

LE EQUAZIONI FONDAMENTALI GENERALMENTE COVARIANTI
DEL CAMPO ELETTROMAGNETICO ALL'INTERNO DELLA MATERIA PONDERABILE
DAL PUNTO DI VISTA DELLA TEORIA DEGLI ELETTRONI¹

Walter Dällenbach

(dissertazione di Zurigo)

Sommario.

Nel capitolo I, fondandosi su di un determinato modello della materia secondo la teoria degli elettroni, che garantisce la separazione delle corrente vera e della corrente di polarizzazione, a partire dalle equazioni generalmente covarianti del campo elettromagnetico nello spazio vuoto, mediante un processo di media che rende conto del completo mescolamento dello spazio e del tempo, proprio della teoria della relatività, si derivano delle equazioni di campo per l'interno della materia parimenti dotate di covarianza generale. Lo stato di polarizzazione della materia sarà caratterizzato da un "esavettore di polarizzazione", che si ottiene in modo naturale come un integrale di configurazione a partire dalle posizioni e dalle velocità delle cariche microscopiche contenute nelle molecole.

Nel capitolo II si identificano le leggi di campo ottenute per la materia a riposo con le equazioni di Maxwell e si mostra inoltre che l'espressione per l'esavettore di polarizzazione degenera nell'espressione nota della teoria degli elettroni di Lorentz.

Nel capitolo III si derivano in modo intuitivo in primo luogo per il caso dell'elettrostatica e poi per materia in moto in un campo arbitrariamente variabile la densità di forza ed il tensore d'energia ed impulso.

Nel IV capitolo si discutono i risultati del III. La densità di forza calcolata vale anche per corpi anisotropi con isteresi. Il tensore d'energia e impulso è una generalizzazione di quello di Minkowski. Si dimostra che la sua asimmetria non è in contrad-

¹Annalen der Physik **58**, 523 (1919).

dizione con l'uguaglianza tra densità d'impulso e corrente d'energia richiesta nella teoria della relatività.

Capitolo I. La derivazione delle equazioni di campo.

I calcoli seguenti saranno fatti in un sistema di Lorentz per un campo gravitazionale costante nello spazio e nel tempo. La transizione alla teoria della relatività generale è in questo lavoro di natura solo formale e la si introduce principalmente per la semplicità dei risultati.

Nella notazione della teoria della relatività generale² le equazioni del campo elettromagnetico nello spazio vuoto si scrivono³

$$\begin{aligned}
 \text{a)} \quad & f_{\mu\nu} = \varphi_{\mu,\nu} - \varphi_{\nu,\mu} \quad , \\
 \text{b)} \quad & f^{\mu\nu}_{,\nu} = \rho_0 u^\mu, \quad \text{(I)} \\
 \text{c)} \quad & f_{\mu\nu,\sigma} + f_{\nu\sigma,\mu} + f_{\sigma\mu,\nu} = 0 \quad .
 \end{aligned}$$

La legge d'induzione c) è una conseguenza puramente matematica dell'equazione a), che deriva l'esavettore $f_{\mu\nu}$ del campo elettromagnetico da un tetrapotenziale φ_μ . Nell'equazione b) ρ_0 indica la densità a riposo dell'elettricità e

$$u_\mu = \frac{dx^\mu}{ds}$$

la tetravelocità della quale essa è dotata.

Il punto di vista della teoria degli elettroni è che un pezzo di materia consista di un insieme di cariche elettriche positive e negative assai numerose poste nello spazio, tra le quali valga rigorosamente lo schema di equazioni (I).

²Qui e nel seguito si somma sempre su due indici di coordinata uguali nello stesso termine.

³A. Einstein, Die Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie, Ann. d. Phys. **49**, p.769, 1916, in particolare §20. - H. Weyl, Raum, Zeit, Materie. Berlin 1918.

Con gli strumenti di misura grossi a nostra disposizione non siamo in grado di seguire individualmente i movimenti delle cariche estremamente numerose e piccine; non siamo in grado di determinare sperimentalmente in un certo istante lo stato microscopico della materia e di osservare realmente le variazioni spazio-temporali delle quantità di stato prescritte da equazioni come le (I). Ciò che possiamo misurare sono sempre soltanto valori medi, al più deviazioni medie dai valori medi delle quantità di stato microscopiche.

Sia a una siffatta quantità di stato microscopica. Con pieno utilizzo della simmetria con la quale lo spazio e il tempo entrano come variabili indipendenti nelle leggi di natura, definiamo come valor medio della quantità a

$$A = \frac{1}{\int_G d\tau} \int_G a d\tau = \bar{a} . \quad (1)$$

G indica una regione d'universo fisicamente piccola, diremo una regione dello spazio che contenga moltissime piccole cariche, considerata per una durata temporale che parimenti comprenda moltissimi eventi discreti, quali urti, rivoluzioni, oscillazioni di qualche tipo delle piccole cariche. $d\tau$ è l'elemento di volume della regione G invariante per trasformazioni di Lorentz.

Ci lasciamo inoltre condurre dalla fiducia che quando applichiamo il processo di media definito dalla (1) alle equazioni (I) saremo condotti a relazioni che collegano proprio i valori medi che osserviamo di fatto come fisici sperimentali.

Constatiamo:

Una quantità ed il suo valor medio hanno le stesse proprietà di covarianza.

Derivazione e media sono processi commutabili.

Il sistema di equazioni (I) vale di conseguenza immutato senza alcuna ipotesi restrittiva sulla costituzione della materia per i valori medi Φ_μ , $F_{\mu\nu}$ e $\bar{\rho}_0 u^\mu$ del potenziale ϕ_μ , del campo $f_{\mu\nu}$, e della corrente $\rho_0 u^\mu$. Si giungerà nel seguito ad identificare Φ_μ ed $F_{\mu\nu}$ direttamente con le quantità osservabili della teoria di Maxwell, finora fenomenologica. Non così con il valor medio $\bar{\rho}_0 u^\mu$. Dobbiamo dedicare ad esso da ora la nostra intera attenzione, ed esso ci costringe in primo luogo a delineare una precisa immagine

della materia.

Le piccole cariche nella materia - le chiameremo nel seguito elettroni - gli elettroni dunque sono da riunire una volta per tutte in gruppi legati, in piccoli sistemi planetari, in molecole. La carica totale di una molecola sarà nulla e un elettrone non lascerà mai la sua molecola. Ammettiamo pure che sotto l'influenza di un campo esterno variabile all'interno del gruppo esso assuma via via nuove orbite nei moti stazionari, oppure esegua oscillazioni vibrazionali attorno a via via nuove posizioni di equilibrio; il legame elettronico, che viene indicato mediante la parola "molecola", resta tuttavia lo stesso. L'espressione condensata di queste assunzioni si scrive:

$$\int_g \rho_0 u^\mu d\tau = 0 \quad , \quad (2)$$

integrata sulla regione d'universo g , spazzata da una certa molecola per una certa durata fisicamente piccola.

Come si comportino mutuamente le singole molecole, che siano legate in un corpo rigido, ovvero che striscino l'una sull'altra come in un liquido, oppure che infine tra due urti si muovano indipendentemente l'una dall'altra come in un gas ideale, è per il seguito del tutto inessenziale; infatti non si ha a che fare qui con la relazione tra proprietà elettromagnetiche ed elastiche dei corpi; ed è solo per fissare le idee e per non appesantire inutilmente il discorso se invece pensiamo che i baricentri delle molecole siano, rispetto alle variazioni del campo elettromagnetico, legati tra loro fortemente con forze elastiche.

