Osservazioni dell'autore su

"Il vettore di Poynting è osservabile?"[1]

Fritz Bopp

(Ann.Physik (7) **11** (1963) 35)

Il Dr. HEHL ha sollevato obiezioni al lavoro succitato. In un esteso scambio di lettere non è stato possibile raggiungere alcuna opinione concorde. Perciò ringrazio l'editore, che mi offre l'occasione per una presa di posizione.

Com'è noto, il tensore d'energia-impulso non è determinato in maniera univoca dalle equazioni di campo, sebbene con queste si comprendano completamente i processi fisici. Da ciò discende che la distribuzione di energia e di impulso come pure il flusso di energia e d'impulso in una fisica ben determinata contengono elementi arbitrari, i quali consentono di prendere in considerazione delle prescrizioni che vanno oltre le equazioni di campo e che possono essere motivate in un modo o nell'altro. Si deve sottolineare fin dall'inizio, che in questo modo non si cambia nulla nella fisica, ma piuttosto nel modo in cui parliamo dei fenomeni.

Di solito si richiede che il tensore d'energia-impulso debba essere simmetrico. Per questo si danno molteplici motivazioni, sulle quali qui non ci addentreremo. Nel caso di MAXWELL il tensore simmetrico porta, nel campo d'interferenza di due onde piane, ad una densità di corrente d'energia che ha una componente perpendicolare alle direzioni di propagazione delle due onde. Nel lavoro sopra citato è stato mostrato che il seguente tensore di energia-impulso non comporta alcuna siffatta componente perpendicolare della corrente:

$$T^{\mu\nu} = S^{\mu\nu} + \partial_\lambda W^{\mu\nu\lambda} \ . \tag{1}$$

Ivi $S^{\mu\nu}$ è il tensore di MAXWELL:

$$S^{\mu\nu} = \frac{1}{\mu_0}\left(-f^\mu_{\ \lambda} f^{\nu\lambda} + \frac{1}{4} f^{\rho\sigma} f_{\rho\sigma}\delta^{\mu\nu}\right) \tag{2}$$

e

[1] Annalen der Physik **25**, 221 (1970).

$$W^{\mu\nu\lambda} = -\frac{1}{2\mu_0}(A^{\mu}f^{\nu\lambda} + A^{\nu}f^{\mu\lambda} - A^{\lambda}f^{\mu\nu}) \ . \qquad (3)$$

La prima obiezione contro questa proposta, che chiaramente non è "gauge"-invariante, l'abbiamo spazzata via fissando il "gauge", ovvero con l'ingiunzione che la condizione di LORENTZ

$$\partial_{\mu}A^{\mu} = 0 \ , \qquad (4)$$

debba valere in modo così rigoroso, che da essa siano escluse anche sorgenti infinitamente lontane. Infatti si ottiene da

$$A^{\mu} \longrightarrow A'^{\mu} = A^{\mu} + \partial^{\mu}\chi \ , \quad \partial_{\mu}A'^{\mu} = 0 \qquad (5)$$

insieme alla (4):

$$\partial_{\mu}\partial^{\mu}\chi = 0$$

e quindi tenendo conto della condizione di SOMMERFELD per la radiazione uscente:

$$\chi = 0 \ , \qquad (6)$$

cosicché A^{μ} è determinato in modo univoco. La circostanza che spesso la condizione di LORENTZ non sia formulata in modo così rigoroso come qui non dice nulla contro il fatto che lo si possa fare.

Ci atteniamo alla nostra precedente affermazione, che non cambi niente riguardo al momento di spin del campo, e lo dimostriamo qui con il tensore del momento angolare, sul quale prima non ci eravamo addentrati esplicitamente; utilizziamo quindi lo strumento con il quale il Dr. HEHL perviene al risultato opposto. Partiamo dal seguente tensore del terzo ordine

$$m^{\mu\nu\rho} = x^{\mu}T^{\nu\rho} - x^{\nu}T^{\mu\rho} \ . \qquad (7)$$

Da qui segue:

$$\partial_{\rho}m^{\mu\nu\rho} = T^{\nu\mu} - T^{\mu\nu} = \partial_{\rho}(W^{\nu\mu\rho} - W^{\mu\nu\rho}) \ . \qquad (8)$$

Pertanto il tensore

$$\overset{''}{M}{}^{\mu\nu\rho} = m^{\mu\nu\rho} + W^{\mu\nu\rho} - W^{\nu\mu\rho} \qquad (9)$$

è una quantità conservata.

Ora interviene il punto di vista decisivo. Anche il tensore (8) è determinato solo a meno di una divergenza totale. Se si vuole scomporre il tensore del momento angolare in una parte orbitale e in una parte di spin si deve determinare questa divergenza in modo tale che le derivate intervengano ancora solo nella combinazione dell'operatore momento angolare

$$x^{\mu}\partial^{\nu} - x^{\nu}\partial^{\mu} .$$

I termini con questo operatore definiscono il momento orbitale, i restanti lo spin. Poiché lo spin dev'essere determinato dalle equazioni di campo, non ci si può stupire del fatto che il tensore $W^{\mu\nu\rho}$ sia senza influenza. Infatti da

