IL PROBLEMA DELLA SIMMETRIA DEL TENSORE DEGLI SFORZI ELETTROMAGNETICO[1]

M. Abraham

In una Nota[2] apparsa di recente in questi Annali il signor K. Schapownikow sostiene che riguardo alle azioni ponderomotrici torcenti di un'onda luminosa su un cristallo esiste una contraddizione tra la teoria di Maxwell da un lato e certe leggi della teoria degli elettroni dall'altro. Questa asserzione deve apparire a priori sorprendente; infatti la differenza essenziale tra le due teorie non sta tanto nelle loro predizioni riguardo agli sforzi fittizi, quanto piuttosto nel fatto che nella forza prodotta da questi sforzi secondo la teoria degli elettroni compare anche una forza che deriva dalla variazione temporale della quantità di moto elettromagnetica, la quale è estranea alla teoria di Maxwell-Hertz. Questa forza d'inerzia elettromagnetica gioca tuttavia un ruolo solo in processi non stazionari. In campi di radiazione stazionari il suo valor medio temporale è uguale a zero, di modo che le forze che agiscono sugli elettroni di un corpo hanno la stessa risultante e lo stesso momento risultante delle forze di superficie maxwelliane che agiscono sulla sua superficie. La contraddizione tra le due teorie, che il signor Schapownikow trova, deriva in verità, come mostreremo, esclusivamente da un disconoscimento del significato delle leggi dell'elettrodinamica al riguardo; ciò fornisce un esempio istruttivo del fatto che non si può operare con gli sforzi fittizi. Tratterò questo esempio in breve nel seguito e aggiungerò qualche osservazione più generale sul problema della simmetria del tensore degli sforzi elettromagnetico.

Intendiamo con $\mathfrak{E}^i$ l'intensità di campo elettrico, con $\mathfrak{D}^i$ l'induzione elettrica all'interno del cristallo; con un'opportuna scelta del sistema d'assi sussistono tra le componenti di questi

[1] Annalen der Physik **44**, 537 (1914).

[2] K. Schapownikow, Ann. d. Phys. **43.** p.473, 1914.

due vettori le equazioni

$$\mathfrak{D}^i_x = \varepsilon_1 \mathfrak{E}^i_x \,, \quad \mathfrak{D}^i_y = \varepsilon_2 \mathfrak{E}^i_y \,, \quad \mathfrak{D}^i_z = \varepsilon_3 \mathfrak{E}^i_z \,. \tag{1}$$

Si immagini ora all'interno del cristallo una placchetta dello spessore *dz*, le cui basi siano dei quadrati paralleli al piano (*xy*) d'area 1 cm^2, mentre i piani laterali sono perpendicolari all'asse *x* e rispettivamente all'asse *y*. Il campo elettrico esercita una coppia su questa placchetta?

Per rispondere a questa domanda il teorico deve comportarsi mentalmente come uno sperimentatore che studi se forze torcenti agiscano sulla placchetta. Deve prima di tutto separare la placchetta dal corpo del cristallo, di modo che sia mobile indipendentemente da quello. Tolta la connessione meccanica con il resto del cristallo, la placchetta sarà tutt'attorno avvolta da uno strato sottile di vuoto. Si costruisca entro questo strato una superficie che racchiuda la placchetta; il vettore unitario $\mathfrak{n}$ indichi la direzione della normale esterna. Allora la forza elettrica di superficie esercitata sulla superficie unitaria è

$$\mathfrak{T}^e = \mathfrak{E}\mathfrak{E}_n - \mathfrak{n}\,\frac{1}{2}\,\mathfrak{E}^2 \,; \tag{2}$$

il momento risultante di questa forza di superficie dà la forza torcente cercata.

Nell'equazione (2) dunque $\mathfrak{E}$ significa l'*intensità di campo elettrico* e parimenti l'*induzione elettrica nel vuoto* e *non*, come il signor Schapownikow mostra di credere, *l'intensità di campo all'interno del cristallo*. La connessione tra $\mathfrak{E}$ da una parte, e i vettori $\mathfrak{E}^i$, $\mathfrak{D}^i$ all'interno del cristallo dall'altra, è fornita dalle note condizioni al contorno dell'elettrodinamica, che richiedono la continuità della componente normale dell'induzione e della componente tangenziale dell'intensità di campo. Tenendo conto delle equazioni (1) esse danno:

