima approssimazione, vale sempre, come mostreremo nel seguito (vedi §5), come nel caso dell'onda luminosa, quando il valor medio temporale della funzione perturbante è nullo oppure, il che è lo stesso, quando il suo sviluppo temporale in serie di Fourier non contiene un termine costante, cioè indipendente dal tempo.

[11]Su questa difficoltà a comprendere l'*evoluzione temporale* di un processo, si consideri in particolare la conclusione nella più recente presentazione fatta da Heisenberg della sua teoria, Math. Ann. **95**, 683 (1926).

Mentre la nostra *prima* ipotesi sugli autovalori - che siano *semplici* - si è rivelata una precauzione superflua, l'abbandono della seconda - che essi siano tutti discreti - non produce modificazioni *di principio*, ma modifiche importanti nella forma esteriore del calcolo, in quanto si aggiungono nelle (14), (16), (17), (23) alle somme discrete degli *integrali* sullo spettro continuo dell'equazione (1'). La teoria di una tale rappresentazione integrale è stata sviluppata da H. Weyl[12], anche se soltanto per le equazioni differenziali ordinarie, ma essa si può estendere a quelle alle derivate parziali. In tutta brevità il problema è il seguente[13]. Quando l'equazione omogenea associata all'equazione non omogenea (13), cioè l'equazione delle oscillazioni (1') del sistema imperturbato, possiede accanto ad uno spettro discreto anche uno spettro continuo, che può andare da $E = a$ ad $E = b$, una funzione arbitraria $f(x)$ non può più evidentemente essere sviluppata con le sole autofunzioni normalizzate discrete $u_n(x)$:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n \cdot u_n(x) \quad \text{con} \quad \varphi_n = \int f(x) u_n(x) \rho(x) dx, \tag{26}$$

ma si deve aggiungere uno sviluppo integrale sulle autosoluzioni $u(x, E)$ che corrispondono agli autovalori $a \leq E \leq b$:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n \cdot u_n(x) + \int_a^b u(x, E) \varphi(E) dE, \tag{27}$$

dove per sottolineare l'analogia scegliamo intenzionalmente per la "funzione dei coefficienti" $\varphi(E)$ la stessa lettera che per i coefficienti discreti φ_n. Si sia ora *normalizzata* l'autosoluzione $u(x, E)$ una volta per tutte moltiplicandola per un'opportuna funzione di E in modo che

$$\int dx \rho(x) \int_{E'}^{E'+\Delta} u(x, E) u(x, E') dE' = 1 \text{ oppure } 0, \tag{28}$$

a seconda che E *appartenga* o meno all'intervallo E', $E' + \Delta$; allora nello sviluppo (27) si deve porre sotto il segno d'integrale:

$$\varphi(E) = \lim_{\Delta=0} \frac{1}{\Delta} \int \rho(\xi) f(\xi) \cdot \int_E^{E+\Delta} u(\xi, E') dE' \cdot d\xi, \tag{29}$$

dove il *primo* segno d'integrale come sempre si riferisce al dominio del gruppo di variabili x[14]. Supposto che la (28) possa essere soddisfatta e che lo sviluppo (27) esista, il che, come detto, è stato dimostrato da Weyl per le equazioni differenziali

[12] H. Weyl, Math. Ann. **68**, 220 (1910); Gött. Nachr. 1910. Vedi anche E. Hilb, Sitz.-Ber. d. Physik. Mediz. Soc. Erlangen **43**, 68 (1911); Math. Ann. **71**, 76 (1911). Ringrazio H. Weyl non solo per questi riferimenti, ma anche per ammaestramenti verbali assai prezioni su queste cose per niente facili.

[13] Per l'esposizione qui data ringrazio E. Fues.

[14] Come mi comunica E. Fues, assai di frequente nella pratica si può eliminare il processo di limite e scrivere al posto dell'integrale più interno $u(\xi, E)$; e questo sempre, se $\int \rho(\xi) f(\xi) u(\xi, E) d\xi$ esiste.

ordinarie - la determinazione della "funzione dei coefficienti" secondo la (29) appare altrettanto immediata della ben nota determinazione dei coefficienti di Fourier.

Il problema più importante e più difficile nei singoli casi concreti è l'esecuzione della normalizzazione di $u(x, E)$, cioè la ricerca di quella funzione di E per la quale va moltiplicata l'autofunzione dello spettro continuo, perché possa poi soddisfare la condizione (28). Anche per questo problema pratico i lavori prima citati di Weyl contengono una guida preziosa ed alcuni esempi calcolati. Un esempio relativo alla dinamica atomica è esposto in un articolo di Fues sulle intensità dello spettro continuo che appare contemporaneamente su questi Annalen.

Rivolgiamoci ora al nostro problema, cioè alla soluzione della coppia di equazioni (13) per le ampiezze $w_\pm$ della parte perturbativa delle oscillazioni, alla quale come prima assumeremo che corrisponda la *singola* oscillazione *libera* eccitata u_k dello spettro discreto. Sviluppiamo il secondo membro della (13) secondo lo schema (27)

$$\frac{4\pi^2}{h^2}A(x)u_k(x) = \frac{4\pi^2}{h^2}\sum_{n=1}^{\infty} a'_{kn}u_n(x) + \frac{4\pi^2}{h^2}\int_a^b u(x,E)\alpha'_k(E)dE, \tag{30}$$

dove a'_{kn} è dato dalla (15) ed $\alpha'_k(E)$ secondo la (29) da

$$\alpha'_k(E) = \lim_{\Delta=0}\frac{1}{\Delta}\int \rho(\xi)A(\xi)u_k(\xi)\cdot\int_E^{E+\Delta} u(\xi,E')dE'\cdot d\xi. \tag{15'}$$

Si pensi lo sviluppo (30) sostituito nella (13), si sviluppi poi anche la soluzione cercata $w_\pm(x)$ in modo del tutto analogo con le autosoluzioni $u_n(x)$ ed $u(x, E)$, e si tenga conto che per queste ultime funzioni il primo membro della (13) assume il valore

$$\frac{8\pi^2}{h^2}(E_k \pm h\nu - E_n)u_n(x)$$

oppure

$$\frac{8\pi^2}{h^2}(E_k \pm h\nu - E)u(x,E),$$

allora "uguagliando i coefficienti" si trova come generalizzazione della (14)

$$w_\pm(x) = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a'_{kn}u_n(x)}{E_k - E_n \pm h\nu} + \frac{1}{2}\int_a^b \frac{\alpha'_k(E)u(x,E)}{E_k - E \pm h\nu}dE. \tag{14'}$$

Gli ulteriori sviluppi sono del tutto analoghi a quelli nel §2. Si trova in definitiva come *termine aggiuntivo* alla (23)

$$+2\cos 2\pi\nu t\int d\xi\rho(\xi)M_y(\xi)u_k(\xi)\int_a^b \frac{(E_k - E)\alpha'_k(E)u(\xi,E)}{(E_k - E)^2 - h^2\nu^2}dE. \tag{23'}$$

Qui non si può sempre senz'altro scambiare l'ordine di integrazione, perché l'integrale in ξ è possibile che non converga. Si può tuttavia - un surrogato intuitivo del limite esatto, che qui si può sostituire - suddividere l'integrale $\int_a^b$ in molti intervalli piccoli, diciamo di lunghezza Δ, abbastanza piccoli perché tutte le funzioni di E che compaiono si possano assumere costanti su ognuno di tali intervalli, con l'eccezione di $u(x, E)$, per la quale, come segue dalla teoria generale, è impossibile ottenere la suddivisione in intervalli indipendente da ξ. Si possono allora estrarre le restanti funzioni dagli integrali sugli intervalli, e si ottiene infine esattamente come *termine aggiuntivo al momento di dipolo dell'irraggiamento secondario* (23) il seguente risultato:

$$2F\cos 2\pi\nu t\int_a^b \frac{(E-E_k)\alpha_k(E)\beta_k(E)}{(E_k-E)^2-h^2\nu^2}dE \tag{23”}$$

con

$$\alpha_k(E)=\lim_{\Delta=0}\frac{1}{\Delta}\int\rho(\xi)M_z(\xi)u_k(\xi)\cdot\int_E^{E+\Delta}u(\xi,E')dE'\cdot d\xi \tag{22'}$$

$$\beta_k(E)=\lim_{\Delta=0}\frac{1}{\Delta}\int\rho(\xi)M_y(\xi)u_k(\xi)\cdot\int_E^{E+\Delta}u(\xi,E')dE'\cdot d\xi \tag{19'}$$

(prego di osservare la completa analogia con le formule contrassegnate con lo stesso numero, ma senza apice, del §2).

Il presente schema di calcolo non può evidentemente essere nient'altro che un inquadramento generale, si deve dimostrare che la molteplice influenza dello spettro continuo sulla dispersione, che sperimentalmente appare esistere[15], è richiesta dalla presente teoria proprio nella forma che ci si aspetta, e bisogna tracciare la strada per la quale il problema può essere affrontato dal punto di vista del calcolo.

§4. Discussione del caso della risonanza

Abbiamo finora assunto che la frequenza ν dell'onda luminosa incidente non coincida con nessuna delle frequenze di emissione che intervengono. Assumiamo ora che sia circa

$$h\nu=E_n-E_k>0, \tag{31}$$

e che si ritorni, per semplificare il discorso, alle ipotesi restrittive del §2 (autovalori semplici e discreti, una sola oscillazione libera u_k eccitata). Nella coppia d'equazioni (13) il parametro dell'autovalore assume quindi il valore

$$E_k\pm E_n\mp E_k=\left\{\begin{matrix}E_n\\2E_k-E_n\end{matrix}\right\} \tag{32}$$

Per il segno superiore compare pertanto un *autovalore*, cioè E_n. - Allora sono possibili due casi. O il secondo membro di questa equazione moltiplicato per $\rho(x)$ è *ortogonale* alla funzione $u_n(x)$, cioè

$$\int A(x)u_k(x)u_n(x)\rho(x)dx=a'_{kn}=0 \tag{33}$$

[15]K.F. Herzfeld e K.L. Wolf, Ann. d. Phys. **76**, 71, 567 (1925); H. Kollmann e H. Mark, Die Naturwissenschaften **14**, 648 (1926).

ovvero, dal punto di vista fisico: u_k ed u_n, se coesistessero come oscillazioni libere, o non darebbero luogo ad alcuna emissione spontanea, o ne produrrebbero una polarizzata perpendicolarmente alla direzione di polarizzazione della luce incidente. In questo caso anche l'equazione critica (13) possiede come prima una soluzione, che come prima è data dalla (14), ove il termine catastrofico è nullo. Ciò significa dal punto di vista fisico - nel vecchio linguaggio - che una “transizione proibita” non può essere eccitata per risonanza, oppure che una “transizione”, anche quando non è proibita, non può essere eccitata da luce, che oscilla ortogonalmente alla direzione di polarizzazione di quella luce, che sarebbe emessa per “transizione spontanea”.

Nel secondo caso invece la (33) *non* è soddisfatta. Allora l'equazione critica *non* ammette soluzione. L'ipotesi (10), che assume una oscillazione, che solo *poco* - per quantità dell'ordine dell'ampiezza F della luce - si discosti dall'oscillazione libera originariamente esistente, e che *sotto questa ipotesi sia la più generale possibile, non ci fa raggiungere lo scopo.* Non esiste nessuna soluzione che si discosti dall'oscillazione libera originariamente esistente per quantità dell'ordine F; la luce incidente ha quindi sullo stato del sistema *un altro effetto, che non* è *in alcun rapporto col valore dell'ampiezza della luce.* Quale? Anche questo si può valutare senza un nuovo calcolo, se noi passiamo al caso, che la condizione di risonanza (31) non sia soddisfatta esattamente, ma solo in modo approssimato. Si vede allora dalla (16) che $u_n(x)$ a causa del denominatore piccolo viene eccitata a compiere un'oscillazione forzata assai ampia e che - cosa non meno importante - la frequenza di questa oscillazione si approssima alla frequenza propria naturale E_n/h dell'oscillazione propria u_n. Tutto ciò è assai *simile*, ma tuttavia in un modo caratteristico *diverso* da quanto accade negli altri fenomeni di risonanza noti, altrimenti non ne parlerei così estesamente.

Con il graduale approssimarsi alla frequenza critica l'oscillazione propria u_n che prima non era eccitata, la possibilità della quale è responsabile della crisi, si eccita sempre più fortemente e contemporaneamente si avvicina sempre più alla sua frequenza vera. A differenza di quanto succede nei consueti fenomeni di risonanza arriva tuttavia, quando si sta per raggiungere la frequenza critica, un momento nel quale la nostra soluzione non descrive più lo svolgimento dei fatti, almeno nell'ipotesi che la nostra legge delle onde, evidendemente “priva di smorzamento”, sia proprio esatta. Noi abbiamo infatti assunto che l'oscillazione forzata w fosse piccola e [nell'equazione (11)] abbiamo trascurato un termine quadratico.

Credo che le presenti considerazioni lascino già intravvedere con sufficiente chiarezza che la teoria nel caso della risonanza darà realmente quei risultati che deve dare, per essere in accordo con il fenomeno della risonanza di Wood: un riaggiustamento dell'oscillazione propria u_n che dà luogo alla crisi a valori finiti confrontabili a quelli della u_k esistente originariamente, da cui poi naturalmente deriva “emissione spontanea” della riga spettrale (u_k, u_n). Non posso tuttavia a questo punto cercare di sviluppare realmente il calcolo per il caso della risonanza, perché il risultato sarebbe soltanto di scarso valore, dal momento che la *reazione* della radiazione emessa sul sistema emittente non è tenuta in conto. Una siffatta reazione deve esistere, non solo perché non c'è alcuna base per fare una distinzione di principio tra l'onda luminosa che arriva dall'esterno e l'onda luminosa emessa dal sistema stesso, ma anche perché altrimenti in un sistema lasciato a se stesso, quando fossero simultaneamente eccitate più oscillazioni proprie, l'emissione spontanea continuerebbe senza fine. L'accoppiamento reattivo da richiedersi deve far sì che in questo caso, col progredire dell'emissione luminosa, le oscillazioni proprie più alte si smorzino progressivamente e rimanga solo alla fine l'oscillazione fondamentale, che corrisponde allo stato normale del sistema. L'accoppiamento reattivo è evidentemente proprio l'analogo della forza di reazione della radiazione $2e^2\ddot{\mathfrak{v}}/3mc^3$ per l'elettrone classico. Questa analogia placa anche la crescente apprensione per il fatto che si è trascurata finora la retroazione. L'effetto del termine in questione verosimilmente non più lineare nell'equazione d'onda dovrebbe essere in generale piccolo, proprio come nel caso dell'elettrone la forza di reazione della radiazione è in generale assai piccola rispetto alla forza d'inerzia ed alle forze del campo esterno. Tuttavia nel caso della risonanza - proprio come nella teoria dell'elettrone - l'accoppiamento con l'onda luminosa propria dovrebbe essere dello stesso ordine di grandezza di quello con l'onda incidente, e dovrebbe essere tenuto in conto quando si volesse calcolare correttamente la "condizione d'equilibrio" tra le diverse oscillazioni proprie, che si instaura con una radiazione assegnata.

Osservo tuttavia espressamente: *per evitare la catastrofe della risonanza* il termine di accoppiamento reattivo *non* sarebbe necessario! Una tale catastrofe non può avvenire in ogni caso, perché secondo la legge della *persistenza della normalizzazione* introdotta in seguito nel §7 l'integrale sullo spazio delle configurazioni di $\psi\bar{\psi}$ risulta sempre normalizzato allo stesso valore anche sotto l'azione di forze esterne arbitrarie - e in modo del tutto automatico, come conseguenza delle equazioni d'onda (4"). Le ampiezze delle oscillazioni ψ non possono crescere senza limite, esse hanno "in media" sempre lo stesso valore. Quando *una* oscillazione propria viene eccitata, un'altra deve di conseguenza diminuire.

§5. Generalizzazione per una perturbazione arbitraria

Se si ha a che fare con una perturbazione *arbitraria*, come si è assunto nell'Eq. (5) all'inizio del §2, si sviluppa l'energia di perturbazione $r(x,t)$ in una serie di Fourier o in un integrale di Fourier rispetto al tempo. I termini di questo sviluppo hanno allora la forma (6) del potenziale perturbativo di un'onda luminosa. Si vede immediatamente che si ottengono semplicemente al secondo membro dell' equazione (11) due *serie* o eventualmente integrali con esponenziali a esponente immaginario al posto dei soli due termini. Se nessuna delle frequenze eccitatrici coincide con una frequenza critica, la soluzione si ottiene esattamente nel modo descritto nel §2, e come serie di Fourier o eventualmente integrale di Fourier del tempo. Non c'è scopo a scrivere qui gli sviluppi formali, ed una trattazione dettagliata di problemi particolari esce dall'ambito della presente comunicazione. Tuttavia si deve menzionare una circostanza importante che è stata toccata nel §3.

Tra le frequenze critiche dell'equazione (13) figura in generale anche la frequenza $\nu = E_k - E_k = 0$. Allora risulta in questa come parametro dell'autovalore a primo membro un autovalore, ossia E_k. Se nello sviluppo di Fourier della funzione perturbativa $r(x,t)$ appare la frequenza 0, cioè un termine indipendente dal tempo, non si raggiunge il risultato per la via di prima. Si riconosce tuttavia facilmente come si debba modificare il procedimento, poiché il caso di una perturbazione costante nel tempo ci è noto da prima (vedi terza comunicazione). Si ha allora un piccolo spostamento ed eventualmente una suddivisione dell'autovalore o degli autovalori delle oscillazioni libere eccitate da considerare, cioè si deve scrivere al posto di E_k negli esponenti degli esponenziali del primo termine a secondo membro: E_k più una piccola costante, la perturbazione dell'autovalore. Questa perturbazione dell'autovalore, proprio come descritto nei §1 e 2 della terza comunicazione, è determinata dalla condizione che il secondo membro della componente di Fourier critica dell'attuale Eq. (13) sia ortogonale ad u_k, eventualmente: a *tutte* le autofunzioni che corrispondono a E_k.

Il numero di questioni particolari che cadono nell'ambito della formulazione del problema del presente paragrafo è assai grande. Con la sovrapposizione delle perturbazioni dovute ad un campo elettrico e magnetico costante e ad un'onda luminosa si arriva alla doppia rifrazione magnetica ed elettrica, e alla polarizzazione rotatoria dovuta a un campo magnetico. Anche la radiazione risonante in un campo magnetico deriva da qui, si deve quindi allo scopo prima fornire una soluzione esatta del caso della risonanza discusso nel §4. Inoltre si può trattare nel modo prima dato l'interazione di un atomo con particelle α o elettroni incidenti[16], quando l'incontro non è ravvicinato, in modo che si possa calcolare la perturbazione di ciascuno dei due sistemi dal moto imperturbato dell'altro. Tutti questi problemi sono una pura questione di calcolo, purchè gli autovalori e le autofunzioni del sistema imperturbato siano note. Si deve davvero sperare che si riesca a determinare queste funzioni almeno in modo approssimato anche per gli atomi complessi, in analogia con la determinazione approssimata delle orbite di Bohr che appartengono a tipi di termini diversi.

§6. Generalizzazione relativistico-magnetica delle equazioni fondamentali

In connessione con i problemi fisici citati da ultimi, per i quali il *campo magnetico*, finora trascurato in questa serie di comunicazioni, gioca un ruolo importante, posso fare qui un cenno assai breve sulla possibile generalizzazione relativistico-magnetica delle equazioni fondamentali (4"), sebbene solo per il problema ad un elettrone e solo con grandissime riserve. Queste ultime per due ragioni. In primo luogo la generalizzazione si fonda per ora su una pura analogia formale. In secondo luogo essa, come si è ricordato nella *prima* comunicazione[17], nel caso del problema di Keplero porta formalmente alla formula di struttura fine di Sommerfeld e con quanti radiali e azimutali "seminteri", come oggi in generale si ritiene corretto; *manca* soltanto il necessario *completamento* per riprodurre in modo numericamente corretto le suddivisioni delle righe dell'idrogeno, che nella rappresentazione di Bohr si ottengono con il momento angolare dell'elettrone di Goudsmit-Uhlenbeck. L'equazione differenziale alle derivate parziali di Hamilton per l'elettrone di Lorentz si può scrivere semplicemente nella forma seguente:

$$\begin{aligned}(34)\qquad &\left(\frac{\partial W}{\partial ct}+\frac{eV}{c}\right)^2-\left(\frac{\partial W}{\partial x}-\frac{e\mathfrak{U}_x}{c}\right)^2-\left(\frac{\partial W}{\partial y}-\frac{e\mathfrak{U}_y}{c}\right)^2\\ &\qquad\qquad-\left(\frac{\partial W}{\partial z}-\frac{e\mathfrak{U}_z}{c}\right)^2-m^2c^2=0.\end{aligned}$$

Qui e, m, c sono la carica, la massa dell'elettrone e la velocità della luce; V, $\mathfrak{U}$ sono i potenziali elettromagnetici dei campi elettromagnetici esterni nella posizione dell'elettrone. W è la funzione d'azione.

[16]Un tentativo assai interessante e coronato da successo di trattare l'interazione con particelle cariche incidenti, tramite lo sviluppo in serie del loro campo, come interazione con onde luminose, si trova in: E. Fermi, Zeitschr. f. Phys. **29**, 315 1924.

[17]Ann. d. Phys. **79**, 372 1926.

Dall'equazione classica (relativistica) (34) cerco ora di derivare l'*equazione d'onda* per l'elettrone con il seguente procedimento *puramente formale* che, come si vede facilmente, porterebbe alle equazioni (4") se venisse applicato all'equazione di Hamilton per un punto materiale, che si muova in un campo di forza arbitrario della meccanica solita (non relativistica). - Sostituisco nella (34) *dopo* aver fatto i quadrati le *quantità*

$$\frac{\partial W}{\partial t},\ \frac{\partial W}{\partial x},\ \frac{\partial W}{\partial y},\ \frac{\partial W}{\partial z}, \tag{35}$$

rispettivamente con gli operatori

$$\pm\frac{h}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial t},\ \pm\frac{h}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial x},\ \pm\frac{h}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial y},\ \pm\frac{h}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial z}.$$

L'operatore lineare doppio così ottenuto, applicato ad una funzione d'onda ψ, lo pongo uguale a zero:

$$\begin{aligned}\Delta\psi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} \mp \frac{4\pi i e}{hc}\left(\frac{V}{c}\frac{\partial\psi}{\partial t} + \mathfrak{A}\,\mathrm{grad}\,\psi\right)& \\ + \frac{4\pi^2 e^2}{h^2 c^2}\left(V^2 - \mathfrak{A}^2 - \frac{m^2 c^4}{e^2}\right)\psi = 0.&\end{aligned} \tag{36}$$

(I simboli Δ e grad hanno qui il significato elementare tridimensionale). La coppia di equazioni (36) sarebbe la presunta generalizzazione relativistico-magnetica della (4") nel caso di un elettrone singolo e sarebbe da intendere sempre nel senso che la funzione d'onda complessa deve soddisfare l'una o l'altra equazione.

Per l'atomo di idrogeno si può ottenere dalla (36) la formula di Sommerfeld con il metodo descritto nella prima comunicazione, e parimenti si possono derivare (trascurando i termini con $\mathfrak{A}^2$) l'effetto Zeeman normale, ed anche le ben note regole di selezione e di polarizzazione assieme alle formule delle intensità; esse derivano dalle relazioni integrali tra le funzioni sferiche citate alla fine della terza comunicazione.

Per le ragioni addotte al primo capoverso di questo paragrafo rinuncio provvisoriamente a riportare per esteso questi calcoli e mi attengo anche nei seguenti paragrafi conclusivi alla versione "classica" e non all'incompleta versione relativistico-magnetica della teoria.

§7. Sul significato fisico dello scalare di campo

Nel §2 l'ipotesi euristica prima introdotta per il problema ad *un* elettrone sul significato elettrodinamico dello scalare di campo ψ è stata generalizzata senz'altro ad un sistema qualsiasi di punti materiali carichi e si è promessa una discussione più approfondita di questo procedimento. Abbiamo là calcolato la densità dell'elettricità in un punto qualsiasi dello spazio nel modo seguente: si sceglie *un* punto materiale, si tiene fissa la terna di coordinate che determina la posizione *di questo* secondo la meccanica solita, si integra $\psi\bar{\psi}$ su tutte le rimanenti coordinate del sistema e si moltiplica il risultato per una data costante, la "carica" del punto materiale scelto; nello stesso modo si procede con ciascun punto materiale (terna di coordinate), attribuendo al punto materiale di volta in volta scelto sempre la stessa posizione, ovvero la posizione del punto dello *spazio*, nel quale si vuole conoscere la densità di elettricità. Quest'ultima è uguale alla somma algebrica dei risultati parziali.

Questa prescrizione è equivalente alla seguente interpretazione, che fa meglio risaltare il vero significato di ψ. $\psi\bar{\psi}$ è in un certo senso una *funzione peso* nello spazio delle configurazioni del sistema. La configurazione del sistema *secondo* la *meccanica ondulatoria* è una *sovrapposizione* di molte, a rigore di *tutte* le configurazioni cinematiche possibili secondo la meccanica dei punti. Ogni configurazione della meccanica dei punti contribuisce con un certo *peso* alla configurazione vera secondo la meccanica ondulatoria, peso dato da $\psi\bar{\psi}$. Se si amano i paradossi, si può dire che il sistema si trova in un certo senso contemporaneamente in tutte le posizioni pensabili dal punto di vista cinematico, ma non in tutte "con ugual intensità". Nei moti macroscopici la funzione peso si ritira in pratica in un piccolo dominio di posizioni praticamente indistinguibili, il cui baricentro nello spazio delle configurazioni percorre traiettorie macroscopicamente percettibili. Nei problemi del moto microscopici interessa comunque *anche*, e per certe questioni perfino *in primo luogo*, la *distribuzione* variabile sul dominio.

Questa diversa interpretazione può a prima vista lasciare interdetti, poiché abbiamo finora spesso parlato in un modo concreto così intuitivo di "oscillazioni ψ" come di qualcosa del tutto reale. Qualcosa di percepibile come realtà sta tuttavia alla base anche della presente interpretazione, ossia le assai reali, elettrodinamicamente attive fluttuazioni della densità elettrica nello spazio. La funzione ψ deve nè più nè meno essere o agire come ciò che permette di governare e prevedere la totalità di queste fluttuazioni mediante una sola equazione differenziale alle derivate parziali. Che la funzione ψ stessa in generale non si possa interpretare direttamente in uno spazio tridimensionale, sebbene il problema di un elettrone molto induca a questo, perché essa in generale è una funzione nello spazio delle configurazioni, non nello spazio reale, è stato rilevato ripetutamente[18].