Fino ad ora abbiamo imparato a conoscere gli elettroni solo come elementi costitutivi delle molecole. Li chiamiamo nel seguito *elettroni di polarizzazione* (P) e distinguiamo da essi le *cariche di convezione* (K) che, legate alla materia - diciamo ai baricentri delle molecole - seguono il moto macroscopico della materia. Infine si dovrà seguire tra le molecole uno sciame di *elettroni di conduzione* (L) in moto libero, che urtano e vengono urtati sotto l'influenza del campo.

Poniamo questo modello di materia alla base della media della tetracorrente $\rho_0 u^\mu$. Dalla definizione (1) del valor medio segue

$$\overline{\rho_0 u^\mu} = \overline{\rho_0 u_L^\mu} + \overline{\rho_0 u_K^\mu} + \overline{\rho_0 u_P^\mu} .$$

Indicheremo complessivamente $\overline{\rho_0 u_L^\mu} + \overline{\rho_0 u_K^\mu} =$ corrente di conduzione piú corrente di convezione come la *corrente vera* J^μ .

Per vedere comodamente l'esistenza di una corrente di elettroni di polarizzazione e calcolarla nel modo piú trasparente possibile ritorniamo per la durata di qualche pagina nello spazio tridimensionale, consueto, euclideo, con un sistema di coordinate cartesiane, adatto all'intuizione. Assumiamo i nostri corpi di prova, ma li svuotiamo prima di tutte le cariche di convezione e degli elettroni di conduzione e tratteniamo l'insieme delle molecole scariche. Gli elettroni di polarizzazione che fino ad ora si agitavano saranno tutti fermati improvvisamente nel loro moto; verranno a riposo nelle posizioni di equilibrio. Anche il corpo come un tutto sia a riposo, ed un campo elettromagnetico eventualmente presente si riduca ad uno puramente elettrostatico.

Al compito di ottenere il valor medio $\overline{\rho_0 u_P^\mu}$ della tetra-corrente $\rho_0 u^\mu$ corrisponde sotto le condizioni enunciate quello molto piú facile di calcolare il valor medio $\overline{\rho_{0P}}$ della densità a riposo ρ_0 . Ora il valor medio è sempre definito dalla (1), e può esser scritto nella forma particolare

$$\overline{\rho_{0P}} = \frac{1}{\int_R dV} \int_R \rho_0 dV .$$

R è una regione dello spazio fisicamente piccola e dV è il suo elemento di volume. $\overline{\rho_{0P}}$ è sempre diverso da zero quando lo è la carica $\int_R \rho_0 dV$. Se temporaneamente il campo esterno è assente, allora è chiaro che all'interno di un cristallo è anche $\int_R \rho_0 dV = 0$, purché la superficie della regione R sia sufficientemente irregolare, come una lamiera ondulata, da tagliare le molecole della materia in modo del tutto casuale. Se polarizziamo, gli elettroni positivi saranno in generale spostati all'incirca nella direzione del campo esterno, e quelli negativi nella direzione opposta. Se questo spostamento non avviene su tutta la regione R con la stessa intensità, cosa che può originarsi dal fatto che il campo esterno, oppure anche la polarizzabilità della materia, varia lentamente e costantemente da punto a punto dello spazio, è evidente che la regione R scarica nello stato non polarizzato ora

può ben avere una carica. La densità di carica a riposo ρ_0 che le corrisponde è $\overline{\rho_{0P}}$, e ora la calcoleremo ripetendo un argomento di H.A. Lorentz⁴.

Con normale diretta verso l'esterno siano df_{ν} ($\nu=1,2,3$) le componenti di un elemento della superficie di R . df_{ν} tagli un gran numero di molecole. La somma dS di tutte le cariche che da un lato appartengono a molecole tagliate, dall'altro stanno all'interno dell'elemento di superficie df_{ν} , si annulla nello stato non polarizzato della materia; dobbiamo ottenere dS in quello polarizzato. Tutte le molecole siano fatte allo stesso modo e contengano ciascuna n elettroni di polarizzazione. Il k -esimo elettrone posseda la carica e_k ed abbia dal baricentro della sua molecola la separazione \mathbf{r}_k di componenti x_k^{ν} . Tra tutte le molecole nelle vicinanze di df_{ν} , estraiamo tutte quelle per le quali la punta del vettore \mathbf{r}_k , quando esso sia traslato parallelamente nell'origine delle coordinate, vada a cadere all'interno di un piccolo elemento di volume dv . Per comodità d'espressione immaginiamoci nel seguito le molecole di questo tipo colorate di "rosso". Quante sono le molecole rosse nell'unità di volume? Siamo evidentemente autorizzati ad avanzare l'ipotesi $s_k dv$, dove la funzione s_k dipende solo dalla posizione dell'elemento di volume rispetto all'origine delle coordinate. Inoltre: quali sono le molecole rosse il cui raggio \mathbf{r}_k sarà tagliato dall'elemento di superficie df_{ν} ? Tutte quelle il cui baricentro sta in un cilindretto costruito con l'elemento di superficie df_{ν} e con il vettore \mathbf{r}_k . Il volume di questo cilindretto è $x_k^{\nu} df_{\nu}$, e il volume per la densità dà il numero $s_k dv x_k^{\nu} df_{\nu}$ di tutte le molecole rosse, le cui cariche e_k stiano al di là, e il cui baricentro stia al di qua di df_{ν} , nel caso che noi assumiamo il volume $x_k^{\nu} df_{\nu}$ positivo per il vettore \mathbf{r}_k prescelto. Ognuna di queste molecole significa "una" carica e_k al di là di df_{ν} , e tutte insieme la carica $e_k s_k dv x_k^{\nu} df_{\nu}$ al di là di df_{ν} , derivante da molecole tagliate.

Se integriamo su tutte le posizioni possibili dell'elemento di volume dv infinitamente piccolo in senso matematico,

⁴H.A. Lorentz, Weiterbildung der Maxwellschen Theorie; Elektronentheorie. Encykl. d. math. Wiss. V 14, in particolare Nr. 27 e 28.

comprendiamo sicuramente tutte le cariche e_k che appartengono a molecole tagliate, e

$$df_{\nu} \int e_k s_k x_k^{\nu} dv$$

significa l'eccesso delle cariche e_k al di là di df_{ν} rispetto a quelle ancora poste al di qua dell'elemento di superficie. Se sommiamo infine su tutti gli elettroni di polarizzazione da $k=1$ fino ad n , e consideriamo che le cariche totali che stanno al di qua e al di là di df_{ν} sono uguali e di segno opposto, risulta come carica al di qua di df_{ν}

$$dS = -df_{\nu} \sum_{k=1}^n \int e_k s_k x_k^{\nu} dv .$$

La somma non è nient'altro che la somma della funzione ex^{ν} su tutte le cariche e delle molecole che stanno nel volume 1. Lasciamo poi che le cariche discrete si risolvano in una densità elettrica a riposo ρ_0 distribuita con continuità nello spazio; sarà in definitiva

$$dS = -\overline{\rho_0 x^{\nu}} \cdot df_{\nu} ,$$

dove

$$\overline{\rho_0 x^{\nu}} = \frac{1}{\int_r dV} \int_r \rho_0 x^{\nu} dV .$$

Il dominio d'integrazione r è piccolo di un ordine superiore rispetto ad R , ma sempre piccolo in senso puramente fisico. Si distingue inoltre da R per il fatto che la sua superficie non può tagliare alcuna molecola. Se ci ricordiamo che la carica $\int \rho_0 dV$ di una molecola si annulla, riconosciamo che le x^{ν} nella formula precedente si possono interpretare come le coordinate usuali in un sistema di coordinate comune a tutte le molecole. Facciamo così nel seguito, senza modificare i conti. Per integrazione di dS sulla regione R otteniamo la carica totale in essa racchiusa e quindi il valor medio $\overline{\rho_{0P}}$.

