Una derivazione delle equazioni fondamentali per i processi elettromagnetici nei corpi in moto dal punto di vista della teoria degli elettroni.[1]

Dal lascito di Hermann Minkowski

elaborato da Max Born a Gottinga

Sommario.

Poco tempo prima della sua morte Hermann Minkowski mi ha comunicato verbalmente le idee di base del presente lavoro. Si tratta di una derivazione delle equazioni fondamentali per i processi elettromagnetici nei corpi in moto, che si collega davvicino alla strada[2] intrapresa da H.A. Lorentz; ossia le leggiper i corpi in moto dovranno essere derivate dalle equazioni fondamentali che valgono nell’etere libero seguendo i moti dell’elettricità (elettroni) immersa nella materia. Minkowski sostenne allora che la via intrapresa da Lorentz, di determinare i

---

[1]Math. Ann. **68**, 526 (1910).

[2]*Vedi* H.A. Lorentz, Enzykl. der math. Wissensch. Vol. V2, Art. 14, parte IV, *Processi elettromagnetici nei corpi ponderabili,* p. 200.

valori medi degli effetti che originano dagli elettroni, è matematicamente equivalente ad uno sviluppo in serie rispetto ad un parametro, che misura lo spostamento medio degli elettroni dalle loro posizioni di riposo all'interno della materia. Qualche giorno dopo egli mi comunicò che il termine del prim'ordine in questa serie avrebbe potuto essere infatti interpretato come polarizzazione elettrica; secondo lui il termine del second'ordine avrebbe dovuto rappresentare la magnetizzazione. Dall'impegno in questi ragionamenti l'ha sottratto la morte[3].

Come mi sono state affidate da Hilbert le carte di Minkowski relative all'elettrodinamica, ho immediatamente cercato se vi fossero delle note relative all'argomento citato. Ma ho potuto trovare solo pochi spunti; infatti questi più di cento fogli ricoperti fittamente di formule non contengono nè una sola parola di testo nè la spiegazione dei simboli utilizzati. Non appena mi è riuscito di ricostruire le idee di Minkowski secondo le sue comunicazioni verbali, ho trovato nelle sue note punti che sembrano identici alle formule da me ottenute.

Su questa base pubblico questo lavoro sotto il nome di Minkowski. Nel modo di esprimermi e nella notazione mi sono attenuto per quanto possibile all'uso di Minkowski, e rimando a questo proposito alla sua dissertazione: *Le equazioni fondamentali per i processi elettromagnetici nei corpi in movimento.*[4]

---

[3]*Nella comunicazione da lui tenuta all'80^0 congresso degli scienziati a Colonia,* "Raum und Zeit" *(*Phys. Zeitschrift **10**, p. 104, 1909, e Jahresber. d. deutschen Math.-Ver. **18**, p.75; *apparsa anche come estratto, Leipzig, B.G. Teubner 1909) Minkowski ha accennato alla possibilità di una siffatta derivazione dalla teoria degli elettroni ed ha promesso una pubblicazione sull'argomento.*

[4]*Ristampato nelle pagine precedenti da* Nachr. der K. Gesellsch. der Wissensch. zu Göttingen, Math. phys. Kl. p. 54, 1908. *(Citato nel seguito come "Equazioni fondamentali"; i numeri di pagina delle citazioni si riferiscono alla ristampa che precede.)*

Introduzione.

Nella dissertazione citata Minkowski ha stabilito le equazioni fondamentali per i processi elettromagnetici nei corpi in moto per mezzo degli assiomi formulati nel § 8, p. 489. Si daranno inoltre per note le equazioni fondamentali per corpi in quiete (§ 7, equazioni da (I) a (V), p. 488) di fatto ormai del tutto fuori discussione.

Questo punto di vista non corrisponde alle idee di H.A. Lorentz, che cerca di spiegare i processi nei corpi materiali mediante opportune ipotesi ausiliarie sugli spostamenti e sui moti degli elettroni inclusi nella materia. In questo caso si prenderanno come punto di partenza non le equazioni fondamentali di Maxwell-Hertz per corpi materiali in quiete, ricavate induttivamente dall'esperienza, ma le leggi per l'etere puro assunte in via ipotetica da Lorentz, idealizzazione d'un certo tipo delle equazioni di Maxwell. Queste leggi accoppiano i vettori *intensità di campo elettrico* $\mathfrak{E}$ e *induzione magnetica* $\mathfrak{M}$ *dell'etere puro*[5] con la corrente di convezione dell'elettricità; se $\tilde{\rho}$ è la *densità spaziale* e $\tilde{\mathfrak{w}}$ il vettore dello spazio *velocità dell'elettricità* (degli elettroni) per l'etere le equazioni fondamentali si scrivono:

$$\mathrm{rot}\mathfrak{M} - \frac{1}{c}\frac{\partial\mathfrak{E}}{\partial t} = \frac{1}{c}\tilde{\rho}\tilde{\mathfrak{w}} , \qquad \text{(I)}$$

