**La propagazione della luce secondo la teoria della relatività**[1]

W. Gordon

Nella prima parte di questo lavoro si mostra che l'influenza della materia sui processi elettromagnetici è equivalente all'influenza di un campo gravitazionale con il potenziale $ku_\mu u_\nu$ ($k$ coefficiente di trasporto di Fresnel, $u_\mu$ tetravelocità). Con questa riduzione al vuoto si ottiene immediatamente il principio di minima azione e da qui in particolare il tensore dell'energia del campo elettromagnetico in corpi ponderabili. Si arriva così al tensore proposto da M. Abraham. Nella seconda parte si derivano le equazioni d'onda valide per tensori lineari arbitrari. Accanto alle espressioni che s'ottengono dalla teoria speciale per trasformazione (che secondo il principio di equivalenza varrebbero nei campi di gravitazione "artificiali" generati per trasformazione) intervengono inoltre dei termini che contengono il tensore di curvatura non contratto e contratto una volta. Malgrado ciò queste espressioni seguono le regole di calcolo delle quali si fa uso nella teoria speciale. Come si mostra nella terza parte, il campo, il tetrapotenziale e l'esapotenziale (tensore di Hertz) soddisfano quindi l'equazione delle onde generalizzata. Il vantaggio dell'esapotenziale consiste nel fatto che non si deve soddisfare oltre all'equazione d'onda nessun'altra condizione aggiuntiva. Esso sta rispetto all'esapolarizzazione esattamente nella stessa relazione del tetrapotenziale con la tetracorrente. Nella quarta parte si preciserà sotto quali ipotesi si può parlare di raggi di luce nel senso dell'ottica geometrica. Le linee d'universo dei raggi sono le linee geodetiche nulle in un campo di gravitazione che oltre a quello reale contiene quello che corrisponde alla tetravelocità della materia.

## 1.

*Trasformazione delle equazioni elettromagnetiche.* Le equazioni del campo elettromagnetico che costituiscono la base per lo studio della propagazione della luce, si scriveranno come al solito:

$$\frac{\partial F_{ik}}{\partial x_l} + \frac{\partial F_{kl}}{\partial x_i} + \frac{\partial F_{li}}{\partial x_k} = 0, \tag{1}$$

$$\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial x_k}(\sqrt{g}H^{ik}) = s^i, \tag{2}$$

$$H_i = \epsilon F_i, \tag{3}$$

$$u_i F_{kl} + u_k F_{li} + u_l F_{ik} = \mu\left(u_i H_{kl} + u_k H_{li} + u_l H_{ik}\right), \tag{4}$$

$$s_i + u_i\left(s^k u_k\right) = \sigma F_i, \tag{5}$$

[1] Zur Lichtfortpflanzung nach der Relativitätstheorie, Annalen der Physik **72**, 421-456 (1923).

dove per brevità si è posto

$$F_i = F_{ik}u^k,\ H_i = H_{ik}u^k. \tag{6}$$

$u^i$ è la tetravelocità della materia

$$u^i = \frac{dx^i}{\sqrt{-ds^2}} \tag{7}$$

sicché

$$g_{ik}u^i u^k = u^i u_i = -1 \tag{8}$$

(l'elemento di linea ha una dimensione negativa e tre positive). Il significato delle restanti quantità è noto. Oltre a queste equazioni figurano le equazioni gravitazionali di Einstein disomogenee, nelle quali va introdotta la somma dei tensori dell'energia elastico ed elettromagnetico. Daremo nel seguito quest'ultimo.

Le equazioni (3) e (4) rappresentano insieme sei equazioni mutuamente indipendenti; esse esprimono che nel sistema a riposo (e per valori normali di $g_{ik}$) $\mathfrak{D} = \epsilon\mathfrak{E}$, $\mathfrak{B} = \mu\mathfrak{H}$. Risolviamole rispetto ad $H_{ik}$. Tenendo conto delle (3), (6) e (8), la moltiplicazione della (4) per $u^i$ dà

$$\begin{aligned}-F_{kl} + u_k F_l - u_l F_k &= \mu\left(-H_{kl} + u_k H_l - u_l H_k\right)\\ &= \mu\left\{-H_{kl} + \epsilon\left(u_k F_l - u_l F_k\right)\right\}\end{aligned}$$

ovvero

$$\mu H_{ik} = F_{ik} + (\epsilon\mu - 1)\left(u_i F_k - u_k F_i\right). \tag{9}$$

Dalla (9) si ritrovano a ritroso la (3) e la (4). Possiamo quindi sostituire la (3) e la (4) con la (9).

Nelle equazioni differenziali (1) e (2) non compare la tetravelocità. Le scriveremo in modo tale che anche il campo gravitazionale sparisca dalle equazioni aggiuntive. Sostituiamo le (1) e (2) con

$$\frac{\partial F_{ik}}{\partial x_l} + \frac{\partial F_{kl}}{\partial x_i} + \frac{\partial F_{li}}{\partial x_k} = 0, \tag{1'}$$

$$\frac{\partial \mathfrak{H}^{ik}}{\partial x^k} = \mathfrak{s}^i \tag{2'}$$

ed eseguiamo anche nelle equazioni restanti la sostituzione

$$\mathfrak{H}^{ik} = \sqrt{g}H^{ik},\ \mathfrak{s}^i = \sqrt{g}s^i. \tag{10}$$

Quindi il campo elettromagnetico è caratterizzato da

$$F_{ik},\ \mathfrak{H}^{ik}, \tag{11}$$

$F_{ik}$ un tensore lineare, $\mathfrak{H}^{ik}$ una densità tensoriale lineare[2]; il campo gravitazionale da

$$g_{ik}; \tag{12}$$

lo stato elettrico della materia da

$$\epsilon,\ \mu,\ \sigma,\ \mathfrak{s}^i, \tag{13}$$

$\epsilon$, $\mu$, $\sigma$ scalari, $\mathfrak{s}^i$ una densità vettoriale; lo stato meccanico della materia (mediante costanti meccaniche) e mediante le funzioni

$$x^i = x^i\left(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \tau\right), \tag{14}$$

che rappresentano le linee d'universo dei punti materiali (distinte tra loro mediante $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, mentre $\tau$ dà la posizione lungo la linea d'universo. Nelle equazioni elettriche e meccaniche compaiono solo le derivate di queste funzioni. La tetravelocità è una combinazione degli elementi determinanti (12) e (14)

$$u^i = \frac{\frac{\partial x^i}{\partial \tau}}{\sqrt{-g_{\mu\nu}\frac{\partial x^\mu}{\partial \tau}\frac{\partial x^\nu}{\partial \tau}}}. \tag{15}$$

Per la trasformazione da eseguirsi e per gli sviluppi ad essa associati è decisivo il fatto che nell'equazione "dielettrica" (9), determinante per la propagazione della luce in mezzi trasparenti, le quantità (12) e (15) compaiano solo nella combinazione

$$\gamma^{ik} = g^{ik} - (\epsilon\mu - 1)\, u^i u^k. \tag{16}$$

Per mostrarlo, scriviamo la (9) in forma controvariante

$$\mu H^{ik} = F^{ik} + (\epsilon\mu - 1)\left(u^i F^k - u^k F^i\right). \tag{9'}$$

Per la (10) il primo membro è $\mu\mathfrak{H}^{ik}/\sqrt{g}$; il primo termine a secondo membro $g^{ir}g^{ks}F_{rs}$. Per la (6) vale inoltre

$$F^k = g^{ks}F_{sr}u^r = -g^{ks}F_{rs}u^r, F^i = g^{ir}F_{rs}u^s,$$

sicché per il secondo membro della (9') otteniamo

$$F_{rs}\left\{g^{ir}g^{ks} - (\epsilon\mu - 1)\left(u^i u^r g^{ks} + u^k u^s g^{ir}\right)\right\}.$$

Se ora introduciamo nelle parentesi graffe anche il termine $(\epsilon\mu - 1)^2 u^i u^k u^r u^s$, che s'annulla per l'antisimmetria di $F_{rs}$, da questa parentesi s'avrà

$$\left(g^{ir} - (\epsilon\mu - 1)\, u^i u^r\right)\left(g^{ks} - (\epsilon\mu - 1)\, u^k u^s\right)$$

o per la (16) $\gamma^{ir}\gamma^{ks}$. Possiamo infine portare la (9') nella forma

$$\mu\mathfrak{H}^{ik} = \sqrt{g}\gamma^{ir}\gamma^{ks}F_{rs}. \tag{17}$$

[2]Secondo la terminologia di H. Weyl, Raum, Zeit, Materie, $4^a$ ed., pp. 51 e 98.

Per il seguito introduciamo le quantità $\gamma_{ik}$ reciproche di $\gamma^{ik}$, che si determinano univocamente imponendo che sia $\gamma^{ir}\gamma_{kr} = \delta^i_k$:

$$\gamma_{ik} = g_{ik} + \left(1 - \frac{1}{\epsilon\mu}\right) u_i u_k. \tag{18}$$

In analogia con $g$, il negativo del determinante di $\gamma_{ik}$ sarà indicato da $\gamma$. Il rapporto $\gamma/g$ è un invariante (numeratore e denominatore vengono moltiplicati alla trasformazione per il quadrato del determinante funzionale). Possiamo quindi basarci sul caso $u_1 = u_2 = u_3 = 0$ e ottenere

$$-\gamma = \begin{vmatrix} g_{11} & \cdot & \cdot & g_{14} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ g_{41} & \cdot & \cdot & g_{44} + \left(1 - \frac{1}{\epsilon\mu}\right) u_4 u_4 \end{vmatrix} = -g - \left(1 - \frac{1}{\epsilon\mu}\right) g g^{44} u_4 u_4;$$

infatti $-gg^{44}$ è il minore relativo all'elemento (4,4) del determinante. Per la (8) è $g^{44}u_4u_4 = -1$; allora

$$\gamma = \frac{g}{\epsilon\mu}, \tag{19}$$

quindi la (17) assume la forma

$$\mathfrak{H}^{ik} = \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \sqrt{\gamma} \gamma^{ir} \gamma^{ks} F_{rs}, \tag{20}$$

e perciò la nostra asserzione è dimostrata.

Saremo quindi condotti ad introdurre al posto dell'elemento di linea $ds$ con i coefficienti $g_{ik}$ un nuovo elemento di linea $d\sigma$ con i coefficienti $\gamma_{ik}$ dati dalla (18). Renderemo riconoscibili gli indici relativi a questo nuovo elemento di linea ponendoli entro parentesi (solo al posto di $g^{(i)(k)}$ ovvero di $g_{(i)(k)}$ scriviamo come prima $\gamma^{ik}$ ovvero $\gamma_{ik}$). Gli elementi determinanti (11), (13), (14) restano naturalmente immodificati da questa trasformazione, e si ha

$$F_{(i)(k)} = F_{ik},\ \mathfrak{H}^{(i)(k)} = \mathfrak{H}^{ik},\ \mathfrak{s}^{(i)} = \mathfrak{s}^i. \tag{21}$$

Con queste quantità potremo quindi anche tralasciare le parentesi per gli indici. I tensori $H^{(i)(k)}$, $s^{(i)}$, che relativamente alla (18) corrispondono alle densità $\mathfrak{H}^{(i)(k)}$, $\mathfrak{s}^{(i)}$ secondo il modello (10), per la (19) saranno:

$$H^{(i)(k)} = \frac{\mathfrak{H}^{(i)(k)}}{\sqrt{\gamma}} = \frac{\sqrt{\epsilon\mu}\mathfrak{H}^{ik}}{\sqrt{g}} = \sqrt{\epsilon\mu} H^{ik},\ s^{(i)} = \sqrt{\epsilon\mu} s^i. \tag{22}$$

L'espressione $\gamma^{ir}\gamma^{ks}F_{rs}$ che compare nella (20), con le nostre definizioni si può evidentemente scrivere $F^{(i)(k)}$, e $\mathfrak{H}^{ik}/\sqrt{\gamma}$ è $H^{(i)(k)}$. La (20) appare allora nella forma simmetrica

$$\sqrt{\epsilon} F^{(i)(k)} = \sqrt{\mu} H^{(i)(k)}, \tag{23}$$

ovvero, quando si passa alle componenti covarianti relativamente alla metrica $\gamma_{ik}$

$$\sqrt{\epsilon}F_{(i)(k)} = \sqrt{\mu}H_{(i)(k)}. \tag{23'}$$

Si sostituisca nella (23) $H^{(i)(k)}$ secondo la (22) con $\sqrt{\epsilon\mu}H^{ik}$; si ottiene l'equazione $F^{(i)(k)} = \mu H^{ik}$ ed il confronto con la (9') mostra che per $F^{(i)(k)}$ vale la formula di trasformazione

$$F^{(i)(k)} = F^{ik} + (\epsilon\mu - 1)\left(u^i F^k - u^k F^i\right). \tag{24}$$

La (3) e la (4) vanno in se stesse quando si sostituiscono $\epsilon$ e $\mu$ con i loro valori reciproci, e contemporaneamente si scambiano $F$ ed $H$. Con questi scambi l'equazione (9) equivalente alle (3) e (4) diverrà

$$\frac{F_{ik}}{\mu} = H_{ik} + \left(\frac{1}{\epsilon\mu} - 1\right)(u_i H_k - u_k H_i).$$