Generalizzando ancora un po', riepiloghiamo: se ρ_0 indica una certa funzione spaziale per la quale

$$\int_r \rho_0 dV = 0 \tag{3}$$

quando sia integrata su di uno spazio fisicamente piccolo r , che non tagli nessuna molecola, allora il suo valor medio è dato da

$$\overline{\rho_{0P}^{\nu}} = - \frac{1}{\int_R dV} \int_R m^{\nu} df_{\nu} = - \frac{\partial m^{\nu}}{\partial x^{\nu}} . \quad (4)$$

R è una regione grande rispetto a r , che taglia le molecole senza riguardi. Il vettore

$$m^{\nu} = \overline{\rho_0 x^{\nu}} = \frac{1}{\int_R dV} \int_R \rho_0 x^{\nu} dV \quad (5)$$

varia così lentamente, che le sue derivate prime si potranno considerare costanti all'interno di R .

Questo risultato rimane valido anche quando la regione R contenga una miscela di tipi diversi di molecole.

Questo l'argomento di H.A. Lorentz. Riconosciamo che esso è indipendente dal numero di dimensioni, e indipendente dal fatto che ρ_0 indichi proprio uno scalare oppure la componente di un vettore o di un tensore. La sua sola ipotesi è l'equazione (3); ad essa corrisponde tuttavia nell'universo tetradimensionale l'equazione (2), e otteniamo così senza ulteriori calcoli la corrente di polarizzazione $\overline{\rho_0 u_P^{\mu}}$ cercata. Posso ben consentire al lettore di sopprimere alla svelta nell'universo una coordinata spaziale, e di eseguire la dimostrazione presente ancora in modo intuitivo su molecole bidimensionali e sul fascio di tubi d'universo da esse descritto. Otteniamo allora e registriamo nella forma seguente le espressioni corrispondenti alle equazioni (4) e (5)

$$\overline{\rho_0 u_P^{\mu}} = - \frac{1}{\int_G d\tau} \int_G M^{\mu\nu} df_{\nu} = - \frac{\partial M^{\mu\nu}}{\partial x^{\nu}} , \quad (6)$$

$$M^{\mu\nu} = \overline{\rho_0 u^{\mu} x^{\nu}} = \frac{1}{\int_g d\tau} \int_g \rho_0 u^{\mu} x^{\nu} d\tau . \quad (7)$$

Con l'equazione (7) abbiamo senz'altro trovato il tensore di polarizzazione. Soltanto esso è del tutto asimmetrico. Il grande numero di 16 componenti, che esso ha ora a disposizione, non si accorda affatto con la semplicità della teoria di Maxwell, che dobbiamo ottenere come risultato per materia a riposo. Anche il fatto che l'equazione (6) si può scrivere in modo semplice in

forma generalmente covariante solo nel caso che $M^{\mu\nu}$ sia un esavettore suggerisce di tentare la seguente trasformazione parziale:

$$M^{\mu\nu} = \overline{\rho_0 u^\mu x^\nu} = - \overline{\rho_0 u^\nu x^\mu} + \overline{\rho_0 \frac{d}{ds} (x^\mu x^\nu)} .$$

Sommando le due espressioni $M^{\mu\nu}$ si suddivide in una parte simmetrica ed in una antisimmetrica

$$M^{\mu\nu} = \frac{\rho_0}{2} (u^\mu x^\nu - u^\nu x^\mu) + \frac{\rho_0}{2} \frac{d}{ds} (x^\mu x^\nu) .$$

Le componenti del tensore simmetrico significano velocità medie di variazione di quantità come momenti d'inerzia, momenti centrifughi, momenti statici di molecole, solo che al posto delle masse inerziali stanno sempre le cariche in parte positive, in parte negative degli elettroni di polarizzazione. Se anche le velocità di variazione di quantità siffatte non fossero esattamente nulle, esse risultano tuttavia certamente costanti sulla regione R e per la formula (6) esse non contribuiscono nulla al valore di $\overline{\rho_0 u^\mu}$.

Con ciò è trovata la corrente di polarizzazione, e lo sono anche i valori medi delle equazioni di campo. Raccogliamo i risultati nello schema seguente:

$$a) \quad F_{\mu\nu} = \Phi_{\mu,\nu} - \Phi_{\nu,\mu} ,$$

$$b) \quad F^{\mu\nu}_{,\nu} + M^{\mu\nu}_{,\nu} = J^\mu ,$$

$$c) \quad F^{\mu\nu,\sigma} + F^{\nu\sigma,\mu} + F^{\sigma\mu,\nu} = 0 ,$$

$$d) \quad M^{\mu\nu} = \frac{\rho_0}{2} (u^\mu x^\nu - u^\nu x^\mu) . \quad (II)$$

Va notato che queste equazioni, da scriversi senz'altro in forma generalmente covariante, valgono tanto per corpi cristallizzati, come cristalli, quanto per corpi amorfi, purché si possano trattare la corrente vera e la corrente di polarizzazione nel modo condizionato dall'esistenza di molecole secondo l'equazione (2). Non abbiamo tralasciato in nessun punto neppure

l'inerzia dell'elettricità. E' quindi interessante constatare che tutti gli accidenti della materia come dispersione, isteresi, dipendenza delle proprietà elettromagnetiche dalla temperatura e dall'elasticità lasciano intatte le equazioni di campo e trovano la loro sola espressione nelle cosiddette equazioni materiali. E' noto che queste associano ad un determinato andamento del campo elettromagnetico un andamento della polarizzazione completamente determinato. Senza la loro conoscenza la soluzione del problema elettromagnetico in un caso particolare concreto è impossibile, e tuttavia sarebbe un disconoscere il vero compito di questo lavoro se noi ci addentrassimo in essa e cercassimo di collegare tra loro $F^{\mu\nu}$ e $M^{\mu\nu}$ in maniera covariante. Sarebbe tuttavia sopravvalutare il significato generale delle equazioni di campo se noi non ci ricordassimo che esse valgono solo finché le derivate delle quantità di stato "campo" e "polarizzazione" che in esse compaiono possono essere trattate come costanti su regioni d'universo fisicamente piccole. Perciò prescindiamo da tutte le onde luminose la cui lunghezza d'onda sia confrontabile con le dimensioni molecolari, ovvero la cui frequenza sia dello stesso ordine di grandezza delle frequenze proprie degli elettroni di polarizzazione.

Capitolo II. Connessione tra la teoria finora fenomenologica di Maxwell e la teoria degli elettroni di Lorentz.

