Le forze ponderomotrici esercitate su corpi a riposo nel campo elettromagnetico[1]

A. Einstein e J. Laub

In una dissertazione apparsa da poco[2] Il signor Minkowski ha dato un'espressione per le forze ponderomotrici di origine elettromagnetica che agiscono su corpi in moto arbitrario. Se si specializza l'espressione di Minkowski ai corpi a riposo, isotropi ed omogenei, si ottiene per la componente X della forza che agisce sull'unità di volume:

$$K_x = \rho\mathfrak{E}_x + \mathfrak{s}_y\mathfrak{B}_z - \mathfrak{s}_z\mathfrak{B}_y , \qquad (1)$$

dove ρ indica la densità elettrica, $\mathfrak{s}$ la corrente di conduzione elettrica, $\mathfrak{E}$ l'intensità del campo elettrico, $\mathfrak{B}$ l'induzione magnetica. Questa espressione ci pare non essere in accordo con il modello della teoria degli elettroni per il motivo seguente: mentre un corpo percorso da una corrente elettrica (corrente di conduzione) in un campo magnetico subisce una forza, secondo l'equazione (1) ciò non accadrebbe, quando il corpo che si trovasse nel campo magnetico invece che da una corrente di conduzione fosse percorso da una corrente di polarizzazione ($\partial\mathfrak{D}/\partial t$). Per Minkowski si ha quindi una distinzione di principio tra una corrente di spostamento ed una corrente di conduzione tale che un conduttore non può essere trattato come un dielettrico di costante dielettrica infinitamente grande.

In considerazione di questo stato di cose ci appare interessante derivare la forza ponderomotrice per corpi magnetizzabili arbitrari utilizzando la teoria degli elettroni. Diamo nel seguito una derivazione siffatta, limitandoci tuttavia ai corpi a riposo.

---

[1]Annalen der Physik **26**, 541 (1908).

[2]H. Minkowski, Gött. Nachr. 1908. p. 45.

§1. Forze che non dipendono dalla velocità delle particelle elementari.

Nella derivazione ci porremo consistentemente nel punto di vista della teoria degli elettroni[3]; scriviamo quindi:

$$\mathfrak{D} = \mathfrak{E} + \mathfrak{P} \,, \tag{2}$$

$$\mathfrak{B} = \mathfrak{h} + \mathfrak{Q} \,, \tag{3}$$

dove $\mathfrak{P}$ indica il vettore di polarizzazione elettrica, $\mathfrak{Q}$ quello di polarizzazione magnetica. Pensiamo la polarizzazione elettrica ovvero magnetica come consistente in spostamenti spaziali di particelle con carica elettrica o magnetica appartenenti a dipoli, legate a posizioni di equilibrio. Oltre a questi introduciamo ancora la presenza di cariche elettriche mobili non vincolate a dipoli (elettroni di conduzione). Nello spazio tra le suddette particelle valgano le equazioni di Maxwell per lo spazio vuoto e, come per Lorentz, *le interazioni tra materia e campo elettromagnetico saranno determinate esclusivamente da queste particelle*. In conformità a ciò assumiamo che la forza esercitata sull'unità di volume della materia dal campo elettromagnetico sia uguale alla risultante delle forze ponderomotrici che sono esercitate da questo campo su tutte le particelle elementari elettriche e magnetiche che si trovano nell'elemento di volume considerato. Come elemento di volume della materia intendiamo sempre un volume così grande da contenere un numero assai grande di particelle elettriche e magnetiche. Inoltre i confini dell'elemento di volume considerato si devono pensare sempre assunti in modo tale che la superficie di contorno non tagli nessun dipolo elettrico o magnetico.