$$\mathrm{div}\mathfrak{E} = \tilde{\rho} , \qquad \text{(II)}$$

$$\mathrm{rot}\mathfrak{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial\mathfrak{M}}{\partial t} = 0 , \qquad \text{(III)}$$

$$\mathrm{div}\mathfrak{M} = 0 . \qquad \text{(IV)}$$

---

[5]*In accordo con H.A. Lorentz dobbiamo indicare i vettori che caratterizzano lo stato dell'etere in questo modo, perchè essi possano poi avere il giusto significato nelle equazioni fondamentali per i corpi materiali; da qui deriva lo scostamento della notazione qui utilizzata da quella di Minkowski nel § 2 del lavoro citato.*

Si è assunto inoltre un certo sistema di riferimento con coordinate ortogonali x,y,z e col tempo t; la velocità della luce nello spazio vuoto è indicata con c[6].

Ora Lorentz suddivide in più gruppi gli elettroni, le cariche e i moti dei quali appaiono al secondo membro delle equazioni (I), (II). Formano il primo gruppo gli *elettroni di conduzione*, che si muovono attraverso la materia in modo sostanzialmente indipendente da questa; essi costituiscono la "corrente di conduzione" e le loro cariche costituiscono l’"elettricità vera". Formano il secondo gruppo gli *elettroni di polarizzazione*, che possiedono posizioni di equilibrio all’interno delle molecole materiali, dalle quali possono essere spostati con l’azione del campo elettromagnetico; la densità d’elettricità così modificata sarà indicata come quella dell’"elettricità libera". Il terzo gruppo è quello degli *elettroni di magnetizzazione*, che eseguono moti di rivoluzione attorno a centri all’interno della materia, e analogamente alle correnti circolari molecolari di Ampère, danno luogo ai fenomeni di magnetizzazione. Ora Lorentz, trasformando in modo opportuno i valori medi delle parti della corrente di convezione che derivano dai tre tipi di elettroni, perviene alle sue equazioni fondamentali per i processi elettromagnetici nei corpi materiali. Come Minkowski[7] ha mostrato, queste equazioni per corpi in moto non sono compatibili con il postulato di relatività; e le equazioni che Lorentz dà in particolare per corpi non magnetizzati, lo sono solo in approssimazione, cosa che però da parte sua avviene soltanto per due infrazioni al principio di relatività

---

[6]*Per facilitare il confronto con la teoria di Lorentz ho evitato di porre* $c = 1$*; con l’utilizzo della notazione con gli indici di Minkowski il calcolo non sarà reso più gravoso dall’introduzione di c.*

[7]Equazioni fondamentali, Introduzione, p. 474. *Vedi anche p. 549 del presente lavoro.*

che si compensano[8].

Poiché ci proponiamo il compito di derivare dalle equazioni fondamentali nell'etere le equazioni fondamentali per corpi in moto in generale ammettendo anche la magnetizzazione[9], osserviamo in primo luogo che dell'ipotesi caratteristica della teoria degli elettroni, la struttura atomica dell'elettricità, nella derivazione di Lorentz vien fatto soltanto un uso molto più ristretto; infatti con la formazione dei valori medi su regioni "infinitamente piccole dal punto di vista fisico" questa struttura è completamente cancellata, e i valori medi, ai quali soltanto si perviene, vanno considerati come funzioni continue della posizione e del tempo.

Perciò rinunciamo del tutto ad addentrarci nella struttura più fine dell'elettricità. Delle idee di Lorentz facciamo uso solo fino ad assumere che *l'elettricità sia un continuo che in generale permea la materia, e in parte può muoversi liberamente nella stessa, ma in parte è a questa fissata e può eseguire soltanto dei movimenti assai piccoli relativamente ad essa.*

Se si vuole raggiungere una connessione più stretta con Lorentz, si possono interpretare tutte le quantità che intervengono nel seguito come quei valori medi di Lorentz; ma qui non è

---

[8]Ph. Franck (Ann. d. Phys.(4), **27**, 1908, p. 1059) *ha rimosso quest'ultimo difetto seguendo essenzialmente il ragionamento di Lorentz, e introducendo l'ipotesi di contrazione, equivalente al postulato di relatività, in un punto precedente rispetto a come fatto da Lorentz.*

[9]*M. Abraham nella seconda edizione del suo libro "Elektromagnetische Theorie der Strahlung" nel § 50, p. 396, accenna alla possibilità che nell'elettrodinamica dei corpi ponderabili in moto valga il principio di relatività, ma che esso non si verifichi nella dinamica degli elettroni liberi (raggi catodici, di Bequerel). Quest'opinione non è supportata dai risultati sperimentali più recenti. La presente derivazione delle equazioni fondamentali per corpi in moto dalle leggi che valgono per elettroni liberi presuppone, totalmente secondo le idee di Minkowski, la validità generale del principio anche per questi ultimi.*

tuttavia necessario distinguerli come tali con simboli speciali dalle quantità che si riferiscono ai singoli elettroni, poiché non facciamo mai uso di queste ultime.