Nel caso di materia a riposo la legge dell'induzione (IIc) deve coincidere con il secondo sistema di equazioni di Maxwell, e di conseguenza l'esavettore $F_{\mu\nu}$ degenera nei vettori induzione magnetica \mathbf{b} e intensità di campo elettrico \mathbf{e} . Se ci atteniamo a questo e ricordiamo il significato di J^μ , segue dall'identità della (IIb) con il primo sistema di equazioni di Maxwell che la magnetizzazione \mathbf{m} e la polarizzazione elettrica \mathbf{p} si fondono per la materia a riposo nel tensore $M^{\mu\nu}$. E infine dalla (IIa) riconosciamo come componenti spaziali di Φ_μ il potenziale vettore \mathbf{f} , e come componente temporale il potenziale scalare φ . La tabella seguente dà la rappresentazione in componenti:

$$\begin{aligned}
\mathbf{f} &= (\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3) , & \varphi &= \Phi_4 , \\
\mathbf{j} &= (J^1, J^2, J^3) , & \rho &= J^4 , \\
\mathbf{b} &= (F^{23}, F^{31}, F^{12}) , & \mathbf{e} &= (F^{41}, F^{42}, F^{43}) , \\
&= (F_{23}, F_{31}, F_{12}) , & &= (F_{14}, F_{24}, F_{34}) , \\
\mathbf{m} &= (M^{32}, M^{13}, M^{21}) , & \mathbf{p} &= (M^{41}, M^{42}, M^{43}) .
\end{aligned}$$

La velocità della luce è posta uguale ad uno.

Se nel caso della materia a riposo distinguiamo tra spazio e tempo, risultano nell'analisi vettoriale tridimensionale al posto delle (IIa, b, c) le equazioni

$$\begin{aligned}
\text{a)} \quad & \mathbf{b} = -\text{rot} \mathbf{f} , & \mathbf{e} &= \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t} - \text{grad} \varphi , \\
\text{b)} \quad & \left(\text{rot} \mathbf{b} - \frac{\partial \mathbf{e}}{\partial t} \right) - \left(\text{rot} \mathbf{m} + \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial t} \right) = \mathbf{i} , & \text{div} \mathbf{e} + \text{div} \mathbf{p} &= \rho , & \text{(III)} \\
\text{c)} \quad & \text{rote} + \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t} = 0 , & \text{div} \mathbf{b} &= 0 .
\end{aligned}$$

Queste sono le equazioni di Maxwell con una netta separazione del campo $\{\mathbf{b}, \mathbf{e}\}$ e della materia $\{\mathbf{m}, \mathbf{p}, \mathbf{i}, \rho\}$. Il significato puramente derivato dei vettori spostamento dielettrico $\delta = \mathbf{e} + \mathbf{p}$ e intensità di campo magnetico $\mathbf{h} = \mathbf{b} - \mathbf{m}$ risulta ben evidente. Malgrado ciò essi costituiscono insieme un tensore antisimmetrico $D^{\mu\nu} = F^{\mu\nu} + M^{\mu\nu}$ con le componenti a riposo

$$\mathbf{h} = (D^{23}, D^{31}, D^{12}) , \quad \delta = (D^{41}, D^{42}, D^{43}) .$$

Con ciò non siamo ancora alla conclusione, poiché non è sicuro che le componenti del tensore $M^{\mu\nu}$, definite dall'equazione (IIId), coincidano con le espressioni della teoria dell'elettromagnetismo usata finora. Così deve accadere. In un sistema di Lorentz, nel quale la materia sia a riposo, siano

$$x^\mu = \{(\mathbf{r}=x, y, z), t\} ,$$

$$u^\mu = \left\{ \frac{v_x}{(1-v^2)^{1/2}} , \frac{v_y}{(1-v^2)^{1/2}} , \frac{v_z}{(1-v^2)^{1/2}} , \frac{1}{(1-v^2)^{1/2}} \right\}$$

ed $M^{\mu\nu}$ si scinde in:

$$\mathbf{m} = \frac{1}{\int ds} \int \left\{ \frac{1}{2} \sum_m \sum_{k=1}^n e_k \frac{[\mathbf{r}, \mathbf{v}]}{(1-\mathbf{v}^2)^{1/2}} \right\} ds ,$$

$$\mathbf{p} = \frac{1}{\int ds} \int \left\{ \frac{1}{2} \sum_m \sum_{k=1}^n e_k \frac{\mathbf{r} - \mathbf{v}t}{(1-\mathbf{v}^2)^{1/2}} \right\} ds .$$

La \sum_k va estesa a tutte le cariche e_k nella molecola, la \sum_m su tutte le molecole nel volume unitario e infine l'integrale su una durata fisicamente piccola.

Una particella *polarizzabile elettricamente*, cioè una particella legata con forza quasielastica ad una posizione di equilibrio esegue delle oscillazioni attorno ad essa. Allora è $\mathbf{m}=0$. Poniamo in \mathbf{p} :

$$\mathbf{r} - \mathbf{v}t = 2\mathbf{r} - \frac{d(\mathbf{r}t)}{dt} \quad e$$

$$1 + \mathbf{v}^2 \approx 1 .$$

La media temporale di $d(\mathbf{r}t)/dt$ si annulla per la particella singola, e otteniamo come prima approssimazione in accordo con la teoria degli elettroni⁵:

$$\mathbf{p} = N \sum_{k=1}^n e_k \mathbf{r} ,$$

dove N indica il numero delle molecole per unità di volume.

Una particella *polarizzabile magneticamente* invece ruota assai rapidamente in un'orbita quasi circolare. Per questa è $\mathbf{p}=0$, ed \mathbf{m} , nella stessa approssimazione di cui sopra, sarà:

$$\mathbf{m} = N \sum_{k=1}^n \frac{1}{2} e_k [\mathbf{r}, \mathbf{v}]$$

ancora in accordo con la teoria degli elettroni.

Le equazioni (II) soddisfano il principio di relatività e degenerano nel caso della quiete in quelle di Maxwell. Esse sono quindi, come Minkowski⁶ ha mostrato, in accordo con gli esperimenti sui corpi in moto.

⁵H.A. Lorentz, *l.c.*.

⁶H. Minkowski, Grundgleichungen für die elektromagnetischen Vorgänge in bewegten Körpern. Ges. Abhandlungen Bd. 2, p. 352.

Capitolo III. Determinazione della densità di forza ponderomotrice e del tensore d'energia e impulso.

Per la determinazione della densità di forza κ_{σ} all'interno della materia in moto la cosa più naturale sembra che sia applicare il processo di media definito dalla (1) alla densità di forza nel vuoto:

$$\kappa_{\sigma} = f_{\sigma\mu} \rho_0 u^{\mu}$$

e cercare di esprimere, con l'utilizzo delle equazioni di campo e del modello di materia scelto, il valor medio del prodotto mediante i valori medi dei suoi fattori.

Ovvero, poiché in un sistema di Lorentz κ_{σ} si deriva dal tensore d'energia e impulso t_{σ}^{ν} nel seguente modo semplice:

$$\kappa_{\sigma} = \frac{\partial t_{\sigma}^{\nu}}{\partial x^{\nu}},$$

si offre la nuova possibilità di partire direttamente dal valor medio del tensore d'energia e impulso, con lo stesso procedimento matematico delineato prima per la densità di forza. Questa proposta fa Abraham⁷, tuttavia non senza proporre una seconda essenzialmente diversa, e noi intraprenderemo questa seconda via intuitiva, che Einstein e Laub⁸ hanno trattato a suo tempo.