Da una funzione peso nel senso prima esposto si desidera che il suo integrale sull'intero spazio delle configurazioni sia costantemente normalizzato ad un valore fisso, preferibilmente uno. Infatti ci si persuade facilmente che ciò è necessario perché secondo le definizioni precedenti la carica totale del sistema risulti costante. E questa condizione va naturalmente imposta anche per sistemi non conservativi. Evidentemente la carica di un sistema non può cambiare, se per esempio arriva un'onda luminosa, dura per un certo intervallo di tempo e poi cessa. NB: ciò vale anche per i processi di ionizzazione. Una particella estratta va considerata ancora nel sistema finchè l'estrazione non sia realizzata anche *logicamente*, - mediante suddivisione dello spazio delle configurazioni.

Ci si domanda ora se la *persistenza della normalizzazione* da richiedersi sia davvero garantita dalle equazioni d'evoluzione (4"), alle quali ψ deve soddisfare. Che questo non succedesse, sarebbe per l'intera nostra interpretazione abbastanza catastrofico. Fortunatamente succede. Costruiamo

$$\frac{d}{dt}\int \psi\bar{\psi}\rho dx = \int \left(\psi\frac{\partial\bar{\psi}}{\partial t} + \bar{\psi}\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)\rho dx. \tag{37}$$

Ora ψ soddisfa ad una delle due equazioni (4"), $\bar{\psi}$ all'altra. Pertanto il presente integrale vale, a meno di una costante moltiplicativa:

$$\int \left(\psi\Delta\bar{\psi} - \bar{\psi}\Delta\psi\right)\rho dx = 2i\int \left(J\Delta R - R\Delta J\right)\rho dx, \tag{38}$$

[18] Ann. d. Phys. **79**, 526, 754, 1926.

dove per il momento si è posto

$$\psi = R + iJ.$$

L'integrale (38) si annulla identicamente per il teorema di Green; la sola condizione che le funzioni R e J per questo devono soddisfare - che vadano a zero abbastanza rapidamente all'infinito - non significa fisicamente nient'altro, che il sistema considerato è praticamente racchiuso in una regione *finita.*

Si può sviluppare altrimenti quanto precede se non si integra sull'intero spazio delle configurazioni, ma soltanto si trasforma la derivata temporale della funzione peso in una divergenza mediante la trasformazione di Green. Si arriva a conoscere così il comportamento della corrente, in primo luogo della funzione peso e, tramite questa, dell'elettricità. Si moltiplichino le due equazioni

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial t} &= \frac{h}{4\pi i}\left(\Delta - \frac{8\pi^2}{h^2}V\right)\psi \\ \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial t} &= -\frac{h}{4\pi i}\left(\Delta - \frac{8\pi^2}{h^2}V\right)\bar{\psi} \end{aligned} \tag{4"}$$

rispettivamente per $\rho\bar{\psi}$ e per $\rho\psi$ e le si sommino:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho\psi\bar{\psi}\right) = \frac{h}{4\pi i}\rho\cdot\left(\bar{\psi}\Delta\psi - \psi\Delta\bar{\psi}\right). \tag{39}$$

Per eseguire la trasformazione del secondo membro in extenso, bisogna ricordarsi della forma esplicita del nostro operatore laplaciano multidimensionale non euclideo[19]:

$$\rho\Delta = \sum_k \frac{\partial}{\partial q_k}\left[\rho T_{p_k}\left(q_l, \frac{\partial \psi}{\partial q_l}\right)\right]. \tag{40}$$

Si trova facilmente con una piccola trasformazione:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho\psi\bar{\psi}\right) = \frac{h}{4\pi i}\sum_k \frac{\partial}{\partial q_k}\left[\rho\bar{\psi}T_{p_k}\left(q_l, \frac{\partial \psi}{\partial q_l}\right) - \rho\psi T_{p_k}\left(q_l, \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial q_l}\right)\right]. \tag{41}$$

Il secondo membro appare come la divergenza di un vettore reale multidimensionale, che si interpreta evidentemente come la *densità di corrente della funzione peso* nello spazio delle configurazioni. L'equazione (41) è l'*equazione di continuità* della funzione peso. Da questa si può ottenere l'*equazione di continuità dell'elettricità*, e in particolare ne vale una singolarmente per la densità di carica che "deriva da ogni singolo punto materiale". Consideriamo l'α-esimo punto materiale, sia e_α la sua "carica", m_α la sua massa, il suo spazio delle coordinate sia per semplicità

[19] Ann. d. Phys. **79**, 748 1926, equazione (31). La quantità là contrassegnata con $\Delta_p^{-1/2}$ è la nostra"funzione densità" $\rho(x)$ (per esempio $r^2 \sin\vartheta$ per una terna di coordinate polari). T è l'energia cinetica in funzione delle coordinate spaziali e dell'*impulso*, l'indice in T significa la derivata rispetto ad una coordinata dell'impulso. - Nelle equazioni (31) e (32) del luogo citato per una svista purtroppo si adopera l'indice k due volte, una come indice di sommatoria, l'altra come indice rappresentativo nell'argomento delle funzioni.

descritto con coordinate cartesiane, x_α, y_α, z_α. Indichiamo per brevità il prodotto dei differenziali delle *restanti* coordinate con dx'. Integriamo su di esse l'equazione (41), con x_α, y_α, z_α *fissi.* Con questa integrazione spariscono al secondo membro tutti i termini salvo tre, e si ottiene:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}\left[e_\alpha \int \psi\bar{\psi}dx'\right] &= \frac{he_\alpha}{4\pi i m_\alpha}\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left[\int\left(\bar{\psi}\frac{\partial\psi}{\partial x_\alpha} - \psi\frac{\partial\bar{\psi}}{\partial x_\alpha}\right)dx'\right] \\ &\quad+\frac{he_\alpha}{4\pi i m_\alpha}\frac{\partial}{\partial y_\alpha}\left[\int\left(\bar{\psi}\frac{\partial\psi}{\partial y_\alpha} - \psi\frac{\partial\bar{\psi}}{\partial y_\alpha}\right)dx'\right] + \ldots \\ &= \frac{he_\alpha}{4\pi i m_\alpha}\operatorname{div}_\alpha\left[\int\left(\bar{\psi}\operatorname{grad}_\alpha\psi - \psi\operatorname{grad}_\alpha\bar{\psi}\right)dx'\right].\end{aligned} \tag{42}$$

In questa equazione div e grad hanno il consueto significato tridimensionale euclideo e x_α, y_α, z_α si devono interpretare come coordinate cartesiane dello spazio reale. Questa equazione è l'equazione di continuità *della* densità di carica che "deriva dal punto materiale α-esimo". Costruendo analogamente i termini restanti e sommandoli tutti si ottiene l'equazione di continuità complessiva. Si deve sottolineare che, come sempre in questi casi, l'interpretazione degli integrali al secondo membro come *componenti della densità di corrente* non è obbligatoria in assoluto, poiché si può aggiungere un vettore a divergenza nulla.

Per dare un esempio, nel problema conservativo ad *un* elettrone, quando ψ è data da

$$\psi = \sum_k c_k u_k \exp\left(2\pi i \nu_k t + i\vartheta_k\right)\ (c_k,\ \vartheta_k \text{ costanti reali}) \tag{43}$$

si ottiene come *densità di corrente J*

$$\begin{aligned}J = \frac{he_1}{2\pi m_1}\sum_{(k,l)} c_k c_l\left(u_l \operatorname{grad} u_k - u_k \operatorname{grad} u_l\right) \\ \cdot \sin\left[2\pi\left(\nu_k - \nu_l\right)t + \vartheta_k - \vartheta_l\right].\end{aligned} \tag{44}$$

Si vede, e ciò vale in generale per sistemi conservativi - che quando una sola oscillazione propria è eccitata le componenti della corrente sono nulle e la distribuzione dell'elettricità è costante nel tempo; quest'ultima circostanza si nota immediatamente, poiché $\psi\bar{\psi}$ è costante nel tempo. Questo accade anche quando siano eccitate più oscillazioni proprie, ma tutte corrispondano allo stesso autovalore. Non occorrerà più allora che la densità di corrente si annulli, ma potrà esservi e in generale vi sarà una distribuzione di corrente *stazionaria.* Poiché nello stato fondamentale imperturbato succede sempre o l'una o l'altra cosa, si può parlare in un certo senso di un *ritorno a un modello atomico elettrostatico e magnetostatico.* L'assenza di radiazione dello stato fondamentale trova altresì in questo modo una soluzione sbalorditivamente semplice.

Spero e credo che le presenti ipotesi si rivelino utili per spiegare le proprietà magnetiche degli atomi e delle molecole e inoltre per spiegare la corrente elettrica nei corpi solidi.

Una certa difficoltà si trova senza dubbio nell'introdurre una funzione d'onda *complessa.* Se essa risultasse *fondamentalmente* inevitabile, e non una pura agevolazione per il calcolo, vorrebbe dire che esisterebbero fondamentalmente *due* equazioni, che soltanto *insieme* danno informazioni sullo stato del sistema. Questo sviluppo un tantino antipatico ammette, come credo, l'interpretazione assai più simpatica, che lo stato del sistema è dato da una funzione reale e dalla sua derivata rispetto al tempo. Che su questo punto noi non possiamo dare per ora nessuna spiegazione più precisa dipende dal fatto che abbiamo nella coppia di equazioni (4") soltanto il *surrogato* - per il calcolo tuttavia straordinariamente conveniente - di un'equazione d'onda reale probabilmente del quart'ordine, la cui determinazione tuttavia nel caso non conservativo non m'è riuscita.

Zürich, Physikalischen Institut der Universität.

(ricevuto il 21 giugno 1926)

La legge dell'energia e dell'impulso delle onde materiali[1]

E. Schrödinger

Il *principio di Hamilton*, dal quale si può derivare[2] l'equazione differenziale relativistica esatta delle onde di de Broglie, pare pienamente giustificare le speranze che io avevo riposto[3] in un'intima fusione della meccanica ondulatoria con l'elettrodinamica classica. Se si aggiunge all'integrando ("funzione di Lagrange") la ben nota funzione di Lagrange del campo elettromagnetico in assenza di cariche, ossia $\mathfrak{H}^2 - \mathfrak{E}^2$, si ottengono allo stesso tempo, quando si varî oltre alla funzione ψ anche il potenziale, le quattro equazioni d'onda per quest'ultimo, ossia l'intera elettrodinamica. Ciò si deve alla circostanza per primo notata da Gordon (op. cit.), che la funzione di Lagrange delle onde di de Broglie, derivata rispetto ad una componente del potenziale, dà la componente corrispondente della tetracorrente. Come la più importante conseguenza ulteriore si ottiene la legge dell'energia e dell'impulso per il campo totale, dalla quale si può derivare il contributo delle cariche, cioè della funzione ψ, al tensore d'energia e impulso. Mi è interamente chiaro che tutto ciò dev'essere in qualche modo contenuto nelle formulazioni assai generali di O. Klein[4] e di de Donder[5]. Non mi pare tuttavia superfluo esporre questa unione nella forma più semplice possibile, senza rapporti con la teoria della gravitazione e con l'interessante quinta coordinata, specialmente con riguardo ad una frattura assai importante, che pur sempre si apre tra questa bella teoria di campo in sé chiusa e l'esperienza (vedi la conclusione di questa Nota).

Sviluppiamo l'equazione delle onde ed il principio di Hamilton nella forma introdotta da Gordon. La prima si scrive (si somma sempre da 1 a 4 sugli indici ripetuti due volte):

$$\left[\left(\frac{\partial}{\partial x_\alpha} + i\varphi_\alpha\right)\left(\frac{\partial}{\partial x_\alpha} - i\varphi_\alpha\right) - k^2\right]\psi = 0, \tag{1}$$

dove s'è posto:

$$x_1,\ x_2,\ x_3 = x,\ y,\ z;\ x_4 = ict$$

$$\varphi_1,\ \varphi_2,\ \varphi_3 = \frac{2\pi e}{hc}\cdot\mathfrak{A}_x,\ \mathfrak{A}_y,\ \mathfrak{A}_z;\ \varphi_4 = \frac{2\pi e}{hc}\cdot iV$$

$$k^2 = \frac{4\pi^2 m_0^2 c^2}{h^2}. \tag{2}$$

$\mathfrak{A}$, V sono i potenziali; e, m_0, c, h le consuete costanti universali, $i = \sqrt{-1}$. Va notato in particolare che con l'introduzione di tetravettori con quarta componente immaginaria non si distruggono le proprietà di realtà. Si tratta solo di un mezzo formale di calcolo, per non dover scrivere in tutte le somme il quarto termine

[1]Der Energieimpulssatz der Materiewellen, Annalen der Physik **82**, 265-272 (1927).

[2]O. Klein, Zeitschr. f. Phys. **37**, 895 (1926); V. Fock, ibidem **38**, 242 (1926); J. Kudar, Ann. d. Phys. **81**, 632 (1926); W. Gordon, Zeitschr. f. Phys. **40**, 117 (1926).

[3]Ann. d. Phys. **79**, 754 (1926).

[4]op. cit.

[5]Th. de Donder e H. van den Dungen, Compt. rend. 5-7-1926.

in particolare con il segno cambiato. Il passaggio al complesso coniugato perciò riguarda solo le i che appaiono esplicitamente e la funzione ψ.

Secondo Gordon (loc. cit.) la (1) è derivabile da un integrale di Hamilton con la funzione di Lagrange (reale)

$$L_m = (\psi_\alpha + i\varphi_\alpha\psi)(\bar{\psi}_\alpha - i\varphi_\alpha\bar{\psi}) + k^2\psi\bar{\psi}. \tag{3}$$

Barra = complesso coniugato. Per abbreviazione si è posto

$$\psi_\alpha = \frac{\partial\psi}{\partial x_\alpha},\ \bar{\psi}_\alpha = \frac{\partial\bar{\psi}}{\partial x_\alpha}. \tag{4}$$

L'indice α va quindi eseguito *dopo* la barra. Per eseguire le derivate variazionali si devono, come ha notato Gordon, variare ψ e $\bar{\psi}$ *come indipendenti.* Si riconosce facilmente che si arriva allo stesso risultato che se si variassero indipendentemente la parte reale e la parte immaginaria di ψ (come è propriamente giusto). Così una derivata variazionale si scrive

$$\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(\frac{\partial L_m}{\partial\bar{\psi}_\alpha}\right) - \frac{\partial L_m}{\partial\bar{\psi}} = 0, \tag{5}$$

in accordo con la (1); l'altra non dà niente di nuovo. Se si moltiplica la (5) per $\bar{\psi}$ si ottiene facilmente

$$\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(\bar{\psi}\frac{\partial L_m}{\partial\bar{\psi}_\alpha}\right) = \bar{\psi}_\alpha\frac{\partial L_m}{\partial\bar{\psi}_\alpha} + \bar{\psi}\frac{\partial L_m}{\partial\bar{\psi}} = L_m, \tag{6}$$

quest'ultima come L_m è omogenea di primo grado rispetto alle cinque quantità $\bar{\psi}$ e $\bar{\psi}_\alpha$. Se si passa al complesso coniugato, il secondo membro non cambia, e quindi per sottrazione

$$\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(\bar{\psi}\frac{\partial L_m}{\partial\bar{\psi}_\alpha} - \psi\frac{\partial L_m}{\partial\psi_\alpha}\right) = 0. \tag{7}$$

Questa è per Gordon l'*equazione di continuità dell'elettricità.* Si riconosce che

$$\bar{\psi}\frac{\partial L_m}{\partial\bar{\psi}_\alpha} - \psi\frac{\partial L_m}{\partial\psi_\alpha} = i\frac{\partial L_m}{\partial\varphi_\alpha}. \tag{8}$$

Definiamo la *tetracorrente* come

$$s_\alpha = -\lambda\frac{\partial L_m}{\partial\varphi_\alpha}, \tag{9}$$

dove λ è una costante universale da determinarsi. Intendiamo con s_α le quattro quantità, che nella teoria di Lorentz si scrivono

$$s_1,\ s_2,\ s_3 = \rho\frac{\mathfrak{v}}{c},\ s_4 = i\rho. \tag{10}$$

Completiamo ora la nostra funzione di Lagrange (3), com'è possibile secondo la (9), in modo che per variazione di φ_α si ottengano da essa le leggi del campo elettromagnetico. Poniamo

$$L_e = \frac{1}{4}f_{\alpha\beta}f_{\alpha\beta} = \frac{1}{4}\left(\frac{\partial\varphi_\beta}{\partial x_\alpha} - \frac{\partial\varphi_\alpha}{\partial x_\beta}\right)\left(\frac{\partial\varphi_\beta}{\partial x_\alpha} - \frac{\partial\varphi_\alpha}{\partial x_\beta}\right) \tag{11}$$

con l'abbreviazione

$$f_{\alpha\beta} = \frac{\partial\varphi_\beta}{\partial x_\alpha} - \frac{\partial\varphi_\alpha}{\partial x_\beta}. \tag{12}$$

Secondo la (2) e le formule consuete si ha

$$\begin{aligned} f_{14} = -\frac{2\pi e}{hc} i\mathfrak{E}_x,\ f_{24} = -\frac{2\pi e}{hc} i\mathfrak{E}_y,\ f_{34} = -\frac{2\pi e}{hc} i\mathfrak{E}_z; \\ f_{23} = \frac{2\pi e}{hc}\mathfrak{H}_x,\ f_{31} = \frac{2\pi e}{hc}\mathfrak{H}_y,\ f_{12} = \frac{2\pi e}{hc}\mathfrak{H}_z; \end{aligned} \tag{13}$$

dove $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{H}$ rappresentano il campo nelle unità solite. Assumiamo ora come funzione di Lagrange

$$L = L_m + L_e \tag{14}$$

e otteniamo per variazione rispetto a φ_β nel modo noto

$$\frac{\partial f_{\alpha\beta}}{\partial x_\alpha} = \frac{\partial L}{\partial\varphi_\beta} = -\frac{s_\beta}{\lambda}. \tag{15}$$

Con il valore della costante

$$\lambda = \frac{hc}{8\pi^2 e}$$

la (15) reppresenta la cosidetta *seconda quaterna delle equazioni di Maxwell - Lorentz*, mentre la *prima* è per la (12) soddisfatta identicamente. Con la (12) e con la condizione aggiuntiva di Maxwell ($\partial\varphi_\alpha/\partial x_\alpha = 0$) la (15) diventa l'equazione del potenziale

$$\frac{\partial^2\varphi_\beta}{\partial x_\alpha \partial x_\alpha} = -\frac{s_\beta}{\lambda}. \tag{15'}$$

Dalla (15′) (e dalla condizione aggiuntiva di Maxwell) è facile verificare che

$$\frac{\partial T_{\rho\sigma}}{\partial x_\sigma} = -\frac{f_{\rho\sigma}s_\sigma}{\lambda}, \tag{16}$$

dove

$$T_{\rho\sigma} = f_{\rho\alpha}f_{\sigma\alpha} - \delta_{\rho\sigma}L_e \tag{17}$$

è il noto tensore degli sforzi, dell'impulso e dell'energia di Maxwell (a meno di una costante universale). Il secondo membro della (16) indica secondo Lorentz l'energia o l'impulso sottratto dall'elettrone al campo. Questo secondo membro si può per mezzo della (9) e dell'equazione d'onda (5) di ψ parimenti esprimere come divergenza di un tensore, il tensore d'energia-impulso della carica (ovvero della "materia"). Si ottiene immediatamente

$$-\frac{f_{\rho\sigma}s_\sigma}{\lambda} = \left(\frac{\partial\varphi_\sigma}{\partial x_\rho} - \frac{\partial\varphi_\rho}{\partial x_\sigma}\right)\frac{\partial L_m}{\partial\varphi_\sigma} = \frac{\partial L_m}{\partial\varphi_\sigma}\frac{\partial\varphi_\sigma}{\partial x_\rho} - \frac{\partial}{\partial x_\sigma}\left(\varphi_\rho\frac{\partial L_m}{\partial\varphi_\sigma}\right), \tag{18}$$

l'ultima per la conservazione della tetracorrente [Eq. (7) e (8)]. Si trova inoltre

$$\frac{\partial L_m}{\partial x_\rho} = \frac{\partial L_m}{\partial \varphi_\sigma}\frac{\partial \varphi_\sigma}{\partial x_\rho} + \frac{\partial L_m}{\partial \bar{\psi}}\bar{\psi}_\rho + \frac{\partial L_m}{\partial \psi}\psi_\rho + \frac{\partial L_m}{\partial \bar{\psi}_\sigma}\frac{\partial \bar{\psi}_\sigma}{\partial x_\rho} + \frac{\partial L_m}{\partial \psi_\sigma}\frac{\partial \psi_\sigma}{\partial x_\rho}. \tag{19}$$

Ma per la (4)

$$\frac{\partial \psi_\sigma}{\partial x_\rho} = \frac{\partial \psi_\rho}{\partial x_\sigma} \quad \text{etc.}, \tag{20}$$

così è possibile trasformare gli ultimi due termini come in un'integrazione per parti, con la quale trasformazione quattro termini si cancellano per la (5). Si ottiene

$$\frac{\partial L_m}{\partial x_\rho} = \frac{\partial L_m}{\partial \varphi_\sigma}\frac{\partial \varphi_\sigma}{\partial x_\rho} + \frac{\partial}{\partial x_\sigma}\left(\bar{\psi}_\rho \frac{\partial L_m}{\partial \bar{\psi}_\sigma} + \psi_\rho \frac{\partial L_m}{\partial \psi_\sigma}\right) \tag{21}$$

Sottraiamo questa dalla (18) e otteniamo

$$\begin{aligned} -\frac{f_{\rho\sigma}s_\sigma}{\lambda} &= \frac{\partial L_m}{\partial x_\rho} - \frac{\partial}{\partial x_\sigma}\left(\bar{\psi}_\rho \frac{\partial L_m}{\partial \bar{\psi}_\sigma} + \psi_\rho \frac{\partial L_m}{\partial \psi_\sigma} + \varphi_\rho \frac{\partial L_m}{\partial \varphi_\sigma}\right) \\ &= \frac{\partial}{\partial x_\sigma}\left(\delta_{\rho\sigma}L_m - \bar{\psi}_\rho \frac{\partial L_m}{\partial \bar{\psi}_\sigma} - \psi_\rho \frac{\partial L_m}{\partial \psi_\sigma} - \varphi_\rho \frac{\partial L_m}{\partial \varphi_\sigma}\right) \\ &= -\frac{\partial S_{\rho\sigma}}{\partial x_\sigma}, \end{aligned} \tag{22}$$

dove introduciamo il *tensore dell'energia delle cariche* o *della "materia"*:

$$S_{\rho\sigma} = \bar{\psi}_\rho \frac{\partial L_m}{\partial \bar{\psi}_\sigma} + \psi_\rho \frac{\partial L_m}{\partial \psi_\sigma} + \varphi_\rho \frac{\partial L_m}{\partial \varphi_\sigma} - \delta_{\rho\sigma}L_m. \tag{23}$$

Dalla (16) e dalla (22) si ottiene

$$\underline{\frac{\partial}{\partial x_\sigma}(T_{\rho\sigma} + S_{\rho\sigma}) = 0} \tag{24}$$

come complessiva *legge di conservazione dell'energia* e *dell'impulso* per il campo elettromagnetico e per il campo d'onda di de Broglie presi insieme.

Il calcolo fornisce il tensore $S_{\rho\sigma}$ *simmetrico*. Si trova facilmente come espressione esplicita

$$S_{\rho\sigma} = \bar{\psi}_\rho\psi_\sigma + \bar{\psi}_\sigma\psi_\rho + i\varphi_\sigma(\bar{\psi}_\rho\psi - \psi_\rho\bar{\psi}) + i\varphi_\rho(\bar{\psi}_\sigma\psi - \psi_\sigma\bar{\psi}) + 2\psi\bar{\psi}\varphi_\rho\varphi_\sigma - \delta_{\rho\sigma}L_m, \tag{25}$$

ovvero la seguente, modellata più strettamente sulla forma (3) di L_m:

$$S_{\rho\sigma} = (\psi_\rho + i\varphi_\rho\psi)(\bar{\psi}_\sigma - i\varphi_\sigma\bar{\psi}) + (\psi_\sigma + i\varphi_\sigma\psi)(\bar{\psi}_\rho - i\varphi_\rho\bar{\psi}) - \delta_{\rho\sigma}L_m. \tag{25'}$$

Lo scalare di Laue (somma diagonale) $S_{\sigma\sigma}$ *non* è nullo, a differenza di $T_{\sigma\sigma}$. Si trova inoltre facilmente

$$S_{\sigma\sigma} = -2(L_m + k^2\psi\bar{\psi}). \tag{26}$$

Il tensore complessivo ammette la seguente rappresentazione, ben nota in casi analoghi, mediante la funzione di Lagrange complessiva

$$(27)\quad T_{\rho\sigma}+S_{\rho\sigma}=\frac{\partial L}{\partial\left(\frac{\partial\varphi_\rho}{\partial x_\alpha}\right)}\frac{\partial\varphi_\sigma}{\partial x_\alpha}+\frac{\partial L}{\partial\left(\frac{\partial\varphi_\alpha}{\partial x_\rho}\right)}\frac{\partial\varphi_\alpha}{\partial x_\sigma}+\frac{\partial L}{\partial\bar{\psi}_\rho}\bar{\psi}_\sigma+\frac{\partial L}{\partial\psi_\rho}\psi_\sigma+\frac{\partial L}{\partial\varphi_\rho}\varphi_\sigma-\delta_{\rho\sigma}L,$$

nella quale il parallelo è con la rappresentazione della funzione di Hamilton mediante la funzione di Lagrange nella meccanica del *punto*.

Si deve ricordare che le nostre componenti dei tensori $S_{\rho\sigma}$ e $T_{\rho\sigma}$ hanno la dimensione fisica cm^{-4}. Devono essere moltiplicate per la costante

$$\frac{h^2c^2}{32\pi^3e^2},$$

con la dimensione del quadrato di una carica, per rappresentare fisicamente l'energia, l'impulso e gli sforzi (n.b.: ulteriori difetti dimensionali possono essere notoriamente ripianati con potenze di c).

