L'elettrodinamica dei corpi in moto secondo la teoria della relatività[1][2]

Richard Grammel

L'espressione univoca della forza elettrodinamica e della legge dell'energia nello spazio vuoto non si può estendere senz'altro, per lo meno non univocamente, alla materia in moto. Nei loro tentativi di realizzare questa estensione Minkowski[3] e Abraham[4] giungono a proposte diverse. Si dà la preferenza a quella di Abraham, poiché essa soddisfa la legge ritenuta fondamentale dell'inerzia dell'energia[5]. Se si prescinde dal termine aggiuntivo[6] nella forza ponderomotrice di Minkowski (si può sostituire il suo effetto mediante la variabilità della massa inerziale[7]), si può, come si dimostrerà, completare questa proposta in modo tale che anch'essa soddisfi la legge dell'inerzia dell'energia. Le stesse condizioni della proposta di Abraham e di quella di Minkowski modificata sono poi soddisfatte anche da una terza, che appare quindi accanto a quelle due con lo stesso diritto.

Utilizzeremo le notazioni e le regole di calcolo del simbolismo vettoriale tetradimensionale di Sommerfeld e Laue[8], e ci

---

[1]Annalen der Physik **41**, 570 (1913).

[2]*Tradotto in collaborazione con L. Mihich.*

3 H.Minkowski, Zwei Abhandlungen über die Grundgleichungen der Elektrodynamik §§13 e segg. Leipzig 1910. *Le citazioni si riferiscono a questo estratto.*

4M.Abraham, Rend. Palermo **28.** p.1-28, 1909; **30.** p.33-46, 1910.

[5]M. Laue, Das Relativitätsprinzip, 2ª ed. 1913. p. 164.

[6]*H.Minkowski, l.c. p. 44, Eq.(98)*

[7]*M. Abraham, Rend. Palermo* **30.** *§4.*

[8]*M. Laue, l.c. p.66-87. Gli sviluppi seguenti risultano un po' più brevi se esposti per mezzo delle diadi di Gibbs. Il passaggio all'elegante analisi matriciale di Minkowski si esegue ovunque facilmente.*

baseremo su un tensore d'universo non simmetrico; infatti il tensore simmetrico annullerebbe completamente la differenza tra le singole proposte. Le due nuove regole di calcolo (6) e (7) qui necessarie saranno presentate nel § 1, per non dover interrompere la successiva trattazione.

§ 1 Regole di calcolo e notazioni.

Si presuppongano le cosiddette unità razionali, e l'unità della coordinata temporale $l=it$ sia così determinata, che l'unità campione misurata elettrostaticamente sia uguale a quella elettromagnetica. I tetravettori Y e P indichino, come al solito, la tetravelocità e la tetracorrente, i due esavettori $\mathfrak{M}$ e $\mathfrak{B}$ riassumano i vettori di campo tridimensionali ($\mathfrak{B};-i\mathfrak{E}$) e ($\mathfrak{H};-i\mathfrak{D}$). La velocità delle cariche convettive, ossia della materia, sia $\mathfrak{v}$.

Per mezzo della tetravelocità Y e di un tetravettore Ω da definirsi in seguito si può costruire un tensore d'universo U non simmetrico secondo lo schema

(1) $$U_{jk} = \Omega_j Y_k, \quad (j,k = x,y,z,l) .$$

Siano poi

(2) $$T^{(1)}, \text{ dove } T^{(1)}_{jk} = \mathfrak{B}_{jx}\mathfrak{M}_{kx} + \mathfrak{B}_{jy}\mathfrak{M}_{ky} + \mathfrak{B}_{jz}\mathfrak{M}_{kz} + \mathfrak{B}_{jl}\mathfrak{M}_{kl},$$

(3) $$T^{(2)}, \quad " \quad T^{(2)}_{jk} = \overset{*}{\mathfrak{B}}_{jx}\overset{*}{\mathfrak{M}}_{kx} + \overset{*}{\mathfrak{B}}_{jy}\overset{*}{\mathfrak{M}}_{ky} + \overset{*}{\mathfrak{B}}_{jz}\overset{*}{\mathfrak{M}}_{kz} + \overset{*}{\mathfrak{B}}_{jl}\overset{*}{\mathfrak{M}}_{kl},$$