Gli argomenti che svilupperemo non hanno carattere di rigore matematico. Li devono giustificare la loro plausibilità intuitivo-fisica, e non per ultimo, il loro semplice risultato.

Ci limitiamo per ora al caso dell'elettrostatica. Sia R una regione dello spazio arbitraria, fisicamente piccola, all'interno di un dielettrico a riposo. La forza esercitata dal campo esterno

⁷M. Abraham, Frage der Symmetrie des elektromagnetischen Spannungstensor. Ann. d. Phys. **44**, p.537, 1914.

⁸A. Einstein e J. Laub, Ueber die im elektromagnetischen Felde auf ruhende Körper ausgeübten ponderomotorischen Kräfte. Ann. d. Phys. **26**, p.541, 1908.

sulle cariche nella regione R deve potersi rappresentare come risultante degli sforzi t_{σ}^{ν} sulla superficie di R . In una prima derivazione della densità di forza cerchiamo di determinare questi sforzi per via intuitiva.

Al tensore degli sforzi dello spazio vuoto:

$$\epsilon_{\sigma}^{\nu} e^{\nu} - \delta_{\sigma}^{\nu} \frac{1}{2} e^{\alpha} e_{\alpha} \quad \text{dove: } \delta_{\sigma}^{\nu} = \begin{cases} 0 & \text{per } \sigma \neq \nu \\ 1 & \sigma = \nu \end{cases},$$

come sarà prodotto dal valor medio e^{ν} , rispettivamente ϵ_{ν} del campo microscopico, si aggiungono come nuove le forze che le cariche di polarizzazione che ricoprono l'esterno della regione R sperimentano nel campo esterno. Esse saranno trasmesse alla regione R stessa mediante i legami intermolecolari delle molecole tagliate dalla superficie di R . Quindi, con normale esterna positiva, al di fuori dell'elemento di superficie df_{ν} sta la carica $p^{\nu} df_{\nu}$ e su di essa agisce nel campo macroscopico la forza $\epsilon_{\sigma} p^{\nu} df_{\nu}$. Il tensore degli sforzi del vuoto sarà quindi accresciuto per la presenza del dielettrico del termine $\epsilon_{\sigma} p^{\nu}$.

L'argomento proposto finora è falso o per lo meno richiede un completamento.

Campo macroscopico e campo esterno non sono affatto identici; se infatti rimuoviamo il campo esterno, ma manteniamo lo stato di polarizzazione della materia in R e nel suo intorno immediato, in generale il valor medio del campo microscopico non si annulla. La differenza che ancora permane tra campo esterno e campo macroscopico, il cosiddetto campo di polarizzazione, non è tuttavia mai in condizione di porre in movimento la materia in R ; infatti per mantenere lo stato di polarizzazione utilizziamo delle forze puramente immaginarie, ma solo interne. L'espressione finora ottenuta del tensore degli sforzi va quindi completata con un termine ϑ_{σ}^{ν} che corrisponde alle forze che esercita sulle cariche $p^{\nu} df_{\nu}$ quel campo esterno che completa a zero il campo di polarizzazione. I ϑ_{σ}^{ν} sono quindi sforzi che per campi macroscopici nulli la materia sperimenta a causa dello stato di polarizzazione che è rimasto invariato. Mostriamo ora che essi hanno un'espressione semplice.

Pensiamo che la materia in R sia completamente omogenea e che la polarizzazione p^{ν} sull'intera regione sia costante. Allora la

densità d'energia è la stessa in tutti i punti e l'energia totale è direttamente proporzionale al volume della regione. Impartiamo alla materia un certo spostamento virtuale che non muti nè lo stato di polarizzazione, nè il volume di R , di modo che la sua energia totale resti costante. Poiché il campo macroscopico è presupposto nullo, intervengono a compiere lavoro esterno soltanto gli sforzi ϑ_{σ}^{ν} che agiscono sulla superficie di R . Il loro lavoro si deve annullare per una variazione arbitraria della regione che conservi il volume, cosa che è possibile solo per una pressione $\vartheta_{\sigma}^{\nu} = \delta_{\sigma}^{\nu} p$ costante sull'intera regione. Procediamo alla valutazione della sua intensità p .

Il campo di polarizzazione nell'elemento df_{ν} della superficie di R non dipende solo dallo stato di polarizzazione nel punto considerato, ma dalla configurazione e dallo stato dell'intera regione R . Questa complicazione ci induce a considerare *variazioni* del campo di polarizzazione e quindi di p , e in particolare quelle che intervengono a causa della variazione delle quantità di stato soltanto nel punto considerato. Poiché la variazione lenta delle quantità di stato macroscopiche su una regione fisicamente piccola è un'ipotesi essenziale di tutto questo lavoro, dobbiamo limitarci in particolare a variazioni locali *infinitamente piccole*.

In questo senso impartiamo al campo macroscopico nella posizione dell'elemento di superficie df_{ν} l'incremento $d\epsilon_{\sigma}$ della stessa direzione del vettore df_{ν} . La polarizzazione varierà perciò di dp_{ν} e lo sforzo calcolato prima, generato soltanto dal campo macroscopico subirà l'incremento:

$$d\epsilon_{\sigma} p^{\nu} df_{\nu} + \epsilon_{\sigma} dp^{\nu} df_{\nu} = d(\epsilon_{\sigma} p^{\nu}) df_{\nu} .$$

Annulliamo l'incremento del campo esterno che corrisponde a $d\epsilon_{\sigma}$; allora, per mantenere l'incremento dp^{ν} della polarizzazione dobbiamo introdurre certe forze intermolecolari puramente immaginarie, che esercitano sull'elemento df_{ν} uno sforzo i_{σ}^{ν} . Se infine compensiamo anche l'incremento del campo di polarizzazione che corrisponde a $d\epsilon_{\sigma}$, per mantenere ancora costante la polarizzazione dobbiamo incrementare gli sforzi fittizi i_{σ}^{ν} di $\delta_{\sigma}^{\nu} dp$ secondo la definizione della pressione $\delta_{\sigma}^{\nu} p$. Se noi ora ripristiniamo $d\epsilon_{\sigma}$, riconosciamo che per la scelta speciale della direzione relativa

di $d\epsilon_\sigma$ e di df_ν , lo sforzo che da qui risulta $p^\nu d\epsilon_\sigma$ fa equilibrio esattamente a $i_\sigma^\nu + \delta_\sigma^\nu dp$. Ma i_σ^ν è prodotto da forze puramente interne, e quindi per ogni pezzo finito di materia dà risultante nulla, di modo che per i nostri scopi possiamo supporre:

$$\delta_\sigma^\nu dp + d\epsilon_\sigma p^\nu = 0 ,$$

e ricordandoci dell'ugual direzione di df_ν e di $d\epsilon_\sigma$, risulta:

$$dp = -p^\alpha d\epsilon_\alpha$$

e da questa relazione indipendente dalla scelta particolare dell'elemento di superficie discende la pressione stessa:

$$p = -\int_0^e p^\alpha d\epsilon_\alpha .$$

L'integrale va esteso dallo stato di polarizzazione zero fino ai valori del campo che si verificano in realtà, e precisamente sulla successione di stati che la materia percorre in realtà.