Calcoliamo in primo luogo quella forza agente su un dipolo elettrico, che origina dal fatto che l'intensità di campo $\mathfrak{E}$ non è esattamente la stessa nelle posizioni in cui si trovano le masse elementari del dipolo. Se si indica con $\mathfrak{p}$ il vettore del momento

---

[3] *Per semplicità d'esposizione ci atteniamo tuttavia alla rappresentazione duale dei fenomeni elettrici e magnetici.*

di dipolo, si ottiene per la componente *X* della forza cercata l'espressione:

$$\mathfrak{f}_x = \mathfrak{p}_x \frac{\partial \mathfrak{E}_x}{\partial x} + \mathfrak{p}_y \frac{\partial \mathfrak{E}_x}{\partial y} + \mathfrak{p}_z \frac{\partial \mathfrak{E}_x}{\partial z} .$$

Si pensi di costruire quest'ultima espressione e di sommarla per tutti i dipoli nell'unità di volume; tenendo conto della relazione:

$$\sum \mathfrak{p} = \mathfrak{P}$$

si ottiene l'equazione:

$$\mathfrak{F}_{1x} = \left\{ \mathfrak{P}_x \frac{\partial \mathfrak{E}_x}{\partial x} + \mathfrak{P}_y \frac{\partial \mathfrak{E}_x}{\partial y} + \mathfrak{P}_z \frac{\partial \mathfrak{E}_x}{\partial z} \right\} . \tag{4}$$

Quando la somma algebrica degli elettroni di conduzione positivi e negativi non si annulla, all'espressione (4) si aggiunge ancora un termine, che ora vogliamo calcolare. La componente *X* della forza ponderomotrice che agisce su di un elettrone di conduzione di massa elettrica *e* risulta $e\mathfrak{E}_x$. Se si somma su tutti gli elettroni di conduzione dell'unità di volume, si ottiene:

$$\mathfrak{F}_{2x} = \mathfrak{E}_x \sum e . \tag{5}$$

Se la materia considerata, che si trova nell'unità di volume, la si pensa racchiusa da una superficie che non tagli alcun dipolo, si ottiene per il teorema di Gauss e per la definizione del vettore spostamento $\mathfrak{D}$:

$$\sum e = \mathrm{div}\mathfrak{D} ,$$

di modo che sarà

$$\mathfrak{F}_{2x} = \mathfrak{E}_x \mathrm{div}\mathfrak{D} . \tag{5a}$$

La componente *X* della forza esercitata dall'intensità di campo elettrico sul volume unitario della materia è perciò uguale a

$$\mathfrak{F}_{ex} = \mathfrak{F}_{1x} + \mathfrak{F}_{2x} = \mathfrak{P}_x \frac{\partial \mathfrak{E}_x}{\partial x} + \mathfrak{P}_y \frac{\partial \mathfrak{E}_x}{\partial y} + \mathfrak{P}_z \frac{\partial \mathfrak{E}_x}{\partial z} + \mathfrak{E}_x \mathrm{div}\mathfrak{D} . \tag{6}$$

Tenendo conto della relazione

$$\mathrm{div}\mathfrak{B} = 0$$

otteniamo analogamente per la componente *X* della forza prodotta dall'intensità del campo magnetico:

$$\mathfrak{F}_{mx} = \left\{ \mathfrak{Q}_x \frac{\partial \mathfrak{H}_x}{\partial x} + \mathfrak{Q}_y \frac{\partial \mathfrak{H}_x}{\partial y} + \mathfrak{Q}_z \frac{\partial \mathfrak{H}_x}{\partial z} \right\} . \tag{7}$$

E' notevole che per la derivazione delle espressioni (6) e (7) non si debba fare alcuna ipotesi riguardo alle relazioni che legano le intensità di campo $\mathfrak{E}$ ed $\mathfrak{H}$ con i vettori di polarizzazione $\mathfrak{P}$ ed $\mathfrak{Q}$.