(4) $$T^{(3)}, \quad " \quad T^{(3)}_{jk} = T^{(1)}_{kj},$$

(5) $$T^{(4)}, \quad " \quad T^{(4)}_{jk} = T^{(2)}_{kj},$$

quattro tensori non simmetrici, formati con i vettori di campo $\mathfrak{M}$ e $\mathfrak{B}$ e con i loro duali $\overset{*}{\mathfrak{M}}$ e $\overset{*}{\mathfrak{B}}$.

Grazie a un semplice calcolo intermedio, che qui tralasciamo, si trova la prima delle relazioni che seguono e da essa si deriva facilmente, per mezzo dell'identità $(\mathfrak{F}\mathfrak{G}) = (\overset{*}{\mathfrak{F}}\overset{*}{\mathfrak{G}})$, la seconda:

(6) $$\Delta\iota\upsilon T^{(1)} = -[\mathfrak{B},\Delta\iota\upsilon\mathfrak{M}] + [\overset{*}{\mathfrak{M}},\Delta\iota\upsilon\overset{*}{\mathfrak{B}}] + \Gamma\rho\alpha\delta_{\mathfrak{B}}(\mathfrak{B}\mathfrak{M}),$$

(7) $\Delta\iota\upsilon T^{(2)} = - [\mathfrak{B}^*, \Delta\iota\upsilon\mathfrak{M}^*] + [\mathfrak{M}, \Delta\iota\upsilon\mathfrak{B}] + \Gamma\rho\alpha\delta_{\mathfrak{B}}(\mathfrak{B}\mathfrak{M})$.

Con il simbolo $\Gamma\rho\alpha\delta_{\mathfrak{B}}$ si intende che l'operazione $\Gamma\rho\alpha\delta$ si deve applicare solo a $\mathfrak{B}$. Per i quattro tensori d'universo fondamentali

$$(8)\qquad \begin{cases} T' = \frac{1}{2}\{T^{(4)} - T^{(3)}\}, \\ T'_c = \frac{1}{2}\{T^{(2)} - T^{(1)}\}, \qquad T'_{c_{jk}} = T'_{kj} \end{cases}$$

$$(9)\qquad \begin{cases} T'' = \frac{1}{2}\{T^{(2)} - T^{(3)}\}, \\ T''_c = \frac{1}{2}\{T^{(4)} - T^{(1)}\}, \qquad T''_{c_{jk}} = T''_{kj} \end{cases}$$

si può quindi scrivere[9]

$$(10)\ \Delta\iota\upsilon T' = \Delta\iota\upsilon T'_c = \frac{1}{2}\{[\mathfrak{B}, \Delta\iota\upsilon\mathfrak{M}] + [\mathfrak{M}, \Delta\iota\upsilon\mathfrak{B}] - [\mathfrak{B}^*, \Delta\iota\upsilon\mathfrak{M}^*] - [\mathfrak{M}^*, \Delta\iota\upsilon\mathfrak{B}^*]\},$$

$$(11)\ \Delta\iota\upsilon T'' = [\mathfrak{M}, \Delta\iota\upsilon\mathfrak{B}] - [\mathfrak{B}^*, \Delta\iota\upsilon\mathfrak{M}^*] + \frac{1}{2}\Gamma\rho\alpha\delta_{\mathfrak{B}}(\mathfrak{B}\mathfrak{M}) - \frac{1}{2}\Gamma\rho\alpha\delta_{\mathfrak{M}}(\mathfrak{B}\mathfrak{M}),$$

$$(12)\ \Delta\iota\upsilon T''_c = [\mathfrak{B}, \Delta\iota\upsilon\mathfrak{M}] - [\mathfrak{M}^*, \Delta\iota\upsilon\mathfrak{B}^*] + \frac{1}{2}\Gamma\rho\alpha\delta_{\mathfrak{M}}(\mathfrak{B}\mathfrak{M}) - \frac{1}{2}\Gamma\rho\alpha\delta_{\mathfrak{B}}(\mathfrak{B}\mathfrak{M}),$$

da cui segue ancora

$$(13)\qquad \Delta\iota\upsilon\{T' + T'_c\} = \Delta\iota\upsilon\{T'' + T''_c\} = 2\ \Delta\iota\upsilon T'.$$

Nello spazio vuoto $\mathfrak{M}$ va in B, T' e T'' vanno in T^0, T'_c e T''_c vanno in T^0_c, ed è evidentemente $T^0 = T^0_c$.