Se la si confronta con la (23') e si osserva che per la (21) $F_{(i)(k)} = F_{ik}$, s'ottiene per $H_{(i)(k)}$ la formula di trasformazione

$$H_{(i)(k)} = \sqrt{\epsilon\mu}\left[H_{ik} - \left(1 - \frac{1}{\epsilon\mu}\right)(u_i H_k - u_k H_i)\right]. \tag{25}$$

Con la (18) troviamo in generale per l'elemento di linea $d\sigma$

$$d\sigma^2 = g_{ik}dx^i dx^k + \left(1 - \frac{1}{\epsilon\mu}\right)\left(u_i dx^i\right)^2 = ds^2 + \left(1 - \frac{1}{\epsilon\mu}\right)\left(u_i dx^i\right)^2. \tag{26}$$

Per la direzione d'universo della materia si ha $dx^i = u^i\sqrt{-ds^2}$ e quindi per la (8) $d\sigma^2 = ds^2/(\epsilon\mu)$. Si ha quindi

$$u^{(i)} = \frac{dx^i}{\sqrt{-d\sigma^2}} = u^i\sqrt{\epsilon\mu}. \tag{27}$$

Le componenti covarianti $u_{(i)} = \gamma_{ir}u^{(r)}$, se si tien conto di nuovo della (8), saranno

$$u_{(i)} = \frac{u_i}{\sqrt{\epsilon\mu}}. \tag{28}$$

Per le $(21_1)$ e (27) sarà

$$F_{(i)} = F_{(i)(k)}u^{(k)} = F_{ik}u^k\sqrt{\epsilon\mu} = F_i\sqrt{\epsilon\mu} \tag{29}$$

e per la (16)

$$F^{(i)} = \gamma^{ir}F_{(r)} = \left(g^{ir} - (\epsilon\mu - 1)\,u^i u^r\right)F_r\sqrt{\epsilon\mu} = F^i\sqrt{\epsilon\mu}, \tag{30}$$

poiché è $F_r u^r = 0$. In modo del tutto analogo si riconosce che

$$H^{(i)} = H^i, H_{(i)} = H_i. \tag{31}$$

Siamo ora nella posizione di poter riscrivere anche la legge di Ohm (5) col nuovo elemento di linea. La componente controvariante del primo membro della (5) è per le ($22_2$), (27) e (28)

$$\frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}}\left(s^{(i)}+u^{(i)}(u_{(k)}s^{(k)})\right),$$

la forma controvariante del secondo membro, secondo la (30), $\sigma F^{(i)}/\sqrt{\epsilon\mu}$. Quindi

$$s^{(i)}+u^{(i)}\left(u_{(k)}s^{(k)}\right)=\sigma F^{(i)}, \tag{32}$$

ovvero, scritta in forma covariante (relativamente a $\gamma_{ik}$)

$$s_{(i)}+u_{(i)}\left(u^{(k)}s_{(k)}\right)=\sigma F_{(i)}. \tag{32'}$$

Per la $s_{(i)}$ che qui appare si ottiene, secondo le (18) e ($22_2$)

$$s_{(i)}=\gamma_{ir}s^{(r)}=\sqrt{\epsilon\mu}\left[s_i+\left(1-\frac{1}{\epsilon\mu}\right)u_i\left(u^r s_r\right)\right]. \tag{33}$$

Riassumendo possiamo quindi formulare la regola seguente:

*Se si trasforma il campo gravitazionale da $g_{ik}$ a $\gamma_{ik}$* mediante la formula di trasformazione

$$\gamma_{ik}=g_{ik}+\left(1-\frac{1}{\epsilon\mu}\right)u_i u_k,$$

*cioè se si costruiscono relativamente a questa metrica le componenti delle quantità $F_{ik}$, $\mathfrak{H}^{ik}$, $\mathfrak{s}^i$ che stanno a base delle equazioni differenziali del campo, allora le equazioni aggiuntive prendono la forma*

$$\sqrt{\epsilon}F_{(i)(k)}=\sqrt{\mu}H_{(i)(k)},\ s_{(i)}+u_{(i)}\left(u^{(k)}s_{(k)}\right)=\sigma F_{(i)},\ u^{(i)}=\frac{dx^i}{\sqrt{-d\sigma^2}}.$$

*La tetravelocità sparisce dall'equazione dielettrica, mentre la legge di Ohm mantiene la sua forma.*

*Per mezzi non conduttori ($\sigma=0$), non carichi ($u^k s_k=0$), omogenei ($\epsilon$, $\mu$ costanti), le equazioni differenziali per il campo $F$ sono identiche a quelle del vuoto puro in presenza del campo di gravitazione $\gamma_{ik}$.*

In quest'ultimo caso possiamo attribuire alla nostra regola le due interpretazioni fisiche seguenti:

1. I fenomeni elettromagnetici nei corpi ponderabili sono gli stessi che nel vuoto, nel quale vi sia oltre al campo di gravitazione presente anche un campo aggiuntivo di potenziale $\left[1-\frac{1}{\epsilon\mu}\right]u_i u_k$. Nella teoria speciale, restringendosi a quantità del prim'ordine, risulta

$$\gamma_{\alpha\beta}=1,\ \gamma_{\alpha 4}=-\left(1-\frac{1}{\epsilon\mu}\right)\frac{v_\alpha}{c},\ \gamma_{44}=-\frac{1}{\epsilon\mu},$$

$$\left(\alpha,\beta=1,2,3;\ v_\alpha=\frac{dx_\alpha}{dt}\right)$$

e l'elemento di linea $d\sigma$ sarà dato da

$$d\sigma^2 = dx_\alpha dx^\alpha - 2\left(1 - \frac{1}{\epsilon\mu}\right) v_\alpha dx^\alpha dt - \frac{c^2}{\epsilon\mu} dt^2. \tag{34}$$

La velocità della luce (come mostreremo nella quarta parte) sarà determinata in una direzione assegnata da $d\sigma^2 = 0$. Se le velocità della luce e del corpo sono parallele, dalla (34) risulta la nota formula

$$\frac{dx}{dt} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon\mu}} + \left(1 - \frac{1}{\epsilon\mu}\right) v, \tag{35}$$

ovvero con la stessa precisione

$$\frac{dx}{dt} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon\mu} - (\epsilon\mu - 1)\,\frac{v}{c}}. \tag{35'}$$

La (35') si può interpretare nel senso che la luce si propaga come in un mezzo in quiete con indice di rifrazione

$$\sqrt{\epsilon\mu} - (\epsilon\mu - 1)\,\frac{v}{c}.$$

La nostra interpretazione del teorema di trasformazione è una generalizzazione di questa interpretazione. Ci troviamo per così dire di fronte ad una "trasformazione alla quiete".

Nella fisica prerelativistica il termine $\left[1 - \frac{1}{\epsilon\mu}\right] v$ nella (35) si sarebbe indicato come "trasporto dell'etere". Possiamo dare alla nostra regola un significato analogo.

2. Scomponiamo lo spostamento d'universo $PQ$ nella componente di trasporto $PP'$ parallela alla tetravelocità

$$-\left(1 - \frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}}\right) u^i u_r dx^r \tag{36}$$

e nella componente d'etere $P'Q$

$$d\xi^i = dx^i + \left(1 - \frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}}\right) u^i u_r dx^r.$$

Per la distanza $P'Q$ secondo la *metrica esistente di fatto* si ha

$$g_{ik} d\xi^i d\xi^k = g_{ik} dx^i dx^k + \left(1 - \frac{1}{\epsilon\mu}\right) (u_r dx^r)^2,$$

che per la (26) è uguale alla distanza $PQ$ secondo la metrica $\gamma_{ik}$. Se $PQ$ è un raggio di luce nel corpo, allora è $d\sigma^2 = 0$, dalla quale discende $g_{ik} d\xi^i d\xi^k = 0$, cioè $P'Q$ è un raggio di luce nel vuoto (rispetto al campo di gravitazione effettivamente presente $g_{ik}$). I due si distinguono per il termine di trasporto (36). Sia $P_1$ la proiezione ortogonale di $Q$ sulla direzione di $u$, di modo che $PP' = \left[1 - 1/\sqrt{\epsilon\mu}\right] PP_1$. L'analogo della teoria di Hertz sarebbe la scomposizione $PP_1$, $P_1Q$, che corrisponderebbe ad una velocità della luce nel vuoto infinitamente grande nel sistema a riposo ($P_1$ e $Q$

in esso sono simultanei), in totale accordo col principio di relatività galileiano, che sta alla base di questa teoria. Si potrebbe quindi designare il fattore $\left[1 - 1/\sqrt{\epsilon\mu}\right]$ come coefficiente di trasporto "relativistico"[3].

Dal paragone con le equazioni di campo del vuoto possiamo derivare direttamente il *principio di minima azione* e quindi secondo i risultati della teoria della relatività generale il *tensore dell'energia*. Prescindiamo dalla legge di Ohm, e assumiamo che $\mathfrak{s}^i$ sia una proprietà della materia come $\epsilon$ e $\mu$ [vedi (13)]. Allora rimane solo l'equazione aggiuntiva (20), che con le definizioni al riguardo possiamo anche scrivere

$$\mathfrak{H}^{ik} = \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}}\sqrt{\gamma}F^{(i)(k)}. \tag{20'}$$

La (20) e la (20') differiscono dalla condizione aggiuntiva che interviene con le equazioni differenziali (1') e (2') nel vuoto in presenza d'un campo gravitazionale $\gamma_{ik}$ soltanto per il fatto che al posto di $\sqrt{\gamma}$ vi è il fattore $\sqrt{\epsilon/\mu}\sqrt{\gamma}$. Perciò, con questa sostituzione, dalla densità d'azione elettrica $L^{(e)}$ del principio d'azione per il vuoto (in presenza del campo gravitazionale $\gamma_{ik}$)

$$\delta_\varphi W^{(e)} = \delta_\varphi \int L dS = 0, \ \left(dS = dx^1 dx^2 dx^3 dx^4\right), \tag{37}$$

$$L^{(e)} = \frac{1}{4}\sqrt{\gamma}F_{rs}F^{(r)(s)} - \mathfrak{s}^i\varphi_i, \tag{38}$$

dove il tetrapotenziale $\varphi_i$ è in relazione col campo $F$ mediante l'equazione

$$F_{ik} = \varphi_{k,i} - \varphi_{i,k}, \tag{39}$$

otteniamo senz'altro la densità d'azione elettrica in presenza di materia

$$L^{(e)} = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}}\sqrt{\gamma}F_{rs}F^{(r)(s)} - \mathfrak{s}^i\varphi_i, \tag{40}$$

ovvero per la (20')

$$L^{(e)} = \frac{1}{4}F_{rs}\mathfrak{H}^{rs} - \mathfrak{s}^i\varphi_i; \tag{40'}$$

si deve variare solo il tetrapotenziale (cosa che abbiamo indicato con $\delta_\varphi$). Al contorno della regione sulla quale l'integrale della (37) va esteso, queste variazioni devono annullarsi[4].

---

[3]La prima interpretazione, poiché già subito confronta la situazione nel corpo in moto con quella per la quiete, è evidentemente quella che si attaglia allo spirito della teoria della relatività. Infatti invece di attribuire all'etere una proprietà della materia, cioè una velocità, si attibuisce piuttosto alla materia un campo di gravitazione, cioè una proprietà dell'etere.

[4]Il principio (37), (40') è stato proposto da H. Hensche, Diss. Berlin 1912; Ann. d. Phys. **42**, 887, 1913.

Per ottenere le equazioni per la materia dobbiamo introdurre oltre all'azione elettrica $W^{(e)}$ anche quella meccanica $W^{(m)}$. Nell'equazione variazionale

$$\delta_m W^{(e)} + \delta_m W^{(m)} = 0 \tag{41}$$

vanno variate solo le funzioni (14). (Ciò verrà indicato con $\delta_m$, e al contorno dev'essere $\delta_m = 0$ ). Perciò la tetravelocità (15) subisce la variazione locale

$$\delta_m u^i = \frac{\partial \delta x^i}{\partial x^r} u^r - \frac{\partial u^i}{\partial x^r} \delta x^r + u^i u_\mu \frac{\partial \delta x^\mu}{\partial x^r} u^r + \frac{1}{2} u^i \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^r} u^\mu u^\nu \delta x^r. \tag{42}$$

(Questa quantità è naturalmente un vettore. Per far apparire ciò esplicitamente basta sostituire le derivate ordinarie con le derivate covarianti spiegate nella seconda parte[5]). Dallo spostamento della materia caratterizzato dalle funzioni $\delta x^i$ saranno trasportati anche i corpuscoli elettrici in essa contenuti. Le variazioni di $\epsilon$ e $\mu$ (elettroni legati) e di $\mathfrak{s}^i$ (elettroni liberi) indotte dalla variazione $\delta x^i$ si ottengono nel modo più semplice[6] dal carattere di trasformazione di queste quantità ($\epsilon$, $\mu$ scalari, $\mathfrak{s}^i$ densità vettoriale controvariante)[7]:

$$\delta_m \epsilon = -\frac{\partial \epsilon}{\partial x^r} \delta x^r, \ \delta_m \mu = -\frac{\partial \mu}{\partial x^r} \delta x^r. \tag{43}$$

$$\delta_m \mathfrak{s}^i = \mathfrak{s}^r \frac{\partial \delta x^i}{\partial x^r} - \frac{\partial}{\partial x^r} \left( \mathfrak{s}^i \delta x^r \right) = \frac{\partial}{\partial x^r} \left( \delta x^i \mathfrak{s}^r - \delta x^r \mathfrak{s}^i \right) - \frac{\partial \mathfrak{s}^r}{\partial x^r} \delta x^i. \tag{44}$$

Dalla seconda forma di $\delta_m \mathfrak{s}^i$ si vede che $\delta_m \mathfrak{s}^i$ è una densità vettoriale (vedi Eq. (98) e (99)). Se presupponiamo la legge di conservazione dell'elettricità $\partial \mathfrak{s}^r / \partial x^r = 0$ che risulta dalla (2'), la (44) si semplifica in

$$\delta_m \mathfrak{s}^i = \frac{\partial}{\partial x^r} \left( \delta x^i \mathfrak{s}^r - \delta x^r \mathfrak{s}^i \right). \tag{44'}$$

Il vettore $u^i$ invece non sarà trasportato dalla variazione $\delta x^i$, mentre la distanza di due punti materiali dello spaziotempo in generale cambia, poiché il campo metrico resta sul posto (vedi nota 10).