I. Per le facce laterali perpendicolari all'asse *x*:

$$\mathfrak{E}_x = \mathfrak{D}^i_x = \varepsilon_1 \mathfrak{E}^i_x \,, \quad \mathfrak{E}_y = \mathfrak{E}^i_y \,; \tag{3}$$

II. Per le facce laterali perpendicolari all'asse *y*:

$$\mathfrak{E}_x = \mathfrak{E}^i_x \,, \quad \mathfrak{E}_y = \mathfrak{D}^i_y = \varepsilon_2 \mathfrak{E}^i_y \,; \tag{4}$$

Lo componenti lungo *z* sono nulle in un'onda luminosa che si propaghi nella direzione dell'asse *z*. Perciò sulle facce di base della placchetta agisce soltanto una pressione normale, che non dà luogo a momento torcente. Invece le forze di superficie che agiscono sulle facce laterali di altezza *dz* producono una coppia lungo l'asse *z*. E precisamente gli sforzi producono sulle superfici laterali perpendicolari all'asse *x* una coppia, il cui valore segue dalla (2) e dalla (3):

$$Y_x dz = \mathfrak{E}_y \mathfrak{E}_x dz = \varepsilon_1 \mathfrak{E}^i_x \mathfrak{E}^i_y dz \ ; \qquad (5)$$

inoltre gli sforzi producono sulle superfici laterali perpendicolari all'asse *y*, secondo la (2) e la (4), la coppia:

$$-X_y dz = -\mathfrak{E}_x \mathfrak{E}_y dz = -\varepsilon_2 \mathfrak{E}^i_x \mathfrak{E}^i_y dz \ . \qquad (6)$$

Il momento torcente risultante della forza ponderomotrice del campo elettrico lungo l'asse *z* vale quindi, in unità razionali:

$$\mathfrak{m}_z dz = (\varepsilon_1 - \varepsilon_2) \mathfrak{E}^i_x \mathfrak{E}^i_y dz \ . \qquad (7)$$

Mi sono astenuto dall'introdurre le forze di superficie magnetiche, poiché esse per cristalli magneticamente isotropi non danno alcun contributo al momento risultante. La formula (7) coincide completamente con quella menzionata da Schapownikow, derivata da A. Sadowsky dalla teoria di Maxwell. Essa dimostra l'esistenza di una coppia di forze per una lamina cristallina che tramuti luce polarizzata linearmente in luce polarizzata circolarmente. Si osserva tuttavia - questo è un risultato notevole - che questa coppia di forze ha luogo solo quando le onde luminose colpiscono le facce laterali della lamina.

L'esempio ora trattato rende ben chiaro quale difficoltà comporti la decisione per via sperimentale tra le ipotesi di un tensore degli sforzi simmetrico o non simmetrico. Anche se si assume che all'interno del cristallo omogeneo il tensore degli sforzi elettromagnetici sia simmetrico, e che perciò le singole particelle del cristallo in generale non sperimentino alcuna forza torcente da parte di quelle vicine, tali forze torcenti compaiono tuttavia non appena si estragga una particella e in tal modo si producano sulla sua superficie cariche elettriche libere. Perciò dall’esistenza di un tale momento torcente non segue affatto l’asimmetria del tensore degli sforzi all’interno del cristallo.

La questione della simmetria o dell’asimmetria del tensore degli sforzi elettromagnetico è quindi ancor oggi da considerarsi controversa. Maxwell[3] avanza per la forza di superficie elettromagnetica l’ipotesi

$$\mathfrak{T} = \mathfrak{E}\mathfrak{D}_n + \mathfrak{H}\mathfrak{B}_n - \mathfrak{n}\left\{ \frac{1}{2}\,\mathfrak{E}^2 + \frac{1}{2}\,\mathfrak{H}^2 \right\} ; \qquad (8)$$

questa nei cristalli porta ad un sistema asimmetrico di nove componenti degli sforzi.Secondo Hertz[4] invece

$$\mathfrak{T} = \frac{1}{2}\mathfrak{E}\mathfrak{D}_n + \frac{1}{2}\mathfrak{D}\mathfrak{E}_n + \frac{1}{2}\mathfrak{H}\mathfrak{B}_n + \frac{1}{2}\mathfrak{B}\mathfrak{H}_n - \mathfrak{n}\left\{ \frac{1}{2}(\mathfrak{E}\mathfrak{D}) + \frac{1}{2}\,(\mathfrak{H}\mathfrak{B}) \right\} \ . \qquad (9)$$

In questo caso anche quando $\mathfrak{E}$ e $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{H}$ e $\mathfrak{B}$ non sono paralleli gli sforzi sono tra loro uguali a coppie:

$$Y_x = X_y, \quad Z_y = Y_z, \quad X_z = Z_x \ ; \qquad (9a)$$

quindi il momento torcente delle forze elettromagnetiche all’interno del cristallo si annulla; il tensore degli sforzi si riduce ad un sistema simmetrico di solo sei quantità.