I tensori d'universo T', T'_c, T'', T''_c sono, a prescindere da T^0, non simmetrici, ma soddisfano tutti la condizione di ortogonalità

$$(14)\qquad T_{xx} + T_{yy} + T_{zz} + T_{ll} = 0.$$

Per il tensore U questa proprietà sarà dimostrata in seguito.

§ 2. Forza ed energia nello spazio vuoto.

Per lo spazio vuoto le equazioni fondamentali della teoria elettronica si scrivono

---

[9] *L'equazione (10) è equivalente alla relazione (133) di M. Laue, l.c. p. 86.*

$$(15)\qquad \begin{cases} \Delta\iota\upsilon\ \mathfrak{M} = P, \\ \Delta\iota\upsilon\ \overset{*}{\mathfrak{M}} = 0. \end{cases}$$

La tetraforza elettrica e rispettivamente magnetica

$$(16)\qquad F = [P\mathfrak{M}], \quad \Gamma = -i[P\overset{*}{\mathfrak{M}}]$$

hanno le prime tre componenti (dinamiche)

$$(17)\qquad \rho\{\mathfrak{E} + [\mathfrak{v}\mathfrak{H}]\}, \quad \rho\{\mathfrak{H} - [\mathfrak{v}\mathfrak{E}]\}$$

e la quarta (energetica)

$$(18)\qquad \rho(\mathfrak{v}\mathfrak{E}), \quad \rho(\mathfrak{v}\mathfrak{H}) \ .$$

La proposta di F per la tetraforza, come risulta dalla trasformazione ad un riferimento a riposo, e parimenti la proposta della (18) per il lavoro di questa forza, sono una conseguenza[10] dell'interpretazione di $\mathfrak{E}$ come forza motrice sull'unità di carica a riposo.

La relazione che discende dalle (10) e (15)

$$(19)\qquad F = \Delta\iota\upsilon T^{\Theta}$$

ovvero esplicitamente

$$(20)\qquad \begin{cases} \rho\{\mathfrak{E}_j + [\mathfrak{v}\mathfrak{H}]_j\} = F_j = \dfrac{\partial X_j}{\partial x} + \dfrac{\partial Y_j}{\partial y} + \dfrac{\partial Z_j}{\partial z} - \dfrac{\partial \mathfrak{S}_j}{\partial t}, (j=x,y,z) \\ \rho(\mathfrak{v}\mathfrak{E}) = F_t = -\operatorname{div}\mathfrak{S} - \dfrac{\partial E}{\partial t} \end{cases}$$

dove X_x, $X_y = Y_x$ ..., $\mathfrak{S}$ e E rappresentano gli sforzi di Maxwell, la radiazione di Poynting e la densità d'energia, esprime quindi la *legge dell'impulso e dell'energia*, con la quale si attribuisce al campo una densità di impulso elettromagnetico

$$(21)\qquad \mathfrak{g} = \mathfrak{S}.$$

E' degno di nota il fatto che per la seconda tetraforza Γ non esiste un'interpretazione analoga.

§ 3. La forza ponderomotrice e il teorema dell'energia per corpi ponderabili.

---

[10] A.Sommerfeld, Ann. d. Phys. **32.** p.776. 1910.

Gli sviluppi precedenti, di contenuto noto, devono ora essere estesi ai corpi ponderabili. Al posto dell'assunzione (19), fuori discussione, non esiste ora una proposta unica. Einstein e Laub[11] hanno eseguito la costruzione del valor medio per la forza elementare (16) della teoria elettronica; sono tuttavia giunti ad un'altra espressione rispetto a quelle di Minkowski ed Abraham, in ogni caso ad un'espressione che non sembra soddisfare il principio di relatività.

