

Principi dell'elettrodinamica^{1 2}

F. Bopp

(ricevuto il 30 aprile 1962)

In elettrodinamica ci si è abituati a partire dalle equazioni di campo e a considerarle come più o meno date a priori. Questo fatto ha origini storiche diverse³. Poichè i campi elettromagnetici non ci sono dati direttamente, ma mediante le loro azioni su corpi carichi, il contenuto dell'elettrodinamica sarà più chiaro se si parte da un lato dalle cariche, che sono direttamente misurabili (per esempio nel voltmetro ad argento), e dall'altro dalle forze, che si possono sempre misurare senza conoscere il contenuto dell'elettrodinamica. Nel seguito deriviamo l'elettrodinamica dall'equazione di continuità e dall'espressione per la forza di Lorentz mediante l'introduzione di principi che sono evidenti nel senso che non se ne può avere nessun altro, se solo si accetta la concezione di fondo dell'elettrodinamica⁴.

¹Zeitschr. f. Phys. **169**, 45 (1962).

²Per il 70° compleanno del Professor Dr. G. Hettner.

³Sommerfeld, A.: Vorlesungen über Theoretische Physik, Vol. III Elektrodynamik, 3^a ed., Leipzig 1961, prefazione di Sommerfeld e inizio del § 1. - Di quando in quando ha anche giocato un ruolo la concezione, sorta su base positivista, che solo i campi siano reali, mentre la carica e la corrente rappresentano solo concetti ausiliari definiti mediante le equazioni di Maxwell non omogenee.

⁴Il concetto di evidenza è ignoto alla moderna assiomatica, poichè la parte dell'assiomatica nella quale l'evidenza gioca un ruolo è cancellata dal campo visivo del matematico. Se si formulano assiomi non solo in modo astratto, ma si parte da rappresentazioni, si hanno affermazioni che a quelle sono necessariamente associate. Queste si dicono evidenti. Naturalmente l'evidenza non fornisce alcuna prova della validità delle affermazioni, che invece regge o cade assieme alla validità della rappresentazione scelta a fondamento.

È noto che la meccanica di Newton tratta del modo in cui le parti della materia si muovono a causa di forze date. In essa le leggi della forza sono introdotte come determinate empiricamente. Non ci si interroga sulle ragioni perché le leggi affermino questo o quello.

Anche nello studio delle forze elettromagnetiche si è cercato in primo luogo di cavarsela con questa impostazione. Tuttavia la legge della forza tra cariche in moto è risultata così poco trasparente che non si è potuta più evitare la questione della natura delle forze. Infine la scoperta che il trasferimento della forza tra due corpi impiega tempo ha reso evidente al di là di ogni dubbio che il mezzo tra i corpi partecipa.

Lo spazio tra i corpi non è quindi più vuoto. Diciamo che è riempito da "campi". In particolare in elettrodinamica i corpi sono associati a "campi elettromagnetici". Il campo appare qui come un nuovo tipo di realtà accanto a quello della materia. Solo nella teoria quantistica dei campi e nello studio delle particelle elementari si è mostrato che "campo e materia", "forza e sostanza" non sono così antitetici come potevano sembrare una volta. Tuttavia per fondare l'elettrodinamica non abbiamo bisogno d'addentrarci in questo, poiché la relazione empirica della materia col campo non viene influenzata da ciò. Possiamo vedere i moti dei corpi, ma i processi nei campi li possiamo solo desumere dalle azioni di questi sui corpi. Quindi il campo ci vien dato empiricamente, come ha detto incisivamente v. Weizsäcker, come "quintessenza delle azioni di forza possibili".

Per fondare l'elettrodinamica partiremo qui da questa situazione empirica. Quindi non possiamo porre al vertice le equazioni di campo, come accade di solito dal tempo di H. Hertz, ma dobbiamo cominciare con le forze che sono esercitate dai campi elettromagnetici sui corpi elettricamente carichi.

Dalle leggi di Faraday dell'elettrolisi si è appreso, cosa successivamente confermata in molti altri modi, che la carica elettrica è sempre associata con massa inerziale, e precisamente con un rapporto fisso in un dato tipo di atomo (o ione). Perciò è possibile misurare cariche elettriche con misure di massa indipendentemente dalla legge di forza tra campo e carica, e quindi

trovare le leggi della carica. Il risultato di questo studio lo riassumiamo nei seguenti principi:

1. Esistono cariche elettriche. La carica ha sempre un valore determinato in ogni volume. Essa è uguale ad un multiplo intero di una carica elementare, un multiplo che può essere positivo, negativo o 0.