Nell’esposizione della *teoria di Maxwell-Hertz* si dà per lo più la preferenza al tensore degli sforzi simmetrico di Hertz[5]. Il tensore asimmetrico di Maxwell fa sì che in un campo elettrico vengano esercitate delle forze torcenti su una particella di cristallo da parte di quelle vicine all’interno del cristallo; queste forze torcenti dovrebbero essere tenute in equilibrio da forze elastiche torcenti, che l’elasticità consueta non contempla. Un tensore elettromagnetico asimmetrico sarebbe tuttavia ammissibile solo nell’ambito di una corrispondente teoria

---

[3]J.Cl. Maxwell, Treatise II. Art. 641.

[4]H. Hertz, Ges. Werke II. p.280. *Si trascurano qui gli sforzi aggiuntivi, che derivano dalla dipendenza delle costanti elettrica e magnetica dal tensore di deformazione.*

[5]*Vedi* Encyclopädie der mathem. Wissenschaften, Art. V, 13 (H.A. Lorentz). Nr. 23; Art. V, 16 (F. Pockels). Nr. 1.

generalizzata dell'elasticità. Come mostra l'esempio trattato prima, dal fatto che su cristalli in un campo elettrico agiscano forze torcenti non bisogna affatto concludere per l'esistenza di un momento torcente elettrico interno.

La teoria degli elettroni parte dai campi "microscopici", che i singoli elettroni producono nel vuoto; per questi campi il tensore elettromagnetico degli sforzi è sempre simmetrico, come risulta dall'espressione della forza di superficie elettromagnetica:

$$\mathfrak{T} = \mathfrak{E}\mathfrak{E}_n + \mathfrak{H}\mathfrak{H}_n - \mathfrak{n}\{ \tfrac{1}{2}\, \mathfrak{E}^2 + \tfrac{1}{2}\, \mathfrak{H}^2 \} \,. \qquad (10)$$

Secondo H.A. Lorentz dalle intensità di campo dei campi microscopici nel vuoto, costruendo i valori medi per regioni infinitamente piccole in senso fisico, risultano i vettori del campo macroscopico nella materia. Per arrivare agli sforzi del campo elettromagnetico si possono intraprendere due vie:

A. Si calcolano prima la forza e la coppia risultanti per un elemento di volume infinitamente piccolo in senso fisico, componendo secondo le regole della statica le forze che agiscono sui suoi elettroni. Si cerca poi di derivare questa forza e questa coppia da forze di superficie fittizie. Questa via intrapresa da H.A. Lorentz[6] pare condurre talvolta ad un tensore degli sforzi asimmetrico.

B. Si definisce ogni componente del tensore degli sforzi macroscopico costruendo il valor medio della corrispondente componente del tensore per il campo microscopico su una regione infinitamente piccola dal punto di vista fisico; quindi la proprietà di simmetria del tensore del campo microscopico definito dalla (10) si comunica al campo macroscopico, poiché le condizioni di simmetria

$$Y_x = X_y, \quad Z_y = Y_z, \quad X_z = Z_x \,, \qquad (10a)$$

si mantengono per costruzione della media sulla stessa regione. Il calcolo effettivo delle sei componenti degli sforzi in funzione

---

[6]H.A. Lorentz, Encyclopädie der mathem. Wissenschaften, Art V, 14, Nr. 53.

delle componenti vettoriali del campo macroscopico richiede per questa via d'addentrarsi con più precisione nella costituzione elettrica delle molecole[7]. Però la seconda via sembra la più diretta; essa porta alla prescrizione di un tensore degli sforzi simmetrico come quello che più si avvicina al punto di vista della teoria degli elettroni.