Se si ha a che fare con corpi anisotropi, le intensità di campo elettriche e magnetiche non producono solo una forza, ma anche coppie, che si trasferiscono alla materia. Il momento torcente cercato si ottiene facilmente per i singoli dipoli e per somma su tutti i dipoli elettrici e magnetici nell'unità di volume. Si ottiene:

$$\mathfrak{L} = \{[\mathfrak{P}\mathfrak{E}] + [\mathfrak{Q}\mathfrak{H}]\} . \tag{8}$$

La formula (6) dà quelle forze ponderomotrici che giocano un ruolo nei problemi elettrostatici. Trasformeremo questa equazione, nel caso che si tratti di corpi isotropi, in modo tale che consenta un confronto con le espressioni per la forza ponderomotrice come si danno in elettrostatica. Poniamo

$$\mathfrak{P} = (\varepsilon-1)\mathfrak{E} ,$$

allora l'equazione (6) diventa:

$$\mathfrak{F}_{ex} = \mathfrak{E}_x \mathrm{div}\mathfrak{D} - \frac{1}{2}\, \mathfrak{E}^2 \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} (\varepsilon-1)\mathfrak{E}^2 .$$

I primi due termini di questa espressione sono identici a quelli noti dall'elettrostatica. Il terzo termine, come si vede, è derivabile da un potenziale. Se si ha a che fare con forze che agiscono su un corpo che si trova nel vuoto, allora questo termine per integrazione sul corpo non dà nessun contributo. Ma se si tratta dell'azione ponderomotrice su un fluido, allora la parte della forza che corrisponde al terzo termine sarà compensata all'equilibrio da una distribuzione di pressioni nel fluido.

§2. Forze che dipendono dalle velocità delle particelle elementari.

Passiamo a quella parte della forza ponderomotrice che è prodotta dalla velocità del moto delle cariche elementari.

Partiamo dalla legge di Biot-Savart. Su un elemento di volume percorso da corrente, che si trovi in un campo magnetico, secondo l'esperienza agisce per unità di volume la forza:

$$\frac{1}{c}\,[\mathfrak{s}\mathfrak{H}]\ ,$$

nel caso che la materia considerata, percorsa dalla corrente, non sia polarizzabile magneticamente. Per l'interno di corpi polarizzabili magneticamente si dovrebbe, per quanto ci risulta, porre quella forza uguale a[4]

$$\frac{1}{c}\,[\mathfrak{s}\mathfrak{B}]\ ,$$

dove $\mathfrak{B}$ indica l'induzione magnetica. Dimostreremo ora che *anche* nel caso che il materiale percorso da corrente *sia polarizzabile magneticamente*, la forza che agisce sull'elemento di volume percorso da corrente si otterrà aggiungendo alla forza espressa mediante l'equazione (7) la forza di volume:

$$\mathfrak{F}_s = \frac{1}{c}\,[\mathfrak{s}\mathfrak{H}]\ . \tag{9}$$

Renderemo prima intuitivo questo fatto mediante un esempio semplice.

La striscia *S* infinitamente sottile, disegnata in sezione, si estenda, perpendicolarmente al piano del foglio, all'infinito su entrambi i lati. Essa consista di materiale polarizzabile magneticamente e si trovi in un campo magnetico omogeneo $\mathfrak{H}_a$, la direzione del quale è indicata dalle frecce (vedi figura). Ci chiediamo quale sia la forza che agisce sulla striscia materiale, nel caso che essa sia percorsa da una corrente $\mathfrak{i}$.

L'esperienza insegna che questa forza è indipendente dalla

---

[4] *Vedi per esempio anche* M. Abraham, Theorie der Elektrizität **2.** p. 319. 1905.

permeabilità magnetica del materiale conduttore, e si conclude pertanto che non dev'essere l'intensità di campo $\mathfrak{H}$ ma l'induzione $\mathfrak{B}$ ad essere determinante per la forza ponderomotrice; infatti all'interno della striscia l'induzione magnetica $\mathfrak{B}_i$ è uguale alla forza $\mathfrak{H}_a$ che agisce all'esterno della striscia, indipendente dal valore della permeabilità della striscia, mentre la forza $\mathfrak{H}_i$ che sussiste all'interno della striscia per un dato campo esterno dipende da μ. Ma questa conclusione non è valida, poiché la forza ponderomotrice considerata non è la sola ad agire sulla nostra striscia materiale. Il campo esterno $\mathfrak{H}_a$ induce infatti sulla faccia superiore e sulla faccia inferiore della striscia materiale strati magnetici con la densità[5]: $\mathfrak{H}_a(1-1/\mu)$, e precisamente sulla faccia superiore uno strato negativo, sulla faccia inferiore uno positivo. Su ciascuno di questi strati agisce una forza generata dalla corrente che scorre nella striscia, con l'intensità $\mathfrak{i}/2b$ per unità di lunghezza della striscia[6], la forza magnetica della quale è diretta in senso opposto sulla faccia superiore e sulla faccia inferiore. Le forze ponderomotrici così risultanti si sommano, cosicché otteniamo la forza ponderomotrice: $(1-1/\mu)\mathfrak{H}_a\mathfrak{i}$. Pare che di questa forza finora non si sia tenuto conto.