2. La carica elettrica è una quantità estensiva: la somma delle cariche in due volumi è sempre uguale alla carica nei volumi congiunti.

3. Per la carica elettrica vale la legge di conservazione: se la carica in un volume aumenta o diminuisce, lo spazio esterno subisce una perdita o un guadagno di carica altrettanto grande.

Da questi principi s'ottengono l'equazione di continuità e le equazioni di Maxwell non omogenee. Da essi si può derivare immediatamente come al solito il concetto di intensità di corrente e, se si ammettono concetti definiti in modo infinitesimale, cosa che malgrado l'atomismo è possibile entro certi limiti, si può giungere ai concetti di densità di carica ρ e di densità di corrente \mathbf{j} .

Dal terzo principio discende per ρ e \mathbf{j} la legge di conservazione:

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho dV = - \int_S \mathbf{j} \cdot d\mathbf{f} , \quad (1)$$

dove nel primo integrale si integra sul volume di prova e nel secondo sulla sua superficie. Applicandola ad un volume infinitesimo s'ottiene l'equazione di continuità

$$\frac{\partial \rho(\mathbf{r}, t)}{\partial t} + \text{div } \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = 0 . \quad (2)$$

Questa si può integrare introducendo il potenziale di carica e di corrente. Si ponga infatti

$$\rho = \text{div } \mathfrak{D} ;$$

allora dalla (2) segue:

$$\text{div}(\mathbf{j} + \dot{\mathfrak{D}}) = 0 .$$

Pertanto $\mathbf{j} + \dot{\mathfrak{D}}$ dev'essere il campo d'un rotore:

$$\mathbf{j} + \dot{\mathfrak{D}} = \text{rot } \mathfrak{H} .$$

Con \mathfrak{D} ed \mathfrak{H} arbitrari le equazioni:

$$\rho = \text{div } \mathfrak{D} , \quad \mathfrak{j} = \text{rot } \mathfrak{H} - \dot{\mathfrak{D}} , \quad (3)$$

danno soluzioni dell'equazione di continuità. \mathfrak{D} ed \mathfrak{H} definiscono due campi che per ragioni storiche si chiamano "spostamento elettrico" e "intensità del campo magnetico".

È noto che Pohl ha diffuso con molto vigore questa definizione del campo \mathfrak{D} , \mathfrak{H} che risale essenzialmente a Mie. Si deve tuttavia osservare che il potenziale di carica e corrente non è ancora determinato univocamente dalla (3). Infatti le posizioni

$$\mathfrak{D}' = \mathfrak{D} + \text{rot } \mathfrak{u} , \quad \mathfrak{H}' = \mathfrak{H} + \dot{\mathfrak{u}} + \text{grad } \psi \quad (3a)$$

con ψ ed \mathfrak{u} arbitrari portano alla stessa distribuzione di carica e di corrente ρ , \mathfrak{j} come \mathfrak{D} ed \mathfrak{H} . Posizioni univoche, come vedremo in seguito, sono possibili solo se si introducono anche asserzioni riguardanti la forza.

Nello studio della forza di un campo elettromagnetico su cariche si parlerà in particolare di cariche puntiformi. Allo scopo è opportuno tener presente che l'equazione di continuità (2) vale anche per cariche puntiformi, purché le si descriva mediante funzioni δ . Siano Q_1 , Q_2 le cariche ed $\mathbf{r}_1(t)$, $\mathbf{r}_2(t)$ le posizioni di cariche puntiformi; si può allora scrivere per ρ e \mathfrak{j} :

$$\rho(\mathbf{r}, t) = Q_1 \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1(t)) + Q_2 \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_2(t)) + \dots$$

$$\mathfrak{j}(\mathbf{r}, t) = Q_1 \dot{\mathbf{r}}_1(t) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1(t)) + Q_2 \dot{\mathbf{r}}_2(t) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_2(t)) + \dots .$$

Si verifica facilmente che così l'Eq. (2) è soddisfatta. Di solito per ρ e \mathfrak{j} non si ha a che fare con queste espressioni, ma con valori medi. Di ciò non occorre che ci occupiamo qui.