Per essere sicuri a priori che tutte le formule siano in accordo con il postulato di relatività è sufficiente, nella formulazione matematica dei postulati fondamentali prima citati, porre in primo piano il calcolo vettoriale tetradimensionale introdotto da Minkowski e le simmetrie da lui stabilite, prima di tutte quella delle coordinate spaziali x,y,z e del tempo t moltiplicato per ci. In tal modo la covarianza delle formule rispetto a trasformazioni di Lorentz sarà posta in evidenza.

Presupponiamo inoltre che tutte le velocità che intervengono siano minori della velocità della luce.

§ 1.
Notazioni.

Seguendo Minkowski sostituiamo

$$x,y,z,ict$$

con

$$x_1,x_2,x_3,x_4.$$

Con $\mathfrak{w}$ indichiamo il vettore dello spazio *velocità della materia*, con le componenti

$$\mathfrak{w}_x,\mathfrak{w}_y,\mathfrak{w}_z \; .$$

Da queste formiamo il vettore dello spazio-tempo di I specie w con le componenti

$$w_1=\frac{\mathfrak{w}_x}{c(1-|\mathfrak{w}|^2/c^2)^{1/2}}\;,\quad w_2=\frac{\mathfrak{w}_y}{c(1-|\mathfrak{w}|^2/c^2)^{1/2}}\;,$$

$$w_3=\frac{\mathfrak{w}_z}{c(1-|\mathfrak{w}|^2/c^2)^{1/2}}\;,\quad w_4=\frac{1}{c(1-|\mathfrak{w}|^2/c^2)^{1/2}}\;,$$

dove $|\mathfrak{w}|=(\mathfrak{w}_x^2+\mathfrak{w}_y^2+\mathfrak{w}_z^2)^{1/2}$ indica il modulo della velocità. Le quantità w_α soddisfano la relazione:

$$w_1^2 + w_2^2 + w_3^2 + w_4^2 = -1 \ .$$

Nelle (I)-(IV) abbiamo indicato la *velocità dell'elettricità* con $\tilde{\mathfrak{w}}$; a questo vettore dello spazio associamo in modo analogo un vettore dello spazio-tempo di I specie $\tilde{w}$.

Dalla densità $\tilde{\rho}$ dell'elettricità formiamo la *densità di quiete* invariante rispetto a trasformazioni di Lorentz

$$\tilde{\rho}_0 = \tilde{\rho}(1-|\mathfrak{w}|^2/c^2)^{1/2} \ .$$

Riassumiamo i vettori dello spazio induzione magnetica $\mathfrak{M}$ e intensità del campo elettrico $\mathfrak{E}$ nel vettore dello spazio-tempo di II specie F, sostituendo

$$\mathfrak{M}_x, \mathfrak{M}_y, \mathfrak{M}_z, -i\mathfrak{E}_x, -i\mathfrak{E}_y, -i\mathfrak{E}_z$$

con

$$F_{23}, F_{31}, F_{12}, F_{14}, F_{24}, F_{34} \ .$$

Per mezzo dell'operatore differenziale lor di Minkowski, che è definito come il vettore dello spazio-tempo di I specie

$$|\partial/\partial x_1,\ \partial/\partial x_2,\ \partial/\partial x_3,\ \partial/\partial x_4| \ ,$$

possiamo allora riassumere le equazioni fondamentali (I)-(IV) nelle seguenti equazioni simboliche:

$$\mathrm{lor} F = -\tilde{\rho}_0 \tilde{w} \ , \qquad \text{(A)}$$

$$\mathrm{lor} F^* = 0 \ . \qquad \text{(B)}$$

§ 2.

La partizione della corrente elettrica.

La corrente dell'elettricità, che è caratterizzata dal vettore spazio-temporale $\tilde{w}$ e dalla densità di quiete $\tilde{\rho}_0$, la pensiamo composta da due parti che si sovrappongono.

La 1ª parte, che si deve pensare formata dagli "elettroni di conduzione" di Lorentz, abbia la densità di quiete ρ_0^ℓ, ed il corrispondente vettore dello spazio-tempo velocità sia indicato con w^ℓ. In generale tutte le quantità che si riferiscono a questa parte della corrente saranno contrassegnate dall'indice superiore ℓ.

Questa parte della corrente di convezione si muova all’interno della materia indipendentemente dal moto della stessa. Essa darà luogo all’esistenza della corrente di conduzione.

La 2[a] parte della corrente, che è formata dagli elettroni di polarizzazione e di magnetizzazione di Lorentz, seguirà essenzialmente il cammino della materia e devierà da esso solo di poco, e precisamente dovrà aver luogo quanto segue:

Della quantità d’elettricità raccolta nei punti materiali neutri e che ivi si compensa, un quanto sia spostato da questa posizione di quiete ed esegua inoltre dei moti relativamente alla materia, ma sia anche da essa trasportato.