Se ci si chiede ora, se questa teoria di campo in sé chiusa - a prescindere dalla provvisoria mancata considerazione dello spin dell'elettrone - corrisponda alla realtà nel modo come per l'innanzi si sperava da teorie simili, la risposta è *negativa.* Gli esempi calcolati, per tutti l'atomo di idrogeno, mostrano infatti che nell'equazione d'onda (1) *non* si è sostituito quel potenziale, che risulta dalle equazioni del potenziale (15') con la tetracorrente (9). Invece è noto che per l'atomo di idrogeno si introduce nella (1) per φ_α il potenziale *prefissato* del nucleo ed eventuali campi elettromagnetici "esterni", e si risolve l'equazione per ψ. Dalla (9) si calcola poi la distribuzione delle correnti "prodotta" da questa ψ, da questa secondo la (15') il potenziale da essa prodotto. Questo dà poi, con l'aggiunta del potenziale prefissato, il potenziale con il quale l'atomo opera all'esterno come un tutto. Si trova così (con un'opportuna normalizzazione della ψ, per la quale in verità manca inoltre il fondamento nella teoria di campo) da un lato la *neutralizzazione* della carica del nucleo a grande distanza, dall'altro la *radiazione.* Per quanto riguarda il tentativo naturale di sostituire il potenziale ora trovato nell'equazione (1) e di calcolare una "seconda approssimazione", si deve dire: con il *potenziale di neutralizzazione* non si può procedere affatto in questo modo, si modificherebbero *completamente* i valori dei termini, perciò sarebbero necessari molti ulteriori passi di approssimazione che, quando il procedimento converge, senza alcun dubbio *non* riportano ai corretti termini dell'idrogeno, ma (con carica nucleare 2) ai termini dell'*atomo* di elio. Invece, quando si trattassero i *potenziali radiativi* nel modo descritto, si dovrebbe ottenere la necessaria *correzione radiativa*[6], almeno quando si assuma che *una* vibrazione normale sia eccitata *fortemente*, e tutte le rimanenti assai *debolmente.*

Proprio la *proprietà di chiusura* delle equazioni di campo appare spezzata in modo singolare. Oggi questo non si riesce a capire interamente, ma lo si può collegare alle due cose seguenti.

1. Lo scambio di energia ed impulso tra il campo elettromagnetico e la "materia" *non* avviene in realtà nel modo continuo, come la legge di campo (24) fa credere.

2. Anche nella teoria di Lorentz nelle equazioni di moto di un elettrone si deve introdurre solo il campo degli *altri* elettroni, non il campo proprio. La reazione di

[6]vedi Ann. d. Phys. **81**, 129 (1926).

quest'ultimo è per la parte preponderante tenuta in conto *fin dall'enunciazione delle equazioni di moto* come *massa* elettromagnetica. Ad esso corrisponde nell'equazione (1) il termine con k^2. In seconda approssimazione risulta poi anche nella teoria di Lorentz dalla reazione del campo proprio la forza di reazione della radiazione.

Se la soluzione della difficoltà realmente si debba cercare solo nell'interpretazione puramente *statistica* della teoria di campo avanzata da alcune parti[7] lo dobbiamo lasciare in via del tutto provvisoria indeciso. Personalmente questa interpretazione mi pare oggi non più[8] decisivamente soddisfacente, anche se essa si rivela utile in pratica. Essa mi pare significhi una troppo fondamentale rinuncia alla comprensione del singolo evento.

Merita menzione un aspetto *soddisfacente* della difficoltà di cui si parla. Mentre la natura con il suo comportamento reale rompe la proprietà di chiusura del sistema di equazioni di campo, essa viene incontro alle nostre capacità matematiche in misura sorprendente: la teoria dell'atomo di idrogeno diventerebbe matematicamente inaccessibile, se i φ_α nell'equazione (1) non indicassero potenziali *dati*, ma se al posto di questi si dovessero introdurre quelli che si calcolano per mezzo della (9) e della (15') dalla soluzione ψ da cercarsi.

Zürich, Physikalische Institut der Universität.

(ricevuto il 10 dicembre 1926)

[7] M. Born, Zeitschr. f. Phys. **38**, 803 (1926); **40**, 167 (1926); P.A.M. Dirac, Proc. Roy. Soc. **A. 112**, 661 (1926); anche W. Gordon, op. cit.

[8] vedi Die Naturwissenschaften **12**, 720 (1924).

Scambio d'energia nella meccanica ondulatoria[1]

E. Schrödinger

La nota seguente è immediatamente connessa con una serie di comunicazioni[2] apparse in questi Annalen, e impieghiamo qui la "meccanica ondulatoria" nella forma *multi*dimensionale là quasi completamente elaborata, che si può portare in accordo con la meccanica quantistica di Heisenberg e Dirac, non in quella forma *tetra-* (o secondo O. Klein *penta-*) dimensionale[3], che corrisponde all'originaria concezione di de Broglie e possibilmente coglie meglio l'essenza della questione, ma per il momento è solo un programma, poiché con essa non si è in grado ora di formulare il problema a *più* elettroni. - Devo chiedere il permesso di sviluppare qui daccapo alcune cose importanti, che da allora sono state esposte in altri lavori (Heisenberg, Dirac, Jordan). Potrò così rendere comprensibili anche quelle che nei nuovi sistemi di numeri (matrici, q-numeri) utilizzati da quegli autori non sono state ancora elaborate[4].

§1. Il metodo della variazione delle costanti[5]

Per il problema perturbativo risolto in Q III (§§1 e 2) si sono da allora sviluppati dei metodi più generali[6] per molti scopi ampiamente superiori. Consideriamo un sistema conservativo, la cui equazione d'onda [Q IV, equazione (4")]

$$\Delta\psi - \frac{8\pi^2}{h^2}V\psi - \frac{4\pi i}{h}\dot{\psi} = 0 \tag{1}$$

abbia le autosoluzioni normalizzate

$$\psi_k e^{\frac{2\pi i E_k t}{h}}, \tag{2}$$

dove ψ_k dipende solo dalle coordinate del sistema[7]. ψ_k soddisfa quindi all'equazione indipendente dal tempo

$$\Delta\psi_k + \frac{8\pi^2}{h^2}(E_k - V)\psi_k = 0. \tag{3}$$

---

[1] Energieaustausch nach der Wellenmechanik, Annalen der Physik **83**, 956-968 (1927).

[2] "Quantisierung als Eigenwertproblem", comunicazioni dalla prima alla quarta; questi Annalen **79**, 361, 489; **80**, 437; **81**, 109. (1926); citate nel seguito con Q I - IV.

[3] O. Klein, Zeitschr. f. Phys. **37**, 895 (1926); W. Gordon, ibidem **40**, 117 (1926); Q IV, 131; E. Schrödinger, Ann. d. Phys. **82**, 257 e 265 (1927); e altri.

[4] Si può paragonare la difficoltà generalmente percepita con la seguente. Se qualcuno per esempio prima sviluppasse la vecchia teoria con azione a distanza dell'elettricità in coordinate cartesiane e poi passando alla teoria di Maxwell introducesse insieme il calcolo vettoriale, l'ascoltatore avrebbe molta difficoltà a distinguere tra il *contenuto* fisicamente nuovo e la nuova *forma*. (Così può facilmente sfuggire in P.A.M. Dirac (Proc. Roy. Soc. **A114**, 250, §3) che qui si è introdotta una ipotesi fisica totalmente nuova, ossia un uso "scalato" o "raddoppiato" di quel processo che Heisenberg chiama "passaggio alle matrici", Dirac "passaggio ai *q*-numeri", ed io "passaggio alla meccanica ondulatoria").

[5] P.A.M. Dirac, Proc. Roy. Soc. **A112**, 674 (1926).

[6] vedi in particolare M. Born, Zeitschr. f. Phys. **40**, 172 (1926).

[7] La funzione d'onda ψ dev'essere essenzialmente complessa. Solo per semplicità delle formule poniamo reale la funzione delle coordinate ψ_k.

La soluzione generale della (1) è

$$\psi = \sum_k c_k \psi_k e^{\frac{2\pi i E_k t}{h}}, \tag{4}$$

dove i c_k sono costanti arbitrarie in generale complesse, che chiamiamo *ampiezze* (e i quadrati dei loro valori assoluti per brevità quadrati delle ampiezze).

Introduciamo ora una leggera perturbazione, temporalmente costante, cioè sostituiamo nella (1) V con $V+r$, dove r è ovunque una funzione piccola delle coordinate. Cerchiamo di soddisfare l'equazione così perturbata ancora con la (4), considerando le ampiezze come funzioni lentamente variabili del tempo. Per questa dipendenza temporale si ottiene, sostituendo la (4) nell'equazione (perturbata) (1) e tenendo conto della (3)

$$-\frac{8\pi^2}{h^2} r \sum_k c_k \psi_k e^{\frac{2\pi i E_k t}{h}} - \frac{4\pi i}{h} \sum_k \dot{c_k} \psi_k e^{\frac{2\pi i E_k t}{h}} = 0. \tag{5}$$

Come condizione necessaria e sufficiente per l'annullarsi del primo membro usiamo la condizione che esso sia ortogonale ad ogni funzione del sistema ortogonale completo ψ_l. Otteniamo così le infinite equazioni

$$\dot{c_l} = \frac{2\pi i}{h} \sum_k \varepsilon_{kl} c_k e^{\frac{2\pi i (E_k - E_l) t}{h}} \tag{6}$$

con

$$\varepsilon_{kl} = \int r \psi_k \psi_l dx. \tag{7}$$

L'equazione (6) non implica alcuna approssimazione.

Siano ora tutte le differenze degli autovalori grandi rispetto agli "elementi della matrice di perturbazione" ε_{kl}, allora ogni c_k $(k \neq l)$ può essere considerato approssimativamente costante durante il periodo del fattore esponenziale associato; tutti questi termini producono quindi solo piccole perturbazioni oscillatorie su c_l. Solo per il termine della somma $k = l$ ciò non vale, perché in questo caso il fattore esponenziale è 1. A prescindere da quelle piccole oscillazioni si ha quindi

$$\dot{c_l} = \frac{2\pi i}{h} \varepsilon_{ll} c_l; \; c_l = c_l^0 e^{\frac{2\pi i \varepsilon_{ll} t}{h}}. \tag{8}$$

I *moduli* delle ampiezze risultano quindi (in questa approssimazione) essenzialmente immutati, solo le loro *fasi* subiscono variazioni secolari (che si possono anche considerare come *perturbazioni degli autovalori*, vedi Q III).

Se nel sistema imperturbato compaiono differenze degli autovalori, che siano confrontabili con le quantità perturbative ε_{kl} o piccole rispetto ad esse, allora le ampiezze di tutte quelle oscillazioni proprie, che appartengono al gruppo di autovalori vicini, sono tramite le equazioni (6) nell'approssimazione prima considerata tra loro accoppiate in modo tale che non più il singolo quadrato dell'ampiezza è costante, ma solo la somma di essi. - Lo si dimostra così. Consideriamo in particolare il caso di un autovalore di molteplicità α. c_l sia l'ampiezza di una oscillazione propria corrispondente. Allora vi saranno nel secondo membro della (6) α fattori esponenziali uguali a 1, rimangono nell'approssimazione considerata α termini secolari, e proprio relativi alle ampiezze, che corrispondono al medesimo autovalore. Si devono pertanto considerare tutte le α equazioni (6), nel primo membro delle quali compaia una di queste ampiezze. Otteniamo quindi per la loro determinazione il sistema di equazioni finito, chiuso in sé

$$\dot{c}_l = \frac{2\pi i}{h} \sum_{k=1}^{\alpha} \varepsilon_{kl} c_k; \;\; l = 1, 2, \dots \alpha, \tag{9}$$

dove abbiamo numerato per semplicità le α ampiezze che intervengono con $1, 2, \dots$ α. Si trova quindi in generale uno scambio tra ampiezze che appartengono ad uno stesso autovalore α, - nell'approssimazione considerata - solo tra quelle. Se si moltiplica la (9) per il complesso coniugato c_l^*, si prende la parte reale e si somma su tutti gli l, si trova a secondo membro (a causa della simmetria di ε_{kl}) zero, cioè

$$\sum_{k=1}^{\alpha} c_l c_l^* = \text{ cost.} \tag{10}$$

è un integrale della (9). Del resto le equazioni sono naturalmente assai facili da integrare, poiché gli ε_{kl} sono costanti. Ci si riconduce alla trasformazione agli assi principali riportata in Q III, pag. 453. La soluzione è in accordo con la "soluzione perturbativa approssimata d'ordine zero", connessa con gli "autovalori perturbati in prima approssimazione" di cui là si parla.

§2. La spiegazione secondo la meccanica ondulatoria degli scambi d'energia quantizzati

La situazione assai semplice prima delineata, come hanno notato Heisenberg[8] e Jordan[9], fornisce la spiegazione secondo la meccanica ondulatoria di quel fatto, che si può ben indicare come il fondamento empirico della teoria quantistica, il fatto cioè che tutti i fenomeni in un sistema fisico si influenzano tra loro solo quando coincidono rispetto ad una "differenza di livelli", o approssimativamente coincidono, e che l'influenza riguarda sempre solo i quattro livelli critici e ciò sempre in modo che uno dei due sistemi si sposta verso il suo livello più alto a spese dell'altro, che subisce uno spostamento "equivalente" in senso opposto.

Consideriamo due sistemi con le equazioni d'onda

$$\Delta_1 \psi - \frac{8\pi^2}{h^2} V_1 \psi - \frac{4\pi i}{h} \dot{\psi} = 0 \tag{11}$$

(autofunzioni: ψ_k corrispondenti a E_k)

$$\Delta_2 \varphi - \frac{8\pi^2}{h^2} V_2 \varphi - \frac{4\pi i}{h} \dot{\varphi} = 0 \tag{12}$$

(autofunzioni: φ_l corrispondenti a F_l)

[8]W. Heisenberg, Zeitschr. f. Phys. **38**, 411 (1926); **40**, 501 (1926).
[9]P. Jordan, ibidem **40**, 661 (1927).

e uniamoli concettualmente ("con accoppiamento nullo") in *un* sistema, di modo che l'equazione d'onda di questo, come facilmente si ricava, sarà

$$(\Delta_1 + \Delta_2)\Psi - \frac{8\pi^2}{h^2}(V_1 + V_2)\Psi - \frac{4\pi i}{h}\dot{\Psi} = 0 \tag{13}$$

con le autofunzioni $\psi_k \varphi_l$ corrispondenti agli autovalori $E_k + F_l$. Aggiungiamo come nel §1 a $V_1 + V_2$ un piccolo termine di accoppiamento r. Succederà che a causa dell'unione concettuale compariranno o meno nuove degenerazioni, ovvero degenerazioni approssimate (cioè autovalori multipli o molto vicini). Se ciò non succede, cioè se tutti gli autovalori $E_k + F_l$ sono abbastanza nettamente separati, i due sistemi non si influenzano reciprocamente nella prima approssimazione trattata al §1. Ma se nella (13) compaiono nuove degenerazioni, si trova invece uno scambio secolare delle ampiezze.

Sia per esempio per quattro valori particolari k, k', l, l'

$$E_k + F_{l'} = E_{k'} + F_l \tag{14}$$

(ciò richiede che nei due sistemi coincida la differenza d'energia $E_k - E_{k'} = F_l - F_{l'}$). Allora all'autovalore (14) corrispondono le *due* autofunzioni

$$\psi_k \varphi_{l'} \quad \text{e} \quad \psi_{k'} \varphi_l. \tag{15}$$

Se le loro due ampiezze sono c_1, c_2, tra di esse avviene uno scambio secondo le equazioni

$$\begin{aligned} \dot{c_1} &= \frac{2\pi i}{h}(\varepsilon_{11} c_1 + \varepsilon_{12} c_2), \\ \dot{c_2} &= \frac{2\pi i}{h}(\varepsilon_{12} c_1 + \varepsilon_{22} c_2), \end{aligned} \tag{16}$$

dove le costanti ε_{ik} sono definite da un opportuna generalizzazione dell'equazione (7) §1.

Evidentemente bisogna aspettarsi per esempio un accrescimento dell'ampiezza corrispondente a $\psi_k \varphi_{l'}$ a spese della seconda nel senso duplice che in un sistema l'ampiezza di ψ_k si accresce a spese di quella di $\psi_{k'}$, mentre nell'altro sistema l'ampiezza di $\varphi_{l'}$ si accresce a spese di quella di φ_l. La situazione si può pensare così: la funzione d'onda del sistema complessivo descrive d'un colpo sia lo stato del primo sistema (quando si trascuri il piccolo accoppiamento e l'esistenza del secondo sistema) sia anche il vice versa. Certo allora appaiono come ampiezze non più semplici numeri, ma combinazioni lineari delle autofunzioni dell'*altro*, quindi secondo questa interpretazione, di un sistema completamente esterno. Ma questo non disturba particolarmente. Per il calcolo di una qualche quantità fisica che riguarda il sistema considerato è semplice eliminare per integrazione le coordinate del sistema esterno, in modo analogo a come è stato descritto in Q IV, §7. Si trova così per esempio per il *quadrato dell'ampiezza* di φ_l la somma dei quadrati delle ampiezze di tutte quelle autofunzioni del sistema totale che contengono φ_l[10].

[10]La scomodità, che nell'ambito del metodo di calcolo semplice qui sviluppato non ci si possa liberare definitivamente delle autofunzioni esterne, cioè che non si possa dare semplicemente l'ampiezza complessa di φ_l nel sistema isolato, appare stare all'essenza della situazione. Non è infatti possibile una reale eliminazione dell'accoppiamento senza prendere in considerazione un ulteriore sistema, ossia la radiazione (ovvero l'"etere"). Per descrivere correttamente la situazione: i termini di accoppiamento coulombiano si sentono a lungo prima che diventino trascurabili, e debbano essere sostituiti dall'interazione radiativa.

Troviamo quindi che, senza presupporre livelli di energia discreti e scambi di energia quantizzati, e in particolare senza che si debba considerare altro significato degli autovalori che quello di frequenze, possiamo dare una semplice spiegazione del fatto che una interazione fisica abbia luogo in modo del tutto preferenziale tra *quei* sistemi, nei quali secondo la vecchia interpretazione "interviene lo stesso elemento d'energia". Si tratta, come ha ben rilevato Heisenberg, di un semplice fenomeno di risonanza con battimenti, come nel cosidetto pendolo simpatico. Senza il postulato dei quanti si perviene ad una situazione, che è esattamente *come se* il postulato dei quanti valesse per davvero. Questa situazione "come se" non è per noi niente di nuovo. Anche le frequenze emesse spontaneamente si comportano come se gli autovalori fossero livelli di energia discreti e valesse la condizione delle frequenze di Bohr.

Non ci costringono i principî della ricerca in generale tenuti per giusti ad una estrema prudenza, potrei quasi dire a diffidare del postulato dei quanti - a prescindere interamente dalla sua incomprensibilità come assioma? È psicologicamente così chiaro: dal momento che una volta si è introdotta l'interpretazione dei "termini" come livelli d'energia discreti, si vede in ogni fenomeno di scambio di nuova scoperta una conferma di questa interpretazione, anche quando in natura non succede di fatto nient'altro che il suddetto fenomeno di risonanza. *Non* si obbietti: ma proprio l'interpretazione dei termini come livelli d'energia, se non da altro, non è sostenuta oltre ogni dubbio dagli *esperimenti di urto di elettroni*; non vorrai mettere in dubbio, che la differenza di potenziale attraverso la quale cade misura l'energia cinetica del singolo elettrone? - Replico: mi chiedo se non sia molto più giusto portare in primo piano, al posto del concetto "energia cinetica del singolo elettrone", quello della frequenza dell'onda di de Broglie. È noto che per queste onde avviene, all'attraversamento di una differenza di potenziale, proprio quella variazione di frequenza che corrisponde all'energia cinetica ricevuta, e che l'equazione d'onda dà proprio quei cammini curvati dei raggi, che si osservano di fatto nella determinazione di e/m e di v. -

Non posso reprimere l'impressione: lasciare il postulato quantico *accanto* al fenomeno di risonanza richiede di accettare *due* spiegazioni per lo stesso fatto. Ma allora succede come per le scuse: una è certamente falsa, di solito tutt'e due.- Nell'ultima sezione alla situazione "come se" di cui abbiamo parlato qui ne aggiungeremo una ulteriore.

§3. Ipotesi statistica

Se si prova ad ottenere dalle equazioni (9) una asserzione circa la ripartizione media delle ampiezze per un'interazione continuata, non si riesce, come nel caso analogo della meccanica classica, senza una particolare ipotesi aggiuntiva di carattere statistico. Come le equazioni fondamentali della meccanica, anche le equazioni (9) sono evidentemente insensibili ad un cambiamento di segno del tempo, poiché esso può essere compensato da uno scambio di i con $-i$ (cambiamento di segno di tutte le fasi, corrispondente al cambiamento di segno di tutte le velocità in meccanica classica). Ciò mostra che nel processo di risonanza non è insita nessuna "tendenza all'equilibrio". Infatti il calcolo mostra che i valori medi temporali dei quadrati delle ampiezze dipendono in generale dai loro valori iniziali. Per ottenere affermazioni statistiche è necessaria quindi un'ipotesi sulla probabilità a priori dei valori iniziali. Si mostra che solo *una* ipotesi è possibile, quando si impongano le condizioni:

1. L'ipotesi dev'essere indipendente dall'*istante* per il quale essa è introdotta, cioè la probabilità di determinati valori delle ampiezze non deve mutare nel corso del tempo a causa dell'azione delle equazioni (9).

2. Essa dev'essere indipendente da quale si scelga degli infiniti sistemi ortogonali, che vanno l'uno nell'altro mediante un'arbitraria sostituzione ortogonale riguardante le autofunzioni appartenenti allo stesso autovalore. (Vedi Q III, pag. 448 e seguenti).

Ci si persuade facilmente che sotto queste condizioni non è possibile altra ipotesi che questa: la densità di probabilità in uno spazio, nel quale si riportino le parti reale ed immaginaria delle ampiezze come coordinate ortogonali è funzione solo delle *somme* dei quadrati delle ampiezze corrispondenti ad autovalori numericamente distinti.

Quest'ipotesi ha per conseguenza che i valori medi dei quadrati delle ampiezze che corrispondono allo *stesso* autovalore sono uguali per simmetria, ovvero che ogni somma parziale è essa stessa proporzionale al numero di termini della somma. Utilizzeremo nel seguito solo questa conseguenza, solo nel caso di una degenerazione estremamente elevata e solo per somme parziali con un numero di termini estremamente grande.

Si deve rinunciare al tentativo di presentare questi valori medi, secondo una qualche analogia con l'ipotesi quasi ergodica, come vere medie temporali. È chiaro che le equazioni (9) fanno cadere una tale ipotesi (esse possiedono almeno α integrali olomorfi indipendenti, ossia i quadrati delle ampiezze delle "oscillazioni normali"). Il caso appare del tutto analogo a quello del corpo rigido ideale, per il quale la costanza dei quadrati delle ampiezze delle oscillazioni normali pare escludere *a rigore* ogni applicazione della statistica.

Non posso trascurare di dire che nell'*effetto Stark* la stessa ipotesi riguardo ai quadrati delle ampiezze delle oscillazioni proprie corrispondenti ad un medesimo autovalore è necessaria per ottenere i corretti rapporti di intensità delle componenti della struttura fine (vedi Q III, pag. 465).

§4. Sistema arbitrario in un bagno termico

Ritorniamo alle considerazioni del §2. Assumeremo ora che nel sistema totale si debba considerare (e d'ora in poi) eccitato *solo* l'autovalore (14). Inoltre assumeremo ora che i quattro autovalori di cui si parla dei sistemi parziali E_k, $E_{k'}$, F_l, $F_{l'}$, che abbiamo assunto tacitamente nel §2 come *semplici*, abbiano le molteplicità α_k, $\alpha_{k'}$, α_l, $\alpha_{l'}$. L'autovalore (14) ha allora molteplicità $\alpha_k\alpha_{l'} + \alpha_{k'}\alpha_l$, quindi al posto di *due* autofunzioni degeneri (15) compaioni due *gruppi* con $\alpha_k\alpha_{l'}$ ovvero $\alpha_{k'}\alpha_l$ componenti. Secondo l'ipotesi statistica del §3 la somma dei quadrati delle ampiezze del primo gruppo sta a quella del secondo gruppo come

$$\alpha_k\alpha_{l'} \text{ sta a } \alpha_{k'}\alpha_l. \tag{17}$$

Per quanto detto alla fine del §2 è questo anche il rapporto tra la somma dei quadrati delle ampiezze di tutte le oscillazioni proprie corrispondenti ad E_k e la somma dei quadrati delle ampiezze di tutte le oscillazioni corrispondenti a $E_{k'}$ nel primo sistema considerato da solo.

Secondo la nostra ipotesi statistica l'interazione con il sistema esterno forza quello in esame da un rapporto *indeterminato* tra i quadrati delle ampiezze corrispondenti ad autovalori *distinti* ad un valore fissato, quello determinato dai prodotti "in croce" dei gradi di degenerazione. (In croce significa: si deve far corrispondere al livello "superiore" del sistema in esame quello inferiore del sistema esterno, e viceversa). - Per brevità indicheremo d'ora in poi la somma dei quadrati delle ampiezze corrispondente ad un autovalore come la sua *intensità di eccitazione*.

Trattiamo ora un caso un po' più complicato. Manteniamo fisso che nel sistema complessivo sia costantemente eccitato *un solo* autovalore, che chiamiamo E. Ma il secondo sistema (φ_l, F_l), che ora chiameremo *bagno termico*, sia un sistema estremamente grande con uno spettro di autovalori estremamente denso, di modo che per *ciascun* E_k del primo sistema, che chiameremo *termometro*, esista sempre un autovalore del bagno termico $F_{l'}$, che soddisfi la condizione

$$F_{l'} = E - E_k; \tag{18}$$

e inoltre $F_{l'}$ abbia una elevata molteplicità.

Pertanto le intensità d'eccitazione di tutti gli autovalori E_k del termometro stanno tra loro in rapporti interamente fissati, essi si comportano cioè come il prodotto

$$\alpha_k \alpha_{l'}. \tag{19}$$

I rapporti degli $\alpha_{l'}$ si possono determinare in modo del tutto generale. La domanda circa la molteplicità $\alpha_{l'}$ dell'autovalore $F_{l'}$ del bagno termico, cioè circa il numero di autofunzioni essenzialmente distinte del bagno termico che corrispondono a questo autovalore è infatti evidentemente identica alla domanda: in quanti modi essenzialmente distinti si può collocare l'*energia* $F_{l'}$ nel bagno termico, *qualora* questo fosse "quantizzato in energia". Ma questa è proprio la domanda che porrebbe la statistica quantistica di Planck per il calcolo dell'*entropia* del bagno termico, che essa assume uguale a k volte (k =costante di Boltzmann) il logaritmo della quantità in questione. La sola differenza[11] è che per noi *basta* porre la domanda nella forma di un periodo ipotetico - il risultato del conteggio è naturalmente indipendente dal tipo di interpretazione adottata.