Per la forza che il campo elettromagnetico esercita sulle cariche l'esperienza ci dà qualche altro principio. Partiamo dal seguente:

4. La forza su un punto materiale carico è proporzionale alla sua carica.

Poniamo allora:

$$\mathfrak{K} = Q \mathfrak{F} . \quad (4)$$

\mathfrak{F} è quindi la forza per unità di carica e si chiama "intensità di campo di Lorentz".

Per cariche in moto esistono una parte della forza indipendente dalla velocità ed una parte dipendente. Per questa si ha:

5. La forza su cariche puntiformi è lineare nella velocità. La parte della forza dipendente dalla velocità è ad essa ortogonale. Arriviamo perciò alla cosiddetta "forza di Lorentz":

$$\mathfrak{K} = Q\mathfrak{F} = Q(\mathfrak{E}(\mathbf{r}, t) + \mathbf{v} \times \mathfrak{B}(\mathbf{r}, t)) . \quad (5)$$

\mathfrak{E} si chiama "intensità del campo elettrico" e \mathfrak{B} "induzione magnetica". Per \mathfrak{E} e \mathfrak{B} valgono le equazioni di Maxwell omogenee:

$$\text{div } \mathfrak{B} = 0 , \quad \text{rot } \mathfrak{E} + \dot{\mathfrak{B}} = 0 . \quad (6)$$

Esse discendono dal sesto principio:

6. La forza di Lorentz si può derivare da un potenziale generalizzato.

Il potenziale generalizzato presuppone l'esistenza di una funzione di Lagrange L , che può essere del tutto arbitraria, ed è definita dall'equazione

$$V = T - L , \quad (7)$$

nella quale T indica l'energia cinetica. In generale V dipende oltre che da \mathbf{r} e da t anche dalla velocità \mathbf{v} . Dalle equazioni di Lagrange di secondo tipo discende per la forza definita da V :

$$\mathfrak{K} = - \frac{\partial V}{\partial \mathbf{r}} + \frac{d}{dt} \frac{\partial V}{\partial \mathbf{v}} . \quad (8)$$

Quando V non dipende dalla velocità quest'espressione coincide con la solita equazione per \mathfrak{K} e V .

La forza che discende dall'Eq. (8) conterrà in generale termini dipendenti dall'accelerazione della forma $(\partial^2 V / \partial v_i \partial v_k) \cdot \dot{v}_k$. Ciò non succede solo se le derivate seconde di V rispetto a \mathbf{v} sono nulle, perciò quando il potenziale è lineare nella velocità. Possiamo quindi fare l'ipotesi seguente:

$$V = Q(\Phi(\mathbf{r}, t) - \mathbf{v} \cdot \mathbf{U}(\mathbf{r}, t)) . \quad (9)$$

In essa Φ ed \mathbf{U} , funzioni di \mathbf{r} e t , si possono scegliere a piacere. Notazione, scelta di segno e raccoglimento della carica sono inessenziali, ma tradizionali e comode. Dalla (8) e dalla (9) si ottiene confrontando con la (5):

$$\mathfrak{E} = - \text{grad } \Phi - \dot{\mathbf{U}} , \quad \mathfrak{B} = \text{rot } \mathbf{U} , \quad (10)$$

dalle quali discendono immediatamente le equazioni di Maxwell

omogenee (6).

Quindi l'assunzione dell'esistenza di una funzione di Lagrange assieme con l'espressione data empiricamente della forza di Lorentz porta alle equazioni di Maxwell omogenee. Sebbene quest'assunzione appaia a prima vista un po' formale, essa è senza dubbio così profonda che si può dire che abbiamo derivato le equazioni di Maxwell omogenee da un principio più fondamentale. Ritorniamo ancora su questo punto. Prima completeremo la costruzione dell'elettrodinamica.

Finora \mathcal{D} ed \mathcal{H} da un lato, \mathcal{E} ed \mathcal{B} dall'altro, sono funzioni arbitrarie che danno rispettivamente la distribuzione di carica e di corrente e la forza di Lorentz. La connessione tra loro è data dal fatto che la forza di Lorentz dev'essere determinata dalla distribuzione di cariche e di correnti. Quindi \mathcal{E} e \mathcal{B} sono funzionali di ρ e \mathbf{j} , e per l'Eq. (3) anche di \mathcal{D} ed \mathcal{H} . Si ha qui lo spunto per ulteriori principi:

7. La forza di Lorentz su una carica puntiforme è determinata dalla distribuzione di cariche e di correnti.

8. Vale il principio di sovrapposizione.

9. La connessione tra i campi di forza \mathcal{E} , \mathcal{B} ed i campi di carica \mathcal{D} , \mathcal{H} è locale.