Per formulare quest’ipotesi pensiamo provvisoriamente (riservando la definizione più precisa di questo spostamento, che tenga conto del principio di relatività, per il § 3) che sia la densità di quiete che le componenti del vettore velocità di questa parte della corrente dipendano oltre che da x,y,z,t anche da un parametro ϑ in modo tale che per $\vartheta = 0$ la densità di quiete si annulli e le componenti della velocità coincidano con quelle corrispondenti della materia. A causa della supposta piccolezza degli spostamenti potremo sviluppare in potenze di ϑ; se indichiamo con δ la derivazione rispetto a ϑ per x,y,z,t fissati, per questa seconda parte della corrente di convezione si potrà scrivere

$$\vartheta\cdot\delta(\rho_0 w) + (\vartheta^2/2)\delta\delta(\rho_0 w) + \cdots$$

La corrente complessiva dell’elettricità è quindi:

$$\tilde{\rho}_0\tilde{w} = \rho_0^{\ell} w^{\ell} + \vartheta\cdot\delta(\rho_0 w) + (\vartheta^2/2)\delta\delta(\rho_0 w) + \cdots \qquad (1)$$

Tratteremo i termini di questa serie individualmente e mostreremo che il primo termine, che non contiene ϑ, forma il vettore corrente denotato da Minkowski con s, che rappresenta la corrente di conduzione e la corrente di convezione dell’elettricità solidale con la materia, che il secondo termine con il fattore ϑ va interpretato come la parte principale della polarizzazione dielettrica della materia, e che il terzo termine con ϑ^2 da un lato fornisce ancora un contributo a questa polarizzazione, dall’altro dev’essere inteso come magnetizzazione della materia.

La questione del significato dei termini più alti della serie

(1) cade al di fuori dell’ambito della presente ricerca. Se si considera che già la magnetizzabilità della maggior parte delle sostanze è oltremodo piccola, sicché il termine della serie (1) quadratico in ϑ acquista un valore numerico ben piccolo, si potrà assumere che l’influenza dei termini superiori sulle osservazioni sia impercettibile nella maggior parte delle sostanze, per quanto in generale possano avere un significato fisico. Le proprietà dei corpi fortemente magnetizzabili (ferromagnetici) sono tuttavia ancora troppo poco chiarite, perché ci si possa aspettare da esse delle conferme sperimentali per una teoria così ampia.

§ 3.
La rappresentazione della corrente variata.

La seconda parte della corrente trattata nel paragrafo precedente può essere considerata analiticamente come una "variazione" della corrente della materia.[10] Per caratterizzarla più precisamente, rappresentiamo questa parte della corrente di convezione analogamente al modo indicato da Lagrange, considerando x,y,z e t come funzioni di tre parametri, ξ,η,ζ, che individuano la singola particella materiale, e del tempo proprio τ; inoltre queste quattro funzioni possono ancora dipendere da un parametro ϑ in modo tale che per $\vartheta = 0$ rappresentino il moto della materia; scriviamo quindi

$$x = x(\xi,\eta,\zeta,\tau;\vartheta) \ ,$$

$$y = y(\xi,\eta,\zeta,\tau;\vartheta) \ ,$$

$$z = z(\xi,\eta,\zeta,\tau;\vartheta) \ ,$$

$$t = t(\xi,\eta,\zeta,\tau;\vartheta) \ , \tag{2}$$

dove la condizione

$$(\partial x/\partial\tau)^2 + (\partial y/\partial\tau)^2 + (\partial z/\partial\tau)^2 - c^2(\partial t/\partial\tau)^2 = - c^2 \tag{3}$$

---

[10] *Questa variazione non è dissimile dalla deformazione virtuale che Minkowski utilizza nell’Appendice del lavoro citato per la derivazione delle equazioni fondamentali della meccanica.*

dev’essere soddisfatta identicamente rispetto a tutti e cinque gli argoment. Le componenti della velocità della materia sono

$$w_1 = \frac{1}{c}(\partial x/\partial\tau)_{\vartheta=0} \;, \quad w_2 = \frac{1}{c}(\partial y/\partial\tau)_{\vartheta=0} \;,$$

$$w_3 = \frac{1}{c}(\partial z/\partial\tau)_{\vartheta=0} \;, \quad w_4 = i(\partial t/\partial\tau)_{\vartheta=0} \;.$$

Se sostituiamo

$$\xi,\eta,\zeta,ic\tau$$

con

$$\xi_1,\xi_2,\xi_3,\xi_4$$

possiamo scrivere in breve:

$$x_\alpha = x_\alpha(\xi_1,\xi_2,\xi_3,\xi_4;\vartheta) \;, \qquad (\alpha=1,2,3,4) \;, \tag{2'}$$

$$\sum_{\alpha=1}^{4}(\partial x_\alpha/\partial\xi_4)^2 = -1 \;. \tag{3'}$$

Useremo per i processi di derivazione frequenti le seguenti abbreviazioni. Indichiamo

$\partial\varphi/\partial\xi_4$ per $\xi_1,\xi_2,\xi_3,\vartheta$ fissi con φ' ,

$\partial\varphi/\partial\vartheta$ per ξ_1,ξ_2,ξ_3,ξ_4 fissi con $\dot{\varphi}$,

$\partial\varphi/\partial\vartheta$ per x_1,x_2,x_3,x_4 fissi con $\delta\varphi$.