La forza esercitata complessivamente su una lunghezza unitaria della nostra striscia è uguale alla somma di quella or ora calcolata e della forza R che agisce sull'elemento di volume della striscia a causa del passaggio della corrente in un campo magnetico. Poiché la forza ponderomotrice complessiva che agisce sull'unità di lunghezza è secondo l'esperienza $\mathfrak{i}\mathfrak{H}_a$, vale l'equazione:

$$(1-1/\mu)\mathfrak{i}\mathfrak{H}_a + R = \mathfrak{i}\mathfrak{H}_a$$

ovvero

$$R = \mathfrak{i}\mathfrak{H}_a/\mu = \mathfrak{i}\mathfrak{H}_i \ .$$

Si vede quindi che per il calcolo della forza ponderomotrice R che agisce sull'elemento di volume percorso da corrente non è deter-

---

[5]*La densità è infatti uguale a:* $\mathfrak{D}_i = \mathfrak{B}_i - \mathfrak{H}_i = \mathfrak{H}_a(1-1/\mu)$.

[6]*In conformità con i risultati del paragrafo precedente al posto di queste forze che agiscono sugli strati si dovrebbero a rigore introdurre forze di volume, ma ciò è tuttavia senza importanza.*

minante l'induzione $\mathfrak{B}_i$ ma l'intensità di campo $\mathfrak{H}_i$.

Per allontanare ogni dubbio tratteremo ora un esempio, dal quale si vede che il principio dell'uguaglianza dell'azione e della reazione richiede l'ipotesi da noi scelta.

Immaginiamoci un conduttore cilindrico circondato dallo spazio vuoto e percorso dalla corrente $\mathfrak{s}$, che si estende all'infinito lungo entrambi i versi dell'asse *X* di un sistema di coordinate. Le costanti materiali del conduttore, come pure i vettori di campo che compaiono nel seguito, siano indipendenti da *x*, ma funzioni di *y* e *z*. Il conduttore sia un magnete permanente e possieda una magnetizzazione obliqua rispetto all'asse *X*. Supponiamo che sul conduttore non agisca un campo esterno, che quindi la forza magnetica $\mathfrak{H}$ si annulli a grande distanza dal conduttore.

E' chiaro che sul conduttore come un tutto non agisce alcuna forza ponderomotrice, infatti a quest'azione non sarebbe opponibile alcuna reazione. Mostreremo che scegliendo la nostra ipotesi quella forza di fatto si annulla. La forza complessiva che agisce sull'unità di lunghezza del nostro conduttore nella direzione dell'asse *Z* si può rappresentare secondo le equazioni (7) e (9) nella forma:

$$R = \int\left(\mathfrak{D}_y \frac{\partial \mathfrak{H}_z}{\partial y} + \mathfrak{D}_z \frac{\partial \mathfrak{H}_z}{\partial z}\right) df + \int \frac{1}{c}\, \mathfrak{s}_x \mathfrak{h}_y df\ , \tag{10}$$

dove *df* indica un elemento di superficie del piano *YZ*. Assumiamo che tutte le quantità che intervengono siano continue alla superficie del conduttore. Trattiamo in primo luogo il primo integrale dell'equazione (10). Si ha:

$$\mathfrak{D}_y \frac{\partial \mathfrak{H}_z}{\partial y} + \mathfrak{D}_z \frac{\partial \mathfrak{H}_z}{\partial z} = \frac{\partial \mathfrak{D}_y \mathfrak{H}_z}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{D}_z \mathfrak{H}_z}{\partial z} - \mathfrak{H}_z\left(\frac{\partial \mathfrak{D}_y}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{D}_z}{\partial z}\right)\ .$$