Otteniamo perciò in definitiva come tensore degli sforzi elettrostatici:

$$t_\sigma^\nu = \epsilon_\sigma (e^\nu + p^\nu) - \delta_\sigma^\nu \int_0^e (e^\alpha + p^\alpha) d\epsilon_\alpha ,$$

ovvero con l'introduzione del vettore spostamento:

$$\delta^\nu = e^\nu + p^\nu ,$$

$$t_\sigma^\nu = \epsilon_\sigma \delta^\nu - \delta_\sigma^\nu \int_0^e \delta^\alpha d\epsilon_\alpha .$$

Una seconda derivazione, che si collega ancora strettamente al lavoro di Einstein e Laub, può mostrare il risultato in un'altra luce.

La forza \mathfrak{K}_σ sulla regione R coincide a meno di termini fisicamente piccoli di ordine superiore con la forza sulla regione R' che contenga completamente tutte e sole le molecole che per un certo stato di polarizzazione appartengono interamente o parzialmente alla regione R . La superficie di R' non taglia quindi nessun legame molecolare.

\mathfrak{K}_σ è quindi la risultante delle forze che il campo esterno

esercita direttamente sulle cariche in R' . Per la sua determinazione sviluppiamo il campo macroscopico in una serie

$$\epsilon_{\sigma} = \epsilon_{\sigma/0} + \frac{\partial \epsilon_{\sigma}}{\partial x^{\nu}} x^{\nu} .$$

Nell'origine delle coordinate, che scegliamo nel mezzo della regione R' , il campo ha il valore $\epsilon_{\sigma/0}$. Il secondo termine tiene conto della sua variazione lenta, in prima approssimazione lineare su R' . Trattiamo in un primo tempo - anche se sappiamo che è sbagliato - il campo macroscopico e quello esterno come identici; sarà allora

$$\mathfrak{k}_{\sigma} = \epsilon_{\sigma/0} \int_{R'} \rho dV + \frac{\partial \epsilon_{\sigma}}{\partial x^{\nu}} \int_{R'} \rho x^{\nu} dV .$$

Per l'elettricità che appartiene alla densità di carica vera ρ_w , il primo integrale è $= \rho_w \cdot R'$, e il secondo è uguale a zero. Per integrazione sulle cariche delle molecole, che nella loro somma danno zero, il primo sarà invece nullo e il secondo per definizione di polarizzazione sarà $= \mathfrak{p}^{\nu} \cdot R'$, cosicché otteniamo provvisoriamente come densità di forza

$$\kappa_{\sigma} = (1/R') \mathfrak{k}_{\sigma} = \epsilon_{\sigma} \rho_w + \frac{\partial \epsilon_{\sigma}}{\partial x^{\nu}} \mathfrak{p}^{\nu} .$$

Ricordiamoci ora della differenza tra campo macroscopico ed esterno, e riconosciamo che anche quest'espressione è da completare mediante la forza di pressione calcolata prima, per la quale purtroppo finora non ho potuto dare una derivazione più semplice e più immediata. La densità di forza elettrostatica risulterà quindi infine

$$\kappa_{\sigma} = \epsilon_{\sigma} \rho_w + \frac{\partial \epsilon_{\sigma}}{\partial x^{\nu}} \mathfrak{p}^{\nu} - \frac{\partial}{\partial x^{\sigma}} \left\{ \int_0^e \mathfrak{p}^{\alpha} d\epsilon_{\alpha} \right\}$$

ovvero per l'equazione di campo

$$\frac{\partial \epsilon^{\nu}}{\partial x^{\nu}} + \frac{\partial \mathfrak{p}^{\nu}}{\partial x^{\nu}} = \rho_w ,$$

$$\kappa_{\sigma} = \epsilon_{\sigma} \frac{\partial \epsilon^{\nu}}{\partial x^{\nu}} + \frac{\partial}{\partial x^{\nu}} \left\{ \epsilon_{\sigma} \mathfrak{p}^{\nu} - \delta_{\sigma}^{\nu} \int_0^e \mathfrak{p}^{\alpha} d\epsilon_{\alpha} \right\} .$$

Poiché il primo termine si può scrivere in modo noto come divergenza degli sforzi di Maxwell nello spazio vuoto, l'identità con il risultato originario è dimostrata.

Con questo abbandoniamo il dominio dell'elettrostatica e ci addentriamo nel calcolo della densità di forza, ovvero del tensore d'energia e impulso, nel caso generale di un campo elettromagnetico arbitrario, variabile nello spazio e nel tempo, all'interno di materia polarizzabile elettricamente e magneticamente. Possiamo cavarcela in breve; infatti basta fare una traduzione quasi letterale degli argomenti precedenti dallo spazio tridimensionale all'universo tetradimensionale. Così al tensore d'energia e impulso dello spazio vuoto

$$F_{\sigma\mu} F^{\mu\nu} + \frac{1}{4} \delta_{\sigma}^{\nu} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta}$$

sulla superficie di una regione d'universo G arbitraria, fisicamente piccola, si aggiungono come nuove le forze

$$F_{\sigma\mu} M^{\mu\nu} df_{\nu}$$

che il campo macroscopico esercita sulle cariche di polarizzazione poste all'esterno dell'elemento df_{ν} . Secondo la distinzione tra campo macroscopico e campo esterno - nel caso della magnetostatica risulta particolarmente chiara - esse vanno completate con degli sforzi Θ_{σ}^{ν} , riguardo ai quali, mediante la corrispondente trattazione completa delle variazioni come sopra, riguardante una regione d'universo e la quantità d'azione in essa contenuta, si dimostrerà che danno luogo ad un'espressione semplice $\Theta_{\sigma}^{\nu} = \delta_{\sigma}^{\nu} p$. La trasposizione del calcolo di p dal caso del campo elettrostatico alla magnetostatica, la sovrapposizione dei due casi particolari in quello generale del campo elettromagnetico e infine la formulazione del risultato con il calcolo tetradimensionale danno

$$p = \frac{1}{2} \int_0^F m^{\alpha\beta} df_{\alpha\beta} .$$

Le lettere minuscole $m^{\alpha\beta}$ e $f_{\alpha\beta}$ per la polarizzazione e il campo stanno a ricordare che con esse si indicano quantità variabili, e le quantità di stato che si hanno realmente $M^{\alpha\beta}$ e $F_{\alpha\beta}$ appaiono solo come limiti superiori di integrali. Il cammino

d'integrazione è di nuovo la successione degli stati così come la materia li ha effettivamente percorsi.

Il tensore d'energia e impulso sarà infine

$$T_{\sigma}^{\nu} = F_{\sigma\mu} (F^{\mu\nu} + M^{\mu\nu}) + \delta_{\sigma}^{\nu} \frac{1}{2} \int_0^F (f^{\alpha\beta} + m^{\alpha\beta}) df_{\alpha\beta} , \quad (8)$$

ovvero introducendo lo spostamento tensoriale $D^{\mu\nu} = F^{\mu\nu} + M^{\mu\nu}$

$$T_{\sigma}^{\nu} = F_{\sigma\mu} D^{\mu\nu} + \delta_{\sigma}^{\nu} \frac{1}{2} \int_0^F d^{\alpha\beta} df_{\alpha\beta} . \quad (9)$$

La densità di forza κ_{σ} segue da qui nel caso generale

$$g^{1/2} \kappa_{\sigma} = \frac{\partial}{\partial x^{\nu}} \{ g^{1/2} T_{\sigma}^{\nu} \} - \left\{ \begin{matrix} \sigma & \alpha \\ & \beta \end{matrix} \right\} g^{1/2} T_{\beta}^{\alpha} ,$$

dove g è l'opposto del determinante del potenziale gravitazionale ed il simbolo di Christoffel a tre indici $\left\{ \begin{matrix} \sigma & \alpha \\ & \beta \end{matrix} \right\}$ indica l'opposto della forza di gravitazione. Per un campo di gravitazione nullo essa si riduce a

$$\kappa_{\sigma} = \frac{\partial T_{\sigma}^{\nu}}{\partial x^{\nu}} \quad (10)$$

e nel seguito ci occuperemo di essa solo in questa forma speciale.