Le operazioni φ', $\dot{\varphi}$ sono quindi commutabili; l’operazione $\delta\varphi$ invece non commuta con nessuna delle prime due.

La densità di quiete ρ_0 dell’elettricità sarà anche una funzione di ξ_α e di ϑ:

$$\rho_0 = \rho_0(\xi_1,\xi_2,\xi_3,\xi_4;\vartheta) \;.$$

Poiché presupponiamo che la materia prima della deformazione, cioè per $\vartheta = 0$, sia elettricamente neutra, dobbiamo assumere che sia

$$\rho_0(\xi_1,\xi_2,\xi_3,\xi_4;0) = 0 \;.$$

Presupponiamo invece che le quantità

$$\rho_0\dot{x}_1,\rho_0\dot{x}_2,\rho_0\dot{x}_3,\rho_0\dot{x}_4$$

e le loro derivate rispetto a ϑ *per* x_1,x_2,x_3,x_4 *fissi possiedano per* $\vartheta = 0$ *dei valori limite finiti, non identicamente nulli.*

Che questo sia compatibile con le ipotesi fatte su x_α e ρ_0 si dimostra per esempio assumendo

$$x_\alpha = f_\alpha(\xi_1,\xi_2,\xi_3,\xi_4) + \vartheta^{1/2}\varphi_\alpha(\xi_1,\xi_2,\xi_3,\xi_4) \ ,$$

$$\rho_0 = \vartheta^{1/2}\psi(\xi_1,\xi_2,\xi_3,\xi_4) \ ;$$

qui

$$x_\alpha = f_\alpha(\xi_1,\xi_2,\xi_3,\xi_4)$$

rappresenta la corrente della materia; ρ_0 si annulla per $\vartheta = 0$, ma

$$\rho_0 \dot{x}_\alpha = \tfrac{1}{2}\, \varphi_\alpha \cdot \psi$$

resta finito e diverso da zero.

Il senso di questa prescrizione è il seguente:

Mediante lo spostamento delle cariche dalla loro posizione di quiete ogni particella neutra della materia si muterà in un sistema carico (nel caso più semplice in un dipolo); nel senso della teoria degli elettroni le quantità $\rho_0 \dot{x}_\alpha$ determinano i "momenti elettrici" delle particelle; di fatto riconosceremo chiaramente questa circostanza nel seguito. Pertanto dobbiamo attribuire a questi prodotti un valore limite finito per $\vartheta = 0$. Ci si può anche esprimere dicendo che la nostra variazione della corrente è una sorta di "doppia carica spaziale" della materia. A causa di questa circostanza le funzioni x_α non sono sviluppabili in serie di potenze per $\vartheta = 0$, ciò accade invece, come vedremo, per le componenti della corrente di convezione $i\rho_0 x'_\alpha$, solo con le quali succede; le quattro quantità ix'_α indicano qui le componenti del vettore dello spazio-tempo velocità; per $\vartheta = 0$ esse coincidono con le componenti w_α della velocità della materia.

Teniamo conto dell'*indistruttibilità dell'elettricità* assumendo che sia soddisfatta identicamente in x_α ed in ϑ la "condizione di continuità"

$$\partial\rho_0 x'/\partial x + \partial\rho_0 y'/\partial y + \partial\rho_0 z'/\partial z + \partial\rho_0 t'/\partial t = 0 \qquad (4)$$

ovvero in breve

$$\sum_{\alpha=1}^{4} (\partial\rho_0 x'_\alpha/\partial x_\alpha) = 0 \ . \qquad (4')$$

Dobbiamo ora fare un'ulteriore ipotesi sulle quantità $\dot{x}_\alpha$ che determinano lo spostamento delle particelle elettriche dalla loro posizione d'equilibrio. *Assumiamo che lo spostamento di ogni particella elettrica in un sistema di riferimento nel quale la particella materiale corrispondente agli stessi valori* ξ,η,ζ *è a riposo, sia rappresentato mediante un vettore dello spazio* (cioè da un vettore dello spazio-tempo di I specie con componente temporale nulla).