La densità d'azione $L^{(m)}$ che corrisponde a $W^{(m)}$ dipende[8] dalle derivate prime delle funzioni (14) e da $g_{ik}$.

Dalle equazioni elettriche (37) e dalle equazioni meccaniche (41) discende la legge dell'energia e dell'impulso. È noto[9] che la si dimostra senza far uso delle espressioni esplicite di $L^{(e)}$ ed $L^{(m)}$, considerando una variazione nella quale vengano trasportate tutte le quantità, anche il campo gravitazionale. Allora per l'invarianza di $W^{(e)}$ e di $W^{(m)}$ si ha identicamente

$$\delta_\varphi W^{(e)} + \delta_m W^{(e)} + \delta_g W^{(e)} = 0, \tag{45}$$

---

[5] Si ha $\delta_m u^i = u^r D_r \delta x^i - \delta x^r D_r u^i + u^i u_\mu u^r D_r \delta x^\mu$.

[6] H. Weyl, loc. cit.

[7] Prescindiamo dalla variabilità di $\epsilon$ e $\mu$ con lo stato di deformazione della materia.

[8] G. Herglotz, Ann. d. Phys. **36**, 493, 1911; G. Nordström, Versl. Amst. **25**, 836, 1916.

[9] H. Weyl, loc. cit. §28.

$$\delta_m W^{(m)} + \delta_g W^{(m)} = 0, \tag{46}$$

dove $\delta_g$ si riferisce alla variazione di $g_{ik}$. Poniamo

$$\delta_g L^{(e)} = \frac{1}{2}\mathfrak{T}_{ik}\delta g^{ik},\ \delta_g L^{(m)} = \frac{1}{2}\mathfrak{M}_{ik}\delta g^{ik}; \tag{47}$$

$\mathfrak{T}_{ik}$ ed $\mathfrak{M}_{ik}$ densità tensoriali d'energia elettrica e meccanica. In $\delta_g$ si deve sostituire al posto di $\delta g^{ik}$

$$\delta g^{ik} = g^{ir}\frac{\partial \delta x^k}{\partial x^r} + g^{kr}\frac{\partial \delta x^i}{\partial x^r} - \frac{\partial g^{ik}}{\partial x^r}\delta x^r. \tag{48}$$

(Si riconosce il carattere tensoriale di $\delta g^{ik}$ sostituendo come sopra le derivate ordinarie con le derivate covarianti). Un'integrazione per parti dà

$$\delta_g W^{(e)} = -\int \left(\frac{\partial \mathfrak{T}_i^r}{\partial x^r} + \frac{1}{2}\mathfrak{T}_{\alpha\beta}\frac{\partial g^{\alpha\beta}}{\partial x^i}\right)\delta x^i dS \tag{49}$$

ed una formula analoga (49') per $\delta_g W^{(m)}$. Dalle (45), (46), (49) e (49') discende

$$\delta_\varphi W^{(e)} + \delta_m W^{(e)} + \delta_m W^{(m)} = \int \left(\frac{\partial \mathfrak{S}_i^r}{\partial x^r} + \frac{1}{2}\mathfrak{S}_{\alpha\beta}\frac{\partial g^{\alpha\beta}}{\partial x^i}\right)\delta x^i dS, \tag{50}$$

dove $\mathfrak{S}_{ik}$ è la somma delle due densità tensoriali d'energia. Le equazioni (37) e (41) hanno quindi per conseguenza la legge dell'energia e dell'impulso

$$\frac{\partial \mathfrak{S}_i^r}{\partial x^r} + \frac{1}{2}\mathfrak{S}_{\alpha\beta}\frac{\partial g^{\alpha\beta}}{\partial x^i} = 0. \tag{60}$$

In base alla nostra regola possiamo ora derivare facilmente il tensore elettrico dell'energia che risulta dalla ($47_1$) a partire da quello per il vuoto. Nel vuoto in presenza del campo di gravitazione $\gamma_{ik}$ si ha

$$\delta_\gamma L^{(e)} = \frac{1}{2}\mathfrak{T}_{(i)(k)}\delta\gamma^{ik} \tag{61}$$

$$\mathfrak{T}_{(i)}^{(k)} = \sqrt{\gamma}(F_{ir}F^{(k)(r)} - \frac{1}{4}F_{rs}F^{(r)(s)}\delta_i^k). \tag{62}$$

Come prima, dobbiamo qui sostituire semplicemente $\sqrt{\gamma}$ con $\sqrt{\epsilon/\mu}\sqrt{\gamma}$ e otteniamo, tenendo conto ancora della (20')

$$\mathfrak{T}_{(i)}^{(k)} = F_{ir}\mathfrak{H}^{kr} - \frac{1}{4}F_{rs}\mathfrak{H}^{rs}\delta_i{}^k. \tag{63}$$

Per ottenere la relazione tra $\mathfrak{T}_i{}^k$ e $\mathfrak{T}_{(i)}^{(k)}$, dobbiamo semplicemente esprimere ancora $\delta\gamma^{ik}$ mediante $\delta g^{ik}$. Per la (15) risulta immediatamente[10]

$$\delta_g u^i = \frac{1}{2}u^i u^\mu u^\nu \delta g_{\mu\nu} = -\frac{1}{2}u^i u_\mu u_\nu \delta g^{\mu\nu}, \tag{64}$$

[10]Si sostituisca al posto di $\delta g^{ik}$ l'espressione (48); sarà allora

$$\begin{aligned}\delta_g u^i &= -u^i u_\mu \frac{\partial \delta x^\mu}{\partial x^r}u^r + \frac{1}{2}u^i\frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x^r}u_\mu u_\nu \delta x^r \\ &= -u^i u_\mu \frac{\partial \delta x^\mu}{\partial x^r}u^r - \frac{1}{2}u^i\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^r}u^\mu u^\nu \delta x^r.\end{aligned}$$

Perciò gli ultimi due termini nella (42) si compensano:

$$\delta u^i = \delta_m u^i + \delta_g u^i = \frac{\partial \delta x^i}{\partial x^r}u^r - \frac{\partial u^i}{\partial x^r}\delta x^r. \tag{42'}$$

Questa è la variazione locale di $u^i$ con trasporto completo per lo spostamento $\delta x^i$.

e quindi anche

(65) $$\delta\gamma^{ik} = \delta\left\{g^{ik} - (\epsilon\mu - 1)\, u^i u^k\right\} = \delta g^{ik} + (\epsilon\mu - 1)\, u^i u^k u_\mu u_\nu \delta g^{\mu\nu}.$$

Se sostituiamo nella (61) e confrontiamo con la ($47_1$) troviamo

(66) $$\mathfrak{T}_{ik} = \mathfrak{T}_{(i)(k)} + (\epsilon\mu - 1)\, u_i u_k \mathfrak{T}_{(\mu)(\nu)} u^\mu u^\nu.$$

Le componenti miste si trovano se si moltiplicano il primo membro ed il secondo termine del secondo membro per $g^{km}$, ed il primo termine del secondo membro per $\gamma^{kl} + (\epsilon\mu - 1)\, u^k u^l$:

(66') $$\mathfrak{T}_i^{\ l} = \mathfrak{T}_{(i)}^{(l)} + (\epsilon\mu - 1)\left(\mathfrak{T}_{(i)(k)} u^k + u_i \mathfrak{T}_{(\mu)(\nu)} u^\mu u^\nu\right) u^l.$$

Nel sistema a riposo (e per valori normali di $g_{ik}$) il fattore di $(\epsilon\mu - 1)\, u^l$ ha i valori $\mathfrak{T}_{(\alpha)(4)}$, 0 $(\alpha = 1, 2, 3)$. Per la (66) in questo caso si ha $\mathfrak{T}_{\alpha 4} = \mathfrak{T}_{(\alpha)(4)}$. Dunque

(67) $$\mathfrak{T}_i^{\ l} = \mathfrak{T}_{(i)}^{(l)} + (\epsilon\mu - 1)\left(\mathfrak{T}_{ik} u^k + u_i \mathfrak{T}_{\mu\nu} u^\mu u^\nu\right) u^l,$$

e quindi per la (63)

(67') $$T_i^{\ k} = F_{ir} H^{kr} - \frac{1}{4} F_{rs} H^{rs} \delta_i^k - (\epsilon\mu - 1)\, \Omega_i u^k,$$

dove abbiamo introdotto il "raggio a riposo"

(68) $$\Omega^i = -\left(T_r^{\ i} u^r + u^i T_{\mu\nu} u^\mu u^\nu\right).$$

Se $\mathfrak{S}^\alpha$ è la corrente d'energia $(\alpha = 1, 2, 3)$, $T_4^{\ \alpha} = -\mathfrak{S}^\alpha / c$, e nel sistema a riposo

(68') $$\Omega^\alpha = \frac{\mathfrak{S}^\alpha}{c},\ \Omega^4 = 0,\ (\alpha = 1, 2, 3).$$

Se si sostituisce la (67') nella (68), poiché $\Omega^r u_r = 0$ si trova

(69) $$\Omega^i = F_l H^{il} - F_l H^l u^i = u_k F_l (H^{ik} u^l + H^{kl} u^i + H^{li} u^k).$$

Le formule (67') e (69) determinano il *tensore dell'energia proposto da Abraham.*[11]

[11] W. Pauli jr., Enz. d. math. Wiss. V 19, formula (303). Per le (50) e (60) vale anche il principio variazionale

(A) $$\delta_\varphi W^{(e)} + \delta_m W^{(e)} + \delta_m W^{(m)} = 0,$$

dove in $\delta_\varphi$ il tetrapotenziale è trascinato dalla variazione. Allora sarà trascinato anche il campo $F_{ik}$, ma non il campo $H_{ik}$, poiché le $u^i$ avvertono la variazione (42) e non la (42') della nota 10 (perché il campo metrico resta invariato). I. Ishiwara, Ann. d. Phys. **42**, 986, 1913, è partito dal principio (A), ha però richiesto (loc. cit. Eq. (15a)) che $H$ sia trasportato dalla variazione. Ma allora lo stesso deve risultare per le $u^i$, cioè si parte dalla variazione $\delta u^i$ (42'), che anche per $g_{ik}$ costante *non è compatibile* con la (42). Ma se nell'identità (45) si sostituisce in $\delta_m W^{(e)}$ la variazione (42'), in $\delta_g W^{(e)}$ si deve variare $g_{ik}$ solo finchè non interviene in $u^i$. Allora $\delta\gamma^{ik} = \delta g^{ik}$ e per la (61) si perviene alla densità tensoriale (63), che porta al tensore dell'energia introdotto da Minkowski (W. Pauli, loc. cit. formula (301) come infatti si ottiene anche dai calcoli espliciti di I. Ishiwara).

## 2.

L'*espressione delle onde.* Per semplicità ci occuperemo nel seguito della propagazione della luce in isolanti omogenei (scarichi). Per essi valgono, come abbiamo visto, le equazioni del vuoto in presenza del campo gravitazionale $\gamma_{ik}$. D'ora in poi tralasceremo anche le parentesi degli indici (e scriveremo talvolta anche $g_{ik}$ al posto di $\gamma_{ik}$).

Nei problemi ottici si utilizzano al posto delle equazioni di campo le equazioni d'onda da esse derivate. Nella teoria della relatività speciale la propagazione ondosa di una grandezza $A$ è data da un'equazione della forma:

$$\Box A = \frac{\partial^2 A}{\partial {x_1}^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial {x_2}^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial {x_3}^2} - \frac{\partial^2 A}{\partial {x_4}^2} = 0.$$

Questa somma di derivate seconde è l'applicazione ad $A$ dell'operatore di Laplace tetradimensionale. Costruiremo subito gli operatori corrispondenti della teoria generale. Ciò s'ottiene facilmente sostituendo la derivazione ordinaria con la cosidetta derivazione covariante[12].