Nella teoria degli elettroni la forza ponderomotrice per unità di volume non è determinata solo dalle derivate spaziali delle componenti degli sforzi; intervengono anche le derivate temporali delle componenti della densità d'impulso ($\mathfrak{g}$) elettromagnetica. Il vettore della densità d'impulso è collegato alla corrente d'energia di Poynting mediante la relazione:

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{S}/c^2 , \tag{11}$$

che io chiamerei "*legge dell'impulso della corrente d'energia*"[8]. Questa legge si riferisce immediatamente ai campi elettronici microscopici nel vuoto. Essa rimane tuttavia valida all'interno dei corpi ponderabili, quando si definiscano i valori macroscopici della corrente d'energia e della densità d'impulso con una media su regioni spazio-temporali uguali. Anche nell'elettrodinamica dei corpi in moto valgono secondo questo punto di vista le relazioni

$$c\mathfrak{g}_x = \frac{\mathfrak{S}_x}{c} , \quad c\mathfrak{g}_y = \frac{\mathfrak{S}_y}{c} , \quad c\mathfrak{g}_z = \frac{\mathfrak{S}_z}{c} . \tag{11a}$$

Infine la teoria degli elettroni pone per la densità d'energia l'espressione

---

[7] *Naturalmente il tensore che si ottiene dal tensore del campo microscopico eseguendo la media non va confrontato senz'altro con quello della teoria di Maxwell-Hertz, poichè esso non si annulla, come quello, assieme al campo macroscopico.*

[8] *M. Laue* (Das Relativitätsprinzip, 2. Aufl. p.164) *chiama l'equazione (11) la "legge dell'inerzia dell'energia". Preferirei impiegare questo nome per la relazione tra energia e massa inerziale che si ottiene da essa per integrazione su "un sistema completamente statico".*

$$\psi = \frac{1}{2}\,\mathfrak{E}^2 + \frac{1}{2}\,\mathfrak{H}^2 \,. \tag{12}$$

Da questa e dalla (10) segue la relazione

$$X_x + Y_y + Z_z + \psi = 0 \,; \tag{12a}$$

questa rimane sempre valida, quando si passi dai campi microscopici nel vuoto ai campi macroscopici nella materia con un processo di media, anche quando si tratti di corpi in moto o cristallini.

Nello schema della *teoria della relatività* le nove componenti degli sforzi, le sei componenti della densità d'impulso e della corrente d'energia e la densità d'energia si intendono come le 16 componenti di un tensore tetradimensionale. Se questo tensore sia simmetrico o asimmetrico, il principio di relatività non dice nulla in proposito. H. Minkowski[9] lo assume asimmetrico, un punto di vista che è stato sostenuto recentemente da J. Ishiwara[10]. Io ho invece sviluppato una teoria dell'elettrodinamica dei corpi isotropi in moto[11] nella quale il tensore d'universo risulta simmetrico. La simmetria rispetto alla diagonale porta con sè l'esistenza delle relazioni (10a, 11a) e riduce il numero delle componenti del tensore a 10; i termini diagonali sono inoltre legati tra loro dalla relazione (12a). Sussistono dunque in questo caso tra le componenti del tensore tutte quelle relazioni che si ottengono dalla teoria degli elettroni per mezzo dell'accennata via del processo di media. Questa circostanza parla a favore della mia teoria. Naturalmente la sua correttezza si può dimostrare inequivocabilmente tanto poco quanto la validità della distribuzione dell'energia di Maxwell ovvero della corrente d'energia di Poynting nel campo elettromagnetico. Anche se la scelta del tensore d'universo elettromagnetico è in una certa misura arbitraria, a mio giudizio non si dovrebbe abbandonare il

---

[9]H. Minkowski, Göttinger Nachr. 1908. p. 53.

[10]J. Ishiwara, Ann. d. Phys. **42**, p. 986. 1913.

[11]M. Abraham, Rendiconti del circolo mat. di Palermo **28.** p. 1. 1909; **30.** p. 33. 1910.

requisito della simmetria, che include la legge dell'impulso della corrente d'energia, senza un motivo stringente. Questa legge, che Planck[12] postula valida per correnti d'energia d'ogni tipo, e che io ho esteso al campo gravitazionale[13], contiene il germe di un'energetica generale dei campi fisici.

Milano, 12 marzo 1914.

(ricevuto il 15 marzo 1914)

---

[12]M. Planck, Phys. Zeitschr. **9.** p. 828. 1908.

[13]M. Abraham, Phys. Zeitschr. **13.** p. 1. 1912.