Ciò deriva dal fatto che i vettori dello spazio-tempo di I specie $\dot{x}$ e w sono normali (vedi Minkowski, "Equazioni fondamentali", § 11, 6⁰, p. 499):

$$\sum_{\alpha=1}^{4} w_\alpha \dot{x}_\alpha = 0 \ . \tag{5}$$

Dunque la variazione del tempo $\dot{t}$ ha il significato del prodotto scalare seguente

$$\dot{t} = (1/c^2)(\mathfrak{w}_x \dot{x} + \mathfrak{w}_y \dot{y} + \mathfrak{w}_z \dot{z}) \ . \tag{5'}$$

Dalla (5) risulta in particolare mediante moltiplicazione per ρ_0 e derivazione rispetto a ϑ per x,y,z,t fissi:

$$\sum_{\alpha=1}^{4} w_\alpha \delta(\rho_0 \dot{x}_\alpha) = 0 \tag{6}$$

ossia

$$\delta(\rho_0 \dot{t}) = (1/c^2)\Big(\mathfrak{w}_x \delta(\rho_0 \dot{x}) + \mathfrak{w}_y \delta(\rho_0 \dot{y}) + \mathfrak{w}_z \delta(\rho_0 \dot{z})\Big) \ . \tag{6'}$$

Si ottiene un'ulteriore condizione di normalità se si deriva l'identità (3) ovvero (3') rispetto a ϑ per x,y,z,t fissati:

$$\sum_{\alpha=1}^{4} x'_\alpha \delta x'_\alpha = 0 \ . \tag{7}$$

Se qui si passa al limite $\vartheta = 0$, risulta:

$$\sum_{\alpha=1}^{4} w_\alpha \delta w_\alpha = 0 \ . \tag{7'}$$

Inoltre i δw_α hanno il seguente significato:

$$\delta w_1 = \delta\left(\frac{\mathfrak{w}_x}{c(1-|\mathfrak{w}|^2/c^2)^{1/2}}\right) = i[\delta x'_1]_{\vartheta=0}\ , \text{ ecc.}$$

$$\delta w_4 = \delta\left(\frac{i}{(1-|\mathfrak{w}|^2/c^2)^{1/2}}\right) = i[\delta x'_4]_{\vartheta=0}\ . \tag{8}$$

Trattiamo infine la *variazione della densità di quiete* ρ_0. Questa non si dovrà variare indipendentemente, ma in modo tale che la sua derivata rispetto a ϑ in un punto x,y,z,t sia legata al momento elettrico $\rho_0\dot{x}$ in quel punto dall'identità in x_α e ϑ

$$\partial\rho_0\dot{x}/\partial x + \partial\rho_0\dot{y}/\partial y + \partial\rho_0\dot{z}/\partial z + \partial\rho_0\dot{t}/\partial t = -\delta\rho_0 \tag{9}$$

ovvero

$$\sum_{\alpha=1}^{4}(\partial\rho_0\dot{x}_\alpha/\partial x_\alpha) = -\ \delta\rho_0\ . \tag{9'}$$

Il significato di questa equazione è il seguente: assumiamo che il quanto d'elettricità spostato prima dello spostamento sia compensato da una quantità uguale di elettricità di segno opposto; il primo membro dell'equazione (9) non è nullo, cosa che significherebbe che la diminuzione in seguito allo spostamento della quantità di elettricità che si trova in un volume è uguale alla quantità che passa attraverso la superficie che limita il volume; invece a seguito dello spostamento si manifestano quelle cariche di segno opposto prima compensate, e cioè in prima approssimazione la derivata $-\ \delta\rho_0$ eseguita per x,y,z,t fissati. La forma particolare dell'ipotesi precedente sarà giustificata dalla simmetria richiesta dal principio di relatività.

§ 4.

Lo sviluppo in serie della corrente variata.

Nostro scopo è di sviluppare le quantità $\rho_0 x'_\alpha$ in una serie di potenze rispetto a ϑ in ogni punto dello spazio-tempo, cioè per x_α fissi; in conformità al significato del simbolo δ abbiamo quindi:

$$\rho_0 x'_\alpha = \vartheta\cdot\delta(\rho_0 x'_\alpha)_0 + (\vartheta^2/2)\delta\delta(\rho_0 x'_\alpha)_0 + \cdots, \tag{10}$$

dove nei coefficienti si deve porre $\vartheta = 0$. Si ha

$$\delta(\rho_0 x'_\alpha) = \rho_0 \delta x'_\alpha + x'_\alpha \delta\rho_0 \ .$$

Sostituiremo l'operazione δ con le derivate "sostanziali" indicate con il punto. Per questo consideriamo x'_α come funzione di x_α e di ϑ, dove le x_α sono a loro volta funzioni di ξ_α e di ϑ:

$$x'_\alpha = x'_\alpha(x_1(\xi_1,\xi_2,\xi_3,\xi_4;\vartheta)\ ,\ldots,x_4(\xi_1,\xi_2,\xi_3,\xi_4;\vartheta);\vartheta)\ .$$

Si ottiene allora derivando rispetto a ϑ con ξ_α fisso:

$$\dot{x}'_\alpha = \sum_{\beta=1}^{4} (\partial x'_\alpha/\partial x_\beta)\dot{x}_\beta + \delta x'_\alpha \ . \tag{α}$$