Esso richiede che sia

$$k \lg \alpha_{l'} = S(E - E_k),$$

dove il secondo membro è l'entropia che risulta avere il bagno termico di energia $E - E_k$ secondo la statistica di Planck. Per la (19) le intensità di eccitazione degli autovalori E_k del termometro si comportano come le quantità

$$\alpha_k e^{\frac{1}{k} S(E-E_k)} \tag{20}$$

(si perdoni la comparsa della lettera k con significati diversi). Se il bagno termico è molto grande, si può porre

$$S(E - E_k) = S(E) - \left(\frac{\partial S}{\partial E}\right)_E \cdot E_k = S(E) - \frac{E_k}{T}, \tag{21}$$

[11] Intervengono naturalmente le ben note piccole differenze nella determinazione particolare dei "livelli di energia" della nuova meccanica quantistica rispetto alla vecchia (quantizzazione "semintera", eccetera). Si nota inoltre: riguardo a ciò che oggi si ama chiamare *il tipo di statistica* (di Bose-Einstein, di Fermi, eccetera), nulla è pregiudicato dalle considerazioni assai generali del testo. Esso interviene quando si applichi alle autofunzioni un principio di esclusione di Pauli o di Heisenberg, cioè quando si considerino nel conteggio di Planck essenzialmente distinte o meno certe distribuzioni dell'energia.

dove T indica la temperatura del bagno termico calcolata secondo Planck per l'energia E. Ciò significa che al posto della (20) si può usare

$$\alpha_k e^{-\frac{E_k}{kT}}. \tag{22}$$

Abbiamo pertanto ottenuto l'importante risultato:

Le intensità di eccitazione medie degli autovalori di un sistema in un bagno termico stanno tra loro come - secondo la vecchia statistica quantistica - le frequenze relative dei membri di un insieme canonico che si trovino in uno stato singolo pensato quantizzato. Inoltre le molteplicità degli autovalori del sistema considerato si comportano come "pesi quantici".

Possiamo liberarci dell'ipotesi, fatta inizialmente, che nel sistema *totale* sia da considerarsi eccitato un singolo autovalore E. Questo procedimento corrisponde esattamente a quando nella statistica classica si parte da un insieme microcanonico e si assume che un piccolo sistema parziale sia distribuito canonicamente nello spazio delle fasi. Se si vuole, si può sempre successivamente imporre anche al sistema complessivo una distribuzione canonica; il risultato per il sistema parziale resta immutato. Anche ora naturalmente accade la stessa cosa.

Il risultato (22) può in linea di principio bastare per trasportare pari pari nella nuova teoria tutti i risultati importanti della vecchia statistica quantistica, innanzitutto la statistica dei gas, della materia condensata e dell'"hohlraum" (formula della radiazione di Planck), che possono tutti essere fondati su questa formula; naturalmente, con le modifiche grandi o piccole ricordate nell'ultima nota. Che ciò sia *possibile*, anche *senza* appoggiarsi al postulato dei quanti, lo vorrei porre in particolare evidenza.

Se si vuole, si può intendere tutto quanto è stato detto in questa nota secondo l'interpretazione di Born[12], che mantiene il postulato e interpreta i quadrati delle ampiezze non come intensità ad uno stesso tempo per un sistema singolo, ma soltanto come probabilità (frequenze relative) degli stati quantici discreti in un insieme virtuale. Ho tentato di stabilire se in questo modo si possa evitare l'ipotesi statistica del §3. Risulta che questo non accade. Secondo Born la variazione temporale del "campo di probabilità" è governata deterministicamente ("causalmente") dall'equazione d'onda, quindi la variazione temporale delle "ampiezze di probabilità" deterministicamente dalle equazioni (9). La reversibilità menzionata nel §3 riguarda adesso la variazione temporale delle ampiezze di probabilità. Così prevedo che non si possa mai giungere ad un'evoluzione unidirezionale (irreversibile) senza un'ipotesi aggiuntiva sulla probabilità relativa delle diverse possibili distribuzioni per i valori iniziali delle ampiezze di probabilità. Rifuggo da questa concezione, non tanto per la sua complicazione, quanto perché da una teoria che postula una probabilità assoluta, primaria come legge di natura si dovrebbe pretendere che a questo prezzo per lo meno ci liberasse dalle vecchie "difficoltà ergodiche", e permettesse di capire l'evoluzione unidirezionale dei processi naturali senza ulteriori ipotesi aggiuntive.

Zürich, Physikalische Institut der Universität.

(ricevuto il 10 giugno 1927)

[12]M. Born, Zeitschr. f. Phys. **37**, 863; **38**, 803; **40**, 167 (1926).

La situazione attuale nella meccanica quantistica.[1]

E. Schrödinger, Oxford.

Sommario

§1. **La fisica dei modelli.**

Nella seconda metà del secolo scorso dai grandi sviluppi della teoria cinetica dei gas e della teoria meccanica del calore è sorto un ideale della descrizione esatta della natura, che come coronamento di ricerche secolari e compimento di una speranza millenaria costituisce un vertice, e lo chiamiamo classico. Questi sono i suoi lineamenti.

Degli oggetti naturali, il comportamento osservato dei quali si voglia comprendere, si costruisce, appoggiandosi ai dati sperimentali che si possiedono, ma senza impedire di farsene l'immagine intuitiva, una rappresentazione, che è elaborata esattamente in tutti i dettagli, *molto* più esattamente di quanto possa garantire qualsiasi esperienza, tenendo conto del suo ambito limitato.

La rappresentazione nella sua determinatezza assoluta è uguale ad una struttura matematica o ad una figura geometrica, che può essere calcolata in tutto e per tutto da un certo numero di *elementi determinanti*; come per esempio in un triangolo un lato e i due angoli ad esso adiacenti, come elementi determinanti, fissano il terzo angolo, gli altri due lati, le tre altezze, il raggio del cerchio inscritto e così via. La rappresentazione differisce per natura da una figura geometrica solo per il fatto importante che essa è chiaramente determinata, oltre che in ognuna delle tre dimensioni dello spazio, anche nel *tempo* come quarta dimensione. Ciò vuol

[1]Die gegenwärtige Situation in der Quantenmechanik, Die Naturwissenschaften **23**, 807-812, 823-828, 844-849 (1935).

dire che si tratta (com'è evidente) sempre di una struttura che muta nel tempo, che può assumere *stati* diversi; e quando uno stato è reso noto mediante il numero necessario di elementi determinanti, allora non solo sono dati insieme anche tutti gli altri elementi a questo istante (come spiegato prima nel caso del triangolo), ma anche tutti gli elementi, lo stato esatto, ad ogni determinato tempo successivo; allo stesso modo come le proprietà d'un triangolo alla base determinano le sue proprietà al vertice opposto. È proprio della legge interna della struttura che essa muti in modo determinato, cioè, quando la si abbandoni a se stessa in un determinato stato iniziale, che percorra con continuità una determinata sequenza di stati, dei quali ciascuno è raggiunto ad un tempo esattamente determinato. Questa è la sua natura, questa è l'ipotesi che, come ho detto sopra, si pone in base ad un'immagine intuitiva.

Naturalmente non si è così ingenui da pensare che in tal modo si indovini come realmente vanno le cose nell'universo. Per indicare che non lo si pensa, il surrogato mentale esatto che si è creato lo si chiama un'*immagine* o un *modello*. Con la sua chiarezza senza indulgenze, che non si può introdurre senza arbitrio, si è solo tralasciato il fatto che un'ipotesi del tutto determinata può essere controllata nelle sue conseguenze, senza dar spazio a nuove arbitrarietà, per mezzo di calcoli lunghi e difficili, mediante i quali si derivano le conseguenze. Si hanno itinerari limitati e si calcola veramente solo quello che un tipo sveglio leggerebbe direttamente dai dati! Si sa per lo meno dove si insinua l'arbitrarietà e dove si deve migliorare quando non si ha accordo con l'esperienza: nelle ipotesi iniziali, nel modello. Si dev'essere sempre preparati a questo. Quando in molti esperimenti di tipo diverso l'oggetto naturale si comporta davvero come il modello, ci si rallegra e si pensa che la nostra immagine è conforme alla realtà nei tratti essenziali. Ma se in un esperimento di nuovo tipo o per raffinamento della tecnica di misura non si ha più accordo, non è detto che *non* ci si rallegri. Perchè in fondo è questo il modo col quale si può raggiungere gradualmente un adeguamento sempre migliore dell'immagine, cioè dei nostri pensieri, ai fatti.

Il metodo classico del modello preciso ha lo scopo principale di tenere rigorosamente isolata l'inevitabile arbitrarietà nelle ipotesi, potrei quasi dire come il corpo col plasma germinale, per il processo di adattamento storico al progredire dell'esperienza. Forse il metodo si fonda sulla convinzione che *in qualche modo* lo stato iniziale determina *davvero* univocamente l'evoluzione, ovvero che un modello *completo*, che coincida *del tutto esattamente* con la realtà, permetterebbe di calcolare in anticipo il risultato di tutti gli esperimenti in modo del tutto esatto. Ma forse al contrario questa opinione si fonda sul metodo. Tuttavia è molto probabile che l'evoluzione del pensiero riguardo all'esperienza sia un processo infinito e che "modello completo" implichi una contraddizione in termini, all'incirca come "massimo numero intero".

Una chiara idea di ciò che s'intenda per un *modello* classico, per i suoi *elementi determinanti*, per il suo *stato*, è il fondamento per tutto ciò che segue. Innanzitutto *un determinato modello* e *uno stato determinato dello stesso* non devono essere confusi. Un esempio servirà nel modo migliore. Il modello di Rutherford dell'atomo di idrogeno consiste di due punti materiali. Come elementi determinanti si possono per esempio utilizzare le due per tre coordinate ortogonali dei due punti e le due per tre componenti delle loro velocità nelle direzioni degli assi coordinati - quindi dodici in tutto. Al posto di queste si potrebbero anche scegliere: le coordinate e le componenti della velocità del *baricentro*, inoltre la *distanza* dei due punti, *due* *angoli*, che fissano la direzione della loro congiungente nello spazio, e le *velocità* (= derivate rispetto al tempo), con le quali variano nell'istante considerato la distanza e i due angoli; ovviamente sono ancora dodici. *Non* appartiene al concetto "modello di Rutherford dell'atomo di idrogeno" il fatto che gli elementi determinanti debbano avere valori numerici determinati. La chiara visione d'assieme sulla totalità degli stati possibili - ancora senza relazione reciproca - costituisce il "modello" ovvero "il modello in uno stato *qualsiasi*". Ma al concetto di modello appartiene allora di più che semplicemente: i due punti assegnati in una posizione arbitraria e con velocità arbitrarie. Ad esso appartiene ancora il fatto che per *ogni* stato è noto come esso muterà col tempo, fintanto che non abbia luogo alcun intervento esterno. (Per una metà degli elementi determinanti l'altra fornisce informazioni, ma per l'altra le si devono dare prima). *Questa* conoscenza è latente nell'asserzione: i punti hanno le masse M, e le cariche $-e$ e $+e$, e si attirano perciò con la forza e^2/r^2, quando la loro distanza è r.

Queste indicazioni, con determinati valori numerici per m, M ed e (ma naturalmente non per r) appartengono alla descrizione *del modello* (non già a quella di uno stato determinato). m, M ed e *non* sono elementi determinanti. Invece la distanza r lo è. Nel secondo "gruppo" che prima abbiamo presentato a mo' d'esempio, essa interviene come settimo. Quando si utilizza il primo gruppo, r non è un tredicesimo elemento indipendente, esso si può calcolare dalle 6 coordinate ortogonali:

$$r = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}.$$

Il numero degli elementi determinanti (che spesso si chiameranno anche *variabili* in opposizione alle *costanti del modello* come m, M, e) è illimitato. Dodici scelti opportunamente determinano tutti i rimanenti ovvero lo *stato*. Nessun gruppo di dodici ha il privilegio di costituire *gli* elementi determinanti. Esempi di altri elementi determinanti particolarmente importanti sono: l'energia, le tre componenti del momento angolare rispetto al baricentro, l'energia cinetica del moto del baricentro. Quelli ora nominati hanno ancora una proprietà particolare. Essi sono *variabili*, cioè hanno in stati diversi valori diversi. Ma in ogni *sequenza* di stati, che col passar del tempo siano realmente attraversati, essi mantengono lo stesso valore. Essi si chiamano perciò anche *costanti del moto* - a differenza delle costanti del modello.

§2. **La statistica delle variabili del modello nella meccanica quantistica.**

A cardine dell'attuale meccanica quantistica sta una concezione, che forse subirà ancora qualche reinterpretazione, ma che, ne sono fermamente convinto, non cesserà di costituire il cardine. Essa consiste nell'idea che modelli con elementi determinanti che si determinano reciprocamente in modo univoco, come quelli classici, non possono render conto della natura.

Verrebbe da pensare che per chi creda ciò i modelli classici abbiano esaurito il loro ruolo. Ma non è così. Invece si utilizzano proprio *quelli*, non solo per esprimere la negazione della nuova concezione; invece anche la determinazione reciproca attenuata, che tuttavia ancora rimane, sarà espressa come sussiste tra le stesse variabili dello stesso modello che era utilizzato prima. Nel modo seguente.

A. Il concetto classico di *stato* va perso, poiché al più si possono assegnare valori numerici determinati ad una *metà* ben scelta di un gruppo intero di variabili; per esempio nel modello di Rutherford alle 6 coordinate ortogonali *oppure* alle componenti della velocità (sono possibili anche altri raggruppamenti). L'altra metà resta allora del tutto indeterminata, mentre elementi soprannumerari possono esibire i gradi più diversi di indeterminazione. In generale in un gruppo completo (nel modello di Rutherford dodici elementi) potranno essere noti *tutti* solo in modo impreciso. Sul grado di imprecisione si può dare informazione nel modo migliore se, seguendo la meccanica classica, nella scelta delle variabili ci si preoccupi che esse si dispongano in *coppie* cosidette canonicamente coniugate, per le quali l'esempio più semplice è: una coordinata di posizione x di un punto materiale e la componente p_x, valutata nella stessa direzione, del suo impulso lineare (cioè massa per velocità). Le due si limitano mutuamente nella precisione con la quale possono essere note simultaneamente, poiché il prodotto delle loro ampiezze di tolleranza o di variazione (che si usa indicare con un Δ anteposto alla quantità) non può scendere *sotto* il valore di una certa costante universale[2], cioè

$$\Delta x \cdot \Delta p_x \geq h$$

(relazione di indeterminazione di Heisenberg).

B. Se in ogni istante tutte le variabili non sono più determinate da alcune di esse, non lo saranno ovviamente in un istante successivo a partire dai dati ottenibili di un istante precedente. Si può chiamare questo fatto una rottura con il principio di causalità, ma rispetto ad A non è niente di sostanzialmente nuovo. Se in nessun istante è fissato uno stato classico, esso non può neppure cambiare in modo obbligato. Ciò che cambia sono le *statistiche* ovvero le *probabilità,* le *quali* restano obbligate. Singole variabili possono diventare precise, altre imprecise. In generale si può affermare che la precisione complessiva della descrizione non cambia col tempo, il che discende dal fatto che le restrizioni imposte con A sono le stesse in ogni istante. -

Che cosa significano ora le espressioni "impreciso", "statistica", "probabilità"? In proposito la meccanica quantistica dà l'informazione seguente. Essa contiene senz'altro l'intero campionario infinito delle variabili concepibili, o elementi di determinazione del modello classico e interpreta ogni elemento come *direttamente misurabile*, misurabile proprio con precisione arbitraria, quando si tratti di esso da solo. Se ci si è procurati mediante un numero ristretto opportunamente scelto di misure una conoscenza obbiettiva di quel tipo massimale, che secondo A è proprio ancora possibile, l'apparato matematico della nuova teoria offre il mezzo per assegnare per lo stesso istante o per uno successivo ad *ogni* variabile una *distribuzione statistica* completamente determinata, cioè un'informazione, secondo quale percentuale si avrà a che fare con questo o con quel valore, in questo o in quell'intervallino (cosa che si chiama anche probabilità). È questo ciò che si intende quando si dice che questa sia di fatto la probabilità che la variabile considerata, quando la si misuri nell'istante considerato, si trovi con questo o quel valore. La giustezza di questa *predizione probabilistica* si può verificare con la massima approssimazione con un solo esperimento quando essa sia abbastanza netta, cioè quando dichiari solo un piccolo intervallo di valori come in genere possibile. Per verificarla completamente si deve ripetere *molte* volte l'intero esperimento *ab ovo* (cioè includendo le misure di

[2] $h = 1,041 \cdot 10^{-27}$ ergsec. Nella letteratura per lo più si indica con h il prodotto di questa per $2\pi(6,542 \cdot 10^{-27}$ ergsec) e al posto del nostro h si scrive un h con una lineetta trasversale.

orientamento o di preparazione), e si possono utilizzare solo i casi nei quali le misure di *orientamento* abbiano dato esattamente gli stessi risultati. In questi casi si confermerà poi con la misura la statistica calcolata in precedenza per una determinata variabile a partire dalle misure di orientamento - questa è l'idea.

Bisogna guardarsi dal criticare quest'idea per il fatto che è espressa in modo così pesante; ciò dipende dal nostro linguaggio. Ma si insinua un'altra critica. Difficilmente un fisico dell'epoca classica, immaginando un modello, si sarebbe azzardato a credere che i suoi elementi determinanti fossero misurabili su oggetti di natura. Solo conseguenze ben più indirette del modello erano di fatto accessibili alla verifica sperimentale. E secondo ogni esperienza si poteva esser certi: molto prima che il progresso nell'arte di sperimentare avesse superato l'abisso, il modello si sarebbe notevolmente modificato con un adattamento graduale ai nuovi fatti. - Invece ora la nuova teoria dichiara incompetente il modello classico, riformula la *connessione mutua degli elementi determinanti* (per quanto hanno inteso i suoi ideatori), ma ritiene altresì opportuno orientarci su che cosa sia in linea di principio eseguibile come *misura* sull'oggetto di natura considerato; cosa che a quelli che hanno concepito la struttura sarebbe apparsa un'incredibile allargamento del loro espediente di pensiero, un'anticipazione sventata di uno sviluppo futuro. Non è stata armonia prestabilita allo stato puro, il fatto che il ricercatore dell'epoca classica che, come oggi si sente dire, non sapeva ancora che cosa fosse propriamente *misurare*, ci abbia ugualmente lasciato in eredità a sua insaputa uno schema d'orientamento, dal quale di deve desumere tutto quello che si può fondamentalmente misurare, per esempio in un atomo di idrogeno?!

Spero di chiarire in seguito che la concezione dominante è nata dall'imbarazzo. Per ora proseguo nella sua esposizione.

§3. **Esempi di predizioni probabilistiche.**

Quindi tutte le predizioni si riferiscono come prima a elementi determinanti di un modello classico, a posizioni e a velocità di punti materiali, ad energie, momenti angolari e altra roba simile. Non classico è solo il fatto che si possano predire solo probabilità. Consideriamo ciò più precisamente. In via ufficiale si tratta sempre del fatto che per mezzo di alcune misure eseguite *ora* e dei loro risultati si ottengono le indicazioni probabilistiche migliori possibili che la natura consente sui risultati da aspettarsi di altre misure, che seguiranno o subito o dopo un certo tempo. Ma come appare la faccenda realmente? In casi importanti e tipici nel modo seguente.

Se si misura l'energia di un oscillatore di Planck, la probabilità di trovare un valore tra E ed E' è forse diversa da zero solo se tra E ed E' cade un valore della sequenza

$$3\pi h\nu,\ 5\pi h\nu,\ 7\pi h\nu,\ 9\pi h\nu, \ldots\ldots.$$

Per ogni intervallo che non contiene nessuno di questi valori la probabilità è zero. Per dirla chiara: altri valori della misura sono esclusi. I numeri sono multipli dispari della *costante del modello* $\pi h\nu$ (h = numero di Planck, ν = frequenza dell'oscillatore). Succedono due cose. In primo luogo manca il riferimento a misure precedenti - esse infatti non sono necessarie. In secondo luogo: l'affermazione non soffre davvero d'una eccessiva mancanza di precisione, ma tutto all'opposto, essa è più precisa di quanto possa mai essere una qualsiasi misura reale.

Un altro esempio tipico è l'ammontare del momento angolare. In Fig. 1 M è un punto materiale in moto, la freccia rappresenterà il suo impulso (massa per velocità) in grandezza e direzione. O è un qualsiasi punto fisso nello spazio, diciamo l'origine delle coordinate; quindi non un punto con significato fisico, ma un punto di riferimento geometrico. Come valore del momento angolare di M rispetto ad O la meccanica classica designa il prodotto della lunghezza della freccia dell'impulso per la

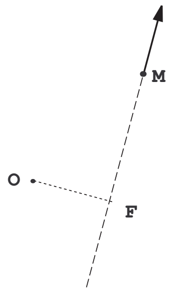


Fig. 1. Momento angolare

Sia M un punto materiale, O un'origine geometrica, la freccia rappresenterà l'impulso (= massa per velocità) di M. Allora il momento angolare è il prodotto della lunghezza della freccia e della lughezza OF.

lunghezza della *perpendicolare* OF.

Nella meccanica quantistica c'è per il valore del momento angolare una situazione del tutto analoga a quella dell'energia dell'oscillatore. Di nuovo la probabilità è zero per ogni intervallo che non contenga nessun valore della successione seguente:

$$0,\ h\sqrt{2},\ h\sqrt{2\times 3},\ h\sqrt{3\times 4},\ h\sqrt{4\times 5},\ldots$$

cioè può risultare solo uno di questi valori. Ciò vale di nuovo senza alcun riferimento a misure precedenti. E si può ben capire come sia importante quest'affermazione precisa, *molto* più importante del sapere quale valore o quale probabilità per ognuno di essi si abbia in realtà nel caso singolo. Ma inoltre qui succede che del punto di riferimento non si parla proprio: comunque lo si scelga, si troverà un valore di questa successione. Per il modello quest'asserzione è priva di senso, infatti la perpendicolare OF varia *con continuità* se si sposta il punto O, e la freccia dell'impulso resta invariata. Vediamo da questo esempio come la meccanica quantistica utilizzi il modello per desumere da esso le quantità che si possono misurare e riguardo alle quali si sosterrà quali predizioni prendere per significative, mentre esso deve essere dichiarato incompetente ad esprimere l'interconnessione di queste quantità.

Non si ha in entrambi i casi la sensazione che il loro contenuto essenziale, come è stato enunciato, solo con un certo sforzo si lasci comprimere nello stivaletto spagnolo di una predizione sulla probabilità che si trovi questo o quel valore per una variabile del modello classico? Non si ha l'impressione che qui si abbia a che fare con le proprietà fondamentali di *nuovi* gruppi caratteristici, che con quelli classici hanno in comune ancora solo il nome? Non si tratta affatto di casi eccezionali, proprio le asserzioni veramente importanti della nuova teoria hanno questo carattere. Si hanno anche situazioni che si avvicinano al tipo sul quale il modo di esprimersi è propriamente tagliato. Ma esse non hanno neanche lontanamente la stessa importanza. E quelle che in modo ingenuo si costruirebbero come esempi didattici non ce l'hanno per niente. "Sia data la posizione dell'elettrone nell'atomo di idrogeno al tempo $t = 0$; si costruisca la statistica della sua posizione ad un tempo successivo." Questo non interessa a nessuno.

A parole tutte le affermazioni si riferiscono al modello intuitivo. Ma le affermazioni importanti sono rispetto ad esso poco chiare, e le sue caratteristiche chiare sono di poco valore.

§4. **Si possono attribuire alla teoria degli insiemi ideali?**

Il modello classico gioca nella meccanica quantistica un ruolo proteiforme. Ognuno dei suoi elementi determinanti può in certe circostanze divenire oggetto dell'interesse e conseguire una certa realtà. Ma mai tutti insieme - talvolta sono questi, talaltra quelli, e sempre al massimo la *metà* di un gruppo completo di variabili, che permetterebbe un'immagine chiara dello stato istantaneo. Come vanno le cose di volta in volta per le rimanenti? Esse allora non *hanno* alcuna realtà, forse (sit venia verbo) una realtà sfumata; oppure l'hanno sempre tutte ed è soltanto impossibile, secondo la regola A del §2, la loro *conoscenza* simultanea?

La seconda interpretazione è straordinariamente familiare per chi conosce il significato della *trattazione statistica* che è sorta nella seconda metà del secolo scorso; tanto più se si pensa che alla vigilia del nuovo da *essa*, da un problema centrale della termologia statistica (teoria di Max Planck della radiazione termica, dicembre 1899), sarebbe nata la teoria dei quanti. L'essenza di questa linea di pensiero consiste proprio nel fatto che in pratica non si conoscono mai tutti gli elementi determinanti del sistema, ma solo *molti* meno. Per la descrizione di un corpo reale in un dato istante non si utilizza quindi *uno* stato del modello, ma un cosidetto *insieme di Gibbs*. Con ciò s'intende un insieme di stati ideale, cioè solamente immaginato, che rispecchi esattamente la nostra conoscenza ristretta del corpo reale. Il corpo si comporterà allora come uno stato *estratto a piacimento* da *quest'insieme*. Quest'ipotesi ha ottenuto il più grande successo. Costituiscono il suo massimo trionfo quei casi nei quali *non* tutti gli stati che intervengono nell'insieme fanno prevedere le *stesse* proprietà osservabili del corpo. Il corpo cioè si comporta allora davvero certe volte in un modo, certe altre in un altro, proprio come previsto (fluttuazioni termodinamiche). È ragionevole cercare se le affermazioni sempre imprecise della meccanica quantistica si riferiscano anch'esse ad un insieme ideale di stati, dei quali nel singolo caso concreto esiste uno ben determinato - ma non si sa quale.