Se $p$ è uno scalare, $\varphi_i$ un vettore, $T_{ik}$ un tensore, le derivate covarianti si scrivono

$$D_i p = p_i = \frac{\partial p}{\partial x_i}, \tag{70}$$

$$D_k \varphi_i = \varphi_{ik} = \frac{\partial \varphi_i}{\partial x^k} - \left\{ \begin{matrix} m \\ ik \end{matrix} \right\} \varphi_m, \tag{71}$$

$$D_m T_{ik} = T_{ikm} = \frac{\partial T_{ik}}{\partial x^m} - \left\{ \begin{matrix} n \\ im \end{matrix} \right\} T_{nk} - \left\{ \begin{matrix} n \\ km \end{matrix} \right\} T_{in} \tag{72}$$

e in generale per un tensore

$$\begin{gathered} D_m T_{i_1 i_2 \ldots i_s} = T_{i_1 i_2 \ldots i_s m} = \frac{\partial T_{i_1 i_2 \ldots i_s}}{\partial x^m} \\ - \left\{ \begin{matrix} n \\ i_1 m \end{matrix} \right\} T_{n i_2 \ldots i_s} \cdots - \left\{ \begin{matrix} n \\ i_s m \end{matrix} \right\} T_{i_1 i_2 \ldots i_{s-1} n}. \end{gathered} \tag{73}$$

L'indicazione della derivazione mediante un indice è comoda, poiché per definizione deve valere quanto segue:

$1^a$ *regola.* La derivata controvariante si otterrà da quella covariante mediante il consueto passaggio dalle componenti covarianti a quelle controvarianti, cioè

$$D^m T_{i_1 i_2 \ldots i_s} = {T_{i_1 i_2 \ldots i_s}}^m = g^{mr} T_{i_1 i_2 \ldots i_s r}. \tag{74}$$

$2^a$ *regola.* Allo stesso modo si passa dalla derivata delle componenti covarianti a quella delle controvarianti, cioè

$$\begin{gathered} D_m {{T_{i_1 \ldots i_s}}^{j_1 \ldots j_t}}_{k_1 \ldots k_n} \\ = g^{j_1 r_1} g^{j_2 r_2} \ldots g^{j_t r_t} D^m T_{i_1 \ldots i_s r_1 \ldots r_t k_1 \ldots k_n}. \end{gathered} \tag{75}$$

---

[12]Essa origina da E.B. Christoffel. Le regole enunciate da 1 a 4 sono di G. Ricci e T. Levi Civita, Math. Ann. **54**, 135, 1901. Per la dimostrazione del carattere tensoriale delle derivate covarianti vedasi M. v. Laue, Relativitätsprinzip II, §I9.

In base a queste due regole in un'equazione, che contenga queste derivate generali, si possono innalzare o abbassare gli indici corrispondenti allo stesso modo, sia che questi indici significhino la componente o la derivazione.

Per mezzo dell'identità

$$\frac{\partial g^{ik}}{\partial x^l} = -g^{nk} \left\{ \begin{matrix} i \\ nl \end{matrix} \right\} - g^{in} \left\{ \begin{matrix} k \\ nl \end{matrix} \right\} \tag{76}$$

al secondo membro della (75) si possono far comparire le corrispondenti componenti miste come al primo membro. Per esempio per le (72) e (75) si ha

$$D_l T^i{}_k = g^{is} T_{skl} = g^{is} \frac{\partial T_{sk}}{\partial x^l} - g^{is} \left\{ \begin{matrix} n \\ sl \end{matrix} \right\} T_{nk} - g^{is} \left\{ \begin{matrix} n \\ kl \end{matrix} \right\} T_{sn},$$

e per il primo termine a secondo membro si può scrivere per la (76)

$$\frac{\partial}{\partial x^l} \left( g^{is} T_{sk} \right) - \frac{\partial g^{is}}{\partial x^l} T_{sk} = \frac{\partial T^i{}_k}{\partial x^l} + g^{ns} \left\{ \begin{matrix} i \\ nl \end{matrix} \right\} T_{sk} + g^{in} \left\{ \begin{matrix} s \\ nl \end{matrix} \right\} T_{sk},$$

di modo che risulta la formula

$$D_l T^i{}_k = \frac{\partial T^i{}_k}{\partial x^l} + \left\{ \begin{matrix} i \\ nl \end{matrix} \right\} T^n{}_k - \left\{ \begin{matrix} n \\ kl \end{matrix} \right\} T^i{}_n.$$

In generale si ha

$$\begin{aligned} D_m T_{i_1 \ldots i_s}{}^{j_1 \ldots j_t}{}_{k_1 \ldots k_n} &= \frac{\partial}{\partial x^m} T_{i_1 \ldots i_s}{}^{j_1 \ldots j_t}{}_{k_1 \ldots k_n} \\ &- \sum_{a=1}^{s} \left\{ \begin{matrix} p \\ i_a m \end{matrix} \right\} T_{i_1 \ldots i_{a-1} p i_{a+1} \ldots i_s}{}^{j_1 \ldots j_t}{}_{k_1 \ldots k_n} \\ &+ \sum_{a=1}^{t} \left\{ \begin{matrix} j_a \\ pm \end{matrix} \right\} T_{i_1 \ldots i_s}{}^{j_1 \ldots j_{a-1} p j_{a+1} \ldots j_t}{}_{k_1 \ldots k_n} \\ &- \sum_{a=1}^{n} \left\{ \begin{matrix} p \\ k_a m \end{matrix} \right\} T_{i_1 \ldots i_s}{}^{j_1 \ldots j_t}{}_{k_1 \ldots k_{a-1} p k_{a+1} \ldots k_n}. \end{aligned} \tag{77}$$

$3^a$ *regola.* Per la derivazione di somma e prodotto valgono le regole di derivazione consuete.

Ciò segue dal fatto che in un sistema di coordinate geodetico, nel quale le derivate di $g_{ik}$ e quindi anche i simboli a tre indici sono nulli, le derivate covarianti coincidono con le derivate ordinarie.

$4^a$ *regola.* Lo scambio dell'ordine di derivazione non è permesso in generale, ma si ha

$$p_{ik} - p_{ki} = 0, \tag{78}$$

$$\varphi_{ikm} - \varphi_{imk} = R^h{}_{ikm} \varphi_h, \tag{79}$$

$$T_{ikmn} - T_{iknm} = R^h{}_{imn} T_{hk} + R^h{}_{kmn} T_{ih} \tag{80}$$

e in generale

$$T_{i_1..i_s mn} - T_{i_1..i_s nm} = R^h{}_{i_1 mn} T_{h i_2..i_s} + \cdots + R^h{}_{i_s mn} T_{i_1..i_{s-1} h}, \tag{81}$$

dove

$$R^i{}_{kmn} = \frac{\partial}{\partial x^m} \left\{ \begin{matrix} i \\ kn \end{matrix} \right\} - \frac{\partial}{\partial x^n} \left\{ \begin{matrix} i \\ km \end{matrix} \right\} + \left\{ \begin{matrix} i \\ ma \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} a \\ kn \end{matrix} \right\} - \left\{ \begin{matrix} i \\ na \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} a \\ km \end{matrix} \right\} \tag{82}$$

è il tensore di curvatura di Riemann-Christoffel. La (81) si verifica facilmente in un sistema geodetico. In un tale sistema si ha

$$T_{i_1..i_s mn} = \frac{\partial^2 T_{i_1..i_s}}{\partial x^m \partial x^n} - \sum_{a=1}^{s} T_{i_1 \ldots i_{a-1} p i_{a+1} \ldots i_s} \frac{\partial}{\partial x^n} \left\{ \begin{matrix} p \\ i_a m \end{matrix} \right\},$$

$$T_{i_1..i_s mn} - T_{i_1..i_s nm} = \sum_{a=1}^{s} T_{i_1 \ldots i_{a-1} p i_{a+1} \ldots i_s} \left( \frac{\partial}{\partial x^m} \left\{ \begin{matrix} p \\ i_a n \end{matrix} \right\} - \frac{\partial}{\partial x^n} \left\{ \begin{matrix} p \\ i_a m \end{matrix} \right\} \right).$$

Poniamo inoltre

$$\left\{ \begin{matrix} (m) \\ (i)(k) \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} m \\ ik \end{matrix} \right\} + p^m_{ik}, \tag{83}$$

dove secondo la convenzione introdotta nella prima parte i simboli a tre indici con gli indici tra parentesi si costruiscono a partire dai $\gamma_{ik}$ esattamente come i simboli consueti dai $g_{ik}$. Se si sostituisce la (83) per esempio nella (72), s'ottiene immediatamente

$$D_{(m)} T_{ik} = D_m T_{ik} - p^n{}_{im} T_{nk} - p^n{}_{km} T_{in}, \tag{84}$$

dalla quale si riconosce che i $p$ sono tensori. Ricorrendo ad un sistema geodetico si verifica immediatamente che

$$p^m_{ik} = \gamma^{rm} \left( (k u_k u_r)_i + (k u_r u_i)_k - (k u_i u_k)_r \right), \; k = 1 - \frac{1}{\epsilon \mu}. \tag{85}$$

Allo stesso modo

$$R^{(i)}_{(k)(m)(n)} = R^i{}_{kmn} + D_m p^i{}_{kn} - D_n p^i{}_{km} + p^i{}_{ma} p^a{}_{kn} - p^i{}_{na} p^a{}_{km}. \tag{86}$$

$5^a$ *regola.* Si ottengono le derivate covarianti relative a $\gamma_{ik}$ da quelle relative a $g_{ik}$ se si sostituiscono le derivate ordinarie con quelle covarianti (relativamente a $g_{ik}$) ed i simboli a tre indici con le quantità $p$. Il tensore di curvatura $R^{(i)}_{(k)(m)(n)}$ si ottiene da $R^i{}_{kmn}$ con l'aggiunta di alcuni termini che si ottengono da $R^i{}_{kmn}$ con la stessa sostituzione.

Dopo questi preliminari siamo in grado di riscrivere l'espressione del laplaciano. Si ha

$$\Box p = p^k{}_k, \tag{87}$$

$$\square_i \varphi = \varphi_i{}^k{}_k, \tag{88}$$

$$\square_{ik} T = T_{ik}{}^l{}_l, \text{ ecc.,} \tag{89}$$

Si vede che queste espressioni hanno sempre lo stesso carattere tensoriale della grandezza alla quale l'operatore è applicato. Per uno scalare $p$ secondo le (70) e (71) compaiono solo le derivate prime di $g_{ik}$. Quindi l'espressione delle onde per uno scalare coinciderà anche nella teoria della relatività generale con l'espressione di Laplace. Usiamo in generale la lettera maiuscola $W$ per un'espressione delle onde e introduciamo le notazioni

$$\mathrm{Grad}_i p = \frac{\partial p}{\partial x^i}, \tag{90}$$

$$\mathrm{Div}\varphi = \varphi^k{}_k; \tag{91}$$

abbiamo quindi per uno scalare

$$\mathrm{Div}\mathrm{Grad} p = W p. \tag{92}$$

Le espressioni (83), (84) ecc. contengono le derivate seconde di $g_{ik}$. Esse costituiranno ancora espressioni delle onde solo nell'ambito della teoria della relatività speciale o in campi di gravitazione con tensore di curvatura nullo; nel caso generale interverranno anche termini nei quali compare questo tensore. Determineremo questi termini aggiuntivi.

Vi arriviamo cercando di generalizzare la relazione (92) ai tensori. Questa generalizzazione è ben nota nella teoria speciale. Per un vettore in essa vale la formula[13]

$$\mathrm{Div}\mathrm{Rot}\varphi = \mathrm{Grad}\mathrm{Div}\varphi - W\varphi, \tag{93}$$

dove l'espressione delle onde $W$ è identica a $\square$. Gli operatori Rot e Div esistono anche nella teoria generale. Indichiamo con $p$, $\varphi_i$, $F_{ik}$, $S_{ikm}$, $L_{ikmn}$ ecc. *tensori* lineari di grado[14] 0 (scalare), 1, 2, 3, 4 ecc.; allora i rotori sono definiti da

$$\mathrm{Rot}_i p = \frac{\partial p}{\partial x^i}, \tag{94}$$

$$\mathrm{Rot}_{ik} \varphi = \frac{\partial \varphi_k}{\partial x^i} - \frac{\partial \varphi_i}{\partial x^k}, \tag{95}$$

$$\mathrm{Rot}_{ikm} F = \frac{\partial F_{ik}}{\partial x^m} + \frac{\partial F_{km}}{\partial x^i} + \frac{\partial F_{mi}}{\partial x^k}, \tag{96}$$

[13] M. v. Laue, Relativitätstheorie I, formula (115).