Costruiamo altrimenti la stessa quantità $\dot{x}'_\alpha$, eseguendo prima l'operazione indicata con il punto, poi quella con l'apice; consideriamo quindi $\dot{x}_\alpha$ come funzione di x_α e di ϑ, e gli x_α a loro volta come funzioni di ξ_α e di ϑ:

$$\dot{x}_\alpha = \dot{x}_\alpha(x_1(\xi_1,\xi_2,\xi_3,\xi_4;\vartheta)\ ,\ldots,x_4(\xi_1,\xi_2,\xi_3,\xi_4;\vartheta);\vartheta)\ ,$$

allora per derivazione rispetto a ξ_4 per $\xi_1,\xi_2,\xi_3,\vartheta$ fissi risulta:

$$\dot{x}'_\alpha = \sum_{\beta=1}^{4} (\partial \dot{x}_\alpha/\partial x_\beta)x'_\beta \ . \tag{β}$$

Dalle equazioni (α), (β) troviamo:

$$\delta x'_\alpha = \sum_{\beta=1}^{4} \Big((\partial \dot{x}_\alpha/\partial x_\beta)x'_\beta - (\partial x'_\alpha/\partial x_\beta)\dot{x}_\beta \Big) \ . \tag{γ}$$

Per ottenere $\delta(\rho_0 x'_\alpha)$ dobbiamo moltiplicare questo per ρ_0 e aggiungere l'equazione (9') moltiplicata per x'_α; aggiungiamo inoltre l'equazione di continuità (4') moltiplicata per $\dot{x}_\alpha$, di modo che otteniamo infine:

$$\delta(\rho_0 x'_\alpha) = \sum_{\beta=1}^{4} \Big((\partial \dot{x}_\alpha/\partial x_\beta)\rho_0 x'_\beta - (\partial x'_\alpha/\partial x_\beta)\rho_0 \dot{x}_\beta -$$

$$- (\partial \rho_0 \dot{x}_\beta/\partial x_\beta)x'_\alpha + (\partial \rho_0 x'_\beta/\partial x_\beta)\dot{x}_\alpha \Big)$$

ovvero

$$\delta(\rho_0 x'_\alpha) = \sum_{\beta=1}^{4} \frac{\partial}{\partial x_\beta} (\rho_0 \dot{x}_\alpha \cdot x'_\beta - \rho_0 \dot{x}_\beta \cdot x'_\alpha) \ . \tag{11}$$

Quest'equazione vale identicamente in x_α e ϑ. Se deriviamo ancora una volta rispetto a ϑ con x_α fisso, possiamo eseguire quest'operazione sotto il segno di derivazione rispetto a x_β che interviene nella somma. Sarà quindi:

$$\delta\delta(\rho_0 x'_\alpha) =$$

$$= \sum_{\beta=1}^{4} \frac{\partial}{\partial x_\beta} \left\{ [\delta(\rho_0 \dot{x}_\alpha)\cdot x'_\beta - \delta(\rho_0 \dot{x}_\beta)\cdot x'_\alpha] + [\rho_0 \dot{x}_\alpha \delta x'_\beta - \rho_0 \dot{x}_\beta \delta x'_\alpha] \right\} . \quad (12)$$

Ora possiamo porre la serie (10) nella forma seguente:

$$\rho_0 x'_\alpha = \sum_{\beta=1}^{4} \frac{\partial}{\partial x_\beta} \left\{ \left[\vartheta\rho_0 \dot{x}_\alpha + (\vartheta^2/2)\delta(\rho_0 \dot{x}_\alpha)\right] x'_\beta - \left[\vartheta\rho_0 \dot{x}_\beta + (\vartheta^2/2)\delta(\rho_0 \dot{x}_\beta)\right] x'_\alpha \right\}$$

$$+ \sum_{\beta=1}^{4} \frac{\partial}{\partial x_\beta} \left\{ (\vartheta^2/2)\rho_0 \dot{x}_\alpha \delta x'_\beta - (\vartheta^2/2)\rho_0 \dot{x}_\beta \delta x'_\alpha \right\} + \cdots , \quad (13)$$

dove nei fattori di ϑ, ϑ^2... si deve porre ovunque $\vartheta = 0$; inoltre le quantità $\rho_0 \dot{x}_\alpha$, $\delta(\rho_0 \dot{x}_\alpha)$ hanno valori limite finiti, che non si annullano identicamente. Secondo quanto prima stabilito tronchiamo la serie ai termini scritti.

§ 5.
Ricostruzione formale delle equazioni differenziali che valgono nella materia in moto.