Che ciò non succeda ce lo mostra *proprio* l'esempio del momento angolare, uno per tanti. Nella Fig. 1 si pensi di portare il punto M nelle posizioni più diverse rispetto ad O, e di dotarlo delle frecce d'impulso più diverse, e si riuniscano tutte queste possibilità in un insieme ideale. Poi si possono scegliere le posizioni e le frecce in modo tale che in ogni caso il prodotto della lunghezza della freccia per la lunghezza della perpendicolare OF abbia uno o un altro dei valori ammessi - rispetto al punto fisso O. Ma per un altro punto O' arbitrario risultano evidentemente valori non ammessi. L'introduzione dell'insieme non aiuta quindi a fare alcun passo avanti. - Un altro esempio è l'energia dell'oscillatore. Si dia il caso che essa abbia un valore preciso, per esempio il più basso $3\pi h\nu$. La distanza dei due punti materiali (che costituiscono l'oscillatore) risulta allora assai *indeterminata*. Perchè questa affermazione si possa riferire ad una collezione statistica di stati, in questo caso la statistica delle distanze dovrebbe essere per lo meno limitata superiormente in modo netto, a quella distanza per la quale l'*energia potenziale* già raggiunge o supera il valore $3\pi h\nu$. Ma ciò non succede, intervengono perfino distanze arbitrariamente grandi, sebbene con probabilità fortemente decrescente. E questo non è un risultato di calcolo marginale, che può essere evitato in qualche modo senza colpire al cuore la teoria: su questo comportamento si fonda, assieme a molte altre, la spiegazione quantomeccanica della radioattività (Gamow). - Gli esempi si potrebbero moltiplicare all'infinito. Si osservi che non si è parlato affatto di variazioni temporali. Non sarebbe d'alcun aiuto consentire al modello di evolvere in modo del tutto "non classico", eventualmente di "saltare". Già per l'istante singolo non va bene. Non esiste in nessun istante una collezione di stati del modello classico con la quale s'accordi l'insieme delle asserzioni quantomeccaniche per questo istante. La stessa cosa si può anche esprimere così: se io volessi associare al modello in ogni istante un determinato stato (a me soltanto non conosciuto esattamente) o (il che è lo stesso) *a tutti* gli elementi determinanti valori numerici fissati (a me soltanto non conosciuti esattamente), non sarebbe *pensabile* alcuna ipotesi su questi valori numerici che non fosse in contraddizione con una parte delle asserzioni della teoria dei quanti.

Questo non è esattamente ciò che ci si aspetta quando si sente dire che le asserzioni della nuova teoria sono sempre imprecise rispetto a quelle classiche.

§5. **Le variabili sono davvero indeterminate?**

L'altra alternativa consiste nell'associare realtà solo agli elementi determinanti di volta in volta precisi - o detto più in generale, ad ogni variabile un modo tale di realizzarsi che corrisponda esattamente alla statistica quantomeccanica di queste variabili nell'istante considerato.

Che non sia impossibile esprimere il grado e il tipo dell'indeterminazione di *tutte* le variabili in un'immagine completa *chiara* risulta già dal fatto che la meccanica quantistica possiede ed usa realmente un tale strumento, la cosidetta funzione d'onda o funzione ψ, chiamata anche vettore del sistema. Di essa si parlerà ancora molto. Che essa sia un costrutto matematico astratto non intuitivo è uno scrupolo che sorge quasi sempre davanti agli espedienti concettuali nuovi, e non avrei molto da dire. In ogni caso è un oggetto concettuale che riproduce in ogni istante l'indeterminatezza di tutte le variabili in modo altrettanto chiaro ed esatto, come il modello classico i suoi valori precisi. Anche la sua legge del moto, la legge della sua variazione temporale, fin tanto che il sistema è lasciato a se stesso, non sta indietro nemmeno d'uno iota per chiarezza e definizione alle equazioni del moto del modello classico. Dunque la funzione ψ potrebbe apparire proprio in questa posizione, purché l'indeterminatezza si limitasse alle dimensioni atomiche, sottratte al controllo diretto. Di fatto dalla funzione si sono derivate delle rappresentazioni del tutto intuitive e comode, per esempio la "nuvola di elettricità negativa" attorno al nucleo positivo e simili. Seri dubbi sorgono tuttavia quando si osservi che l'indeterminazione raggiunge cose ben tangibili e visibili, per le quali la connotazione di indeterminatezza è semplicemente falsa. Lo stato di un nucleo radioattivo è presumibilmente indeterminato a tal punto e in tal modo che non sono determinati nè l'istante del decadimento nè la direzione nella quale abbandona il nucleo la particella α che ne fuoriesce. All'interno del nucleo atomico l'indeterminazione non ci disturba. La particella uscente sarà descritta, se la si vuole intendere intuitivamente, come un'onda sferica, che viene emanata dal nucleo in tutte le direzioni e continuamente, e che colpisce uno schermo luminescente vicino continuamente in tutta la sua estensione. Però lo schermo non mostra affatto una luminescenza superficiale costante e debole, ma lampeggia in un istante in un punto - o meglio, a onor del vero, lampeggia talvolta qui, talvolta là, poiché è impossibile eseguire l'esperimento con un solo atomo radioattivo. Se si usa invece dello schermo luminescente un rivelatore esteso in volume, come un gas, questo sarà ionizzato dalle particelle α, e si trovano le coppie di ioni disposte lungo colonne rettilinee[3], che prolungate all'indietro raggiungono il granello di materia radioattiva dalla quale esce la radiazione α. (tracce di C.T.R. Wilson, rese visibili dalle goccioline di nebbia che condensano sugli ioni).

Si possono anche costruire casi del tutto farseschi. Un gatto sia chiuso in una camera d'acciaio assieme alla seguente macchina infernale (che dev'essere protetta dall'accesso diretto del gatto): in un contatore di Geiger si trova una minuscola quantità di materiale radioattivo, *così* poco che nel passare di un'ora *forse* uno degli atomi decade, con probabilità pari a quella che non ne decada alcuno; se accade, il contatore risponde e aziona su un relais un martellino che frantuma una fialetta con acido prussico. Se si è lasciato a sé questo intero sistema per un'ora, si dirà che il gatto è ancora vivo, se nel frattempo nessun atomo è decaduto. Il primo decadimento atomico l'avrebbe avvelenato. La funzione ψ del sistema intero esprimerebbe ciò col fatto che in essa il gatto vivo e il gatto morto (sit venia verbo) sono mescolati o pasticciati in parti uguali.

Tipico di questo caso è il fatto che un'indeterminazione originariamente ristretta al dominio atomico si converta in un'indeterminazione percepibile in grande, che si può quindi *risolvere* mediante osservazione diretta. Ciò ci impedisce di far valere in modo così ingenuo un "modello indeterminato" come descrizione della realtà. Essa non conterrebbe di per sé niente di oscuro o di contadditorio. C'è differenza tra una fotografia mossa o sfocata, e una che riprende nuvole e lembi di nebbia.

§6. **Il cambiamento intenzionale del punto di vista epistemologico.**

Nella quarta sezione abbiamo visto che non è possibile assumere il modello così com'è ed attribuire ugualmente alle variabili di volta in volta non note o non note esattamente dei valori determinati, che noi semplicemente non conosciamo. Nel §5 abbiamo detto che l'indeterminazione non è neppure un'indeterminazione reale, infatti esistono sempre dei casi nei quali un'osservazione facilmente eseguibile procura la conoscenza mancante. Che cosa ci rimane allora? In questo dilemma assai difficile la concezione dominante si aiuta o ci aiuta facendo ricorso all'epistemologia. Ci vien detto che non si deve fare alcuna distinzione tra lo stato reale dell'oggetto di natura e quello che io ne so in proposito, o forse meglio, quello che ne potrei sapere in proposito, qualora me ne dessi la pena. *Reali* - così si dice - sono propriamente solo percezione, osservazione, misura. Se io mi sono procurato per mezzo di queste ad un dato istante la conoscenza migliore possibile dello stato dell'oggetto fisico che è conseguibile secondo le leggi di natura, posso allora rigettare come *priva di significato* ogni domanda ulteriore che salti fuori circa lo "stato reale", in quanto sono convinto che nessuna osservazione ulteriore possa estendere la mia conoscenza in proposito - per lo meno non senza che essa simultaneamente diminuisca da un altro punto di vista (cioè per il cambiamento dello stato, ecc.).

Ciò getta ora un po' di luce sulla genesi dell'affermazione, che ho indicato alla fine del §2 come qualcosa di grande portata: che tutte le quantità del modello siano in linea di principio misurabili. Non si può fare a meno di questo articolo di

[3]Per illustrazione si possono utilizzare le Fig. 5 o 6 a pagina 375 dell'annata 1927 di questa rivista; o anche la Fig. 1 a pagina 734 dell'anno scorso (1934); ma queste sono tracce del cammino di nuclei d'idrogeno.

fede, poiché nelle difficoltà della metodologia fisica ci si vede costretti a chiamare al soccorso come dittatore il summenzionato postulato filosofico, al quale, come al difensore supremo di tutta l'empiria, nessuno capace di intendere negherà il rispetto.

La realtà si oppone all'imitazione mentale mediante un modello. Perciò si lascia andare il realismo ingenuo e ci si appoggia direttamente alla tesi indubitabile che *reali* (per il fisico) siano in fin dei conti solo l'osservazione, la misura. Quindi d'ora in poi tutto il nostro pensiero fisico avrà come unica base e come unico oggetto i risultati delle misure eseguibili in linea di principio, e ad un altro tipo di realtà o ad un modello il nostro pensiero dovrà ora espressamente *non* far più riferimento. Tutti i numeri che intervengono nei nostri calcoli fisici dovranno essere intesi come numeri corrispondenti a misure. Ma poiché non veniamo al mondo belli freschi a cominciare a costruire di bel nuovo la nostra scienza, ma abbiamo a disposizione un apparato di calcolo ben definito, dal quale dopo i grandi successi della meccanica quantistica potremmo sempre meno separarci, ci vediamo costretti a prescrivere a tavolino quali misure siano in linea di principio possibili, cioè debbano essere possibili, perché il nostro schema di calcolo stia abbastanza in piedi. Esso consente un valore preciso per ogni variabile del modello presa individualmente (financo per un "mezzo gruppo"), e quindi ciascuna individualmente dev'essere misurabile con precisione arbitraria. Non possiamo accontentarci di meno, poiché abbiamo perso la nostra innocenza intuitivo-realistica. Non abbiamo niente, nel nostro schema di calcolo, per stabilire dove la natura tracci i limiti dell'ignorabimus, cioè quale sia la *miglior* conoscenza *possibile* dell'oggetto. E non potremmo, inoltre la nostra realtà misurata dipenderebbe ancora molto dall'abilità o dalla pigrizia dello sperimentatore, dall'informarsi con quanta cura egli si sia applicato. Dobbiamo quindi dirgli in anticipo fino a che punto potrebbe arrivare se solo fosse abbastanza abile. Altrimenti sarebbe seriamente da temere che egli si mettesse ancora a cercare qualcosa di interessante laddove noi proibiamo ricerche ulteriori.

§7. **La funzione ψ come catalogo delle aspettative.**

Procedendo nell'esposizione della dottrina ufficiale, applichiamoci alla funzione ψ già menzionata prima (§5) . Essa è ora lo strumento per la predizione della probabilità dei numeri misurati. In essa è incorporato il sommario via via raggiunto delle aspettazioni per il futuro teoreticamente fondate, raccolte proprio come in un *catalogo*. Essa è il ponte di collegamento e di condizionamento tra misura e misura, com'era nella teoria classica il modello e lo stato ad esso via via corrispondente. Con questo la funzione ψ ha altresì molto in comune. Essa sarà, in linea di principio, determinata univocamente da un numero finito di misure sull'oggetto scelte opportunamente, la metà di quelle che sarebbero necessarie nella teoria classica. Così verrà scelto per la prima volta il catalogo delle aspettazioni. Da qui esso cambia col tempo, proprio come lo stato del modello nella teoria classica, in modo obbligato e univoco ("causale") - l'evoluzione della funzione ψ sarà governata da un'equazione differenziale alle derivate parziali (del prim'ordine nel tempo e risolta rispetto a $\partial\psi/\partial t$). Ciò corrisponde al moto imperturbato del modello nella teoria classica. Ma ciò vale solo finché non si esegue di nuovo una qualche misura. Ad ogni misura è necessario attribuire alla funzione ψ (= al catalogo delle predizioni) un singolare, alquanto repentino mutamento, che dipende *dal numero trovato nella misura*, e che perciò *non si può prevedere*; da questo solo è già chiaro che questo secondo tipo di variazione della funzione ψ non ha proprio niente a che fare con la sua evoluzione regolare *tra* due misure. La variazione brusca mediante la misura si collega strettamente alle cose dette nel §5 e ce ne occuperemo ancora a fondo, essa è il punto più interessante di tutta la teoria. È esattamente il punto che richiede la rottura con il realismo ingenuo. Per *questo non* si può porre la funzione ψ direttamente al posto del modello o della cosa reale. E non già perché da una cosa reale o da un modello non ci si possano aspettare variazioni improvvise e impreviste, ma poiché dal punto di vista realistico l'osservazione è un processo di natura come ogni altro e non può di per sè provocare un'interruzione dell'evoluzione regolare della natura.

§8. **Teoria della misura, prima parte.**

Il rigetto del realismo ha conseguenze logiche. Una variabile non ha in generale alcun valore determinato prima che io la misuri: allora misurarla *non* significa trovare il valore che essa ha. Ma allora che cosa significa? Dev'esserci tuttavia un criterio secondo il quale una misura sia giusta o sbagliata, un metodo buono o cattivo, preciso o impreciso - perché insomma si meriti il nome di procedimento di misura. Un giocherellare qualsiasi con uno strumento indicatore in prossimità d'un altro corpo, quando poi si faccia una volta o l'altra una lettura, non può tuttavia essere chiamato una misura su questo corpo. Ora, è abbastanza chiaro; se non è la realtà a determinare il valore misurato, almeno il valore misurato deve determinare la realtà, esso deve essere realmente presente *dopo* la misura nel solo senso che ancora può essere riconosciuto. Cioè, il criterio richiesto può essere solo questo: ripetendo la misura si deve ottenere di nuovo lo stesso risultato. Ripetendola spesse volte posso verificare la precisione del procedimento e dimostrare che non sto semplicemente giocando. È divertente il fatto che questa prescrizione coincida esattamente con la procedura dello sperimentatore, al quale pure il "valore vero" non è noto fin dall'inizio. Formuliamo l'essenziale nel modo seguente:

L'*interazione eseguita in modo pianificato di due sistemi (oggetto misurato e strumento di misura) si dice una misura sul primo sistema quando un indicatore variabile direttamente percettibile del secondo (posizione di un indice) si riproduce sempre, entro certi limiti d'errore, in seguito alla ripetizione immediata del processo (sullo stesso oggetto di misura, che nel frattempo non può esser sottoposto ad alcuna influenza ulteriore).*

A questa spiegazione si dovrebbero aggiungere ancora alcune cose, essa non è una definizione impeccabile. L'empiria è più complicata della matematica e non si lascia catturare così facilmente in proposizioni semplici.

Prima della prima misura può valere *per essa* una certa predizione della teoria dei quanti. *Dopo* di essa vale *sempre* la predizione: all'interno dei limiti d'errore ancora lo stesso valore. Il catalogo delle predizioni(= la funzione ψ) sarà quindi cambiato dalla misura in relazione alla variabile che misuriamo. Quando si conosce già da prima che il processo di misura è *affidabile*, allora già la prima misura riduce l'aspettazione teorica, entro i limiti d'errore, al valore trovato stesso, qualunque possa esser stata prima l'aspettazione. Questa è la tipica variazione brusca della funzione ψ con la misura, della quale si è parlato prima. E non solo per le variabili misurate il catalogo delle aspettazioni cambia in generale in maniera imprevedibile, ma anche per altre, in particolare per quelle ad esse "canonicamente coniugate". Se prima esisteva una predizione abbastanza precisa per l'*impulso* di una particella ed ora si misura la sua *posizione* in modo più preciso di quanto sia accettabile secondo la legge A del §2 , ciò deve modificare le predizioni per l'impulso. Del resto l'apparato di calcolo della meccanica quantistica produce ciò del tutto automaticamente: non esiste infatti alcuna funzione ψ che, se come d'accordo si ricavassero da essa le aspettazioni, contraddirebbe la legge A.

Poiché in seguito alla misura il catalogo delle aspettazioni muta radicalmente, l'oggetto non è più idoneo ad esibire nella loro estensione completa le predizioni statistiche che erano state fatte in precedenza; come minimo per la variabile misurata stessa; infatti per essa si otterrà ora sempre di nuovo (quasi) lo stesso valore. *Questo* è il fondamento della prescrizione che è stata data già nel §2: si può verificare completamente il contenuto della predizione probabilistica, ma a questo scopo si deve ripetere *ab ovo* l'intero esperimento. Si deve pretrattare l'oggetto misurato (o uno ad esso uguale) sempre esattamente come la prima volta, cosicché valga ancora lo stesso catalogo delle aspettative (= funzione ψ) come prima della prima misura. Quindi "si ripete". (Questo ripetere significa ora qualcosa di completamente diverso da prima!) Tutto questo non lo si deve fare due volte, ma moltissime. Risulterà quindi la statistica predetta - questa è l'idea.

Si noti la differenza tra i limiti d'errore e la statistica d'errore *della misura* da un lato, e la statistica predetta teoricamente dall'altro. Non hanno niente a che fare l'una con l'altra. Esse si fondano su due modi completamente distinti di *ripetizione*, dei quali s'è parlato prima.

Si offre qui l'occasione d'approfondire ancora la definizione della *misura* studiata prima. Esistono strumenti di misura che rimangono nella posizione nella quale la misura li lascia. L'indice potrebbe anche restare bloccato per un contrattempo. Si rifarebbe allora sempre esattamente la stessa lettura, e per la nostra prescrizione questa sarebbe una misura particolarmente precisa. E lo è invero, ma non dell'oggetto, bensì dello strumento stesso! Di fatto nella nostra prescrizione manca ancora un punto importante, che però non si poteva dare bene prima, cioè che cosa propriamente costituisca la differenza tra l'*oggetto* e lo *strumento* (che si faccia la lettura su quest'ultimo è solo un'esteriorità). Diciamo anche che in certi casi lo strumento, se necessario, va riportato al suo stato iniziale neutrale, prima di fare una misura di controllo. Allo sperimentatore ciò è ben noto. Si coglie teoricamente la cosa nel modo migliore se si prescrive che per principio lo strumento di misura prima di ogni misura vada sottoposto alla stessa preparazione, sicché *per esso* valga ogni volta il medesimo catalogo delle aspettazioni (= funzione ψ), quando lo si accosti all'oggetto. Ogni intervento sull'oggetto è invece rigorosamente proibito, se si deve fare una *misura di controllo*, una "ripetizione del primo tipo" (che porta alla statistica degli *errori*). Questa è la differenza caratteristica tra oggetto e strumento. Per una "ripetizione del secondo tipo" (che serve a verificare la predizione quantistica) essa sparisce. La differenza tra i due è assai irrilevante anche nella realtà.

Assumiamo ancora che in una seconda misura si possa utilizzare anche un altro strumento di ugual costruzione e di ugual preparazione; non deve necessariamente essere *lo stesso*; a volte lo si fa davvero, per controllo del primo. Può capitare anche che due strumenti costruiti in modo del tutto diverso stiano tra loro nella relazione che, se si misura con essi uno dopo l'altro (ripetizione del primo tipo!) le loro due indicazioni si corrispondano biunivocamente. Essi misurano allora sull'oggetto essenzialmente la stessa variabile - cioè la stessa previa opportuna riscrittura delle scale.

§9. **La funzione ψ come descrizione dello stato.**

Il rifiuto del realismo comporta anche delle complicazioni. Dal punto di vista del modello classico il contenuto di asserzioni momento per momento della funzione ψ è assai incomprensibile, esso racchiude solo il 50% di una descrizione completa. Dal nuovo punto di vista questa dev'essere completa per motivi che già sono stati accennati alla fine del §6. Dev'essere impossibile aggiungere ad essa nuove asserzioni giuste senza peraltro modificarla; altrimenti non si ha il diritto di designare come prive di significato tutte le domande che vadano oltre ad essa.

Da ciò segue che due diversi cataloghi che valgano per lo stesso sistema in circostanze diverse o a tempi diversi possono ben coincidere parzialmente, ma mai in modo tale che uno sia contenuto interamente nell'altro. Perchè altrimenti un completamento con ulteriori asserzioni giuste sarebbe possibile, cioè con quelle per le quali l'altro lo supera. - La struttura matematica della teoria soddisfa automaticamente questa prescrizione. Non esiste alcuna funzione ψ che dia esattamente le stesse risposte di un'altra, ed ancora alcune di più.

Perciò, quando la funzione ψ di un sistema cambia, sia per conto suo, sia in seguito a misure, nella nuova funzione devono sempre mancare delle asserzioni che erano contenute nella precedente. Nel catalogo non possono essere avvenute solo delle nuove registrazioni, devono aver avuto luogo anche delle cancellazioni. Ora delle conoscenze possono ben essere *acquisite*, ma non *perse*. Le cancellazioni significano quindi che le affermazioni che prima eran giuste ora sono divenute sbagliate. Un'affermazione giusta può divenire sbagliata solo se cambia l'*oggetto* alla quale essa si riferisce. Ritengo inoppugnabile esprimere così queste conclusioni:

Legge 1: *Quando si hanno funzioni ψ diverse il sistema si trova in stati diversi.*

Se si parla solo di sistemi per i quali si ha in generale una funzione ψ, l'inversa di questa legge si scrive:

Legge 2: *Per funzioni ψ uguali il sistema si trova nello stesso stato.*

Quest'inversa non discende dalla legge 1, bensì, senza utilizzo della stessa, direttamente dalla completezza o massimalità. Se con egual catalogo delle aspettazioni fosse ancora possibile una differenza, significherebbe che quello non dà risposta a tutte le domande legittime. - Le parole di quasi tutti gli autori danno per buone le due leggi precedenti. Esse costruiscono ovviamente un nuovo tipo di realtà, ritengo in modo del tutto legittimo. Esse non sono del resto trivialmente tautologiche, non pure spiegazioni a parole di "stato". Senza l'ipotesi della massimalità del catalogo delle aspettazioni la variazione della funzione ψ potrebbe essere prodotta dalla semplice richiesta di nuove informazioni.

Potremmo incontrare tuttavia ancora un'obiezione contro la derivazione della legge 1. Si potrebbe dire che ognuna individualmente delle asserzioni o conoscenze che essa tratta è tuttavia un'asserzione sulle probabilità, che le categorie *giusto* o *sbagliato* non si applicano rispetto al caso singolo, ma rispetto a una collezione che si realizza preparando mille volte il sistema nello stesso modo (per poi far seguire la stessa misura; vedasi il §8). Ciò va bene, ma dobbiamo assicurare che tutti i membri di questa collezione abbiano la stessa giacitura, poiché per ciascuno vale la stessa funzione ψ, lo stesso catalogo delle aspettazioni, e noi non possiamo aggiungere differenze che non siano espresse dal catalogo (vedasi il fondamento della legge 2). La collezione consiste quindi di casi individuali identici. Se un'affermazione riguardo ad *essa* è sbagliata, anche il caso singolo dev'essere cambiato, altrimenti la collezione sarebbe ancora la stessa.

§10. **Teoria della misura, seconda parte.**

Ora è stato poc'anzi detto (§7) e spiegato (§8) che ogni *misura* sospende la legge che governa normalmente la variazione temporale continua della funzione ψ e introduce al posto di essa una variazione del tutto diversa, che non è governata da nessuna legge, ma è dettata solamente dal risultato della misura. Però durante una misura non dovrebbero valere altre leggi di natura che quelle normali, infatti, considerata oggettivamente, essa è un processo naturale come ogni altro, e non può interrompere il corso regolare della natura. Poiché essa spezza quello della funzione ψ, quest'ultima *non* può - così abbiamo detto nel §7 - valere come immagine di tentativo di una realtà obbiettiva come il modello classico. Ma nell'ultima sezione essa si è tuttavia un po' cristallizzata.

Cerco di nuovo, rimarcando le parole chiave, di porre in rilievo che: 1. Il salto del catalogo delle aspettazioni all'atto della misura è *inevitabile*, infatti se la misura deve avere un qualche senso, dopo una buona misura si *deve* avere il *valore misurato.* 2. La variazione col salto *non* origina certamente dalla legge obbligatoria valida normalmente, infatti essa dipende dal valore misurato, che è imprevedibile. 3. La variazione infine (a causa della massimalità) determina anche *perdita* di conoscenza, ma la conoscenza non può essere dimenticata, quindi *deve* mutare l'*oggetto - anche* con variazioni per salti e in essi *anche* in modo imprevedibile, *diversamente* dal solito.

Come si concilia questo? La cosa non è per niente facile. È il punto più difficile e più interessante della teoria. Dobbiamo evidentemente cercare di capire l'interazione tra oggetto misurato e strumento di misura. Bisogna premettere alcune considerazioni molto astratte.

Il problema è questo. Se per due corpi completamente separati, o per meglio dire, per ciascuno di essi individualmente esiste un catalogo completo delle aspettazioni - un sommario massimale della conoscenza - una funzione ψ - allora la si possiede evidentemente anche per i due corpi insieme, cioè quando si pensa che non ognuno di essi preso singolarmente, ma i due insieme costituiscano l'oggetto del nostro interesse, delle nostre domande riguardo al futuro[4].

Ma l'inverso non è vero. La *conoscenza massimale di un sistema complessivo non include necessariamente* la *conoscenza massimale di tutte le sue parti, neppure quando le stesse sono tra loro completamente separate e al momento non si influenzano vicendevolmente.* È infatti possibile che una parte di ciò che si sa si riferisca a relazioni o condizioni tra i due sistemi parziali (ci limiteremo a due), nel modo seguente: quando una determinata misura sul primo sistema ha *questo* risultato, per una determinata misura sul secondo vale la statistica delle aspettazioni così e così; ma se la misura considerata sul primo sistema ha *quel* risultato, allora per il secondo vale una cert'altra aspettazione; se per il primo s'ottiene un *terzo* risultato, per il secondo vale un'altra aspettazione ancora, e così via, alla maniera di una disgiunzione completa di tutti i numeri misurati, che la misura di volta in volta presa in considerazione sul primo sistema può in generale produrre. In tal modo un certo processo di misura o, ciò che è lo stesso, una certa variabile del secondo sistema può essere collegata al valore ancora incognito di una certa variabile del primo,

[4]Evidentemente. Potrebbero non mancare asserzioni riguardanti la relazione mutua dei due corpi. Ma ciò sarebbe, per lo meno per uno dei due, qualcosa che interviene nella sua funzione ψ. E ciò non può accadere.

e ovviamente anche viceversa. Quando succede che tali proposizioni condizionali siano presenti nel catalogo complessivo *esso non può essere massimale riguardo* al *sistema singolo*. Poiché il contenuto di due cataloghi individuali massimali già di per sè costituirebbe un catalogo complessivo massimale, non potrebbero intervenire anche le proposizioni condizionali.

Queste predizioni condizionate non sono peraltro una cosa che ci piove qui inattesa. Esistono in ogni catalogo delle aspettazioni. Se si conosce la funzione ψ e si fa una certa misura e questa ha un certo risultato, si conosce la nuova funzione ψ, voilà tout. Solo nel caso presente, quando il sistema complessivo consiste di due parti completamente separate, la faccenda risalta come qualcosa di singolare. Poiché in tal modo acquista un senso distinguere tra misure sull'uno e misure sull'altro sistema parziale. Ciò procura a ciascuno di essi il pieno diritto ad aspirare ad un catalogo massimale privato; rimane però possibile che una parte della conoscenza complessiva ottenibile venga per così dire dissipata in proposizioni condizionali che giocano tra i sistemi parziali, e così lasci inadempiute le aspirazioni private - sebbene il catalogo complessivo sia massimale, cioè sebbene la funzione ψ del sistema complessivo sia nota.