Saranno qui enunciate *le* proposte che adempiono alle seguenti cinque condizioni:

1. *Soddisfano il principio di relativita' e*
2. *sono la generalizzazione più semplice del postulato* (19).
3. *Il tensore d'universo corrispondente ubbidisce alla condizione di ortogonalita'* (14) *e*
4. *nel caso a riposo è simmetrico, e in particolare*
5. a) $E = \frac{1}{2}\{(\mathfrak{E}\mathfrak{D}) + (\mathfrak{H}\mathfrak{B})\}$,

   b) $\mathfrak{S} = [\mathfrak{E}\mathfrak{H}]$,

   c) $\mathfrak{g} = [\mathfrak{E}\mathfrak{H}]$,

   d) $\mathfrak{T} = \mathfrak{E}\cdot\mathfrak{D}_n + \mathfrak{H}\cdot\mathfrak{B}_n - n\cdot E$

indicano rispettivamente la densità d'energia elettromagnetica, la radiazione di Poynting, la densità di impulso elettromagnetica e la forza superficiale dello sforzo di Maxwell (n è un vettore unitario nella direzione della normale esterna alla superficie).

La condizione 3. è una conseguenza delle condizioni 1. e 5. La condizione 4. è derivabile da ipotesi più semplici, come Mie[12] ha mostrato di recente.

La summenzionata proposta di Minkowski non soddisfa alla 5.c)[13]; invece la proposta di Abraham soddisfa tutte e cinque le

---

[11] A.Einstein e J.Laub, Ann. d. Phys **26.** p.541-550. 1908.

[12] G.Mie, Ann. d. Phys. **37.** p.533. 1912.

[13] *Per corpi a riposo secondo Minkowski l.c. p.42 vale infatti*

$$\mathfrak{g}_x = X_t = \varepsilon\mu\Omega_1 = \varepsilon\mu\,[\mathfrak{E}\mathfrak{H}]_x \text{ ecc..}$$

condizioni e risulta contenuta tale quale nella proposta seguente.

Le equazioni fondamentali dell'elettrodinamica nella materia si scrivono:

$$\left\{\begin{aligned} &\Delta\iota\upsilon\ \mathfrak{B} = P, \\ &\Delta\iota\upsilon\ \mathfrak{M}^{*} = 0 \end{aligned}\right. \tag{22}$$

assieme a tre equazioni aggiuntive, la cui forma tetradimensionale è inessenziale per il seguito.

Mediante la tetravelocità Y Minkowski definisce le "forze a riposo"

$$\Phi = [Y\mathfrak{M}] = \kappa\{\mathfrak{E}_x + [\mathfrak{v}\mathfrak{B}]_x;...;...;i(\mathfrak{v}\mathfrak{E})\}, \tag{23}$$

$$\Psi = -i\ [Y\mathfrak{B}^{*}] = \kappa\{\mathfrak{H}_x - [\mathfrak{v}\mathfrak{D}]_x;...;...;i(\mathfrak{v}\mathfrak{H})\}, \tag{24}$$

$$\kappa = \frac{1}{\sqrt{1 - \mathfrak{v}^2}}$$

e costruisce[14] da qui la "radiazione a riposo"

$$\Omega = [Y\Phi\Psi], \tag{25}$$

che soddisfa la condizione[15]

$$(Y\Omega) = 0. \tag{26}$$

Si hanno ora *sei* proposte, che a causa della (13) si riducono immediatamente a *tre*, e soddisfano le cinque condizioni, a eccezione delle 4., 5.b) ovvero 5.c), vale a dire:

$$\left\{\begin{aligned} &\bar{F}' = \Delta\iota\upsilon\ T' = \Delta\iota\upsilon\ T'_c = \tfrac{1}{2}\ \Delta\iota\upsilon\{T' + T'_c\} = \tfrac{1}{2}\ \Delta\iota\upsilon\{T'' + T''_c\}, \\ &\bar{F}'' = \Delta\iota\upsilon\ T'', \\ &\bar{F}''' = \Delta\iota\upsilon\ T''_c. \end{aligned}\right. \tag{27}$$