Il settimo principio porta, come prima detto, all'asserzione

$$(\mathcal{E}, \mathcal{B}) = F. (\mathcal{D}, \mathcal{H}) ,$$

l'ottavo afferma che questo funzionale dev'essere lineare:

$$(\mathcal{E}, \mathcal{B}) = L.F. (\mathcal{D}, \mathcal{H}) .$$

Imporre che la connessione sia locale ha in definitiva per conseguenza che \mathcal{E} e \mathcal{B} in una posizione ad un certo istante sono determinati da \mathcal{D} ed \mathcal{H} alla stessa posizione e nello stesso istante, di modo che il funzionale lineare è in realtà una funzione lineare. Per questa scriviamo, per distinguerla dall'equazione precedente:

$$(\mathcal{E}, \mathcal{B}) = l.f. (\mathcal{D}, \mathcal{H}) . \quad (11)$$

I principi 8 e 9 stanno a base dell'elettrodinamica, ma sono giusti solo sotto condizione. Sia la linearità che la località sono poste in questione, cosa che appare in certa misura giustificato dall'elettrodinamica quantistica, cioè con riferi-

mento alle cariche vere, che sono sempre circondate in modo complicato da cariche, che dipendono dalla possibilità di generazione e d'annichilazione di coppie d'elettroni positivi e negativi.

Tuttavia qui non abbiamo bisogno di addentrarci in questo. L'assunzione di una connessione lineare e locale tra \mathcal{E} , \mathcal{B} e \mathcal{D} , \mathcal{H} è di tipo meno fondamentale delle assunzioni precedenti. L'ipotesi (11) è paragonabile alla legge di Hooke, che ha un dominio di applicazione assai vasto sebbene sia solo un'approssimazione che ha sempre una certa validità finché nell'intorno di una posizione d'equilibrio esiste una serie di Taylor.

Dobbiamo infine soddisfare ancora il requisito seguente:

10. Lo spazio vuoto è isotropo.

Esso ha per conseguenza che i coefficienti della trasformazione lineare in (11) non possono dar luogo ad alcuna direzione privilegiata. Poiché le quantità di campo sono vettori, ne segue

$$\begin{aligned}\mathcal{E} &= \alpha\mathcal{D} + \beta\mathcal{H} , \\ \mathcal{B} &= \gamma\mathcal{D} + \delta\mathcal{H} .\end{aligned}$$

In queste α , β , γ e δ sono fattori numerici, non tensori e neppure pseudoscalari, poiché in entrambi i casi l'isotropia sarebbe disturbata.

Dall'equazione di continuità risulta che, se si assume che la densità di carica sia uno scalare, la densità di corrente è un vettore polare. Perciò si ottiene dalla (3) che \mathcal{D} dev'essere polare ed \mathcal{H} assiale. Dalle equazioni di moto risulta che \mathcal{K} è un vettore polare e quindi per la (5) che \mathcal{E} è polare e \mathcal{B} assiale. Se si assume il carattere scalare degli ultimi coefficienti, risulta in definitiva che dev'essere $\beta = \gamma = 0$; con $\alpha = 1/\epsilon_0$ e $\delta = \mu_0$ otteniamo le relazioni di collegamento:

$$\mathcal{D} = \epsilon_0 \mathcal{E} , \quad \mathcal{B} = \mu_0 \mathcal{H} \quad (12)$$

in forma più convenzionale. Con ciò sono derivate le equazioni fondamentali dell'elettrodinamica.