Fermiamoci per un istante. L'affermazione nella sua astrattezza dice propriamente già tutto: la conoscenza migliore possibile di un tutto non implica necessariamente la stessa cosa per le sue parti. Traduciamo ciò nel linguaggio del §9: il tutto è in un certo stato, le sue parti prese per conto loro no.

- Ma come? Un sistema deve pur essere in qualche stato.

= No. Stato è la funzione ψ, è il sommario massimale delle conoscenze. Non devo essermelo procurato, posso esser stato pigro. Allora il sistema non è in nessuno stato.

- Bene, ma allora anche la proibizione agnostica delle domande non vale e posso nel nostro caso pensare: il sistema parziale è già in un qualche stato (= funzione ψ), soltanto non lo conosco.

= Alt. Purtroppo no. Non vale nessun "soltanto non lo conosco". Infatti per il sistema complessivo esiste la conoscenza massimale. -

L'insufficienza della funzione ψ come sostituto del modello deriva esclusivamente dal fatto che non la si ha sempre. Quando la si ha, essa può valere in tutto e per tutto come descrizione dello stato. Ma talvolta non la si ha in casi nei quali ci si potrebbe aspettare d'averla facilmente. E non si può postulare allora che "in realtà essa sia già determinata, solo che non la si conosce". Il punto di vista scelto una volta per tutte lo proibisce. "Essa" è infatti una somma di conoscenze, e conoscenze che nessuno conosce non sono niente. -

Andiamo avanti. Che una parte della conoscenza si libri nella forma di proposizioni condizionali disgiuntive *tra* due sistemi non può certo accadere se andiamo a prendere i due agli estremi opposti dell'universo e li giustapponiamo senza interazione. Allora infatti i due non "sanno" nulla l'uno dell'altro. È impossibile che una misura su di uno possa fornire un appiglio su che cosa ci si debba aspettare dall'altro. Se esiste un "intreccio delle predizioni", esso può evidentemente originare soltanto dal fatto che una volta in passato i due corpi hanno costituito *un* sistema in senso proprio, cioè sono stati in interazione, ed hanno lasciato *tracce* l'uno sull'altro. Quando due corpi separati, che individualmente siano conosciuti in modo massimale, vengono in una situazione nella quale interagiscono tra loro, e si separano di nuovo, allora si verifica di regola la situazione che prima ho chiamato *intreccio* della nostra conoscenza circa i due corpi. Il catalogo delle aspettazioni complessivo consiste dapprincipio di una somma logica dei cataloghi individuali; durante il processo esso evolve in modo obbligato secondo la legge nota (di misura infatti non si parla). La conoscenza resta massimale, ma alla fine, quando i corpi si sono separati di nuovo, non si è scomposta nuovamente in una somma logica di conoscenze circa i corpi singoli. Ciò che *di queste* si è ancora conservato può esser diventato sottomassimale, eventualmente in modo assai forte. - Si osservi il grande divario rispetto alla teoria modellistica classica, nella quale ovviamente con stati iniziali noti e con un'interazione nota gli stati finali sarebbero individualmente noti in modo esatto.

Il processo di misura descritto nel §8 cade ora esattamente sotto questo schema generale, se lo applichiamo al sistema complessivo oggetto misurato + strumento di misura. Se in tal modo ci costruissimo un'immagine oggettiva di questo processo, come di un altro qualsiasi, potremmo sperare di spiegare gli strani salti della funzione ψ, se non addirittura di accantonarli. Quindi adesso un corpo è l'oggetto misurato, l'altro lo strumento. Per evitare ogni intervento dall'esterno, facciamo sì che lo strumento si inserisca nell'oggetto automaticamente mediante un'orologeria incorporata, e allo stesso modo si ritragga. Differiamo la lettura stessa, poiché vogliamo studiare in primo luogo ciò che accade "oggettivamente"; lasciamo che il risultato si registri automaticamente nello strumento per un utilizzo successivo, proprio come oggi spesso si fa.

Come vanno le cose ora, con una misura eseguita automaticamente? Possediamo come prima un catalogo delle aspettazioni massimale per il sistema complessivo. Il valore registrato della misura ovviamente non vi è compreso. Rispetto allo strumento il catalogo è quindi assai incompleto, esso non ci dice neppure dove il pennino ha lasciato la sua traccia. (Ci si ricordi del gatto avvelenato!) Succede che la nostra conoscenza è sublimata in proposizioni condizionali: se il segno è alla graduazione 1, *allora* per l'oggetto misurato valgono questo e questo, se è alla 2, allora valgono questo e quello, se è alla 3, allora una terza cosa, e così via. Ma la funzione ψ dell'*oggetto misurato* ha fatto un salto? Si è evoluta secondo la legge obbligatoria (secondo l'equazione differenziale alle derivate parziali)? Nè l'una cosa nè l'altra. Essa non esiste più. Secondo la legge obbligatoria per la funzione ψ *complessiva*, si è ingarbugliata con quella dello strumento di misura. Il *catalogo delle aspettazioni dell'oggetto si è suddiviso in una disgiunzione condizionale di cataloghi delle aspettazioni*, come un Baedeker che venga suddiviso a regola d'arte. In ogni sezione vi è inoltre ancora la probabilità che essa abbia luogo - copiata dal catalogo delle aspettazioni originario dell'oggetto. Ma *quale* abbia luogo - quale parte del Baedeker sia da usare per la prosecuzione del viaggio, lo si può trovare solo mediante l'ispezione reale del segno.

E se noi *non* controllassimo? Supponiamo che sia stato registrato fotograficamente e che per disgrazia la pellicola abbia preso luce prima di essere sviluppata. Oppure abbiamo inserito per sbaglio della carta nera al posto della pellicola. Allora con la misura sfortunata non solo non abbiamo appreso niente di nuovo, ma abbiamo perso della conoscenza. Ciò non è sorprendente. A causa d'un intervento esterno la conoscenza che si ha di un sistema sarà ovviamente sempre rovinata. Si deve predisporre l'intervento in modo molto cauto perché la si possa recuperare in seguito.

Che cosa abbiamo ottenuto con questa analisi? *In primo luogo* l'intuizione della suddivisione disgiuntiva del catalogo delle aspettazioni, che ancora si ottiene in modo del tutto continuo, e che è resa possibile dall'immersione di strumento e oggetto in un catalogo comune. Da questo amalgama l'oggetto può esser di nuovo liberato solo mediante il fatto che il soggetto vivente assume conoscenza reale del risultato della misura. Prima o poi questo dove succedere, se ciò che ha avuto luogo si deve chiamare davvero una misura, - per quanto ci possa stare a cuore di analizzare il processo nel modo più oggettivo possibile. E questa è la *seconda* intuizione che otteniamo: *solo con questa ispezione*, che risolve la disgiunzione, succede qualcosa di discontinuo, con un salto. Si è indotti a chiamarlo un atto *mentale*, poiché l'oggetto è già staccato e non viene più influenzato fisicamente; ciò che gli doveva capitare è già avvenuto. Ma non sarebbe proprio giusto dire che la funzione ψ dell'oggetto, che *altrimenti* varierebbe, indipendentemente dall'osservatore, secondo un'equazione differenziale alle derivate parziali, *adesso* cambia con un salto a seguito di un atto mentale. Infatti essa era andata persa, non c'era più. Ciò che non c'è non può neanche cambiare. Essa viene ricreata, rifatta, viene districata dalla conoscenza ingarbugliata che si possiede mediante un atto di percezione, che di fatto non determina più un'azione fisica sull'oggetto misurato. Dalla forma nella quale si conosceva da ultimo la funzione ψ a quella nuova, nella quale essa riappare, non porta nessuna via continua - ci si va tramite la sparizione. Se si confrontano le due forme, la cosa sembra un salto. In realtà sono intervenuti accadimenti importanti, cioè l'interazione dei due corpi, durante la quale l'oggetto non possedeva nessun catalogo delle aspettazioni privato e non aveva neppure alcuna pretesa riguardo ad esso, poiché non era indipendente.

§11. **La soppressione dell'intreccio. Il risultato dipendente dalla volontà dello sperimentatore.**

Ritorniamo sul caso generale dell'"intreccio", senza avere direttamente sott'occhio il caso particolare di un processo di misura, come sopra. I cataloghi delle aspettazioni di due corpi A e B siano stati intrecciati da un'interazione precedente. Ora i corpi siano di nuovo separati. Allora ne posso prendere uno, sia B, e completare la mia conoscenza divenuta sottomassimale di esso mediante misure in successione fino ad una massimale. Affermo: solo quando ci sarò riuscito per la prima volta, e non prima, l'intreccio sarà risolto, e in secondo luogo mediante le misure su B, utilizzando le proposizioni condizionali che esistono, avrò conseguito una conoscenza massimale anche di A.

Infatti in primo luogo la conoscenza del sistema complessivo resta sempre massimale, poiché non sarà in ogni caso rovinata da misure buone e precise. In secondo luogo: proposizioni condizionali della forma "se per A .... .., allora per B .... ..", non possono più esistere, dal momento che abbiamo ottenuto un catalogo massimale di B. Allora esso *non* è condizionato e in esso non può più intervenire nulla di relativo ad A. Terzo: proposizioni condizionali in direzione inversa ("se per B .... .., allora per A .... ..") si trasformano in proposizioni riguardanti solo A, poiché tutte le probabilità per B sono già note in forma incondizionata. L'intreccio è quindi rimosso senza residui, e poiché la conoscenza del sistema totale è rimasta massimale, può solo consistere nel fatto che oltre al catalogo massimale di B se ne trova uno simile per A.

E non può succedere che A sia conosciuto indirettamente, mediante le misure di B, già in modo massimale, prima che lo sia B. Infatti allora tutte le conclusioni funzionerebbero in senso inverso, cioè anche B lo sarebbe. I sistemi sono conosciuti in modo massimale allo stesso tempo, come affermato. Si nota inoltre che ciò varrebbe anche se non si restringessero le misure proprio ad uno dei due sistemi. Ma l'interessante è proprio che ci si *possa* restringere ad uno dei due; che in questo modo si raggiunga lo scopo.

È lasciato completamente all'arbitrio dello sperimentatore *quali* misure vadano compiute su B ed in quale sequenza. Egli non ha bisogno di scegliere variabili particolari per poter usare le proposizioni condizionali. Può tranquillamente fare un piano che lo porterebbe ad una conoscenza massimale di B anche se su B non conoscesse proprio nulla. Non può arrecare alcun danno che egli porti questo piano alla conclusione. Quando egli considera dopo ogni misura se ha già raggiunto lo scopo, lo fa solo per risparmiarsi dell'altro lavoro superfluo.

Quale catalogo di A si ottenga indirettamente in tal modo, dipende evidentemente dai numeri misurati che risultano su B (prima che l'intreccio sia del tutto risolto; dai successivi non più, nel caso che fossero superfluamente rimisurati). Si supponga ora che io abbia in un certo caso ottenuto in tal modo un catalogo di A. Allora posso riflettere e pensare se forse ne avrei trovato un *altro*, se avessi messo in opera un *altro* piano di misura su B. Ma tuttavia, sia che abbia influenzato il sistema A nel modo reale o nell'altro modo pensato, le asserzioni dell'altro catalogo, quali che possano essere, devono *pure* essere giuste. Devono quindi essere completamente contenute nel primo, poiché il primo è massimale. Ma lo dovrebbe essere anche il secondo. Quindi esso dev'essere identico al primo.

Stranamente la struttura matematica della teoria non soddisfa affatto in modo automatico questa prescrizione. Anzi peggio, si possono costruire degli esempi nei quali la prescrizione è necessariamente violata. Invero si può in ogni esperimento eseguire di fatto solo una sequenza di misure (sempre su B!); allora quando ciò è avvenuto l'intreccio è risolto e con ulteriori misure su B non si apprende più nulla su A. Ma esistono casi di intreccio nei quali per le misure su B sono proponibili *due programmi determinati*, ciascuno dei quali 1. deve portare allo scioglimento dell'intreccio, 2. deve portare ad un catalogo di A, al quale l'*altro* non *può* assolutamente portare - quali che siano i numeri misurati che possono risultare nell'uno o nell'altro caso. Succede infatti semplicemente che le due *sequenze* del catalogo di A, che si possono ottenere con l'uno o con l'altro programma, sono nettamente separate e non hanno un singolo termine in comune.

Questi sono casi particolarmente esasperati, nei quali la conclusione appare così evidente. In generale ci si deve riflettere più attentamente. Quando vengono presentati due programmi per le misure su B e le due sequenze del catalogo di A alle quali essi possono portare, non basta affatto che le due sequenze abbiano uno o alcuni termini in comune per poter dire: toh, allora uno di questi si presenterà sempre - e quindi sostenere che la prescrizione è "presumibilmente soddisfatta". Ciò non basta. Infatti *si conosce* la probabilità di ogni misura su B, considerata come misura sull'intero sistema, e con molte ripetizioni ab ovo ciascuna si deve realizzare con la frequenza ad essa destinata. Le due sequenze del catalogo A dovrebbero quindi coincidere termine a termine e inoltre le probabilità in ciascuna sequenza dovrebbero essere le stesse. E ciò non solo per questi due programmi, ma per ciascuno degli infiniti che si possono escogitare. Ma non se ne parla minimamente. La prescrizione che il catalogo A che si ottiene debba essere sempre lo stesso quali che siano le misure su B con le quali lo si porti alla luce, questa prescrizione non è soddisfatta proprio mai.

Esporremo ora un semplice esempio "esasperato".

§12. **Un esempio.**[5].

Per semplicità consideriamo due sistemi con solo un grado di libertà ciascuno. Cioè ognuno di essi sarà caratterizzato mediante una coordinata q ed un impulso p ad esso canonicamente coniugato. L'immagine classica sarebbe quella d'un punto materiale mobile solo lungo una retta, come le palline di quel giocattolo col quale i bambini imparano a far di conto. p è il prodotto massa per velocità. Per il secondo sistema indichiamo i due elementi determinanti con Q e P maiuscole. Se i due siano "infilati sullo stesso filo", non abbiamo da dirlo nel nostro discorso astratto. Ma se anche lo fossero, può tuttavia esser comodo non calcolare q e Q dalla stessa origine. L'equazione $q = Q$ non deve significare necessariamente coincidenza. I due sistemi possono malgrado ciò essere del tutto separati.

Nel lavoro citato si mostra che tra questi due sistemi può esistere un intreccio, che *in un dato istante, al quale tutto il seguito si riferisce*, si indicherà in breve con le due equazioni

$$q = Q \text{ e } p = -P.$$

Cioè: io *so* che se una misura di q dà un certo valore sul primo sistema, una misura di Q eseguita subito dopo sul secondo darà lo *stesso* valore e vice versa; *so inoltre* che se una misura di p sul primo sistema dà un certo valore, una misura di P eseguita subito dopo darà il valore opposto e vice versa.

Una singola misura di q o *di* p *oppure di* Q *ovvero di* P leva l'intreccio e rende *entrambi* i sistemi noti in modo massimale. Una seconda misura sullo stesso sistema ora modifica solo la risposta riguardo ad *esso*, e non insegna più nulla riguardo all'altro. Quindi non si possono verificare entrambe le equazioni con un esperimento solo. Si può però ripetere l'esperimento ab ovo mille volte; si può riproporre sempre lo stesso intreccio; a capriccio si può verificare o l'una o l'altra equazione; ciò che di volta in volta ci si degna di verificare lo si trova confermato. Supponiamo che ciò sia accaduto.

Se poi al milleunesimo esperimento vien voglia di rinunciare a verifiche ulteriori e, al posto di esse, di misurare sul primo sistema q e sul secondo P, e si trova

$$q = 4, P = 7;$$

si può allora dubitare che

$$q = 4, p = -7$$

sarebbe stata una giusta predizione per il primo sistema, oppure

$$Q = 4, P = 7$$

una giusta predizione per il secondo? Non verificabili nel loro pieno contenuto con un esperimento singolo, queste non sono affatto predizioni quantistiche, ma giuste, poiché chi si ostinasse non si esporrebbe ad alcuna delusione, qualunque metà avesse pur scelto di verificare.

Non si possono aver dubbi in proposito. Ogni misura è sul suo sistema la prima. Le misure su sistemi separati non possono influenzarsi direttamente, ciò sarebbe

[5]A. Einstein, B. Podolsky e N. Rosen, Physic. Rev. **47**, 777 (1935). La comparsa di questo lavoro ha dato lo stimolo per la presente - la chiamerò relazione o confessione generale?

magia. Non può trattarsi di numeri casuali se da mille prove risulta che le misure eseguite la prima volta coincidono.

Il catalogo delle predizioni $q = 4$, $p = -7$ sarebbe ovviamente ipermassimale.

§13. **Prosecuzione dell'esempio: tutte le misure possibili sono univocamente intrecciate.**

Ora secondo la dottrina della meccanica quantistica, che seguiamo qui fino alle sue ultime conseguenze, una *predizione* in questa circostanza non è possibile. Molti miei amici si tranquillizzano così e spiegano: ciò che un sistema *avrebbe* risposto allo sperimentatore, se... , - non ha niente a che fare con una misura reale e perciò dal nostro punto di vista epistemologico non ci porta a nulla.

Ma rendiamoci la faccenda ancora una volta del tutto chiara. Concentriamo l'attenzione sul sistema contrassegnato dalle lettere minuscole p, q, chiamiamolo per brevità quello "piccolo". La faccenda sta certamente così: al sistema piccolo, mediante misura diretta su di esso, io posso porre una delle due domande, o quella riguardo a q oppure quella riguardo a p. Prima di farlo posso, se voglio, con una misura sull'altro sistema completamente separato (che considereremo come apparato ausiliario) essermi procurato la risposta ad *una* di queste domande, oppure posso avere l'intenzione di procurarmela dopo. Il mio sistema piccolo, come uno studente all'esame, *non può affatto sapere* se io l'abbia fatto e per quale domanda, ovvero se e per quale io abbia intenzione di farlo dopo. Con un numero sufficientemente grande di esperimenti preliminari so che lo studente risponde sempre giusto alla prima domanda che io gli pongo. Da ciò segue che egli *conosce* in ogni caso la risposta a *entrambe* le domande. Che il rispondere alla prima domanda che mi è venuto voglia di porre abbia stancato o confuso lo studente in modo tale che le sue risposte successive non siano valide non cambia proprio niente riguardo a questa verifica. Nessun direttore di ginnasio, qualora questa situazione si ripetesse con migliaia di studenti di ugual provenienza, giudicherebbe diversamente, tanto egli si chiederebbe stupito *che cosa* renda tutti gli studenti così stupidi o renitenti dopo aver risposto alla prima domanda. Non gli verrebbe in mente che la consultazione da parte sua, dell'insegnante, di un manuale suggerisca allo studente la risposta giusta, o, nel caso che l'insegnante abbia voglia di controllare dopo la risposta soddisfacente dello studente, che la risposta abbia mutato il testo del taccuino a favore dello studente.

Il mio sistema piccolo contiene quindi per la domanda su q e per la domanda su p una risposta del tutto determinata già nel caso che essa sia la prima che gli si ponga direttamente. Questa prontezza non può cambiare d'un briciolo per il fatto che io misuri Q sul sistema ausiliario (nella metafora: che l'insegnante cerchi una delle domande nel suo taccuino e inoltre però rovini con una macchia d'inchiostro la pagina dove sta l'altra risposta). Il meccanico quantistico sostiene che dopo una misura di Q sul sistema ausiliario al mio sistema piccolo spetta una funzione ψ nella quale "q è del tutto preciso, ma p è completamente indeterminato". E tuttavia, come detto prima, non è cambiato d'un briciolo il fatto che il mio sistema piccolo abbia già anche per la domanda su p una risposta del tutto determinata, e precisamente la stessa di prima.

Ma la faccenda è ancora molto più malmessa. Non solo il mio studente sveglio ha già sia per la domanda su q che per la domanda su p una risposta del tutto determinata, ma anche per mille altre, e senza che io possa minimamente indovinare la tecnica mnemonica con la quale egli ottiene ciò. p e q non sono le sole variabili che io posso misurare. Anche ad una qualsiasi combinazione di esse, per esempio

$$p^2 + q^2$$

corrisponde secondo il punto di vista della meccanica quantistica una misura del tutto determinata. Ora si mostra[6] che anche per questa la risposta si può stabilire con una misura sul sistema ausiliario, cioè con la misura di P^2+Q^2, e che le risposte sono esattamente uguali. Secondo regole generali della meccanica quantistica per questa somma di quadrati può risultare solo un valore della successione

$$h,\ 3h,\ 5h,\ 7h, \ldots\ldots.$$

La risposta, che il mio sistema piccolo ha già per la domanda su p^2+q^2 (nel caso che questa debba essere la prima che si affronti) dev'essere un numero di questa successione. - Esattamente allo stesso modo succede con la misura di

$$p^2 + a^2q^2,$$

dove a dev'essere una qualsiasi costante positiva. In questo caso secondo la meccanica quantistica la risposta dev'essere un numero della successione seguente:

$$ah,\ 3ah,\ 5ah,\ 7ah, \ldots\ldots.$$

Per ogni valore numerico di a si ottiene una nuova domanda, per ciascuna il mio sistema piccolo contiene già una risposta presa dalla successione (costruita con il corrispondente valore di a).

La cosa più sorprendente è ora: non è possibile che queste risposte stiano tra loro nella relazione data dalle formule! Infatti sia q' la risposta che si è già avuta per la domanda su q, p' la risposta per la domanda su p; allora non è possibile che

$$\frac{p'^2 + a^2q'^2}{ah}$$

sia uguale ad un numero intero dispari per valori numerici determinati p' e q', e *per ogni numero positivo arbitrario a*. Ma questo non è solo un operare con numeri immaginati, che non si possono misurare realmente. Due dei numeri si possono procurare davvero, per esempio q' e p', uno mediante misura diretta, l'altro mediante misura indiretta. E allora ci si può convincere del fatto (sit venia verbo) che l'espressione precedente costruita con i numeri misurati q' e p' e con un a arbitrario, non è affatto un numero intero dispari.

A prima vista il difetto nella connessione delle diverse risposte tenute pronte (nella "tecnica mnemonica" dello studente) è completo, il buco non potrà essere colmato da un'algebra della meccanica quantistica di nuovo tipo. Il difetto è tanto più sorprendente perché si può dimostrare altresì: l'intreccio è già fissato univocamente dalle prescrizioni $q = Q$ e $p = -P$. Se sappiamo che le coordinate sono uguali e che gli impulsi sono uguali ma di segno opposto, secondo la meccanica quantistica risulta una corrispondenza biunivoca *completamente determinata* di *tutte* le misure *possibili* sui due sistemi. Per *ogni* misura sul "piccolo" si può ottenere il valore

[6]E. Schrödinger, Proc. Cambridge philos. Soc. (in stampa).

numerico mediante una misura opportunamente predisposta sul "grande", ed ogni misura sul grande orienta parimenti sul risultato che un certo tipo di misura sul piccolo darà o ha dato. (Naturalmente nello stesso senso come sempre finora: su ogni sistema conta solo la misura vergine.) Se abbiamo portato i due sistemi nella situazione che essi (per dirla in breve) coincidano in coordinata ed impulso, essi coincidono (per dirla in breve) anche rispetto a tutte le altre variabili.

Ma come i valori numerici di tutte queste variabili dipendano l'uno dall'altro in *un* sistema non lo sappiamo, sebbene il sistema per ognuna debba averne già pronto uno ben determinato: infatti se vogliamo possiamo venirlo a sapere mediante il sistema ausiliario e lo troviamo poi sempre confermato con misura diretta.

Poiché non sappiamo nulla sulla relazione tra i valori delle variabili predisposti in *un* sistema, si dovrà ora pensare che non ne sussista alcuna, che possano verificarsi combinazioni largamente arbitrarie? Ciò significherebbe che a un siffatto sistema con "*un* grado di libertà" non sarebbero necessari per una descrizione adeguata solo due numeri, come vorrebbe la meccanica classica, ma molti di più, forse infiniti. Ma è tuttavia sorprendente che *due* sistemi coincidano sempre in *tutte* le variabili, se coincidono in due. Si dovrebbe quindi assumere in secondo luogo che ciò dipenda dalla nostra inettitudine; si dovrebbe pensare che noi non siamo praticamente in grado di portare due sistemi in una situazione nella quale essi coincidano rispetto a due variabili senza introdurre, volenti o nolenti, la coincidenza anche per tutte le variabili rimanenti, sebbene ciò non sia di per sè necessario. Si devono fare queste *due* ipotesi, per non avvertire la mancanza totale di comprensione della relazione tra i valori delle variabili all'interno di un sistema come un grosso guaio.

§14. **La variazione dell'intreccio col tempo. Riflessioni sulla posizione speciale del tempo.**

Forse non è superfluo ricordare che tutto ciò che è stato detto nelle sezioni 12 e 13 si riferisce ad un solo istante. L'intreccio non è invariabile nel tempo. Permane certamente un intreccio biunivoco di *tutte* le variabili, ma la corrispondenza cambia. Ciò significa quanto segue. Ad un tempo t successivo si può ben venire a sapere di nuovo, con una misura sul sistema ausiliario, il valore di q o di p che si ha *allora*, ma le misure che a questo fine si devono fare sul sistema ausiliario sono *diverse*. Quali siano, lo si può vedere facilmente in un caso semplice. Naturalmente ora si ha dipendenza dalle forze che agiscono all'interno dei due sistemi. Assumiamo che non agisca alcuna forza. Per semplicità porremo che la massa sia uguale per i due e la chiameremo m. Allora nel modello classico gli impulsi p e P resterebbero costanti, poiché sono dati dalle velocità moltiplicate per le masse; e le coordinate al tempo t, alle quali per distinguere apporremo l'indice t (q_t, Q_t), si calcoleranno da quelle iniziali, che chiameremo ancora q, Q, nel modo seguente:

$$q_t = q + \frac{p}{m}t, Q_t = Q + \frac{P}{m}t.$$

Parliamo in primo luogo del sistema piccolo. Il modo più naturale per descriverlo classicamente al tempo t è dando la coordinata e l'impulso *a questo tempo*, cioè mediante q_t e p. Ma si può fare anche diversamente. Al posto di q_t si può dare anche q. Pure q è un "elemento determinante al tempo t", e proprio ad ogni tempo t, e precisamente uno che non cambia col tempo. Ciò è molto simile al fatto che io posso dare un certo elemento determinante della mia stessa persona, cioè la mia età, o mediante il numero 48, che cambia col tempo e che nel caso del sistema corrisponde a dare q_t, oppure col numero 1887, come è usuale sui documenti, e che corrisponde a dare q. Ora, per quanto sopra si ha

$$q = q_t - \frac{p}{m}t.$$

Analogamente per il secondo sistema. Introduciamo quindi come elementi determinanti

$$\text{per il primo sistema } q_t - \frac{p}{m}t \text{ e } p,$$

$$\text{per il secondo sistema } Q_t - \frac{P}{m}t\ e\ P.$$

Il vantaggio è che *tra questi si mantiene in permanenza lo stesso intreccio*:

$$q_t - \frac{p}{m}t = Q_t - \frac{P}{m}t, p = -P,$$

o risolvendo:

$$q_t = Q_t - \frac{2t}{m}P; p = -P.$$

Ciò che cambia col tempo è quindi solo questo: la coordinata del sistema "piccolo" non sarà determinata semplicemente mediante una misura della coordinata sul sistema ausiliario, ma attraverso una misura dell'aggregato

$$Q_t - \frac{2t}{m}P.$$

Al riguardo però non ci si deve proporre di misurare Q_t e P, infatti ciò non dà nulla. Ma si deve pensare, come sempre si deve pensare nella meccanica quantistica, che si ha un procedimento di misura diretto per questo aggregato. Per il resto vale per ogni istante, con questo mutamento, *tutto* ciò che è stato detto nelle sezioni 12 e 13; in particolare esiste in ogni istante l'intreccio biunivoco di *tutte* le variabili assieme alle sue male conseguenze.