In caso di quiete si ha con $\mathfrak{D} = \varepsilon\mathfrak{E}$, $\mathfrak{B} = \mu\mathfrak{H}$

---

[14]*Riguardo alla costruzione di tale prodotto vettoriale si veda M. Laue l.c. p. 77.*

[15]H. Minkowski, *l.c. p. 34, Eq. (59).*

$$
(28)\quad \begin{cases} T'_{jx} = T''_{jx} = T'''_{jx} = X_j \ (j = x,y,z), \\ T'_{ll} = T''_{ll} = T'''_{ll} = E, \\ T'_{lj} = T'_{jl} = -i\dfrac{1+\varepsilon\mu}{2}\,\mathfrak{S}_j, \\ T''_{lj} = T''_{c\,jl} = -i\mathfrak{S}_j, \quad T''_{jl} = T''_{c\,lj} = -i\varepsilon\mu\mathfrak{S}_j. \end{cases}
$$

Per $\mathfrak{v} = 0$, Ω coincide con la radiazione di Poynting $\mathfrak{S}$ ed il tensore definito nella (1), che per la (26) soddisfa sempre la condizione di ortogonalità

$$
(29)\qquad U_{xx} + U_{yy} + U_{zz} + U_{ll} = 0,
$$

sarà allora

$$
(30)\quad \begin{cases} U_{xj} = U_{yj} = U_{zj} = U_{lk} = 0 \\ U_{jl} = i\mathfrak{S}_j \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} j = x,y,z \\ k = x,y,z,l \end{pmatrix}.
$$

Tutte le condizioni saranno soddisfatte dalle seguenti tre proposte

$$
(31)\quad \begin{cases} F' = \Delta\iota\upsilon\ S' \equiv \Delta\iota\upsilon\{T' + \dfrac{\varepsilon\mu - 1}{2}(U + U_c)\}, \\ F'' = \Delta\iota\upsilon\ S'' \equiv \Delta\iota\upsilon\{T'' + (\varepsilon\mu - 1)U\}, \\ F''' = \Delta\iota\upsilon\ S''_c \equiv \Delta\iota\upsilon\{T''_c + (\varepsilon\mu - 1)U_c\}. \end{cases}
$$

Il tensore d'universo U richiede un piccolo calcolo intermedio.

Si introducano le forze $\mathfrak{E}'$ e $\mathfrak{H}'$ sulle unità di carica elettrica e magnetica in moto per mezzo di

$$
\mathfrak{E}' = \mathfrak{E} + [\mathfrak{v}\mathfrak{B}],
$$

$$
\mathfrak{H}' = \mathfrak{H} - [\mathfrak{v}\mathfrak{D}],
$$

si ponga

$$
\mathfrak{W}' = \kappa^2\{[\mathfrak{E}'\mathfrak{H}'] + \kappa^2\mathfrak{v}(\mathfrak{v}[\mathfrak{E}'\mathfrak{H}'])\}
$$

e si ricordi che è

$$
(\mathfrak{v}\mathfrak{E}) = (\mathfrak{v}\mathfrak{E}'), \qquad (\mathfrak{v}\mathfrak{H}) = (\mathfrak{v}\mathfrak{H}') ;
$$

si trova allora

$$
[\Phi\Psi] = \{\kappa^2[\mathfrak{E}'\mathfrak{H}']; \qquad i\kappa^2[\mathfrak{v}[\mathfrak{E}'\mathfrak{H}']]\}
$$

e si ha quindi

$$(32)\quad \begin{cases} \Omega_j = \kappa^3\left\{\dfrac{1}{\kappa^2}[\mathfrak{E}'\mathfrak{H}']_j + \mathfrak{v}_j(\mathfrak{v}[\mathfrak{E}'\mathfrak{H}'])\right\} = \dfrac{1}{\kappa}\,\mathfrak{W}'_j \;(j = x,y,z), \\ \Omega_l = \kappa^3 i(\mathfrak{v}[\mathfrak{E}'\mathfrak{H}']) = \dfrac{i}{\kappa}(\mathfrak{v}\mathfrak{W}'). \end{cases}$$