Mediante le equazioni di collegamento i potenziali di carica e di corrente sono completamente determinati. Per l'equazione (3a) lo spazio privo di cariche e di correnti sarebbe compatibile con i campi di carica

$$\mathfrak{D} = \text{rot } \mathfrak{u} , \quad \mathfrak{H} = \dot{\mathfrak{u}} + \text{grad } \psi .$$

Per la (12) ne risulterebbero i campi di forza

$$\mathfrak{E} = \frac{1}{\varepsilon_0} \text{rot } \mathfrak{u} , \quad \mathfrak{B} = \mu_0 (\dot{\mathfrak{u}} + \text{grad } \psi) .$$

Poiché senza cariche non si ha alcuna forza (principi 7 e 8), la forza di Lorentz che ne risulta deve annullarsi:

$$\mathfrak{K} = \frac{Q}{\varepsilon_0} (\text{rot } \mathfrak{u} + \varepsilon_0 \mu_0 \mathfrak{v} \times (\dot{\mathfrak{u}} + \text{grad } \psi)) = 0 .$$

Da qui segue:

$$\text{rot } \mathfrak{u} = 0 , \quad \dot{\mathfrak{u}} + \text{grad } \psi = 0 ,$$

che porta con sè $\mathfrak{E} = 0$, $\mathfrak{B} = 0$, ma anche $\mathfrak{D} = 0$, $\mathfrak{H} = 0$, e quindi la determinazione univoca di \mathfrak{D} ed \mathfrak{H} .

Si vorrebbe tuttavia comprendere meglio la prescrizione 6, alquanto formale. Perché equazioni del moto fondamentali si possono derivare da integrali d'azione? Per quanto vedo, non vi è alcuna base per questo nella meccanica di Newton. Tuttavia si può riconoscere la necessità dell'esistenza di funzioni di Lagrange se si pensa alla meccanica quantistica.

Il richiamo al fatto che la quantizzazione è legata all'esistenza di funzioni di Hamilton sarebbe di nuovo solo formale. Tuttavia segue immediatamente dalle proprietà delle onde che le traiettorie delle particelle sono raggi delle onde, lungo i quali le onde parziali di Huygens di cammini adiacenti devono interferire costruttivamente, in modo che valga il principio di Fermat:

$$\delta \int \frac{ds}{\lambda} = 0 ,$$

dal quale per la relazione di de Broglie discende il principio di Maupertuis della meccanica:

$$\delta \int (E - V)^{1/2} ds = 0 ,$$

quindi un principio variazionale. Da qui si possono derivare l'equazione differenziale di Hamilton-Jacobi e quindi la meccanica canonica e la funzione di Lagrange, sicché la loro esistenza è ricondotta al dualismo onda-particella.

Ci accontentiamo qui di questo richiamo che dovrebbe esser completato in più d'un aspetto per costituire un'effettiva deriva-

zione dell'esistenza delle funzioni di Lagrange dal dualismo onda-particella. Tuttavia ciò appartiene alla meccanica quantistica e non all'elettrodinamica. I principi della meccanica quantistica proposti altrove⁵ forniscono meglio una siffatta dimostrazione. Qui in elettrodinamica possiamo accontentarci dell'indicazione che è possibile comprendere chiaramente la prescrizione 6, finora solo formale.

Parimenti non ci addentriamo qui nelle proprietà relativistiche dell'elettrodinamica di Maxwell, sebbene dal nostro punto di vista esse risultino ancor più drasticamente evidenti che per altra via. Solo indicativamente osserviamo che sia l'equazione di continuità

$$\partial_{\mu} j^{\mu} = 0 \quad (13)$$

con le equazioni di Maxwell non omogenee che ne discendono

$$j^{\mu} = \partial_{\nu} \tilde{\delta}^{\mu\nu}, \quad \tilde{\delta}^{\mu\nu} + \tilde{\delta}^{\nu\mu} = 0 \quad (14)$$

come anche la forza di Lorentz

$$K_{\mu} = Q F_{\mu\nu} u^{\nu} \quad (15)$$

con

$$F_{\mu\nu} = \partial_{\mu} A_{\nu} - \partial_{\nu} A_{\mu} \quad (16)$$

e le equazioni di Maxwell omogenee

$$\partial_{\lambda} F_{\mu\nu} + \partial_{\mu} F_{\nu\lambda} + \partial_{\nu} F_{\lambda\mu} = 0 \quad (17)$$

sono covarianti in senso generale. La metrica gioca un ruolo solo nelle equazioni di collegamento e nelle equazioni di moto.

⁵Heisenberg-Festschrift, Braunschweig: Vieweg 1961. *Contributo di F. Bopp, pagg.128-149; in particolare il requisito XII. Rispetto agli altri è ancora poco evidente.*