Le cose vanno esattamente così anche quando all'interno di ogni sistema agisce una forza, ma allora q_t e p si intrecciano con variabili che si compongono con Q_t e P in modo più complicato.

Ho spiegato questo in breve perché possiamo riflettere su quanto segue. Che l'intreccio cambi con il tempo ci rende un poco meditabondi. Tutte le misure di cui s'è parlato devono forse essere eseguite in un tempo brevissimo, propriamente in modo *istantaneo*, senza durata, per giustificare le inesorabili conseguenze? Si può scacciare lo spettro facendo presente che le misure richiedono tempo? No. In ogni singolo esperimento è necessaria solo *una* misura su ogni sistema; vale solo quella vergine, le successive sarebbero comunque irrilevanti. Quanto a lungo duri la misura non occorre che c'interessi, poiché non ne vogliamo far seguire una seconda. Si devono solo allestire le due misure verginali in modo tale che esse producano i valori delle variabili per lo stesso preciso *istante* a noi noto in precedenza; noto in precedenza, perché dobbiamo indirizzare le misure sulla coppia di variabili che proprio in quell'istante è intrecciata.

- Forse non è possibile indirizzare le misure in questo modo?

= Forse. Lo sospetto addirittura. Solo: l'*attuale* meccanica quantistica deve richiedere ciò. Infatti essa è ora così sistemata che le sue predizioni son fatte sempre per un determinato *istante*. Poiché esse si devono riferire a valori misurati, non avrebbero alcun contenuto se non si potessero misurare *per* un istante determinato le variabili in questione, sia che la misura duri molto, o poco.

Quando *apprendiamo* il risultato ci è ovviamente del tutto indifferente. Ciò ha dal punto di vista teorico così poca rilevanza come il fatto che si impieghi un mese per integrare le equazioni differenziali del tempo per i prossimi tre giorni. - Il paragone drastico con l'esame dello studente è alla lettera inesatto in alcuni punti, ma lo spirito è giusto. L'espressione "il sistema sa" forse non viene ad avere più il significato che la risposta sgorga dalla situazione di un istante, essa può forse essere attinta da una successione di situazioni che si estende per un spazio di tempo finito. Ma anche se fosse così non avremmo bisogno di preoccuparci, purché il sistema in qualche modo attingesse da sé la sua risposta senza un altro aiuto, come quando gli diciamo (mediante il dispositivo sperimentale) a *quale* domanda desideriamo che risponda; e purché la risposta stessa sia associata univocamente ad un *istante*; cosa che bene o male si deve presupporre per ogni misura di cui parla la meccanica quantistica odierna; altrimenti le predizioni quantomeccaniche non avrebbero alcun contenuto.

Ma nella nostra discussione ci siamo imbattuti in una possibilità: Se si potesse introdurre l'ipotesi che le predizioni quantomeccaniche non o non sempre si riferiscano ad un istante precisamente determinato, non si avrebbe bisogno di richieder ciò neanche dai numeri misurati. In tal modo, poiché le variabili intrecciate cambiano col tempo, la comparsa di affermazioni antinomiche sarebbe resa straordinariamente più difficile.

Che la predizione temporalmente netta sia un passo falso è probabile anche per altri motivi. Il numero misurato del tempo è come ogni altro il risultato di un'osservazione. È possibile consentire che si faccia un'eccezione proprio per la misura da un orologio? Non si riferirà essa come ogni altra ad una variabile che in generale non ha un valore preciso e che in ogni caso non lo può avere contemporaneamente ad *ogni* altra variabile? Quando si predice il valore di un'*altra* per un determinato *istante*, non si dovrà temere che i due non possano essere conosciuti simultaneamente con precisione? Entro la meccanica quantistica attuale questo timore non si può proprio studiare a fondo. Infatti il tempo è a priori assunto come noto sempre con precisione, anche se si dovrebbe ammettere che ogni guardar l'ora perturbi l'avanzare dell'orologio in maniera incontrollabile.

Devo ripetere che non possediamo una meccanica quantistica le asserzioni della quale valgano *non* per istanti esattamente determinati. Mi sembra che questo difetto si manifesti proprio in quelle antinomie. Con ciò non intendo dire che esso sia l'unico difetto che si manifesti in loro.

§15. **Principio di natura o artificio di calcolo?**

Che il "tempo preciso" sia un'incongruenza all'interno della meccanica quantistica e che inoltre, per così dire indipendentemente da ciò, la posizione particolare del tempo costituisca un serio ostacolo per l'adeguamento della meccanica quantistica al *principio di relatività*, negli ultimi anni l'ho fatto notare ripetutamente, purtroppo senza poter fare neppure l'ombra di una controproposta praticabile[7].

[7]Berl. Ber. 16 April 1931; Annales de L'Institut H. Poincaré, p. 269 (Paris 1931); Cursos de

Osservando nel complesso l'intera situazione attuale, come ho cercato di delinearla qui, si fa largo anche un'osservazione di tutt'altro tipo riguardo alla "relativizzazione" della meccanica quantistica, così strenuamente perseguita, ma non ancora realmente raggiunta.

La singolare teoria della misura, i salti apparenti della funzione ψ e infine le "antinomie dell'intreccio" scaturiscono tutti dal modo semplice col quale l'apparato di calcolo della meccanica quantistica consente di fondere concettualmente in uno solo due sistemi separati; per la qual cosa esso sembra proprio predestinato. Quando due sistemi entrano in interazione, come abbiamo visto, non entrano in interazione le loro funzioni ψ, ma esse cessano immediatamente di esistere e al loro posto ne compare una sola per il sistema complessivo. Essa consiste, per ricordarlo in breve, prima semplicemente nel *prodotto* delle due funzioni singole; il quale, poiché una funzione dipende da variabili del tutto diverse da quelle dell'altra, è una funzione di tutte queste variabili ovvero "ha gioco in una regione con un numero di dimensioni ben più alto" che le funzioni singole. Non appena i sistemi cominciano ad interagire la funzione complessiva cessa di essere un prodotto, e neppure quando essi si sono di nuovo separati si suddivide di nuovo in fattori che si possano assegnare individualmente ai sistemi. Così si dispone provvisoriamente (finché l'intreccio non venga risolto mediante una reale osservazione) solo di una descrizione *complessiva* dei due in quella regione con un numero di dimensioni più alto. Questo è il motivo per il quale la conoscenza dei sistemi singoli può calare al minimo, proprio fino a zero, mentre quella del sistema complessivo resta costantemente massimale. La conoscenza migliore possibile di un tutto *non* include la conoscenza migliore possibile delle sue parti - l'incubo si basa interamente su questo.

Chi su ciò rifletta deve poi valutare con ponderazione i seguenti fatti. La fusione concettuale di due o più sistemi in *uno* solo si scontra con grandi difficoltà non appena si cerchi di introdurre nella meccanica quantistica il principio della relatività speciale. P.A.M. Dirac[8] ha risolto il problema di un solo elettrone già da sette anni in modo sbalorditivamente semplice e bellamente relativistico. Una serie di conferme sperimentali, che vanno sotto le espressioni rotazione dell'elettrone, elettrone positivo e creazione di coppie, non possono lasciare alcun dubbio sulla fondamentale correttezza della soluzione. Ma in primo luogo essa si pone però assai fortemente al di fuori dello schema concettuale della meccanica quantistica[9] (quello che ho qui cercato di delineare), in secondo luogo ci si scontra con una resistenza ostinata non appena, a partire dalla soluzione di Dirac, si cerchi di progredire nel problema di più elettroni secondo il modello della teoria non relativa. (Ciò dimostra già che la soluzione fuoriesce dallo schema generale, infatti in questo, come ricordato, la fusione di sistemi parziali è semplicissima.) Non azzardo alcun giudizio sui tentativi che esistono in questa direzione[10]. Che essi abbiano raggiunto lo scopo non lo credo già per il fatto che gli autori non lo sostengono.

Le cose stanno in modo analogo con un altro sistema, il campo elettromagnetico.

---

la universidad internacional de verano en Santander, **1**, p. 60 (Madrid, Signo, 1935).

[8] Proc. roy. Soc. Lond. A, **117**, 610 (1928).

[9] P.A.M. Dirac, The principles of quantum mechanics, I ed., p. 239, II ed., p. 252. Oxford: Clarendon Press 1930 e 1935.

[10] Ecco alcuni dei riferimenti più importanti: G . Breit, Physic. Rev. **34**, 553 (1929) e 616 (1932). - C. Møller, Z. Physik **70**, 786 1931. - P.A.M. Dirac, Proc. roy. Soc. Lond. A **136**, 453 (1932) e Proc. Cambridge philos. Soc. **30**, 150 1934. - R. Peierls, Proc. roy. Soc. Lond. A **146**, 420 (1934). - W. Heisenberg, Z. Physik **90**, 209 (1934).

Le sue leggi sono “la teoria della relatività incarnata”, una trattazione *non* relativa è assolutamente impossibile. Tuttavia questo campo, che come modello classico della radiazione termica ha dato il primo impulso alla teoria dei quanti, è stato il primo sistema ad essere “quantizzato”. Che ciò si potesse ottenere con mezzi semplici deriva dal fatto che si ha la vita un pochino più facile perché i fotoni, gli “atomi di luce”, non interagiscono affatto tra loro[11], ma solo per l’intermediazione delle particelle cariche. Oggi non possediamo ancora una teoria quantistica realmente ineccepibile del campo elettromagnetico[12]. Si arriva davvero lontano con la *costruzione a partire da sistemi parziali* secondo il modello della teoria non relativa (teoria della luce di Dirac[13]), ma non proprio alla meta.

Forse il procedimento semplice che la teoria non relativa possiede in proposito è soltanto un comodo artificio di calcolo, che però oggi, come abbiamo visto, ha ottenuto un’influenza straordinariamente grande sul nostro atteggiamento fondamentale riguardo alla natura.

Per l’agio avuto nella stesura di questa relazione devo ringraziare caldamente Imperial Chemical Industries Limited, London.

[11] Ma ciò succede probabilmente solo in modo approssimato. Vedi M. Born e L. Infeld, Proc. roy. Soc. Lond. A **144**, 425 e **147**, 522 (1934); **150**, 141 (1935). Questo è il tentativo più recente di un’elettrodinamica quantistica.

[12] Ecco di nuovo i lavori più importanti; in parte il loro contenuto si riferisce anche all’argomento della citazione precedente: P. Jordan e W. Pauli, Z. Physik **47**, 151 (1928). - W. Heisenberg e W. Pauli, Z. Physik **56**, 1 (1929); **59**, 168 (1930). - P.A.M. Dirac, V.A. Fock e B. Podolsky, Physik. Z. d. Sowj. **6**, 468 (1932). - N. Bohr e L. Rosenfeld, Danske Videnskaberne Selskab, math.-phys. Mitt. **12**, 8 (1933).

[13] Un’ottima relazione: E. Fermi, Rev. modern physics **4**, 87, (1932).

Tentativo di un'applicazione generale unitaria della teoria dei quanti, e di una teoria quantistica della dispersione[1]

Adolf Smekal

(comunicazione provvisoria)

Le applicazioni fatte finora dei postulati dei quanti (I. esistenza di stati stazionari, II. condizione delle frequenze di Bohr, III. principio di corrispondenza, IV. stabilità dello stato quantico più basso) si limitano solo ad oggetti pensati come *isolabili* in linea di principio, consistenti di cariche elementari positive e negative (atomi, molecole, cristalli singoli). Tutte le interazioni tra questi oggetti si dovranno quindi considerare sotto certe circostanze come trascurabilmente piccole, ed in particolare lo spostamento relativo di questi oggetti come sottoposto a leggi *classiche*, mentre le strutture di questi oggetti sono di per sè fondamentalmente diverse, devono per l'appunto obbedire alle leggi *quantistiche*. La fondamentale uguaglianza di tutte le cariche che costituiscono gli oggetti suddetti vieta tuttavia una siffatta separabilità in linea di principio degli oggetti l'uno dall'altro. Ma se si sottopongono ai postulati dei quanti anche queste interazioni degli oggetti di solito pensati come indipendenti (atomi, molecole, ioni, cristalli singoli) si deve lasciar perdere questa consueta, più o meno arbitraria suddivisione degli oggetti, e considerare il moto di *tutte* le cariche elementari in una regione dell'universo arbitrariamente grande come un problema quantistico in linea di principio unico. Allora la natura dei singoli stati quantici discreti si manifesta analoga a quella d'un atomo, molecola o cristallo arbitrariamente complicato: in ogni caso si tratta di soluzioni particolari del corrispondente problema meccanico del moto, che ammettono uno sviluppo in un numero finito di periodi indipendenti di una serie di Fourier multipla, la cui scelta precisa è determinata dalla forma di Schwarzschild delle condizioni quantiche e dal principio di corrispondenza. Le cariche dei singoli atomi, molecole, ioni ora non sono più legate tra loro puramente dalle prescrizioni quantiche; tuttavia le proprietà elettriche di questi oggetti hanno per conseguenza che i legami quantici intermolecolari mutano in generale le frequenze proprie di questi solo impercettibilmente rispetto a quelle calcolate per gli oggetti pensati isolati. Questi scostamenti diventano percettibili solo nell'allargamento delle righe spettrali, nella dispersione e nella diffusione. Le frequenze dei legami quantici intermolecolari riempiono la totalità dei valori positivi concepibili, *in pratica* sono dense oltre ogni limite dappertutto. Tenendo conto di questa circostanza l'applicazione proposta dei postulati dei quanti rende possibile una spiegazione completamente unificata di tutti i fenomeni spettrali a partire dagli spettri a righe e a bande fino agli spettri continui e a quello della radiazione termica. Essa si dimostra di portata fondamentale anche in altre questioni sulle quali non ci si può addentrare qui; essa contiene in sè l'importante teoria delle velocità di reazione di *M. Polanyi* come conseguenza particolare. Se si cerca di affrontare la questione della propagazione della luce in base all'applicazione unitaria proposta della teoria dei quanti, appaiono in forma più acuta le vecchie difficoltà della teoria dei quanti precedente, prima tra tutte l'assenza di radiazione degli stati stazionari e la localizzazione difettosa dell'emissione della luce. La rete in linea di principio indivisibile dei legami quantici intermolecolari rende possibile - come già, però in

[1]Versuch einer allgemeinen, einheitlichen Anwendung der Quantentheorie und einer Quantentheorie der Dispersion, Anzeiger der Akademie der Wissenschaften zu Wien **10**, 79-81 (1922).

tutt'altra forma, *W. Schottky* ha cercato di delineare - un'interpretazione secondo la teoria dei quanti della rappresentazione di Lorentz-Ritz di tutti i processi di campo della teoria di Maxwell, che faccia riferimento esclusivamente alle variazioni delle interazioni delle particelle materiali (delle cariche elementari). Le interazioni degli elettroni positivi e negativi non possono più a rigore essere assegnate mediante la legge di Coulomb ad azione istantanea, ma con potenziali ritardati; la necessaria assenza di radiazione delle orbite quantiche richiede però allora deviazioni dalla forma esatta della legge di Coulomb nell'immediata vicinanza (10^{-12} cm) delle cariche elementari, e già con le considerazioni di *W. Lenz* e dell'autore sul contenuto energetico dei nuclei atomici si è cominciato a fare i conti con questa possibilità. Se da qualche parte nell'universo si verifica una "transizione quantica", la perturbazione così originata, da intendersi come "locale" solo in un certo senso, si propaga con la velocità della luce sulla rete dei legami quantici intra- e intermolecolari in modo tale che dopo il passaggio di un certo tempo-luce, misurato da una determinata carica elementare di riferimento, questa perturbazione finisce, poiché il quanto di luce emesso sarà riassorbito mediante una cert'altra "transizione quantica". I concetti di etere e di campo risultano del tutto superflui per questa rappresentazione del modo di propagarsi della luce. La dispersione normale e anomala (e analogamente la diffusione) trovano la loro spiegazione nelle diversità di quei legami quantici che quantitativamente saranno più di tutti interessati dalla propagazione di quella perturbazione, che corrisponde all'emissione ed al riassorbimento di un quanto di luce da parte dell'universo.

Sull'ottica quantistica[1]

Gregor Wentzel a Monaco

(Ricevuto il 2 febbraio 1924)

Dal tempo della derivazione di Einstein della legge della radiazione di Planck si procura di assegnare nella statistica quantistica dei processi di emissione e di assorbimento certe probabilità, senza tuttavia fare su di esse affermazioni più precise. Proporremo qui un'ipotesi generale su queste probabilità, che appare adatta a contribuire a superare le contraddizioni che finora esistono in ottica teorica - teoria ondulatoria dell'interferenza e della polarizzazione da un lato, teoria quantistica delle righe spettrali dall'altro. Interpretiamo le interferenze come espressioni di leggi della statistica dei quanti che ne stanno alla base. La trattazione offre inoltre un significato quantistico alla fase della luce della teoria delle onde.

§1. La fase. Consideriamo il cammino di un raggio di luce da un sistema atomico emittente E ad un sistema atomico assorbente A. Per la teoria ondulatoria dell'interferenza è essenziale la fase:

$$\varphi = \int_E^A \frac{ds}{\lambda} = \frac{\nu}{c} \int_E^A n ds \tag{1}$$

(ν=frequenza, λ=lunghezza d'onda, n=indice di rifrazione, ds = elemento di cammino). Affermiamo che la fase φ può essere intesa quantisticamente come una pura quantità meccanica.

Si può ben considerare come il fondamento più importante della teoria dei quanti la legge che un sistema atomico non può irradiare finché si trova in stati meccanici, cioè che assorbimento ed emissione di radiazione sono sempre collegate a "transizioni" non meccaniche. Ma non solo gli atti di emissione e di assorbimento devono essere non meccanici; anche lungo il suo intero cammino la luce causerà continuamente negli atomi del mezzo interposto perturbazioni non meccaniche. Per fornire una misura invariante alla grandezza di queste perturbazioni, cioè alle deviazioni dalla meccanica hamiltoniana dei moti interni all'atomo, si descrivano i moti di tutti i sistemi atomici che risultano coinvolti dal processo di propagazione della luce mediante un sistema di coordinate canoniche d'impulso e di posizione α_k, β_k, nel caso più semplice uno tale che i suoi impulsi α_k siano costanti negli stati meccanici (α_k =costanti di integrazione della equazione differenziale alle derivate parziali hamiltoniana del sistema totale). La misura desiderata per le deviazioni dalla meccanica è allora l'integrale $\int \Sigma_k \beta_k d\alpha_k$, che va esteso su tutti i processi non meccanici, cioè su tutte le variazioni di α_k. Affermiamo che la fase φ, a meno di un fattore dimensionale universale h, il quanto d'azione di Planck, è identica a quell'integrale:

$$\varphi = \frac{1}{h} \int \sum \beta_k d\alpha_k. \tag{2}$$

È noto che secondo Jacobi si può introdurre come una delle coordinate dell'impulso (α_1) l'energia W; detto più precisamente, l'energia totale di tutti i sistemi

[1]Zur Quantenoptik, Zeitschr. f. Phys. **22**, 193-199 (1924).

atomici partecipanti, poiché noi li consideriamo tra loro accoppiati in linea di principio. Poiché la coordinata di posizione β_1 coniugata a W è il tempo, risulta in luogo della (2):

$$\varphi = \frac{1}{h}\left[\int t dW + \sum_2 \int \beta_k d\alpha_k\right]. \tag{3}$$

Trattiamo ora anzitutto i sistemi E ed A da soli, cioè consideriamo il caso della propagazione della luce nel vuoto. Si assumerà provvisoriamente che sia l'atto di emissione che quello di assorbimento avvengano istantaneamente. Al tempo t_E ha luogo l'emissione, cioè una diminuzione di energia (in E) di un certo ammontare $-\Delta W$; al tempo t_A il sistema deve, in conformità al principio dell'energia, ritornare alla sua energia originaria con la riassunzione dell'ammontare d'energia $+\Delta W$ (in A). La (3) dà quindi:

$$\varphi = \frac{1}{h}\left[\Delta W\left(t_A - t_E\right) + \sum_2 \int \beta_k d\alpha_k\right]. \tag{4}$$

Ma $t_A - t_E$ è uguale alla lunghezza del cammino della luce l divisa per la velocità della luce c (nel vuoto). Di conseguenza:

$$\varphi = \frac{\Delta W}{hc} \cdot l + \frac{1}{h}\sum_2 \int \beta_k d\alpha_k = \frac{l}{\lambda_0} + \cdots, \tag{5}$$

dove

$$\lambda_0 = \frac{hc}{\Delta W} = \frac{c}{\nu} \tag{6}$$

indica la lunghezza d'onda nel vuoto corrispondente al principio $h\nu$ di Bohr.

L'ipotesi dell'istantaneità dell'emissione e dell' assorbimento è inessenziale; basta evidentemente assumere che ogni elemento infinitesimo d'energia dW impieghi il tempo l/c ad andare da E ad A; allora la (5) segue dalla (3). La sola proprietà qui essenziale dei "quanti di luce" è quindi la loro velocità di propagazione c.

Se si prescinde dai contributi dei gradi di libertà $k = 2, 3, \cdots$, dei quali ci occuperemo più in particolare nel §3, la (5) coincide con la (1) per $n = 1$. Se identifichiamo la (1) con la (2) anche per mezzi dispersivi arbitrari otteniamo, tenendo conto della (6):

$$n = \frac{c}{\Delta W} \cdot \frac{d}{ds} \sum_1 \int \beta_k d\alpha_k. \tag{7}$$

L'indice di rifrazione misura quindi quantisticamente le deviazioni dalla meccanica per unità di cammino e di energia. La sua dipendenza da ΔW e dal mezzo costituisce l'oggetto di una teoria quantistica della dispersione, che K.F. Herzfeld pubblicherà[2] prossimamente in questo giornale. Il principio di Fermat $\delta \int nds = 0$

[2] L'autore deve alle discussioni con Herzfeld sulle possibilità di una teoria quantistica dell'interferenza e della dispersione molti suggerimenti per questo lavoro.

possiamo scriverlo $\delta \sum \int \beta_k d\alpha_k = 0$ e dunque affermiamo che lungo i cammini della luce dell'ottica geometrica la deviazione totale dalla meccanica è minima.

§2. La formula dell'interferenza. Sostituendo la fase classica dell'onda con la nostra fase quantistica, risulta ora facile tradurre la formula dell'interferenza della teoria ondulatoria nel linguaggio della statistica dei quanti: se il quanto di luce ha a disposizione diversi cammini s da E ad A, la probabilità che esso giunga ad A lungo uno qualsiasi dei cammini s e che ivi sia assorbito non è uguale alla somma delle probabilità a priori dei singoli cammini della luce s, ma è J volte tanto, dove

$$J = \frac{\mathfrak{F}\widetilde{\mathfrak{F}}}{|\mathfrak{F}_0|^2}, \tag{8}$$

$$\mathfrak{F}_0 = \sum_s \mathfrak{f}_s, \ \mathfrak{F} = \sum_s \mathfrak{f}_s \exp(2\pi i \varphi_s). \tag{9}$$

Qui i φ_s indicano le fasi (2) prese sui singoli cammini s, e le $\mathfrak{f}_s$ le ampiezze vettoriali delle onde classiche, sul significato quantistico delle quali ritorniamo nel §3. In coordinate rettangolari x, y, z il fattore J si scrive:

$$\begin{aligned} J = {} & \frac{(\Sigma\mathfrak{f}_{sx}\cos\varphi_s)^2 + (\Sigma\mathfrak{f}_{sx}\sin\varphi_s)^2}{(\Sigma\mathfrak{f}_{sx})^2 + (\Sigma\mathfrak{f}_{sy})^2 + (\Sigma\mathfrak{f}_{sz})^2} + \frac{(\Sigma\mathfrak{f}_{sy}\cos\varphi_s)^2 + (\Sigma\mathfrak{f}_{sy}\sin\varphi_s)^2}{(\Sigma\mathfrak{f}_{sx})^2 + (\Sigma\mathfrak{f}_{sy})^2 + (\Sigma\mathfrak{f}_{sz})^2} \\ & + \frac{(\Sigma\mathfrak{f}_{sz}\cos\varphi_s)^2 + (\Sigma\mathfrak{f}_{sz}\sin\varphi_s)^2}{(\Sigma\mathfrak{f}_{sx})^2 + (\Sigma\mathfrak{f}_{sy})^2 + (\Sigma\mathfrak{f}_{sz})^2} \end{aligned} \tag{10}$$

La coincidenza formale del numeratore con il quadrato delle ampiezze delle onde sovrapposte assicura alla prescrizione (8) una validità senza eccezioni per quanto riguarda le descrizione di un qualsiasi fenomeno di interferenza. Rispetto alla teoria delle onde la nostra prescrizione ha tuttavia il vantaggio di garantire fin dall'inizio l'identità delle "lunghezze d' onda" misurate mediante l' interferenza e mediante l' effetto fotoelettrico. Che queste lunghezze d'onda mostrino anche il corretto spostamento Doppler, quando i sistemi E ed A siano in moto, lo ha mostrato Schrödinger[3].

Essenziale per la nostra ipotesi è l'assunzione che il sistema emittente e il sistema assorbente siano in linea di principio accoppiati tra loro, secondo una tesi generale da poco formulata da Smekal[4].