Si ponga infine

$$\mathfrak{W} = (\varepsilon\mu - 1)\mathfrak{W}',$$

$$\mathfrak{U} = [\mathfrak{D}\mathfrak{B}],$$

$$\bar{X}'_x = \mathfrak{E}_x\mathfrak{D}_x - \frac{1}{2}(\mathfrak{E}\mathfrak{D}) + \mathfrak{H}_x\mathfrak{B}_x - \frac{1}{2}(\mathfrak{H}\mathfrak{B}),$$

$$\bar{X}'_y = \bar{Y}'_x = \frac{1}{2}\{\mathfrak{E}_x\mathfrak{D}_y + \mathfrak{E}_y\mathfrak{D}_x + \mathfrak{H}_x\mathfrak{B}_y + \mathfrak{H}_y\mathfrak{B}_x\},$$

$$. \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; .$$

$$\bar{X}''_x = \bar{X}'''_x = \bar{X}'_x,$$

$$\bar{X}''_y = \bar{Y}''_x = \mathfrak{E}_y\mathfrak{D}_x + \mathfrak{H}_y\mathfrak{B}_x,$$

$$\bar{Y}''_x = \bar{X}'''_y = \mathfrak{E}_x\mathfrak{D}_y + \mathfrak{H}_x\mathfrak{B}_y,$$

$$. \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; .,$$

si hanno così per i corpi *in moto* i seguenti valori per gli sforzi di Maxwell, per la radiazione di Poynting, per le densità di impulso e di energia elettromagnetiche

$$(33)\quad \begin{cases} X'_x = \bar{X}'_x + \mathfrak{v}_x\mathfrak{W}_x, \qquad Y'_x = \bar{Y}'_x + \dfrac{1}{2}\{\mathfrak{v}_x\mathfrak{W}_y + \mathfrak{v}_y\mathfrak{W}_x\}, \\ X'_y = Y'_x \; . \; . \; ., \\ \mathfrak{S}' = \mathfrak{g}' = \dfrac{1}{2}\{\mathfrak{U} + \mathfrak{S} - \mathfrak{W} - \mathfrak{v}(\mathfrak{v}\mathfrak{W})\}, \\ E' = E - (\mathfrak{v}\mathfrak{W}). \end{cases}$$

$$(34)\quad \begin{cases} X''_x = \bar{X}''_x + \mathfrak{v}_x\mathfrak{W}_x, \qquad Y''_x = \bar{Y}''_x + \mathfrak{v}_y\mathfrak{W}_x, \\ X''_y = \bar{X}''_y + \mathfrak{v}_x\mathfrak{W}_y \; . \; . \; . \; , \\ \mathfrak{S}'' = \mathfrak{S} - \mathfrak{v}(\mathfrak{v}\mathfrak{W}), \qquad \mathfrak{g}'' = \mathfrak{U} - \mathfrak{W}, \\ E'' = E - (\mathfrak{v}\mathfrak{W}). \end{cases}$$

$$(35)\qquad \begin{cases} X_x'''= X_x'', \quad Y_x'''= X_y'', \\ X_y'''= Y_x'' \ ...., \\ \mathfrak{G}'''= \mathfrak{g}'', \quad \mathfrak{g}'''= \mathfrak{G}'', \\ E'''= E''. \end{cases}$$

La proposta F' è quindi identica a quella avanzata da Abraham[16]. Invece F'' coincide con la proposta di Minkowski[17] eccetto che per il termine aggiuntivo $(\varepsilon\mu - 1)U$; perciò F'' rappresenta la proposta di Minkowski completata in modo tale che per corpi *a riposo* valga la *legge dell'inerzia dell'energia*. La terza proposta infine è legata alle prime due dalla relazione

$$(36)\qquad F'''= 2F'- F'',$$

come si ricava dalle (27) e (31).