Se si sostituisce il secondo membro di questa equazione nel nostro integrale, per integrazione sul piano *YZ* si annullano i primi due termini, poiché le forze si annullano all'infinito. Tenendo conto di

$$\mathrm{div}\mathfrak{B} = 0$$

il terzo termine si può trasformare in modo tale che il nostro integrale assume la forma:

$$\int \mathfrak{H}_z \left(\frac{\partial \mathfrak{H}_y}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{H}_z}{\partial z} \right) df \ .$$

Ora è:

$$\mathfrak{H}_z \left(\frac{\partial \mathfrak{H}_y}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{H}_z}{\partial z} \right) = \frac{\partial \mathfrak{H}_y \mathfrak{H}_z}{\partial y} + \frac{1}{2} \frac{\partial \mathfrak{H}_z^2}{\partial z} - \mathfrak{H}_y \frac{\partial \mathfrak{H}_z}{\partial y} \ .$$

Ma per integrazione i due termini

$$\frac{\partial \mathfrak{H}_y \mathfrak{H}_z}{\partial y} + \frac{1}{2} \frac{\partial \mathfrak{H}_z^2}{\partial z}$$

si annullano. Il termine $-\mathfrak{H}_y \partial \mathfrak{H}_z / \partial y$ si può trasformare mediante le equazioni di Maxwell in:

$$- \frac{1}{c} \mathfrak{H}_y \left\{ \mathfrak{s}_x + \frac{\partial \mathfrak{H}_y}{\partial z} \right\} ,$$

di modo che l'equazione (10) la possiamo infine scrivere:

$$R = - \frac{1}{c} \int \mathfrak{H}_y \left\{ \mathfrak{s}_x + \frac{\partial \mathfrak{H}_y}{\partial z} \right\} df + \frac{1}{c} \int \mathfrak{s}_x \mathfrak{H}_y df$$

$$= - \frac{1}{c} \int \mathfrak{H}_y \frac{\partial \mathfrak{H}_y}{\partial z} \, df = - \frac{1}{2c} \int \frac{\partial \mathfrak{H}_y^2}{\partial z} \, df \ .$$

L'ultimo integrale sarà zero poiché all'infinito le forze si annullano. -

Dopo aver così determinato la forza che agisce su materia percorsa da una corrente di conduzione, otteniamo la forza che agisce su un corpo attraversato da una corrente di polarizzazione osservando che corrente di polarizzazione e corrente di conduzione dal punto di vista della teoria degli elettroni devono essere del tutto equivalenti rispetto all'azione elettrodinamica.

Tenendo conto della dualità dei fenomeni magnetici ed elettrici si ottiene inoltre la forza che sarà esercitata su un corpo percorso da una corrente di polarizzazione magnetica in un campo elettrico. Come espressione complessiva per quelle forze che dipendono dalla velocità delle particelle elementari otteniamo in questo modo le equazioni:

$$\mathfrak{F}_a = \frac{1}{c} [\mathfrak{s}\mathfrak{H}] + \frac{1}{c} \left[\frac{\partial \mathfrak{P}}{\partial t} \mathfrak{H} \right] + \frac{1}{c} \left[\mathfrak{E} \frac{\partial \mathfrak{D}}{\partial t} \right] \ . \qquad (11)$$

§3. Uguaglianza d’azione e reazione.