Da T_{σ}^{ν} si separa in modo naturale il tensore dello spazio vuoto. La parte della densità di forza che ad esso corrisponde si può notoriamente trasformare in

$$F_{\sigma\mu} \frac{\partial F^{\mu\nu}}{\partial x^{\nu}} ,$$

di modo che, usando l'equazione di campo (IIb), κ_{σ} si può scrivere

$$= F_{\sigma\mu} J^{\mu} + \frac{\partial F_{\sigma\mu}}{\partial x^{\nu}} M^{\mu\nu} + \frac{\partial}{\partial x^{\sigma}} \left\{ \frac{1}{2} \int_0^F m^{\alpha\beta} df_{\alpha\beta} \right\} .$$

La legge d'induzione (IIc) fornisce la relazione

$$\frac{\partial F_{\sigma\mu}}{\partial x^{\nu}} M^{\mu\nu} = - \frac{1}{2} M^{\mu\nu} \frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x^{\sigma}} ,$$

di modo che la densità di forza appare nella forma notevole

$$\kappa_{\sigma} = F_{\sigma\mu} J^{\mu} - \frac{1}{2} M^{\alpha\beta} \frac{\partial F_{\alpha\beta}}{\partial x^{\sigma}} + \frac{\partial}{\partial x^{\sigma}} \left\{ \frac{1}{2} \int_0^F m^{\alpha\beta} df_{\alpha\beta} \right\}. \quad (11)$$

Capitolo IV. Discussione dei risultati dei capitoli precedenti

Quali sono i *limiti di validità* del tensore d'energia e impulso proposto?

Come ricordato prima, un'ipotesi essenziale di questo lavoro è la variabilità lenta delle quantità di stato macroscopiche campo e polarizzazione su regioni d'universo fisicamente piccole.

Inoltre si deve assumere la possibilità della separazione netta della corrente di polarizzazione e della corrente vera, cioè la validità della condizione (2).

L'ultimo capitolo assume implicitamente che il numero delle molecole in un volume spaziale a riposo rispetto alla materia non cambi durante la polarizzazione. Se ciò non si verifica, cioè se varia lo stato di deformazione elastica della materia, il tensore proposto rimane valido purché si riferisca la densità di forza che ne deriva non all'unità di volume, ma sempre alle molecole contenute nel volume unitario nello stato non deformato, purché aggiungiamo alla densità di forza le forze di strizione determinate dalla deformazione elastica. Su di esse non ci addentreremo qui.

Rispettate queste restrizioni, la materia può per il resto esser fatta a piacimento; in particolare il tensore vale per corpi sia amorfi che cristallini, per ferromagneti con e senza isteresi, ed anche per mezzi dispersivi, cosa che tuttavia è di significato limitato, poiché la dispersione suole manifestarsi per frequenze del campo che vanno oltre il requisito di variabilità lenta su regioni d'universo fisicamente piccole.

Per un comodo *confronto con i lavori precedenti* sullo stesso argomento distinguiamo nel caso di materia a riposo tra spazio e tempo e annotiamo nello schema seguente le componenti a riposo del tensore secondo l'analisi vettoriale tridimensionale:

$$\begin{aligned}
T_{\sigma}^{\nu} = & \\
& \begin{array}{cccc}
\mathbf{e} & & & \\
\mathbf{e} \delta_{xx} + \mathbf{h} \mathbf{b}_{xx} - \int_0^{\mathbf{e}} \{(\delta, d\mathbf{e}) + (\mathbf{b}, d\mathbf{h})\} & \mathbf{e} \delta_{xy} + \mathbf{h} \mathbf{b}_{xy} & \mathbf{e} \delta_{xz} + \mathbf{h} \mathbf{b}_{xz} & -[\delta, \mathbf{b}]_x \\
\mathbf{e} \delta_{yx} + \mathbf{h} \mathbf{b}_{yx} & \mathbf{e} \delta_{yy} + \mathbf{h} \mathbf{b}_{yy} - \int_0^{\mathbf{e}} \{(\delta, d\mathbf{e}) + (\mathbf{b}, d\mathbf{h})\} & \mathbf{e} \delta_{yz} + \mathbf{h} \mathbf{b}_{yz} & -[\delta, \mathbf{b}]_y \\
\mathbf{e} \delta_{zx} + \mathbf{h} \mathbf{b}_{zx} & \mathbf{e} \delta_{zy} + \mathbf{h} \mathbf{b}_{zy} & \mathbf{e} \delta_{zz} + \mathbf{h} \mathbf{b}_{zz} - \int_0^{\mathbf{e}} \{(\delta, d\mathbf{e}) + (\mathbf{b}, d\mathbf{h})\} & -[\delta, \mathbf{b}]_z \\
[\mathbf{e}, \mathbf{h}]_x & [\mathbf{e}, \mathbf{h}]_y & [\mathbf{e}, \mathbf{h}]_z & \int_0^{\mathbf{e}} \{(\mathbf{e}, d\delta) + (\mathbf{h}, d\mathbf{b})\}
\end{array}
\end{aligned}$$

Per dipendenza lineare della polarizzazione dal campo T_{σ}^{ν} degenera nel tensore di Minkowski⁹. Gli sforzi elettrostatici sono identici alle espressioni che Cohn¹⁰ ha trovato per variazione della densità d'energia $\int_0^{\mathbf{e}} (\mathbf{e}, d\delta)$. La densità d'energia e la densità di corrente appaiono come dobbiamo richiedere.

Salta all'occhio in quale ampia misura si realizzi la vecchia simmetria di Hertz delle quantità di campo $\{\mathbf{e}, \mathbf{h}\}$ $\{\delta, \mathbf{b}\}$. Se il carattere di covarianza veramente diverso delle due equazioni di Maxwell e l'interpretazione di teoria degli elettroni non parlassero così decisamente a favore della simmetria di Abraham $\{\mathbf{e}, \mathbf{b}\}$ $\{\delta, \mathbf{h}\}$, si cercherebbe, vedendo il tensore d'energia e impulso proposto, di dar di nuovo la preferenza a quella di Hertz.

Ci dedichiamo ora al discorso sull'*asimmetria* del tensore d'energia e impulso.

Il fatto che il tensore misto T_{σ}^{ν} sia asimmetrico non ci può stupire; ma anche quello puramente covariante, ovvero controvariante

$$T_{\sigma\nu} = g_{\nu\alpha} T_{\sigma}^{\alpha} \quad \text{e} \quad T^{\sigma\nu} = g^{\sigma\alpha} T_{\alpha}^{\nu}$$

lo sono.

L'espressione matematica di ciò è l'esistenza del tensore differenza

⁹H. Minkowski, *l.c.*.