[14] In uno spazio tetradimensionale la sequenza s'interrompe con $L_{ikmn}$. Per consentire di riconoscere meglio la relazione formale, nel seguito presupponiamo uno spazio $n$-dimensionale.

$$\mathrm{Rot}_{ikmn}S = \frac{\partial S_{kmn}}{\partial x^i} - \frac{\partial S_{mni}}{\partial x^k} + \frac{\partial S_{nik}}{\partial x^m} - \frac{\partial S_{ikm}}{\partial x^n} \text{ ecc.,} \tag{97}$$

e le divergenze da

$$\mathrm{Div}\varphi = \frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial x^k}\left(\sqrt{g}\varphi^k\right), \tag{98}$$

$$\mathrm{Div}^i F = \frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial x^k}\left(\sqrt{g}F^{ik}\right), \tag{99}$$

$$\mathrm{Div}^{ik} S = \frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial x^m}\left(\sqrt{g}S^{ikm}\right), \tag{100}$$

$$\mathrm{Div}^{ikm} L = \frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial x^n}\left(\sqrt{g}L^{ikmn}\right) \text{ ecc..} \tag{101}$$

Al posto della notazione (94) si utilizza di solito il Grad introdotto nella (90). I tensori risultanti mediante queste forme sono ancora lineari. I nomi di rotore e divergenza discendono dal fatto che per essi valgono i teoremi generalizzati rispettivamente di Stokes e di Gauss[15]. Queste rappresentazioni dei rotori valgono solo per le componenti covarianti, quelle delle divergenze solo per le componenti controvarianti. Ma se sostituiamo nelle equazioni dalla (94) alla (97) le derivate ordinarie con le derivate covarianti, otteniamo le formule

$$\mathrm{Rot}_i p = p_i, \tag{94'}$$

$$\mathrm{Rot}_{ik}\varphi = \varphi_{ki} - \varphi_{ik}, \tag{95'}$$

$$\mathrm{Rot}_{ikm}F = F_{ikm} + F_{kmi} + F_{mik}, \tag{96'}$$

$$\mathrm{Rot}_{ikmn}S = S_{kmni} - S_{mnik} + S_{nikm} - S_{ikmn} \text{ ecc.,} \tag{97'}$$

dove ormai possiamo innalzare gli indici uguali nei due membri secondo le regole 1 e 2. Procediamo in modo analogo con le

$$\mathrm{Div}\varphi = \varphi^k{}_k \text{ (vedi 91),} \tag{98'}$$

[15] W. Pauli jun., loc. cit., p. 606. Per un "rotore" monodimensionale vale il teorema di Stokes

$$\int_{P_1}^{P_2} \mathrm{Rot}_i p dx^i = P_2 - P_1.$$

$$\mathrm{Div}^i F = F^{ik}{}_k, \tag{99'}$$

$$\mathrm{Div}^{ik} S = S^{ikm}{}_m, \tag{100'}$$

$$\mathrm{Div}^{ikm} L = L^{ikmn}{}_n \text{ ecc.} \tag{101'}$$

Abbassando gli indici otteniamo le componenti covarianti. I tensori da (94) a (101) sono rispettivamente identici ai tensori da (94') a (101'), poiché coincidono in un sistema geodetico.

Dalla rappresentazione da (94') a (101') risulta che non solo la definizione geometrica, ma anche la definizione *formale* del rotore e della divergenza può essere trasportata dall'analisi vettoriale ordinaria a quella generale. È noto che, se $\nabla$ è l'operatore vettoriale $(\partial/\partial x^1, \partial/\partial x^2, \partial/\partial x^3)$, ed $\mathfrak{a}$ è un vettore

$$\mathrm{rot}\mathfrak{a} = [\nabla \mathfrak{a}] \text{ (prodotto esterno)}, \tag{102}$$

$$\mathrm{div}\mathfrak{a} = \nabla \mathfrak{a} \text{ (prodotto interno)}. \tag{103}$$

Al posto di $\nabla$ appare l'operatore $D$. Il prodotto esterno di un vettore (tensore lineare di primo grado) con i tensori lineari di grado 1, 2, 3 ecc. $\varphi_i$, $F_{ik}$, $S_{ikm}$ ecc. è

$$[A\varphi]_{ik} = A_i \varphi_k - A_k \varphi_i, \tag{104}$$

$$[AF]_{ikm} = A_i F_{km} + A_k F_{mi} + A_m F_{ik}, \tag{105}$$

$$[AS]_{ikmn} = A_i S_{kmn} - A_k S_{mni} + A_m S_{nik} - A_n S_{ikm} \text{ ecc..} \tag{106}$$

Se il vettore $A$ è in particolare uno spostamento $\xi_{(1)}$, e il tensore lineare di grado $s$ col quale lo si moltiplica esternamente è un tensore spaziale ad $s$ dimensioni costruito con gli $s$ spostamenti $\xi_{(2)}$, $\xi_{(3)}$, ... $\xi_{(s+1)}$, anche il prodotto esterno è il tensore spaziale ad $s+1$ dimensioni costruito con gli $s+1$ spostamenti $\xi_{(1)}$, $\xi_{(2)}$,... $\xi_{(s+1)}$. Si definisce in modo analogo il prodotto esterno di due tensori qualsiansi[16],

[16] Il prodotto esterno di di $A_{ik}$ e $B_{ik}$ è dato dallo sviluppo del determinante

$$[AB]_{ikmn} = \begin{vmatrix} \alpha_i & \alpha_k & \alpha_m & \alpha_n \\ \beta_i & \beta_k & \beta_m & \beta_n \\ \gamma_i & \gamma_k & \gamma_m & \gamma_n \\ \delta_i & \delta_k & \delta_m & \delta_n \end{vmatrix}.$$

secondo i minori delle prime due righe, ponendo nello sviluppo

$$\begin{vmatrix} \alpha_i & \alpha_k \\ \beta_i & \beta_k \end{vmatrix} = A_{ik}, \quad \begin{vmatrix} \gamma_m & \gamma_n \\ \delta_m & \delta_n \end{vmatrix} = B_{mn}.$$

Si vede subito che il prodotto esterno cambia segno per lo scambio dei fattori solo se entrambi i fattori sono di grado dispari.

ed in generale il prodotto esterno di due tensori che siano totalmente antisimmetrici negli indici da moltiplicarsi (mentre non c'è bisogno che ciò accada per gli indici rimanenti). Se per esempio $A_{\rho\sigma ik}$ è antisimmetrico in $i$ e $k$, e $B_{\lambda mn}$ lo è in $m$ ed $n$, indicheremo con

$$A_{\rho\sigma[i][k]}B_{\lambda[m][n]} \tag{107}$$

il prodotto esterno rispetto a questi indici.

Con questi chiarimenti la definizione formale generale del rotore di un tensore lineare $M$ è

$$\mathrm{Rot}M = [DM]\,. \tag{108}$$

È noto che il prodotto interno (per tensori arbitrari, non necessariamente lineari) consiste nel processo di contrazione degli indici a moltiplicare. Si ha quindi

$$\mathrm{Div}M = DM, \tag{109}$$

dove la moltiplicazione va effettuata sull'ultimo indice di $M$.

Analogamente alle formule (92) e (93) assieme alla (94) definiamo in generale l'*espressione delle onde $W$ per un tensore lineare arbitrario $M$* mediante

$$\mathrm{DivRot}M = \mathrm{RotDiv}M \pm WM, \tag{110}$$

dove vale il segno superiore o l'inferiore a seconda che $M$ sia di grado pari o dispari.

Per un tensore di primo grado $\varphi_i$, per le (88), (95'), (99') è

$$\mathrm{Div}_i\mathrm{Rot}\varphi = {\varphi^k}_{ik} - {\varphi_i}^k{}_k = {\varphi^k}_{ik} - \Box_i\varphi.$$

Per la quarta regola, formula (79), è

$${\varphi^k}_{ik} = {\varphi^k}_{ki} + {R^{hk}}_{ik}\varphi_h = {\varphi^k}_{ki} - {R_i}^h\varphi_h,$$

dove $-{R_h}^k{}_{ik} = {R^k}_{hik} = {R^k}_{ihk}$ è il tensore di curvatura contratto. Tenendo conto delle (94') e (98') sarà quindi

$$\mathrm{Div}_i\mathrm{Rot}\varphi = \mathrm{Rot}_i\mathrm{Div}\varphi - \Box_i\varphi - {R_i}^h\varphi_h$$

e il confronto con la (110) insegna che

$$W_i\varphi = \Box_i\varphi + {R_i}^h\varphi_h. \tag{111}$$

È notevole che il termine aggiuntivo qui contenga solo il tensore di curvatura contratto.

Per un tensore di secondo grado $F_{ik}$ per le (96') e (100') è

$$\mathrm{Div}_{ik}\mathrm{Rot}F = {F_{ikl}}^l + {F_{kli}}^l + {F_{lik}}^l. \tag{112}$$

Il primo termine per la (89) è $\Box_{ik}F$, gli altri due sono insieme della forma $K_{ki} - K_{ik}$, dove $K_{ik} = {F_{ilk}}^l$. Per la quarta regola, formula (80), si ha

$$K_{ik} = {F_{il}}^l{}_k + {R^h}_{lk}{}^l F_{ih} + {R^h}_{ik}{}^l F_{hl},$$

ovvero introducendo la divergenza (99') e il tensore di curvatura contratto

$$K_{ik} = (\mathrm{Div}_i F)_k + R_k{}^h F_{hi} + R^h{}_{ik}{}^l F_{hl},$$

sicché per la definizione (95') del rotore

$$K_{ki} - K_{ik} = \mathrm{Rot}_{ik}\mathrm{Div}F + R_i{}^h F_{hk} - R_k{}^h F_{hi} + \left(R^h{}_{ki}{}^l - R^h{}_{ik}{}^l\right) F_{hl}.$$

A seguito delle proprietà di simmetria di $R_{ikmn}$ è infine ancora $R_{hkim} - R_{hikm} = R_{ikhm}$ e perciò la (112) va nella (110) per $M = F$ con

$$W_{ik}F = \Box_{ik}F + R_i{}^h F_{hk} - R_k{}^h F_{hi} + R_{ik}{}^{hm} F_{hm}. \tag{113}$$

Per la (104), facendo uso della notazione (107), questa si può anche scrivere

$$W_{ik}F = \Box_{ik}F + R_{[i]}^{h} F_{h[k]} + R_{ik}{}^{hm} F_{hm}. \tag{113'}$$

Esattamente così si deriva per il tensore di terzo grado $S_{ikm}$

$$\begin{aligned} W_{ikl}S = \Box_{ikl}S + R_i{}^h S_{hkl} + R_k{}^h S_{hli} + R_l{}^h S_{hik} \\ +R_{ik}{}^{hn} S_{hnl} + R_{kl}{}^{hn} S_{hni} + R_{li}{}^{hn} S_{hnk} \end{aligned}, \tag{114}$$

che per la (105) si può riscrivere

$$W_{ikl}S = \Box_{ikl}S + R_{[i]}^{h} S_{h[k][l]} + R_{[i][k]}{}^{hn} S_{hn[l]}. \tag{114'}$$

La formula *generale* per l'espressione delle onde $W$ del tensore lineare di grado $s$ si scrive

$$\begin{aligned} W_{i_1\ldots i_s}M = \Box_{i_1\ldots i_s}M + R_{[i_1]}{}^h M_{h[i_2]\ldots[i_s]} \\ +R_{[i_1][i_2]}{}^{hl} M_{hl[i_3]\ldots[i_s]} \end{aligned}. \tag{115}$$

Dalle forme da (94) a (101) dei rotori e delle divergenze segue immediatamente

$$\mathrm{DivDiv}M = \mathrm{RotRot}M = 0. \tag{116}$$

Se si prende quindi la divergenza, rispettivamente il rotore della (110), risulta

$$\mathrm{DivRotDiv}M = \mp\mathrm{Div}WM,\ \mathrm{RotDivRot}M = \pm\mathrm{Rot}WM.$$

Poiché il grado di un tensore cambia di un'unità formando la divergenza o il rotore, la (110) applicata a $\mathrm{Div}M$ e a $\mathrm{Rot}M$ dà

$$\mathrm{DivRotDiv}M = \mp W\mathrm{Div}M,\ \mathrm{RotDivRot}M = \pm W\mathrm{Rot}M.$$

Risulta quindi

$$\mathrm{Div}WM = W\mathrm{Div}M,\ \mathrm{Rot}WM = W\mathrm{Rot}M. \tag{117}$$

*L'espressione delle onde commuta con Rot e Div.*

Nel caso di due tensori lineari di grado $M$ ed $N$ eguale (poniamo secondo), per il prodotto interno $M\Box N$, tenendo conto delle (98) e (98') per la 3$^a$ regola risulta

$$M^{ik}\Box_{ik}N = M^{ik}N_{ik}{}^{l}{}_{l} = \left(M^{ik}N_{ik}{}^{l}\right)_{l} - M^{ik}{}_{l}N_{ik}{}^{l}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial x^l}\left(\sqrt{g}M^{ik}N_{ik}{}^{l}\right) - M^{ik}{}_{l}N_{ik}{}^{l},$$

e quindi

$$M\Box N - N\Box M = \frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial x^l}\left\{\sqrt{g}\left(M^{ik}N_{ik}{}^{l} - N^{ik}M_{ik}{}^{l}\right)\right\}. \tag{118}$$

Qui si può sostituire $\Box$ con $W$; infatti i termini aggiuntivi si elidono, come si riconosce dalle (111), (113), (114) e dalla formula generale (115), grazie alla simmetria di $R_{ik}$ e rispettivamente di $R_{ikmn}$ negli indici $i, k$ e rispettivamente nelle coppie di indici $(ik)$, $(mn)$. Se integriamo la (118) su un volume tetradimensionale (elemento di volume $d\Sigma = \sqrt{g}dx^1dx^2dx^3dx^4$), si ottiene dal teorema di Gauss[17]

$$\int (MWN - NWM)d\Sigma = \int (MN_n - NM_n)\, dS \tag{119}$$

($dS$ elemento di superficie della superficie di contorno, $n$ derivata *covariante* lungo la normale esterna). *Per l'espressione delle onde (e per l'operatore di Laplace) vale il teorema di Green*[18].