Se si sommano le equazioni (6), (7) e (11) si ottiene l’espressione totale per la componente *X* della forza ponderomotrice per volume unitario che agisce sulla materia, nella forma:

$$\mathfrak{F}_x = \mathfrak{E}_x \operatorname{div}\mathfrak{D} + \mathfrak{p}_x \frac{\partial \mathfrak{E}_x}{\partial x} + \mathfrak{p}_y \frac{\partial \mathfrak{E}_x}{\partial y} + \mathfrak{p}_z \frac{\partial \mathfrak{E}_x}{\partial z} + \mathfrak{Q}_x \frac{\partial \mathfrak{H}_x}{\partial x} + \mathfrak{Q}_y \frac{\partial \mathfrak{H}_x}{\partial y} + \mathfrak{Q}_z \frac{\partial \mathfrak{H}_x}{\partial z}$$

$$+ \frac{1}{c} [\mathfrak{s}\mathfrak{H}]_x + \frac{1}{c} \left[\frac{\partial \mathfrak{p}}{\partial t} \mathfrak{H} \right]_x + \frac{1}{c} \left[\mathfrak{E} \frac{\partial \mathfrak{Q}}{\partial t} \right]_x .$$

L’equazione si può anche scrivere:

$$\mathfrak{F}_x = \mathfrak{E}_x \operatorname{div}\mathfrak{E} + \frac{1}{c} [\mathfrak{s}\mathfrak{H}]_x + \frac{1}{c} \left[\frac{\partial \mathfrak{D}}{\partial t} \mathfrak{H} \right]_x + \mathfrak{H}_x \operatorname{div}\mathfrak{H} + \frac{1}{c} \left[\mathfrak{E} \frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial t} \right]_x$$

$$+ \frac{\partial(\mathfrak{p}_x \mathfrak{E}_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\mathfrak{p}_y \mathfrak{E}_x)}{\partial y} + \frac{\partial(\mathfrak{p}_z \mathfrak{E}_x)}{\partial z}$$

$$+ \frac{\partial(\mathfrak{Q}_x \mathfrak{H}_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\mathfrak{Q}_y \mathfrak{H}_x)}{\partial y} + \frac{\partial(\mathfrak{Q}_z \mathfrak{H}_x)}{\partial z} - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} [\mathfrak{E}\mathfrak{H}]_x .$$

Se si sostituiscono

$$\frac{1}{c} \left(\mathfrak{s} + \frac{\partial \mathfrak{D}}{\partial t} \right) \quad \text{e} \quad \frac{1}{c} \frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial t}$$

per mezzo delle equazioni di Maxwell con rot$\mathfrak{H}$ e con rot$\mathfrak{E}$, si ottiene con una trasformazi2ne semplice:

$$\mathfrak{F}_x = \frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z} - (1/c^2) \frac{\partial \mathfrak{S}_x}{\partial t} , \qquad (12)$$

dove si è posto[7]

---

[7]*Il signor consigliere Wien ha avuto la bontà di renderci noto che già H.A. Lorentz ha dato la forza ponderomotrice per corpi non magnetizzabili in questa forma.* (Enzykl. d. mathem. W. **5.** p. 247).

$$X_x = -\frac{1}{2}(\mathfrak{E}^2 + \mathfrak{H}^2) + \mathfrak{E}_x\mathfrak{D}_x + \mathfrak{H}_x\mathfrak{B}_x ,$$

$$X_y = \mathfrak{E}_x\mathfrak{D}_y + \mathfrak{H}_x\mathfrak{B}_y ,$$

$$X_z = \mathfrak{E}_x\mathfrak{D}_z + \mathfrak{H}_x\mathfrak{B}_z ,$$

$$\mathfrak{G}_x = c[\mathfrak{E}\mathfrak{H}]_x . \qquad (13)$$

Equazioni corrispondenti valgono per le altre due componenti della forza ponderomotrice.

Se si integra la (12) sullo spazio infinito, nel caso che i vettori di campo si annullino all'infinito, si ottiene l'equazione:

$$\int \mathfrak{F}_x d\tau = -(1/c^2)\int d\tau \frac{d\mathfrak{G}_x}{dt} . \qquad (14)$$

Essa afferma che le nostre forze ponderomotrici, se si introduce la quantità di moto elettromagnetica, soddisfano la legge dell'uguaglianza dell'azione e della reazione.

Berna, 7 maggio 1908.

(Ricevuto il 13 maggio 1908)