$$\begin{aligned} M''^{\mu\nu\rho} &= x^{\mu}T^{\nu\rho} - x^{\nu}T^{\mu\rho} + W^{\mu\nu\rho} - W^{\nu\mu\rho} \\ &= x^{\mu}S^{\nu\rho} - x^{\nu}S^{\mu\rho} - x^{\mu}\partial_{\lambda}W^{\nu\rho\lambda} - x^{\nu}\partial_{\lambda}W^{\mu\rho\lambda} + W^{\mu\nu\rho} - W^{\nu\mu\rho} \\ &= x^{\mu}S^{\nu\rho} - x^{\nu}S^{\mu\rho} + \partial_{\lambda}(x^{\mu}W^{\nu\rho\lambda} - x^{\nu}W^{\mu\rho\lambda}) \end{aligned}$$

tralasciando la divergenza risulta:

$$M'^{\mu\nu\rho} = x^{\mu}S^{\nu\rho} - x^{\nu}S^{\mu\rho} . \tag{9}$$

Il tensore del momento angolare si calcola da quello di MAXWELL. Ciò si accorda con la prescrizione nota da lungo tempo, secondo la quale il tensore del momento angolare si può calcolare con il tensore d'energia-impulso simmetrico. Si ricordi che questa è una delle motivazioni per la simmetrizzazione del tensore di energia-impulso. Si deve tuttavia osservare che prima di arrivare al momento orbitale e al momento di spin si deve di nuovo togliere una divergenza. Ci accontentiamo qui di annotare il risultato:

$$\begin{aligned} M'^{\mu\nu\tau} \longrightarrow M^{\mu\nu\tau} &= -\frac{1}{\mu_0}f^{\tau}_{\lambda}(x^{\mu}\partial^{\nu} - x^{\nu}\partial^{\mu})A^{\lambda} - \frac{1}{\mu_0}(A^{\mu}f^{\nu\tau} - A^{\nu}f^{\mu\tau}) \\ &+ \frac{1}{2\mu_0}A_{\sigma}(f^{\sigma\mu}g^{\nu\tau} - f^{\sigma\nu}g^{\mu\tau}) . \end{aligned} \tag{10}$$

Si ottiene da qui come densità di spin:

$$\Sigma = \left(-\frac{1}{c}\,\mathbf{M}^{kl}_{\mathrm{Spin}} \right) = -\,\mathbf{A} \times \mathbf{D} \tag{11}$$

in accordo con le nostra precedente Eq. (20), che il Dr. HEHL ha criticato.

Così viene confermata anche la relazione nelle precedenti equazioni (19) e (20) fra la densità del momento di spin e la densità di impulso aggiuntiva

$$\nabla\mathbf{g} = \mathbf{g} - \frac{1}{c^2}\mathbf{S} = \frac{1}{\mu_0 c}\partial_\lambda(A^\lambda f^{01}) \ . \qquad (12)$$

Che l'equazione (19) corrisponda completamente a quella tra magnetizzazione e corrente di magnetizzazione, è innanzitutto un fatto riguardo al quale non si può più dubitare dal punto di vista del calcolo. L'analogia è del tutto evidente, e non può essere cancellata a parole per il fatto che per i quanti di luce non esiste alcun sistema a riposo. Le equazioni (19) e (20) del lavoro precedente sono valide per campi di pura radiazione in qualsiasi sistema inerziale, dopo aver fatto la media sul tempo. Se ha un senso in generale parlare di momento di spin di un campo elettromagnetico - e questo è pure generalmente riconosciuto - allora esso deve essere definito in ogni sistema inerziale, tanto più che non è dato alcun sistema a riposo.

Per concludere ancora una parola sull'energia negativa del campo elettrostatico. L'espressione per la densità dell'energia di campo secondo le equazioni (2) e (3) ha la forma:

$$W = \frac{1}{2}(\mathbf{E}\cdot\mathbf{D} + \mathbf{B}\cdot\mathbf{H}) + \mathrm{div}(\Phi\mathbf{D}) \ . \qquad (13)$$

Nel caso elettrostatico puro da qui discende:

$$W = -\frac{1}{2}\mathbf{E}\cdot\mathbf{D} + \Phi\rho \ . \qquad (14)$$

Quindi l'energia di campo è di fatto negativa. Ciò è considerato nell'osservazione del terzo capoverso prima della Eq. (5) del lavoro precedente: "Purtroppo non sparisce ....tutto ciò che appare sorprendente". Tuttavia non si può dire che il risultato sia sbagliato. Infatti per l'energia totale si ha dalla (14)

$$E = \int W\, d\tau = -\int \frac{1}{2}\mathbf{E}\cdot\mathbf{D}\, d\tau + \int \Phi\, \mathrm{div}\mathbf{D}\, d\tau = +\frac{1}{2}\int \mathbf{E}\cdot\mathbf{D}\, d\tau \ .$$

Che debba essere così è del tutto triviale, dato il punto di partenza, ma è un po' nascosto nel caso di una singolarità puntiforme. C'è solo bisogno di giungere alle cariche puntiformi da distribuzioni finite di carica per convincersi anche concretamente della giustezza di quanto detto.

Complessivamente dalle considerazioni precedenti non può saltar fuori niente di nuovo. Si sono confermati i vecchi risultati in parte con quei metodi che il Dr. HEHL ha proposto. É risultato in particolare utile seguire il suggerimento del Dr. HEHL di calcolare il tensore del momento angolare. Infatti se si sa come mantenere separati il momento orbitale e il momento di spin, si vede immediatamente che rispetto al momento angolare tutto resta come con il tensore di MAXWELL. Da qui non si può quindi affermare che il momento di spin si annulli.

München, Sektion Physik der Universität.

Giunto in redazione il 29 Agosto 1969.