### 3.

*Campo, tetrapotenziale, tensore di Hertz.* Introducendo le definizioni (96) e (99) le equazioni differenziali per il campo $F$ si scrivono (di nuovo tralasciando le parentesi degli indici)

$$\mathrm{Rot}F = 0, \ \mathrm{Div}F = 0. \tag{120}$$

Dalla (110) discende quindi

$$WF = 0. \tag{121}$$

$WF$ è l'espressione (113) (nella quale s'ha da tener conto della regola 5). *Il campo si propaga in modo ondulatorio.* Per mezzo della regola di commutazione (117) si dimostra in modo del tutto analogo a quello della teoria classica[19] la proprietà inversa: una soluzione dell'equazione d'onda (121) che soddisfi ad un istante le equazioni di campo (120) lo fa sempre. La scomoda restrizione dei valori iniziali può essere attenuata o interamente rimossa, nel primo caso con l'introduzione del

[17] W. Pauli jun., loc. cit. formula (139a).

[18] Le densità $\sqrt{g}\Box$, $\sqrt{g}W$ rappresentano quindi espressioni differenziali autoaggiunte.

[19] Vedasi E. Cohn, Das elektromagnetische Feld, p. 410-412.

*tetrapotenziale* $\varphi$, nel secondo con l'introduzione dell'*esapotenziale* $Z$, che chiameremo anche *tensore di Hertz.* (Giustificheremo subito questi nomi). Come nella (39) poniamo

$$F = \mathrm{Rot}\varphi, \tag{122}$$

con la quale per la (116) la prima equazione (120) sarà soddisfatta. Dalla (93) segue allora

$$\mathrm{Div}F = \mathrm{Div}\mathrm{Rot}\varphi = \mathrm{Grad}\mathrm{Div}\varphi - W\varphi, \tag{123}$$

sicché anche la seconda equazione (120) sarà soddisfatta, quando $\varphi$ obbedisce all'equazione d'onda

$$W_i\varphi = \Box_i\varphi + R_i{}^h\varphi_h = 0 \tag{124}$$

con la condizione aggiuntiva

$$\mathrm{Div}\varphi = 0. \tag{125}$$

Per la (116) ci si può infine liberare di questa ponendo

$$\varphi = \mathrm{Div}Z. \tag{126}$$

Per la regola di commutazione (117) risulta

$$W\varphi = W\mathrm{Div}Z = \mathrm{Div}WZ, \tag{127}$$

di modo che la (124) sarà soddisfatta quando lo è l'equazione

$$WZ = 0. \tag{128}$$

Dalle (122) e (126) si ottiene la rappresentazione del campo tramite l'esapotenziale

$$F = \mathrm{Rot}\mathrm{Div}Z, \tag{129}$$

ovvero per le (110) e (128)

$$F = \mathrm{Div}\mathrm{Rot}Z. \tag{129'}$$

*Tetra- ed esapotenziale soddisfano l'equazione delle onde.*

Un sistema di particelle cariche (nel seguito chiamate per brevità molecola) di carica complessiva $e$ secondo la teoria della relatività speciale genera nel punto d'universo $P$ ($x^1$, $x^2$, $x^3$, $x^4$) (per il resto di questa parte ci fondiamo sulla teoria elettronica del vuoto) in prima approssimazione un tetrapotenziale[20]

$$\varphi_i = \frac{eu_i}{R},\ R = -(x_r - \xi_r)u^r \tag{130}$$

[20]M. v. Laue, Relativitätstheorie I, formula (218); W. Pauli jun., loc. cit., formula (238a).

($\xi_r$, $u_r$ coordinata e tetravelocità della molecola all'intersezione della sua linea d'universo con il cono del passato $(x_r - \xi_r)(x^r - \xi^r) = 0$ di $P$. In luogo del tempo proprio $s$ possiamo scegliere come nella (14) un parametro arbitrario $\tau$, mediante il quale sarà determinata la posizione della molecola lungo la sua linea d'universo. La radice che compare nella (15) si elide al numeratore ed al denominatore e possiamo scrivere

$$\varphi_i = \frac{e}{R}\frac{d\xi_i}{d\tau}, \quad R = -(x_r - \xi_r)\frac{d\xi^r}{d\tau}. \tag{130'}$$

Se si annulla la carica totale $e$, la molecola è *polarizzata elettromagneticamente* (la separazione in polarizzazione elettrica e magnetica dipende dalla separazione in spazio e tempo). In questo caso la (130') non basta, ma occorre avanzare d'un passo nell'approssimazione. Per la (126) $Z$ precede $\varphi$ di un grado di derivazione. Supporremo quindi che in analogia con la (130') *l'esapotenziale di un dipolo elettromagnetico* sia rappresentato dalla formula

$$Z_{ik} = \frac{m_{ik}}{R}$$

(in prima approssimazione, nel caso che i momenti elettromagnetici $m$ non si annullino). Se dividiamo in spazio e tempo secondo lo schema

$$\begin{aligned} F_{14}\ F_{24}\ F_{34},\ F_{23}\ F_{31}\ F_{12} &= \mathfrak{E},\ \mathfrak{H}, \\ \varphi_1\ \varphi_2\ \varphi_3\ \varphi_4 &= \mathfrak{A},\ \varphi, \\ Z_{14}\ Z_{24}\ Z_{34},\ Z_{23}\ Z_{31}\ Z_{12} &= -\mathfrak{Z},\ \mathfrak{Z}', \\ m_{14}\ m_{24}\ m_{34},\ m_{23}\ m_{31}\ m_{12} &= -\mathfrak{p},\ \mathfrak{m}, \end{aligned}$$

$\mathfrak{E}$, $\mathfrak{H}$ intensità di campo elettrica e magnetica, $\mathfrak{A}$, $\varphi$ potenziali vettore e scalare, $\mathfrak{Z}$, $\mathfrak{p}$ vettori spaziali polari, $\mathfrak{Z}'$, $\mathfrak{m}$ vettori spaziali assiali. Pertanto la (126), e le (129), (129') si suddividono nelle equazioni

$$\mathfrak{A} = \frac{\dot{\mathfrak{Z}}}{c} + \mathrm{rot}\mathfrak{Z}', \quad \varphi = -\mathrm{div}\mathfrak{Z}, \tag{126'}$$

$$\mathfrak{E} = \mathrm{rot\ rot}\mathfrak{Z} - \frac{1}{c}\dot{\mathfrak{Z}}', \quad \mathfrak{H} = \frac{1}{c}\mathrm{rot}\dot{\mathfrak{Z}} + \mathrm{rot\ rot}\mathfrak{Z}'. \tag{129''}$$

Dalla (128) risulta la consueta equazione delle onde per $\mathfrak{Z}$ e $\mathfrak{Z}'$. Ma, se la molecola è a riposo ($d\xi^1/d\tau = d\xi^2/d\tau = d\xi^3/d\tau = 0$), la (131) si suddivide in

$$\mathfrak{Z} = \frac{\mathfrak{p}\left(t - \frac{r}{c}\right)}{r}, \quad \mathfrak{Z}' = \frac{\mathfrak{m}\left(t - \frac{r}{c}\right)}{r}, \quad (r\text{=distanza } P\text{-molecola}). \tag{131'}$$

Se $\mathfrak{m}$ e perciò $\mathfrak{Z}'$ sono uguali a zero, come si riconosce dalle (126'), (129'') e (131'), $\mathfrak{Z}$ è uguale al *vettore di Hertz* per una molecola polarizzata *elettricamente* di momento $\mathfrak{p}$[21]. Se invece $\mathfrak{p} = \mathfrak{Z} = 0$, si otterranno dalle (126'), (129'') assieme

[21] Vedasi per esempio M. Planck, Einführung in die Theorie der Elektrizität und des Magnetismus. §87, 88.

alla (131') il potenziale ed il campo di una molecola polarizzata *magneticamente* di momento $\mathfrak{m}$[22]. $\mathfrak{Z}'$ è la controparte magnetica di $\mathfrak{Z}$. *L'esapotenziale è la sintesi tetradimensionale dei vettori di Hertz elettrico e magnetico.*

Daremo il tensore di Hertz per una molecola scarica qualsiasi e così facendo confermeremo la formula (131). Sia

$$\eta^i(\tau,\epsilon) = \xi^i(\tau) + \epsilon\delta\xi^i,\ \ \epsilon = 1 \tag{132}$$

la linea d'universo di una particella carica di carica $e$, $\xi^i(\tau)$ la linea d'universo del baricentro della molecola, e quindi le $\delta\xi^i$, funzioni di $\tau$, coordinate relative della particella. L'introduzione formale del fattore $\epsilon$ serve in modo noto a trasformare lo sviluppo rispetto alle $\delta\xi^i$ e loro derivate rispetto a $\tau$ nello sviluppo rispetto ad $\epsilon$. (Successivamente si ripone $\epsilon$ uguale ad 1). Per la (130') il tetrapotenziale della particella è

$$\varphi_i = \frac{e}{R}\frac{\partial\eta_i}{\partial\tau},\ \ R = -(x_r - \eta_r)\frac{d\eta^r}{d\tau}. \tag{133}$$

dove $\tau$ è la funzione di $\epsilon$ e delle coordinate $x^1$, $x^2$, $x^3$, $x^4$ di $P$ che risulta dall'equazione

$$(x_r - \eta_r)(x^r - \eta^r) = 0. \tag{134}$$

I secondi membri delle (133) che originalmente (essendo le $\eta^i$ le funzioni (132) di $\epsilon$ e $\tau$) sono funzioni $\psi_i(\tau,\epsilon,x^1,x^2,x^3,x^4)$, si trasformano per la sostituzione di $\tau$ in funzioni $\phi_i(\epsilon,x^1,x^2,x^3,x^4)$:

$$\psi_i(\tau,\epsilon,x^1,x^2,x^3,x^4) = \phi_i(\epsilon,x^1,x^2,x^3,x^4). \tag{135}$$

Per sviluppare secondo $\epsilon$ dobbiamo formare le derivate $\partial\phi/\partial\epsilon$, $\partial^2\phi/\partial\epsilon^2$ eccetera. La derivazione della (134) e della (135) dà immediatamente

$$\frac{\partial\tau}{\partial x^k} = -\frac{x_k - \eta_k}{R},\ \ \frac{\partial\tau}{\partial\epsilon} = \frac{x_r - \eta_r}{R}\frac{\partial\eta^r}{\partial\epsilon} = -\frac{\partial\tau}{\partial x^r}\frac{\partial\eta^r}{\partial\epsilon}, \tag{136}$$

$$\frac{\partial\varphi_i}{\partial\epsilon} = \frac{\partial\psi_i}{\partial\epsilon} + \frac{\partial\psi_i}{\partial\tau}\frac{\partial\tau}{\partial\epsilon} = \frac{d\psi_i}{d\epsilon},\ \ \frac{\partial\varphi_i}{\partial x^k} = \frac{\partial\psi_i}{\partial x^k} + \frac{\partial\psi_i}{\partial\tau}\frac{\partial\tau}{\partial x^k}, \tag{136'}$$

da dove segue

$$\frac{\partial\varphi_i}{\partial\epsilon} = \frac{\partial\psi_i}{\partial\epsilon} - \frac{\partial\psi_i}{\partial\tau}\frac{\partial\tau}{\partial x^r}\frac{\partial\eta^r}{\partial\epsilon} = \frac{\partial\psi_i}{\partial\epsilon} + \left(\frac{\partial\psi_i}{\partial x^r} - \frac{\partial\varphi_i}{\partial x^r}\right)\frac{\partial\eta^r}{\partial\epsilon}. \tag{137}$$

Per le quantità che qui compaiono al secondo membro si ottiene dalla (133)

$$\frac{\partial\psi_i}{\partial\epsilon} = \frac{e}{R}\frac{\partial^2\eta_i}{\partial\tau\partial\epsilon} - \frac{e}{R^2}\frac{\partial\eta_i}{\partial\tau}\left\{\frac{\partial\eta_r}{\partial\epsilon}\frac{\partial\eta^r}{\partial\tau} - (x_r - \eta_r)\frac{\partial^2\eta_r}{\partial\tau\partial\epsilon}\right\}$$

[22]H.A. Lorentz, Enz. d. math. Wiss. V. 14. Nr. 15.

$$\frac{\partial\psi_i}{\partial x^r}\frac{\partial\eta^r}{\partial\epsilon} = \frac{e}{R^2}\frac{\partial\eta_i}{\partial\tau}\frac{\partial\eta_r}{\partial\tau}\frac{\partial\eta^r}{\partial\epsilon}$$

$$-\frac{\partial\varphi_i}{\partial x^r}\frac{\partial\eta^r}{\partial\epsilon} = -\frac{\partial}{\partial x^r}\left(\varphi_i\frac{\partial\eta^r}{\partial\epsilon}\right) + \varphi_i\frac{\partial}{\partial x^r}\left(\frac{\partial\eta^r}{\partial\epsilon}\right).$$