¹⁰E. Cohn, *Das elektromagnetische Feld* (Hirzel 1900).

$$\Delta^{\sigma\nu} = T^{\sigma\nu} - T^{\nu\sigma} = F_{\mu}^{\sigma} M^{\mu\nu} - M_{\mu}^{\sigma} F^{\mu\nu} .$$

Le sue componenti spaziali a riposo

$$[\mathbf{e}, \mathbf{p}] + [\mathbf{m}, \mathbf{b}] = (\Delta^{32}, \Delta^{13}, \Delta^{21})$$

indicano notoriamente il momento torcente esercitato sull'unità di volume della materia, e quelle temporali

$$[\mathbf{b}, \mathbf{p}] + [\mathbf{m}, \mathbf{e}] = (\Delta^{41}, \Delta^{42}, \Delta^{43})$$

l'eccesso della densità d'impulso sulla corrente d'energia.

Ciò appare dubbio, se si ricorda quale significato sia insito nell'uguaglianza della densità d'impulso e della corrente d'energia, come espressione matematica dell'inerzia dell'energia e dell'origine energetica di ogni massa inerziale. Bisogna opporsi alle obiezioni che si fanno da questo lato contro il tensore proposto, poiché le vere e rigorose leggi di natura sono quelle microscopiche. Esse non sono naturalmente menomate da valori medi calcolati da esse sotto certe ipotesi [vedi in particolare l'equazione (2)].

Resta tuttavia da spiegare come da un tensore simmetrico, eseguendo il processo di media (1), possa risultarne uno asimmetrico. A questo proposito quanto segue: T_{σ}^{ν} non pretende di essere la media rigorosa del tensore simmetrico microscopico definito dalla (1), ed infatti non lo è di certo; infatti nello stato non polarizzato al campo microscopico, sebbene il suo valor medio si annulli, corrisponde tuttavia una densità d'energia diversa da zero e perciò non esprimibile affatto con quantità di stato macroscopiche.

Lasciamo infine aperta la questione se T_{σ}^{ν} rappresenti almeno l'incremento che il valor medio del tensore microscopico subisce per la polarizzazione; è infatti del tutto possibile che i valori medi non possano conservare le proprietà di simmetria delle componenti di un tensore, che nella regione della media fisicamente piccola varia così rapidamente, come accade per il tensore microscopico del campo elettromagnetico.

Il fatto che per esempio un pezzo fisicamente piccolo di un cristallo sperimenti un momento torcente in un campo elettrico,

sebbene ciò non si verifichi per una regione infinitamente piccola, deriva semplicemente dalla circostanza che già nella singola molecola sono presenti cariche opposte, e che quindi la densità di carica ρ in un pezzo fisicamente piccolo costituisce una funzione che oscilla su e giù tra valori positivi e negativi innumerevoli volte.

Per noi T_{σ}^{ν} non è quindi nient'altro che il tensore che si deve assumere per ottenere la giusta densità di forza.

Per la *discussione della densità di forza* ci basiamo sull'equazione (11). Il primo termine è la forza sulla corrente vera. Gli altri due sono forze sulla materia polarizzabile. In generale, cioè in presenza di isteresi, l'integrale

$$\int_0^F m^{\alpha\beta} df_{\alpha\beta}$$

dipende dal cammino d'integrazione. Per mezzi privi di isteresi invece $m^{\alpha\beta} df_{\alpha\beta}$ è un differenziale esatto, cosa che per esempio per dielettrici anisotropi, polarizzabili linearmente, porta alle note condizioni di integrabilità

$$\varepsilon^{ik} = \varepsilon^{ki} ,$$

dove gli ε^{ik} indicano le costanti dielettriche definite da

$$\delta^i = \varepsilon^{ik} e_k .$$

Il valore dell'integrale è quindi determinato solo dai limiti, e siamo in condizione di derivare il suo gradiente:

$$\frac{\partial}{\partial x^{\sigma}} \left\{ \frac{1}{2} \int_0^F m^{\alpha\beta} df_{\alpha\beta} \right\} = \frac{1}{2} M^{\alpha\beta} \frac{\partial F_{\alpha\beta}}{\partial x^{\sigma}} + \frac{1}{2} \int_0^F \frac{\partial m^{\alpha\beta}}{\partial x^{\sigma}} df_{\alpha\beta} .$$

Il primo termine risulta dal gradiente del campo, il secondo soltanto dal gradiente della polarizzazione, la dipendenza della quale dal campo è univocamente assegnata. La densità di forza assume quindi per mezzi privi di isteresi la forma assai semplice:

$$\kappa_{\sigma} = F_{\sigma\mu} J^{\mu} + \frac{1}{2} \int_0^F \frac{\partial m^{\alpha\beta}}{\partial x^{\sigma}} df_{\alpha\beta} . \quad (12)$$

Prescindendo dalla corrente vera un mezzo privo di isteresi in un campo elettromagnetico arbitrario avverte quindi, oltre a

momenti torcenti, delle forze solo quando la dipendenza funzionale della polarizzazione dal campo mostra un gradiente; quindi in particolare un corpo omogeneo solo sulla superficie, e perpendicolarmente ad essa. Questo è un risultato che non sarebbe mai realizzato con una densità d'impulso $[\mathbf{e}, \mathbf{h}]$ in luogo di $[\mathbf{d}, \mathbf{b}]$, e qui dovrebbe intervenire lo sperimentatore che ritenga necessaria la risposta concreta su questo punto, d'altronde difficile da ottenere.

Per corpi isotropi, le equazioni materiali dei quali siano date da

$$\mathbf{d} = \varepsilon \mathbf{e} \quad \text{e} \quad \mathbf{b} = \mu \mathbf{h} ,$$

dove le "costanti" dielettriche indicano funzioni univoche dei campi $\varepsilon(\mathbf{e})$ e $\mu(\mathbf{b})$, variabili nello spazio e nel tempo, le componenti a riposo dell'equazione (12) assumono i valori noti, ma che qui compaiono con un dominio di validità allargato:

$$\kappa_{1,2,3} = [\mathbf{i}, \mathbf{b}] + \rho \mathbf{e} - \int_0^{\mathbf{e}} \text{grad} \varepsilon(\mathbf{e}, d\mathbf{e}) - \int_0^{\mathbf{b}} \text{grad}(-1/\mu)(\mathbf{b}, d\mathbf{b})$$

$$\kappa_4 = -(\mathbf{i}, \mathbf{e}) - \int_0^{\mathbf{e}} \frac{\partial \varepsilon}{\partial t}(\mathbf{e}, d\mathbf{e}) - \int_0^{\mathbf{b}} \frac{\partial(-1/\mu)}{\partial t}(\mathbf{b}, d\mathbf{b}) .$$

La densità di potenza contiene oltre all'effetto Joule (\mathbf{i}, \mathbf{e}) dei termini che sono diversi da zero quando ε e μ dipendono esplicitamente dal tempo, come per esempio avverrebbe se entrambe le funzioni variassero con la temperatura, e questa col tempo.

Il risultato del presente lavoro è d'aver dimostrato che, per la soluzione del problema elettromagnetico su grande scala (macroscopica) all'interno di materia ponderabile in moto, in ogni punto d'universo si deve conoscere oltre alla tetracorrente vera soltanto una quantità, determinata solo dalla configurazione delle cariche microscopiche, cioè il tensore di polarizzazione definito dall'equazione (IIId), nella sua dipendenza dai valori medi del campo, della temperatura, dello stato di deformazione elastica eccetera.

(ricevuto il 30 ottobre 1918)