Poniamo per brevità:

$$\vartheta\cdot(\rho_0 \dot{x}_\alpha)_{\vartheta=0} + (\vartheta^2/2)\delta(\rho_0 \dot{x}_\alpha)_{\vartheta=0} = p_\alpha \ ; \quad (14)$$

inoltre, ricordando che

$$i(x'_\alpha)_{\vartheta=0} = w_\alpha \ , \quad i(\delta x'_\alpha)_{\vartheta=0} = \delta w_\alpha \ ,$$

risulta:

$$w_\alpha p_\beta - w_\beta p_\alpha = P_{\alpha\beta} \ , \quad (15)$$

$$(\vartheta^2/2)\left\{ \delta w_\alpha (\rho_0 \dot{x}_\beta)_0 - \delta w_\beta (\rho_0 \dot{x}_\alpha)_0 \right\} = Q_{\alpha\beta} \ . \quad (16)$$

Queste quantità sono le componenti dei vettori dello spazio-tempo di II specie:

$$[w,p] = P \;, \qquad (15')$$

$$(\vartheta^2/2)[\delta w,(\rho_0\dot{x})_0] = Q \;, \qquad (16')$$

costruiti mediante moltiplicazione "vettoriale" dai vettori di prima specie w, p e rispettivamente δw, $(\vartheta^2/2)(\rho_0\dot{x})_0$. Adesso aggiungiamo l'espressione (10) a $\rho_0^\ell w^\ell$ e, se poniamo ancora

$$\rho_0^\ell w_\alpha^\ell = s_\alpha \;, \qquad (17)$$

possiamo scrivere le componenti della corrente di convezione complessiva (1) nel modo seguente:

$$\tilde{\rho}_0\tilde{w}_\alpha = s_\alpha + \sum_{\beta=1}^{4} \frac{\partial}{\partial x_\beta}(P_{\alpha\beta} + Q_{\alpha\beta}) \;, \qquad (18)$$

ovvero nel simbolismo di Minkowski:

$$\tilde{\rho}_0\tilde{w} = s + \mathrm{lor}(P+Q) \;. \qquad (18')$$

Sostituiamo questa nell'equazione fondamentale (A); essa diventa

$$\mathrm{lor}(F+P+Q) = -s \;. \qquad (19)$$

Se introduciamo il vettore dello spazio-tempo di II specie

$$f = F+P+Q \qquad (20)$$

possiamo dare alle equazioni fondamentali la forma:

$$\mathrm{lor}f = -s \;, \qquad \{A\}$$

$$\mathrm{lor}F^* = 0 \;. \qquad \{B\}$$

Abbiamo così ottenuto formalmente le equazioni differenziali che valgono nella materia in moto (vedi Minkowski, Equazioni fondamentali, § 12, formule {A}, {B}, pagina 505).

Sostituiamo

$$f_{23}, f_{31}, f_{12}, f_{14}, f_{24}, f_{34}$$

con

$$\mathfrak{m}_x, \mathfrak{m}_y, \mathfrak{m}_z, -i\mathfrak{e}_x, -i\mathfrak{e}_y, -i\mathfrak{e}_z \;,$$

e

$$s_1, s_2, s_3, s_4$$

con

$$\frac{1}{c}\,\mathfrak{s}_x \;,\quad \frac{1}{c}\,\mathfrak{s}_y \;,\quad \frac{1}{c}\,\mathfrak{s}_z \;,\; i\rho \;,$$

e riassumiamo le quantità che qui intervengono rispettivamente nei vettori spaziali $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{e}$, $\mathfrak{s}$; allora possiamo dare alle equazioni {A}, {B} la forma reale:

$$\mathrm{rot}\,\mathfrak{m} - \frac{1}{c}\frac{\partial \mathfrak{e}}{\partial t} = \frac{1}{c}\,\mathfrak{s}\ , \qquad \text{(I')}$$

$$\mathrm{div}\,\mathfrak{e} = \rho\ , \qquad \text{(II')}$$

$$\mathrm{rot}\,\mathfrak{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial t} = 0\ , \qquad \text{(III')}$$

$$\mathrm{div}\,\mathfrak{M} = 0\ . \qquad \text{(IV')}$$

Queste sono le equazioni differenziali che valgono nei corpi in quiete o in moto, quando i vettori $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{e}$, $\mathfrak{s}$ possono essere interpretati rispettivamente come l'intensità di campo magnetico, l'induzione dielettrica e la corrente, e la quantità ρ come la densità dell'elettricità. Il nostro compito sarà leggere questo significato nelle equazioni di definizione (15), (16), (17), (20); queste ultime equazioni devono inoltre contenere le relazioni che legano i due vettori "induzione" ai due vettori "intensità di campo", nelle quali intervengono le proprietà materiali. Vedremo tuttavia che, proprio come per Lorentz, queste relazioni sono qui assai più generali di quelle trattate da Minkowski, che si è limitato a corpi isotropi, privi di dispersione; le nostre equazioni possono mediante opportune ipotesi aggiuntive essere adattate alle molteplici proprietà delle sostanze, e l'ipotesi più semplice porta alle formule ottenute da Minkowski. Per avere una visione d'assieme di questa situazione, trattiamo in primo luogo il caso semplice di corpi in quiete.

.
.
.
.