Sommando queste tre espressioni il secondo termine della prima espressione si cancella con la seconda espressione. L'ultimo termine della prima espressione, per la (133) e per la prima equazione (136) è

$$-\varphi_i\frac{\partial\tau}{\partial x^r}\frac{\partial^2\eta^r}{\partial\tau\partial\epsilon} = -\varphi_i\frac{\partial}{\partial x^r}\left(\frac{\partial\eta^r}{\partial\epsilon}\right)$$

e si cancella quindi con l'ultimo termine della terza espressione. Per la prima equazione (136) e per la definizione di $R$ nella (133) si ha

$$\frac{\partial}{\partial x^r}\left(\frac{\partial\eta^i}{\partial\epsilon}\right)\cdot\frac{\partial\eta^r}{\partial\tau} = \frac{\partial^2\eta^i}{\partial\tau\partial\epsilon}\frac{\partial\tau}{\partial x^r}\frac{\partial\eta^r}{\partial\tau} = \frac{\partial^2\eta^i}{\partial\tau\partial\epsilon},$$

sicché per il primo termine della prima espressione si può scrivere $\frac{\partial}{\partial x^r}\left(\frac{\partial\eta^i}{\partial\epsilon}\right)\cdot\varphi^r$ ovvero per l'annullarsi (125) della divergenza $\frac{\partial}{\partial x^r}\left(\frac{\partial\eta^i}{\partial\epsilon}\varphi^r\right)$. Otteniamo in conclusione

$$\frac{\partial\varphi^i}{\partial\epsilon} = \frac{\partial}{\partial x^r}\left(\frac{\partial\eta^i}{\partial\epsilon}\varphi^r - \frac{\partial\eta^r}{\partial\epsilon}\varphi^i\right) \tag{138}$$

ovvero, se introduciamo la definizione (104) del prodotto esterno di due vettori

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\epsilon} = \mathrm{Div}\left[\frac{\partial\eta}{\partial\epsilon}\varphi\right]. \tag{138'}$$

Applicando la prima equazione (136') a $\left[\frac{\partial\eta}{\partial\epsilon}\varphi\right]$ si ha inoltre

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial\epsilon^2} = \frac{\partial}{\partial\epsilon}\mathrm{Div}\left[\frac{\partial\eta}{\partial\epsilon}\varphi\right] = \mathrm{Div}\frac{\partial}{\partial\epsilon}\left[\frac{\partial\eta}{\partial\epsilon}\varphi\right] = \mathrm{Div}\frac{d}{d\epsilon}\left[\frac{\partial\eta}{\partial\epsilon}\psi\right], \tag{139}$$

dove $\partial\eta/\partial\epsilon$ va intesa prima come funzione di $\epsilon$ e delle $x$, infine come funzione di $\epsilon$ e di $\tau$. Dalla (138') e dalla (139) si vede che *l'esapotenziale di una molecola polarizzata* sarà rappresentato da

$$Z = z + \frac{1}{2!}\frac{dz}{d\epsilon} + \frac{1}{3!}\frac{d^2z}{d\epsilon^2} + \dots \tag{140}$$

dove per $z$ si deve sostituire secondo la (132), (133) e (138')

$$\begin{aligned} z &= \left[\frac{\partial\eta}{\partial\epsilon}\varphi\right] = \frac{e}{R}\left(\left[\delta\xi\frac{d\xi}{d\tau}\right] + \epsilon\left[\delta\xi\frac{d\delta\xi}{d\tau}\right]\right), \\ R &= -(x_r-\xi_r)\frac{d\xi^r}{d\tau} - \epsilon\frac{d}{d\tau}\{(x_r-\xi_r)\delta\xi^r\} + \frac{\epsilon^2}{2}\frac{d}{d\tau}(\delta\xi_r\delta\xi^r). \end{aligned} \tag{140'}$$

($\tau$ è la funzione di $\epsilon$ e delle $x$ data implicitamente dalla (134); $z$ e le sue derivate vanno prese per $\epsilon = 0$. Bisogna sommare su tutte le particelle della molecola.

Per calcolare $dz/d\epsilon$ si osservi che per le (132), (136) e (140') è

$$\frac{\partial \tau}{\partial \epsilon} = \frac{1}{R}\left\{(x_r - \xi_r)\delta\xi^r - \epsilon\delta\xi_r\delta\xi^r)\right\};$$
$$\frac{\partial R}{\partial \epsilon} = -\frac{d}{d\tau}\left\{(x_r - \xi_r)\delta\xi^r\right\} + \epsilon\frac{d}{d\tau}(\delta\xi_r\delta\xi^r),$$

quindi

$$\frac{\partial R}{\partial \epsilon} = -\frac{\partial}{\partial \tau}\left(R\frac{\partial \tau}{\partial \epsilon}\right), \; \frac{dR}{d\epsilon} = \frac{\partial R}{\partial \epsilon} + \frac{\partial R}{\partial \tau}\frac{\partial \tau}{\partial \epsilon} = -R\frac{\partial}{\partial \tau}\left(\frac{\partial \tau}{\partial \epsilon}\right).$$

Inoltre si ottiene immediatamente dalla (140')

$$\frac{dz}{d\epsilon} = \frac{e}{R}\left\{\left[\delta\xi\frac{d\delta\xi}{d\tau}\right] + \frac{\partial}{\partial \tau}\left(\left(\left[\delta\xi\frac{d\xi}{d\tau}\right] + \epsilon\left[\delta\xi\frac{d\delta\xi}{d\tau}\right]\right)\frac{\partial \tau}{\partial \epsilon}\right)\right\}.$$

Per $\epsilon = 0$ si ha quindi
(141)

$$z = \frac{e}{R}\left[\delta\xi\frac{d\xi}{d\tau}\right],$$
$$\frac{dz}{d\epsilon} = \frac{e}{R}\left[\delta\xi\frac{d\delta\xi}{d\tau}\right] + \frac{e}{R^2}\left\{\frac{d}{d\tau}\left((x_r - \xi_r)\delta\xi^r\left[\delta\xi\frac{d\xi}{d\tau}\right]\right) + \frac{\zeta}{R}(x_r - \xi_r)\delta\xi^r\left[\delta\xi\frac{d\xi}{d\tau}\right]\right\},$$
$$R = -(x_r - \xi_r)\frac{d\xi^r}{d\tau}$$

con l'abbreviazione

(141') $$\zeta = -\left(\frac{\partial R}{\partial \tau}\right)_{\epsilon=0} = -\frac{d\xi_r}{d\tau}\frac{d\xi^r}{d\tau} + (x_r - \xi_r)\frac{d^2\xi^r}{d\tau^2}.$$

Se nella (140) ci si limita ai primi due termini, risulta

(140") $$Z = \frac{m}{R} + \frac{e}{2R^2}\left\{\frac{d}{d\tau}\left((x_r - \xi_r)\delta\xi^r\left[\delta\xi\frac{d\xi}{d\tau}\right]\right) + \frac{\zeta}{R}(x_r - \xi_r)\delta\xi^r\left[\delta\xi\frac{d\xi}{d\tau}\right]\right\}$$

con

(140"') $$m = e\left[\delta\xi\frac{d\xi}{d\tau}\right] + \frac{e}{2}\left[\delta\xi\frac{d\delta\xi}{d\tau}\right].$$

Tralasciando i momenti del second'ordine $\delta\xi^r\delta\xi_r$ vale dunque la formula (131). Se suddividiamo in spazio e tempo e scegliamo come parametro $\tau$ la variabile $\xi^4 = ct$ (allora sarà $d\xi^4/d\tau = -d\xi_4/d\tau = 1$, $\delta\xi^4 = -\delta\xi_4 = 0$), si ottengono per il momento elettrico e per il momento magnetico le rappresentazioni

(142) $$\mathfrak{p} = \sum e\mathfrak{s}, \; \mathfrak{m} = \left[\mathfrak{p}\frac{\mathfrak{v}}{c}\right] + \frac{1}{2}\sum e\left[\mathfrak{s}\frac{\mathfrak{u}}{c}\right].$$

Qui $\mathfrak{s}$ indica il vettore posizione delle particelle spiccato dal baricentro della molecola, $\mathfrak{v}$ la velocità di questo, $\mathfrak{u}$ le velocità relative delle particelle. Le somme vanno estese sulla configurazione della molecola al tempo $t - r/c$, dove $r$ è la distanza osservatore-molecola a questo tempo. Per i due vettori $\mathfrak{Z}$ e $\mathfrak{Z}'$ si trova per la (140"), ($141_3$) e (141')

$$\mathfrak{Z} = \frac{\mathfrak{p}}{r\left(1-\frac{v_r}{c}\right)} + \frac{1}{2r^2\left(1-\frac{v_r}{c}\right)^2}\left\{\frac{1}{c}\frac{d}{dt}\sum e\mathfrak{s}(\mathfrak{r}\mathfrak{s}) + \frac{\zeta}{r\left(1-\frac{v_r}{c}\right)}\sum e\mathfrak{s}(\mathfrak{r}\mathfrak{s})\right\}, \tag{143}$$

$$\begin{gathered}\mathfrak{Z}' = \frac{\mathfrak{m}}{r\left(1-\frac{v_r}{c}\right)} + \frac{1}{2r^2\left(1-\frac{v_r}{c}\right)^2}\\ \left\{\frac{1}{c}\frac{d}{dt}\sum e\left[\mathfrak{s}\frac{\mathfrak{v}}{c}\right](\mathfrak{r}\mathfrak{s}) + \frac{\zeta}{r\left(1-\frac{v_r}{c}\right)}\sum e\left[\mathfrak{s}\frac{\mathfrak{v}}{c}\right](\mathfrak{r}\mathfrak{s})\right\},\end{gathered} \tag{143'}$$

con[23]

$$\zeta = 1 - \frac{v^2}{c^2} + \frac{(\dot{\mathfrak{v}}\mathfrak{r})}{c^2}, \tag{143"}$$

dove $\mathfrak{r}$ è il raggio vettore molecola-osservatore, $v_r$ la componente di $\mathfrak{v}$ in questa direzione, $\dot{\mathfrak{v}} = d\mathfrak{v}/dt$. La (142) mostra che un oscillatore di Hertz *in moto* possiede un momento magnetico $[\mathfrak{p}\mathfrak{v}/c]$ e che quindi per la rappresentazione del suo campo sono necessari *entrambi* i vettori $\mathfrak{Z}$ e $\mathfrak{Z}'$.

Se poniamo $H = F - M$ le equazioni di campo (2) si scrivono $\mathrm{Div}F = s + \mathrm{Div}M$. Dalla (123) allora per la (125) si ha $W\varphi = -s - \mathrm{Div}M$. Suddividiamo $\varphi$ in due parti $\varphi_1 + \varphi_2$ in modo tale che siano $W\varphi_1 = -s$, $W\varphi_2 = -\mathrm{Div}M$, soddisfatte per $WZ = -M$. Concludiamo quindi: *Il campo $F$ si può rappresentare con un tetra- ed un esapotenziale*

$$\begin{gathered}F = \mathrm{Rot}\varphi + \mathrm{RotDiv}Z,\ \varphi = \int\frac{[s]}{r}dV, Z = \int\frac{[M]}{r}dV,\\ (dV \text{ elemento di volume spaziale, } [\ ] \text{ valore al tempo } t - r/c)\end{gathered} \tag{144'}$$

*dei quali il primo è in relazione con la tetracorrente, il secondo con l'esapolarizzazione.* Dalla (143) e (143') si ottiene (trascurando i momenti di second'ordine)

$$\mathfrak{P} = N\sum e\mathfrak{s},\ \mathfrak{M} = \left[\mathfrak{P}\frac{\mathfrak{v}}{c}\right] + \frac{1}{2}N\sum e\left[\mathfrak{s}\frac{\mathfrak{u}}{c}\right]$$

($N$ numero delle molecole nell'unità di volume). Questa è la ben nota rappresentazione del campo nella teoria degli elettroni.[24]) Dal su menzionato momento magnetico di una molecola polarizzata in moto discende l'azione magnetica della corrente di Röntgen.

## 4.

*I raggi.* Il caso nel quale per condizioni iniziali date il campo debba essere determinato in ogni particolare non corrisponde alle situazioni che si presentano in

[23] Vedasi M. Abraham, Theorie der Elektrizität 2. $4^a$ edizione. Formula (72c).

[24] H.A. Lorentz, loc. cit.; W. Dällenbach, Ann. d. Phys. **58.** 523. 1919.

generale nell'ottica. In essa capita piuttosto di conoscere la velocità dei "raggi", per poter stimare gli effetti d'interferenza introdotti dal moto e dal campo gravitazionale.