Dei tre tensori d'universo S solo il primo, S', è simmetrico; cioè solo con la proposta F' la legge dell'inerzia dell'energia rimane valida nella forma semplice

$$(37)\qquad \mathfrak{g}'= \mathfrak{G}'$$

anche per corpi in moto. Rispetto a questa le proposte F'' ed F''', come risulta in parte dalle (31), in parte dalle successive, sono formalmente un po' più semplici.

Rimane ancora solo da determinare l'espressione esplicita della forza ponderomotrice e del lavoro da essa compiuto per il caso più generale.

Secondo la (10) e le equazioni fondamentali (22) si ha

$$\begin{aligned} 2\Delta\iota\upsilon_j T'&= [P\mathfrak{M}]_j + [\mathfrak{B},\Delta\iota\upsilon\mathfrak{M}]_j - [\mathfrak{M}^*,\Delta\iota\upsilon\mathfrak{B}^*]_j \\ &= \rho\mathfrak{E}_j' + [\mathfrak{J}\mathfrak{B}]_j + \mathfrak{B}_j\cdot\mathrm{div}\mathfrak{H} - [\mathfrak{E}\ \mathrm{rot}\mathfrak{D}]_j - [\mathfrak{E}\dot{\mathfrak{H}}]_j \\ &\quad + \mathfrak{D}_j\cdot\mathrm{div}\mathfrak{E} - [\mathfrak{H}\ \mathrm{rot}\mathfrak{B}]_j + [\mathfrak{H}\dot{\mathfrak{E}}]_j \end{aligned}$$

e anche

---

[16]M. Abraham, Rend. Palermo **30.** p.42, Eq. (24a)-(24c). 1910.

[17]*H. Minkowski, l.c. p. 42, Eq. (89).*

$$2\Delta\iota\upsilon_l T' = i\{\rho(\mathfrak{v}\mathfrak{E}') + (\mathfrak{J}\mathfrak{E}) - (\mathfrak{B}\dot{\mathfrak{H}}) - (\mathfrak{B}\ \mathrm{rot}\mathfrak{D}) - (\mathfrak{D}\dot{\mathfrak{E}}) + (\mathfrak{D}\ \mathrm{rot}\mathfrak{B})\}.$$

Se si introduce la derivata rispetto ad un punto comovente come

$$\frac{\partial'}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} + (\mathfrak{v}\nabla),$$

si trova

$$\Delta\iota\upsilon_j U = \mathfrak{W}'_j\cdot\mathrm{div}\ \mathfrak{v} + \frac{\partial'\mathfrak{W}'_j}{\partial t},$$

$$\Delta\iota\upsilon_l U = i\{(\mathfrak{v}\mathfrak{W}')\cdot\mathrm{div}\ \mathfrak{v} + \frac{\partial'(\mathfrak{v}\mathfrak{W}')}{\partial t}\},$$

$$\Delta\iota\upsilon_j U_c = \mathfrak{v}_j\cdot\mathrm{div}\mathfrak{W}' + (\mathfrak{W}\nabla)\mathfrak{v}_j + \frac{\partial}{\partial t}\mathfrak{v}_j(\mathfrak{v}\mathfrak{W}'),$$

$$\Delta\iota\upsilon_l U_c = i\{\mathrm{div}\mathfrak{W}' + \frac{\partial(\mathfrak{v}\mathfrak{W}')}{\partial t}\}.$$

Se si introducono le abbreviazioni

$$(38)\quad \left\{\begin{aligned} 2\mathfrak{K}' &= \mathfrak{B}\cdot\mathrm{div}\mathfrak{H} + \mathfrak{D}\cdot\mathrm{div}\mathfrak{E} - [\mathfrak{E}\ \mathrm{rot}\mathfrak{D}] - [\mathfrak{H}\ \mathrm{rot}\mathfrak{B}] \\ &\quad - \frac{\partial}{\partial t}[\mathfrak{E}\mathfrak{H}] - \rho\mathfrak{E}' - [\mathfrak{J}\mathfrak{B}] + \mathrm{rot}[\mathfrak{v}\mathfrak{W}] \\ &\quad + 2\mathfrak{W}\cdot\mathrm{div}\mathfrak{v} + \frac{\partial}{\partial t}\{\mathfrak{v}(\mathfrak{v}\mathfrak{W}) - \mathfrak{W}\}, \\ -2k &= \rho(\mathfrak{v}\mathfrak{E}') + (\mathfrak{J}\mathfrak{E}) + (\mathfrak{B}\dot{\mathfrak{H}}) + (\mathfrak{D}\dot{\mathfrak{E}}) + \mathrm{div}\mathfrak{U} \\ &\quad - (\mathfrak{v}\mathfrak{W})\cdot\mathrm{div}\mathfrak{v} + (\mathfrak{v}\nabla)(\mathfrak{v}\mathfrak{W}) - \mathrm{div}\mathfrak{W}, \end{aligned}\right.$$