In primo luogo abbiamo dovuto assumere nel §1 un accoppiamento meccanico, per poter porre univocamente in relazione mutua l'evoluzione temporale nei diversi sistemi atomici. Inoltre la formula (8) pone in dipendenza mutua i processi quantistici in sistemi diversi. È particolarmente degno di nota che secondo la nostra concezione la presenza del sistema assorbente A è irrinunciabile per il verificarsi di una qualche interferenza; nel vuoto essa non solo non è accertabile, ma per principio non succede. Un'intensità della luce misurata mediante il numero dei "quanti di luce" per unità di tempo e di superficie non potrebbe mai rivelare interferenze trasversalmente al cammino della luce, come si riconosce facilmente nell'esempio delle onde stazionarie.

[3] Phys. Zeitschr. **23**, 301 (1922).
[4] Wiener Anzeiger 1922, Nr. 10, p. 79.

Secondo la nostra concezione le emissioni di due atomi distinti E, E' sono evidentemente in linea di principio incoerenti, a meno che un qualche cammino della luce che tocchi tutti e tre gli atomi E, E', A non giochi un ruolo particolare[5].

§3. Sulla teoria degli spettri. Tratteremo ora in particolare la dipendenza del fenomeno d' interferenza dal carattere dell'atomo emittente E. Per questo assumeremo in particolare che il sistema E sia condizionatamente periodico, e che quindi l'equazione differenziale alle derivate parziali che gli si riferisce sia separabile. Come coordinate di posizione β_k assumiamo ora in conformità allo scopo le cosidette variabili angolari w_k, che a prescindere della loro linearità nel tempo sono determinate dal fatto che il sistema è periodico in w_k con il periodo 1. Le costanti dell'impulso ad esse coniugate $\alpha_k = I_k$ sono com'è noto identiche agli "integrali di fase" $\left(\oint p_k dq_k\right)$ della teoria dei quanti.

Per decomporre la fase φ anche in queste coordinate secondo l'Eq. (3), facciamo uso della relazione

$$w_k = t \cdot \frac{\partial W}{\partial I_k} + u_k, \tag{11}$$

dove gli u_k indicano quantità di fase indeterminate. Allora l'espressione (2), per quanto riguarda il sistema E, si scrive:

$$\varphi = \frac{1}{h} \int \sum w_k dI_k = \frac{1}{h} \left[\int t dW + \sum \int u_k dI_k \right]. \tag{12}$$

Si assumerà ora che le quantità di fase u_k durante le transizioni (cioè quando gli I_k cambiano di ΔI_k) rimangano invariate[6]. Allora la (12) dà

$$\varphi = (1/h) \left[\int t dW + \sum u_k \Delta I_k \right] + \cdots \tag{13}$$

---

[5]Si può tener conto della lunghezza finita di coerenza dell'emissione di un atomo mediante un postulato aggiuntivo. Le differenze di fase che compaiono nella (8) e nella (9) per ogni coppia di cammini s ed s' si possono scrivere:

$$\varphi_s - \varphi_{s'} = \Delta W/hc \int n ds,$$

dove l'integrale va esteso alla curva scelta $E \to s \to A \to s' \to E$. Esigeremo ora che questa curva sia chiusa non solo spazialmente, ma anche temporalmente, nel senso che il quanto d'energia ΔW anche nei tempi $t_{Es} - t_{Es'}$ ovvero $t_{As} - t_{As'}$ sia presente nel sistema, cioè sia depositato nel sistema E ovvero A. Per questo è necessario che

$$|t_{Es} - t_{Es'}| < \tau_E, \; |t_{As} - t_{As'}| < \tau_A,$$

quando τ_E ovvero τ_A significano il tempo di permanenza del quanto ΔW nell'atomo E ovvero A. In generale $\Delta W/h$ non sarà nessuna frequenza propria del sistema A, τ_A sarà quindi praticamente nullo. I tempi di assorbimento t_A da sostituire nella (4) devono quindi praticamente coincidere, il che corrisponde alla circostanza, che nella teoria ondulatoria interferiscono i treni d' onda che arrivano simultaneamente in A. D'altra parte interferiscono solo quei raggi s, s' i cui tempi d'emissione t_E differiscono per meno di τ_E. La durata media dello stato iniziale di E gioca quindi il ruolo di una durata di coerenza. Di fatto l'equazione: Lunghezza di coerenza=durata × velocità della luce si accorda bene con i dati noti: 10^2cm= 10^{-8}sec $\cdot 10^{10}$cm/sec.

[6]Richiediamo quindi che, nel sistema di coordinate angolare, dei due sistemi di equazioni hamiltoniane

$$I_k = \text{cost.}, \; u_k = \text{cost.},$$

il secondo risulti valido anche durante le transizioni non meccaniche. Dobbiamo espressamente

Per valori assegnati di ΔI_k la transizione può pur sempre aver luogo con valori diversi di u_k. Di conseguenza dobbiamo generalizzare la nostra ipotesi sulla probabilità (§2) in modo che la probabilità di una transizione per un qualche valore di u_k sia diversa dalla somma delle singole probabilità di nuovo per un fattore J, nel quale ora si deve prendere la media non solo sui cammini della luce s, ma anche sulle quantità di fase u_k. Per i coefficienti vettoriali $\mathfrak{f}_s$ [nella (9)] possiamo scrivere in generale:

$$\mathfrak{f}_s = \mathfrak{E}_s(u_k) du_1 du_2 \dots \tag{14}$$

Al posto della (9) risulta quindi:

$$\mathfrak{F}_0 = \sum_s \int \cdots \int du_1 du_2 \dots \mathfrak{E}_s\left(u_k\right),$$
$$\mathfrak{F} = \sum_s \int \cdots \int du_1 du_2 \dots \mathfrak{E}_s\left(u_k\right) \exp\left[2\pi i \left(\Sigma u_k \Delta I_k / h + \int t dW/h + \cdots\right)\right]. \tag{15}$$

Ma il sistema intero E è per ipotesi periodico con periodo 1 nei w_k e quindi per la (11) anche negli u_k. La funzione $\mathfrak{E}_s\left(u_k\right)$ si deve poter quindi sviluppare in serie di Fourier nel modo seguente:

$$\mathfrak{E}_s\left(u_k\right) = \sum_{n_k} \mathfrak{D}_{n_k}^{(s)} \exp\left[-2\pi i \Sigma n_k u_k\right] \tag{16}$$

(n_k intero). Si sostituisca la (16) nella (15) e si integri su tutti gli u_k da $-\infty$ a $+\infty$; sotto l'ipotesi

$$\sum_s \mathfrak{D}_0^{(s)} \neq 0$$

l'espressione (8) della probabilità sarà nulla, a meno che tutti i ΔI_k non siano multipli interi di h. La nostra formula risulta quindi in accordo con la nota condizione quantica dei sistemi separabili, che l'impulso I_k salti solo di multipli interi di h:

$$\Delta I_k = n_k \cdot h. \tag{17}$$

Un atomo "quantizzato" una volta passerà dunque sempre ad un ulteriore stato quantizzato.

Sostituendo la (17) nella (15) ovvero nella (8), otteniamo una misura della probabilità di transizione tra stati quantizzati, cioè per l' intensità della riga spettrale corrispondente. Perchè in virtù delle (16) e (17) l'intero integrando della (15) è periodico in u_k, basta estendere l'integrazione sul cubo elementare $0 \leq u_k \leq 1$; si ottiene allora:

$$\mathfrak{F} = \sum_s \mathfrak{D}_{n_k}^{(s)} \exp\left[2\pi i \int t dW/h + \cdots\right] = \sum_s \mathfrak{D}_{n_k}^{(s)} \exp\left[2\pi i \int \frac{ds}{\lambda}\right]. \tag{18}$$

---

limitare questa condizione alle transizioni spontanee; se la estendessimo per esempio anche ai processi che la luce genera negli atomi di un mezzo rifrangente (§1), l'indice di rifrazione (7) risulterebbe sempre uguale a 1. In contrapposizione a quelli spontanei si possono considerare i processi adiabatici, nei quali gli I_k sono mediamente costanti su tempi lunghi, ma gli u_k sono in generale variabili (nota aggiunta durante la correzione).

Il coefficiente $\mathfrak{D}^{(s)}$ che interviene qui è l'ampiezza di una data oscillazione armonica nella (16), cioè quella di ordine $n_k = \Delta I_k/h$. La formula (18) è quindi identica al principio di corrispondenza di Bohr per l' intensità e per la polarizzazione, quando si identifichi il vettore $\mathfrak{E}_s$ nella (14) e nella (16) con il vettore della luce della teoria ondulatoria, che è irraggiato dal sistema E nella posizione $w_k = u_k$ sul cammino s verso A. Secondo Bohr resta indeterminato se la radiazione classica (16) si debba calcolare per lo stato iniziale, per lo stato finale o per uno stato intermedio. Se l'ampiezza $\mathfrak{D}$ dell'oscillazione armonica considerata è uguale a zero per tutti gli stati intermedi, il principio di corrispondenza si rafforza in una regola di selezione.

Ora l'espressione (18) coincide interamente dal punto di vista formale con il vettore della luce periodico classico; soltanto, la frequenza meccanica è sostituita dalla frequenza quantistica $\Delta W/h$, quella che risulta dall'integrazione su u_k, e questa viene introdotta tramite la legge di probabilità. Nella formula d'interferenza (10) si possono sostituire direttamente i vettori $\mathfrak{f}_s$ con le ampiezze classiche della luce $\mathfrak{D}^{(s)}_{n_k}$. Ciò offre la possibilità di introdurre le condizioni al contorno classiche per $\mathfrak{D}^{(s)}$ sulle superfici di separazione di mezzi diversi (superfici di discontinuità di n) secondo il principio di corrispondenza; allora evidentemente valgono le leggi della rifrazione, della riflessione, della doppia rifrazione (polarizzazione) proprio come nella teoria ondulatoria. Di fatto il principio di Huygens si fonda proprio sull'interferenza.

L'estensione delle presenti considerazioni ad un sistema E non periodico si scontra per ora con la difficoltà, che in questo non si può definire facilmente un sistema privilegiato di coordinate di posizione analogo alle variabili angolari. Si avrebbe bisogno soltanto di fissare univocamente un sistema di coordinate normali, le cui costanti di fase u_k (vedi sopra) durante la transizione restassero costanti. L'autore ha pensato di discutere prossimamente questo problema in un altro lavoro nell'esempio di uno spettro Röntgen continuo.

Mentre nella teoria quantistica considerata finora si fa uso del quanto d'azione di Planck h in due punti essenzialmente distinti, cioè nel principio $h\nu$ e nelle condizioni quantiche, qui è stato introdotto solo una volta, cioè nell'espressione (2) per la fase φ. Abbiamo ottenuto qui il principio $h\nu$, le condizioni quantiche ed il principio di corrispondenza dalla sola espressione (2) assieme alle leggi di probabilità (8, 15); il principio $h\nu$ senza ipotesi restrittive, le condizioni quantiche e il principio di corrispondenza con l'assegnazione del sistema di coordinate angolari.

München, Institut für theoretische Physik, gennaio 1924.

Appendice

Documento N. 185[1]

Note degli atti del segretario dell'Accademia delle Scienze, E. Heymann, sulle dimissioni di A. Einstein

Berlino, 11 aprile 1933

dattiloscritto

AAW Berlin, II-IIIa - Bd.28b, Bl. 75-84; inventario A Nr. 830

1.) Nella seduta plenaria di giovedì 30 marzo è stata considerata la dichiarazione di dimissioni del signor Einstein, e si è deciso di scrivere al signor ministro, il quale con un proprio scritto aveva sollecitato dall'Accademia l'eventuale assunzione di un provvedimento disciplinare, che il signor Einstein si è dimesso. Ciò è avvenuto il giorno stesso.

Il giorno seguente, venerdì 31 marzo 1933, evidentemente per effetto del rapporto dell'Accademia, il signor commissario del Reich Dr. Rust ha dichiarato al signor professor Gerloff, rettore dell'università di Francoforte, e al prof. Platzhoff di Francoforte anch'egli presente, che il silenzio del corpo accademico e dell'università riguardo al comportamento indegno di Einstein era insopportabile, e che egli esigeva a buon diritto una dichiarazione immediata e pubblica della corporazione degli studiosi. Questa informazione mi è stata comunicata telefonicamente dal rettore dell'università, prof. Kohlrausch[2], molto tardi la sera di venerdì 31 marzo. Il signor Kohlrausch riteneva la posizione della corporazione assai pericolosa e chiedeva insistentemente che l'Accademia si adeguasse al desiderio del signor commissario del Reich.

Venerdì è stato il giorno del boicottaggio dei negozi ebrei. L'eccitazione era oltremodo grande. Come mi è stato comunicato da fonte degna di fede, quella sera sia il ministro del Reich Goebbels che il commissario del Reich Streicher nei loro discorsi trasmessi per radio hanno dato la responsabilità del comportamento di Einstein ai professori e agli studiosi in generale. Questo l'ha udito anche alla radio il signor Erman, e l'ha confermato nella seduta plenaria del 6 aprile. La dichiarazione pubblica dell'Accademia doveva essere consegnata ai giornali sabato pomeriggio. Avevo perciò solo il sabato mattina per il disbrigo della faccenda, e non potevo convocare una seduta della segreteria, poiché i signori Planck e Lüders erano in Italia e il signor von Ficker era stato costretto a compiere una missione di qualche giorno a Francoforte s. M., di modo che ero il solo segretario presente. Convocare una seduta entro poche ore era del tutto escluso. Poiché già da prima ero dell'opinione che l'Accademia anche riguardo alle dimissioni spontanee di Einstein dovesse fare una dichiarazione pubblica, e che in ogni caso una tale dichiarazione, date le circostanze, doveva essere oltremodo sollecita, poiché l'Accademia era la corporazione più interessata, ho abbozzato una dichiarazione, ne ho parlato con i signori Franke e Brackmann, che in queste cose hanno particolare esperienza, e ho cercato inutilmente di raggiungere i signori Stutz ed E. Schmidt. Ho quindi scritto la dichiarazione durante un colloquio con il signor prof. Sthamer, e l'ho fatta mandare ai giornali più importanti, ossia: "Der Lokal-Anzeiger", "Der Tag", "Der

[1] *Albert Einstein in Berlin 1913-1933; Vol. 1: Darstellung und Dokumente*, bearbeitet von Christa Kirsten und Hans-Jurgen Treder, 257 - 261, Berlin, Akademie-Verlag (1979).

[2] E. Kohlrausch, rettore dell'università di Berlino, 1932/33.

Völkische Beobachter", "Der Angriff", "Berliner Tageblatt", "Vossische Zeitung"; per lunedì la dichiarazione era pronta anche per "Germania" e "Kreuzzeitung". Contemporaneamente per sabato a mezzogiorno la dichiarazione ha raggiunto gli uffici stampa del governo, e allo stesso tempo ho comunicato il testo per iscritto al signor commissario del Reich. Dopo l'invio, che ha dovuto avvenire a mezzogiorno prima della chiusura delle redazioni, ho potuto a un certo momento, nel quale si poteva ancora eventualmente telefonare una modifica ai giornali (con l'eccezione del Vossische Zeitung, che tuttavia ha riprodotto inesattamente, di modo che sarebbe stata possibile una rettifica) parlare con il signor E. Schmidt[3], ed egli, come pure i signori Francke e Brackmann, era del tutto d'accordo sulla formulazione della dichiarazione e sulla sua diffusione.

E già sui giornali del mattino è apparsa una dichiarazione dei non ordinari di Berlino, nella quale si diceva:

"La presidenza dell'unione dei docenti universitari non di ruolo di Berlino leva con sdegno una protesta contro il comportamento privo di tatto del professor Albert Einstein, che ha ottenuto in Germania grandi onori, ma che all'estero reca pregiudizio all'immagine tedesca, sostenendo con il suo comportamento la campagna di diffamazione contro la Germania."

La dichiarazione era firmata da 12 persone; essa precisa che i non ordinari di Berlino contano nel loro gruppo quegli Accademici che non sono professori ordinari all'università, ma che hanno il diritto di tenere lezioni. Questa dichiarazione è giunta prima della nostra, e inoltre senza che io ne avessi conoscenza; poiché essa è apparsa nello stesso giorno della nostra dichiarazione non si può ricavare l'impressione che essa abbia provocato la nostra. Inoltre venerdì 31 marzo il rettore[4] mi aveva detto che aveva intenzione di sottoporre la questione alla conferenza dei rettori per una decisione.

In seguito ho parlato della questione con i signori Bieberbach e Heinrich Maier, che pure erano totalmente d'accordo con il testo; la domenica anche con il signor Stutz, senza avere il testo; anch'egli era ugualmente d'accordo.

Il lunedì alle 3 del mattino ho discusso dettagliatamente la questione con il signor von Ficker, che nella notte era tornato da Francoforte s. M., e ho trovato da parte sua completa approvazione. In un colloquio con l'incaricato del ministero[5] egli ha consegnato a questo uno scritto, nel quale egli affermava d'essere del tutto d'accordo con la dichiarazione, ed espressamente la faceva sua.

La dichiarazione dell'Accademia è stata pubblicata dai giornali berlinesi e attraverso il servizio stampa prussiano anche da moltissimi giornali esteri, e precisamente in parte (Vossische Zeitung) ancora sabato 1 aprile sera, in gran parte domenica mattina, 2 aprile.

Il Vossische Zeitung il sabato ha perfino rafforzato la dichiarazione, poiché ha tralasciato nella conclusione le parole "su questa base", di modo che sembra che l'Accademia non abbia niente da rimpiangere, neppure dal punto di vista scientifico. Non vi poteva esser dubbio, che da questa interpretazione più recisa il carattere conciliante della dichiarazione fosse stato accresciuto di tono. In ogni modo la dichiarazione ha avuto un effetto tranquillizzante. In particolare l'incaricato del ministero ha espresso al riguardo al signor von Ficker la sua soddisfazione per

[3]Vedi doc. Nr. 177, 1.appendice, e la dichiarazione di M. von Laue in doc. Nr. 198.

[4]E. Kohlrausch.

[5]Th. Vahlen. Vedi doc. 182, nota 1.

la soluzione della questione. Un buon numero di persone successivamente m'ha individualmente approvato la dichiarazione, in particolare il signor Wiegand, ben informato sui rapporti con l'estero.

La competenza al rilascio della dichiarazione risulta dal §29 dello statuto, secondo il quale la segreteria all'occorrenza "può operare subito sotto la propria responsabilità". Se dei segretari alcuni sono in viaggio i segretari rimasti, all'occorrenza il solo rimasto, devono, com'è assolutamente normale, operare da soli. Che questi possa emettere pubbliche dichiarazioni come rappresentante espressamente incaricato del segretario presidente, risulta dal §30, capoverso 2, comma 1 per una dichiarazione alla stampa di questo tipo[6].

Sul carattere della situazione si osserva che sabato 1 aprile l'università era occupata dai reparti d'assalto e che gli studenti ebrei come gli assistenti ebrei e addirittura i docenti venivano espulsi, che così avveniva anche al seminario giuridico e che il signor Sthamer, mentre la mattina parlavamo per telefono della cosa, comunicava che anche l'edificio della biblioteca statale era occupato, e questo ha fatto sì che ai frequentatori ebrei venisse ritirato il permesso di ingresso. Che quest'ultimo fatto si sia svolto senza attriti lo si spiega, come ho desunto da un colloquio con il signor direttore generale Krüss[7], con il comportamento calmo di quest'ultimo, che con opportuna condiscendenza ha straordinariamente facilitato il disbrigo della faccenda.

2.) Per quanto riguarda la sostanza della dichiarazione, già nell'ultima seduta della segreteria, alla quale hanno preso parte il signor Planck e, mi pare, anche il signor Lüders oltre al signor von Ficker e a me, eravamo d'accordo che il signor Einstein, qualora non si fosse dimesso spontaneamente, lo dovessimo espellere o almeno, che si dovesse aprire contro di lui un procedimento di espulsione[8]. Ciò corrispondeva pienamente all'atteggiamento dell'Accademia nel plenum del 30 marzo 1933. I signori erano stati del tutto d'accordo con l'esauriente rapporto del signor von Ficker.

I fatti, che vengono mossi a rimprovero al signor Einstein, sono nei punti essenziali del tutto sicuri, anche se si tien conto di tutte le incertezze delle notizie di stampa. Che il signor Einstein in America abbia pubblicamente parlato in riunioni che si occupavano di propalare notizie sensazionali di atrocità, o per lo meno che con queste erano strettamente connesse, e inoltre in un modo che esprimeva riprovazione per la Germania e per il governo tedesco, lui stesso non lo nega, risulta anche dalle sue interviste ai giornali belgi e francesi al suo arrivo ad Anversa, vedi per esempio il giornale "Excelsior", Parigi, del 28 e 29 marzo 1933, "Le Soir" del 29 marzo 1933; "La Dernière Heure" del 29 marzo 1933; il "Neptune" del 29 marzo 1933, in tutte le quali egli ha espresso ai giornalisti stranieri il proposito di non ritornare in Germania prima che fosse eliminata la restrizione alla libera espressione delle opinioni, e fosse ripristinata la completa protezione di tutti i cittadini. A sostegno si aggiungeva che egli riteneva la situazione in Germania come spiritualmente patologica o qualcosa del genere. In queste interviste egli comunicava inoltre che le

---

[6]Statuto della reale Accademia prussiana delle scienze di Berlino del 28 marzo 1881, §29: sedute della segreteria; al §30 capoverso 2 comma 1 si legge: *"Di tutte le delibere del segretario presidente quelle che sono destinate al ministero competente con l'eccezione degli atti di importanza secondaria . . . , vanno firmate da tutti i segretari."* Vedi statuti e regolamenti della reale Accademia prussiana delle scienze e delle sue fondazioni aggregate ed istituti. Berlino 1907.

[7]H.A. Krüss, direttore generale della biblioteca di stato dal 1925 al 1945.

[8]Vedi doc. Nr. 177 nota 6.

stesse cose le aveva dette nell'incontro pacifista in America, ma negava che egli in questo modo o altrimenti avesse detto qualcosa che avesse un "caractère offensant pour l'Allemagne", e inoltre che non aveva ripudiato il suo vincolo d'amicizia con la Germania. I giornali tedeschi avevano poco prima comunicato che egli aveva sollecitato gli altri paesi ad un intervento generale. Ciò può rimanere incerto sulla base della sua dichiarazione di Anversa e delle sue affermazioni successive. In ogni caso risulta sussistere una ripetuta inopportuna critica all'estero della nazione di cui è cittadino. Ciò è aggravato dal tono generale di quelle dichiarazioni che i giornali esteri gli attribuiscono. Egli ha anche dichiarato pubblicamente ai corrispondenti dei giornali che avrebbe rinunciato alla cittadinanza tedesca, ed una corrispondenza degli inviati tedeschi in Belgio a me resa nota dall'ufficio degli esteri conferma che il suo annuncio di espatrio più volte ripetuto nei giornali è davvero avvenuto. In totale accordo con questo è il fatto che s'è dimesso dall'Accademia, e dall'istituto[9] da lui condotto assieme al signor von Laue, con una dichiarazione esplicita delle ragioni politiche.

Allo stesso tempo il signor Einstein ha rilasciato sempre all'estero una dichiarazione scritta della lega per la lotta all'antisemitismo, che è stata riportata letteralmente in molti giornali, si legge in francese nel "Journal des Nations" di Genf del 28 marzo 1933, in tedesco per esempio in un comunicato del "Kölnisches Zeitung" da Bruxelles del 30 marzo 1933, nel numero del 30 marzo 1933, e dice:

"Gli atti di brutale violenza e oppressione, che sono diretti contro tutte le persone di spirito libero e contro gli ebrei, questi atti, che si sono verificati e si verificano ora in Germania, hanno fortunatamente smosso le coscienze di tutti i paesi che restano fedeli a pensieri di umanità e alle libertà politiche. La lega internazionale contro l'antisemitismo si è acquistata il grande merito di difendere la giustizia, preoccupandosi che l'unione dei popoli non sia infettata dal veleno.

Possiamo sperare che la reazione sia sufficiente a proteggere l'Europa da una ricaduta nella barbarie di epoche da lungo tempo scomparse. Possano tutti gli amici della nostra civiltà così seriamente minacciata concentrare tutti i loro sforzi, per toglier di mezzo questa malattia mondiale. Io sono con loro."

Firmato: Albert Einstein.

Questa dichiarazione è stata stampata in numerosi giornali tedeschi, per esempio sul "Lokal Anzeiger" del 27 marzo 1933, Nr. 146, sull'"Augsburger Post" del 31 marzo 1933 fino ai giornali piccolissimi (ho potuto leggerla sul "Recklinghauser Zeitung"); anche il signor Einstein non lo contesta. La dichiarazione in questa forma non poteva essere sottoscritta da un cittadino tedesco all'estero per espliciti scopi di propaganda, vista anche la sua posizione sulla faccenda e come egli pubblicamente in patria si è espresso sulla cosa. Queste dichiarazioni si accordano con la molteplice attività politica di Einstein in tempi precedenti all'interno del paese, in particolare con le sue molteplici dichiarazioni che offendono duramente lo spirito militare, che all'estero sono ben note. Questo risulta da svariato materiale, per esempio la sua dichiarazione al "Tag" del 7.VII.1929, nella quale afferma che egli rifiuterebbe di servire in guerra direttamente o indirettamente, e che cercherebbe di indurre i suoi amici allo stesso comportamento, e ciò indipendentemente dal giudizio sulla causa della guerra. E d'altronde negli ultimi tempi le sue dichiarazioni politiche erano tali da risultare a stento sopportabili per molti, anzi per tutti i membri dell'Accademia. Questo lo si aggiunge per caratterizzare

[9] Kaiser Wilhelm Institut für Physik.

la situazione complessiva. La dichiarazione dell'Accademia si astiene da ogni rimprovero moralistico e si concentra esclusivamente sulla pura questione politica; solo a causa del suo comportamento politico globale il signor Einstein ha creato una situazione, che deve rendere all'Accademia addirittura augurabili le sue dimissioni. Vi è completo accordo tra tutti i membri dell'Accademia che la perdita scientifica che si verifica con il suo allontanamento è irrimediabile; ma di parlare della sua posizione scientifica, non c'era nella dichiarazione alcun motivo. Piuttosto mediante le parole dell'ultima frase "su questa base" ci si intende espressamente limitare alla pura politica. Non ho dubbi che qualsiasi Accademia straniera avrebbe espulso senz'altro uno studioso che avesse utilizzato la sua fama mondiale per agitazioni contro la nazione di cui è cittadino e contro il suo governo, e per giunta all'estero. Questo sarebbe accaduto in particolare in Francia. La successiva gestione della faccenda risulta dagli ulteriori resoconti dei fatti.

Prof. Dr. Ernst Heymann