Con gli sviluppi precedenti abbiamo ottenuto l'apparato formale utilizzato nell'ottica elettromagnetica classica. Nella trattazione del nostro attuale problema possiamo attenerci completamente ai metodi classici[25]. Come abbiamo visto, se scegliamo il tensore di Hertz come mezzo di rappresentazione del campo elettromagnetico, ci basta occuparci solo dell'equazione d'onda e non abbiamo da tener conto di nessuna condizione aggiuntiva. Per $Z$ facciamo l'ipotesi

$$Z = A \cos \kappa E + a \tag{145}$$

($\kappa$ costante, $E$ uno scalare, $A$ ed $a$ tensori lineari di secondo grado). Per la regola 3 della seconda parte si ha (trascurando ancora le parentesi degli indici)

$$Z_l = A_l \cos \kappa E - \kappa A E_l \sin \kappa E + a_l,$$

$$\Box Z = Z_l{}^l = A_l{}^l \cos \kappa E - 2\kappa A_l E^l \sin \kappa E - \kappa A E_l{}^l \sin \kappa E - \kappa^2 A E_l E^l \cos \kappa E + a_l{}^l,$$

e quindi per la (92) e la (113)

$$\begin{aligned} WZ = -\kappa^2 A E_l E^l \cos \kappa E - 2\kappa (A_l E^l + \frac{1}{2} AWE) \sin \kappa E \\ + \cos \kappa E \cdot WA + Wa = 0. \end{aligned} \tag{146}$$

Per raggi s'intendono linee che, se si trascura il fenomeno della diffrazione, possono confinare lateralmente complessi luminosi, e che si comportano indipendentemente l'una dall'altra. Perché si possa prescindere dalla diffrazione le lunghezze d'onda devono essere piccole rispetto alle dimensioni dell'apparato. Per formulare matematicamente quest'ipotesi diamo al parametro $\kappa$ la dimensione e l'ordine di grandezza del reciproco d'una lunghezza d'onda $\lambda$. Le derivate prime di $E$ hanno allora l'ordine di grandezza dei coseni direttori e dell'indice di rifrazione, quindi l'ordine di grandezza 1. Per un modo d'esprimersi meno pesante assumeremo inoltre che $ds$ (e quindi anche $d\sigma$) e le coordinate $x$ abbiano le dimensioni di lunghezze. ($g_{ik}$, $g^{ik}$, $\gamma_{ik}$, $\gamma^{ik}$ sono allora adimensionali). Chiamiamo una grandezza lentamente variabile[26] se la sua variazione relativa e quella delle sue derivate (ordinarie) è piccola sull'intervallo $\lambda$, cioè $\lambda P'/P \ll 1$, $\lambda P''/P' \ll 1$ ecc., dove $P, P', P''$ ecc. rappresentano l'ordine di grandezza della quantità considerata e delle sue derivate. Allora l'ipotesi che dobbiamo fare perché si possa parlare di raggi suona così: $A$, $E', \gamma_{ik}$ siano lentamente variabili, $a$ sia piccolo rispetto ad $A$. Inoltre le coordinate possono essere scelte in modo che $g_{ik}$ ed $u_i$ siano (al più) dell'ordine 1. (Ciò vale allora anche per $g^{ik}$ ed $u^i$). Se $\gamma$ è di quest'ordine, abbiamo

$$\begin{aligned} \frac{\lambda A'}{A} \ll 1,\ \frac{\lambda A''}{A'} \ll 1,\ E' \sim 1,\ \lambda E'' \ll 1,\ \gamma \sim 1,\ \lambda \gamma' \ll 1, \\ \frac{\lambda \gamma''}{\gamma'} \ll 1,\ a \ll A. \end{aligned} \tag{147}$$

[25]Vedasi per esempio J. Hadamard, Leçons sur la propagation des ondes, Paris 1902, pagg. 331 segg.; H.A. Lorentz, Abh. über theor. Physik, pag. 415.

[26]H.A. Lorentz, loc. cit.

Lenta variabilità di $A$ e piccolezza di $a$ (che sarà rapidamente variabile) significano che si possono trascurare i fenomeni al bordo, l'ipotesi su $E'$ limite alla curvatura del fronte d'onda (diffrazione in prossimità del punto immagine), lenta variabilità di $\gamma_{ik}$ vuol dire: le velocità ed i campi di gravitazione (che sono rapidamente variabili) suscitati dall'azione meccanica e gravitazionale della luce sono così piccoli che si può trascurare la loro reazione sulla propagazione della luce, e per $g_{ik}$ ed $u_i$ si devono intendere solo le quantità provocate dall'esterno (lentamente variabili).

L'ordine di grandezza della derivata prima covariante è per la (73) $P' + \gamma' P$, quello dalla seconda quindi $(P' + \gamma' P)' + \gamma'(P' + \gamma' P) \sim P'' + \gamma'' P + \gamma' P' + \gamma'^2 P$ (per uno scalare si deve porre $P = O$), quello del tensore di curvatura per la (82) è $\gamma'' + \gamma'^2$ e quindi quello di $WZ$ per le (92), (113), (146) e (147)

$$\text{(146')} \qquad \frac{A}{\lambda^2} + \frac{1}{\lambda}\left(A' + \gamma' A + AE''\right) + \left(A'' + \gamma' A' + \gamma'' A + \gamma'^2 A\right) + (a)$$

($(a)$ si costruisce analogamente all'espressione precedente). Se in essa trascuriamo le derivate seconde e i prodotti delle derivate prime delle quantità lentamente variabili, come pure il termine di diffrazione $a$, dobbiamo considerare nella (146) solo i termini con $\kappa$ e con $\kappa^2$ che, come si vede dalle (147) e (146'), sono di ordine di grandezza diverso. Pertanto la (146) si scompone nelle due equazioni

$$\text{(148)} \qquad E_l E^l = \gamma^{lr} \frac{\partial E}{\partial x^l} \frac{\partial E}{\partial x^r} = 0,$$

$$\text{(149)} \qquad A_l E^l = -\frac{1}{2} AWE.$$

La (148) è l'equazione differenziale di Jacobi di un problema "meccanico" con la funzione di Hamilton $H = \frac{1}{2}\gamma^{lr} p_l p_r$, dove $p_l = \partial E / \partial x^l$ sono gli impulsi. Secondo le equazioni canoniche si ha

$$\text{(150)} \qquad \frac{dx^i}{d\tau} = \frac{\partial H}{\partial p^i} = \gamma^{ir} p_r = p^i = E^i, (\tau = \text{parametro}) .$$

Quindi

$$H = \frac{1}{2}\gamma_{lr} \frac{dx^l}{d\tau} \frac{dx^r}{d\tau},$$

sicché le equazioni di Lagrange che discendono dal problema variazionale $\delta \int H d\tau$ sono le equazioni

$$\text{(151)} \qquad \frac{d^2 x^i}{d\tau^2} + \left\{ \begin{matrix} i \\ kl \end{matrix} \right\} \frac{dx^k}{d\tau} \frac{dx^l}{d\tau} = 0$$

delle linee geodetiche[27] (della varietà con l'elemento di linea $d\sigma$), e in particolare, poiché per le (148) e (150)

$$\text{(152)} \qquad \gamma_{lr} \frac{dx^l}{d\tau} \frac{dx^r}{d\tau} = 0,$$

[27] Vedasi per esempio W. Pauli jun., loc. cit. Nr. 15.

si tratta di *linee geodetiche nulle.*

A causa della variabilità lenta di $\gamma^{lr}$ si può risolvere la (148) con funzioni $E$ lentamente variabili. Se sostituiamo la soluzione nella (149), per la (150) sussistono, tenendo conto della definizione (72) della derivata covariante, equazioni della forma

$$\frac{dA}{d\tau} = \text{ funzione lineare omogenea di } A, \tag{153}$$

cioè consuete equazioni differenziali lineari omogenee per le componenti di $A$, i coefficienti delle quali si compongono con le derivate prime e seconde di $E$ e con i simboli a tre indici (costruiti con $\gamma_{ik}$), quindi sono funzioni lentamente variabili note. Dalla (153) si determinano le variazioni dell'ampiezza $A$ lungo le linee geodetiche nulle, quando siano noti i valori iniziali per un $\tau$. Questi valori iniziali possono esser scelti *arbitrariamente* linea nulla per linea nulla, sotto la restrizione che essi siano lentamente variabili. Ma a prescindere da questo le ampiezze sono del tutto indipendenti tra loro. Per la linearità e per l'omogeneità dell'equazione (153) l'annullarsi dell'ampiezza in un punto ha per conseguenza l'annullarsi sull'intera linea nulla che passa da questo punto. *Perciò* le *linee geodetiche nulle possono confinare regioni* d'*universo* al *di fuori delle quali* le *ampiezze si annullano.* Dalla (148) e dalla (150) segue inoltre

$$\frac{dE}{d\tau} = 0, \tag{148'}$$

cioè la fase $E$ resta costante lungo ogni linea nulla.

Dobbiamo ancora dimostrare che l'ultima delle disequazioni (147) può essere soddisfatta. Per le (148) e (149) la (146) si riduce a

$$Wa = -WA \cdot \cos \kappa E. \tag{154}$$

Dobbiamo quindi risolvere l'equazione delle onde non omogenea. Questa soluzione può essere effettuata per mezzo del teorema di Green (119) in linea di principio allo stesso modo come nella teoria classica. La soluzione sarà rappresentabile mediante un integrale della forma[28]

$$a = \int (G \cos \kappa EWA)_L dx^1 dx^2 dx^3,$$

dove $G$ è una funzione che, come nella teoria classica, è infinita del prim'ordine nell'origine, e l'indice $L$ denota il cono del passato uscente dall'origine. La teoria delle serie di Fourier ci insegna che $a$ può esser reso arbitrariamente piccolo aumentando $\kappa$, cioè diminuendo la lunghezza d'onda[29]. Siamo quindi pervenuti al risultato che i raggi nei corpi in moto sono rappresentati dalle linee geodetiche nulle della varietà con l' elemento di linea $d\sigma^2 = \gamma_{ik} dx^i dx^k$. Per la (148') la velocità del raggio è uguale alla velocità di fase lungo il raggio.

Da $d\sigma^2 = 0$ segue per la (26) $ds^2 = -[1 - 1/(\epsilon\mu)](u_i dx^i)^2$. Per $\epsilon\mu > 1$ le linee d'universo dei raggi hanno quindi direzione temporale. Esiste perciò una *tetravelocità del raggio*, che per la (15) e la (150) (reintroducendo le parentesi per gli indici) è uguale a

$$w^i = \frac{E^{(i)}}{\sqrt{-g_{mn} E^{(m)} E^{(n)}}}, \; E^{(i)} = \gamma^{ir} \frac{\partial E}{\partial x^r}. \tag{155}$$

Dall'esistenza d'una tetravelocità segue[30] la validità del teorema di addizione delle

[28] M. v. Laue, Berl. Ber. 1922, p. 118.

[29] Vedi per esempio M. Born, Dynamik der Kristallgitter, appendice.

[30] W. Pauli jun., loc. cit., Nr. 25.

velocità.

Come esempio per la propagazione della luce in un corpo in presenza d'un campo gravitazionale prendiamo il caso di un mezzo in quiete in un campo centrifugo (esperimento di Harress). Usando coordinate polari e restringendosi al piano si ha

$$ds^2 = dx_1{}^2 + x_1{}^2 dx_2{}^2 - \frac{2\omega}{c} x_1{}^2 dx_2 dx_4 - \left(1 - \frac{\omega^2 x_1{}^2}{c^2}\right) dx_4{}^2 \tag{156}$$

($x_1$ raggio vettore, $x_2$ angolo polare, $\omega$ velocità angolare). Poiché la materia è in quiete, si ha $u^1 = u^2 = u^3 = 0$, $u^4 = 1/\sqrt{-g_{44}} = 1/\sqrt{1 - \frac{\omega^2 x_1{}^2}{c^2}}$. Le componenti covarianti sono

$$u_1 = 0,\ u_2 = g_{24} u^4 = -\frac{\frac{\omega}{c} x_1{}^2}{\sqrt{1 - \frac{\omega^2 x_1{}^2}{c^2}}},\ u_4 = g_{44} u^4 = -\sqrt{1 - \frac{\omega^2 x_1{}^2}{c^2}}.$$

Da qui secondo la (18) si trova per i $\gamma_{ik}$

$$\gamma_{22} = \frac{\left(1 - \frac{\omega^2 x_1{}^2}{\epsilon\mu c^2}\right) x_1{}^2}{1 - \frac{\omega^2 x_1{}^2}{c^2}},\ \gamma_{24} = -\frac{\omega}{\epsilon\mu c} x_1{}^2,\ \gamma_{44} = -\frac{1}{\epsilon\mu}\left(1 - \frac{\omega^2 x_1{}^2}{c^2}\right).$$

Le restanti $\gamma_{ik}$ sono uguali alle $g_{ik}$. Sarà quindi

$$\begin{aligned} d\sigma^2 = dx_1{}^2 + x_1{}^2 \cdot \frac{1 - \frac{\omega^2 x_1{}^2}{\epsilon\mu c^2}}{1 - \frac{\omega^2 x_1{}^2}{c^2}} dx_2{}^2 - \frac{2\omega}{\epsilon\mu c} x_1{}^2 dx_2 dx_4 \\ - \frac{1}{\epsilon\mu}\left(1 - \frac{\omega^2 x_1{}^2}{c^2}\right) dx_4^2. \end{aligned} \tag{157}$$

Trascurando $\omega^2$ le (156) e (157) si riducono a

$$ds^2 = dx_1{}^2 + x_1{}^2 dx_2{}^2 - \frac{2\omega}{c} x_1{}^2 dx_2 dx_4 - dx_4{}^2, \tag{156'}$$

$$d\sigma^2 = dx_1{}^2 + x_1{}^2 dx_2{}^2 - \frac{2\omega}{\epsilon\mu c} x_1{}^2 dx_2 dx_4 - \frac{dx_4{}^2}{\epsilon\mu}. \tag{157'}$$

Da $ds^2 = 0$ si derivano i fenomeni nel vuoto (esperimento di Sagnac[31]). In questo caso la differenza dei tempi di circolazione di due raggi che girano in verso opposto è $\Delta t = 4\omega F/c^2$ ($F$ superficie circondata). Se ora si sostituisce nella (156') $x_4$ con $x_4/\sqrt{\epsilon\mu}$ ed $\omega$ con $\omega/\sqrt{\epsilon\mu}$, si ottiene la (157'). Ma con questa sostituzione la formula per $\Delta t$ va in se stessa. Essa vale quindi anche in un mezzo ponderabile[32].

Berlin, Institut für theoretische Physik.

(ricevuto il 28 maggio 1923)

---

[31] P. Langevin, Compt. Rend. 173, 831, 1921; R. Ortvay, Phys. Zeitschr. **23**, 176, 1922.

[32] M. v. Laue, Relativitätstheorie I, §24 d.