si ottiene alla fine

$$(39)\quad \left\{\begin{aligned} F'_j &= \rho\mathfrak{E}'_j + [\mathfrak{J}\mathfrak{B}]_j + \frac{\partial'\mathfrak{W}_j}{\partial t} + \mathfrak{K}'_j, \\ F'_t &= \rho(\mathfrak{v}\mathfrak{E}') + (\mathfrak{J}\mathfrak{E}) + \frac{\partial'(\mathfrak{v}\mathfrak{W})}{\partial t} + k''. \end{aligned}\right.$$

Per F'' e F''' si ottengono le stesse espressioni, sostituendo $\mathfrak{K}''$ o $\mathfrak{K}'''$ e rispettivamente k'' o k''' a $\mathfrak{K}'$ e k'; si ha

$$(40)\quad \left\{\begin{aligned} 2\mathfrak{K}'' &= \nabla_{\mathfrak{H}}(\mathfrak{H}\mathfrak{B}) + \nabla_{\mathfrak{E}}(\mathfrak{E}\mathfrak{D}) - \nabla_{\mathfrak{B}}(\mathfrak{H}\mathfrak{B}) - \nabla_{\mathfrak{D}}(\mathfrak{E}\mathfrak{D}) + 2\mathfrak{W}\ \mathrm{div}\mathfrak{v}, \\ -2k'' &= (\dot{\mathfrak{H}}\mathfrak{B}) + (\dot{\mathfrak{E}}\mathfrak{D}) - (\mathfrak{H}\dot{\mathfrak{B}}) - (\mathfrak{E}\dot{\mathfrak{D}}) - 2(\mathfrak{v}\mathfrak{W})\mathrm{div}\mathfrak{v}, \end{aligned}\right.$$

come mostra un breve calcolo in base alla (11), e

$$(41)\quad \begin{cases} \mathfrak{K}'''= 2\mathfrak{K}'- \mathfrak{K}'', \\ k'''= 2k'- k''. \end{cases}$$

Tramite le (38)-(41) sono rappresentate nella forma più generale le tre proposte per la *forza ponderomotrice sull'unità di volume della materia* e per il *lavoro compiuto nell'unità di tempo e per unità di volume* (calore sviluppato incluso).

Supposto che ε e μ siano costanti nel tempo e nello spazio, l'effetto di una variazione della velocità sarà espresso per mezzo dei termini $\mathfrak{K}$ e k. Quando $\mathfrak{v}$ è *variabile*, non si conosce finora rigorosamente[18] la forma delle equazioni aggiuntive da inserire nelle equazioni (22), e allora le quantità $\mathfrak{K}$ e k sostanzialmente non potranno più essere determinate. Se tuttavia $\mathfrak{v}$ è costante nello spazio e nel tempo, si vede facilmente che dev'essere:

$$\mathfrak{K}'= \mathfrak{K}''= \mathfrak{K}'''= 0,$$

$$k'= k'' = k'''= 0.$$

Per $\mathfrak{K}'$ e k' possiamo richiamarci al risultato ottenuto in altro modo da Abraham[19]. Che infatti anche $\mathfrak{K}''$ e k'', e rispettivamente $\mathfrak{K}'''$ e k''' si annullino, lo si può dimostrare nella maniera più semplice assumendo che la direzione della velocità coincida con la direzione x. Allora le equazioni aggiuntive di Minkowski, quando si ponga $\mathfrak{v}_x = v$, si scrivono

$$\mathfrak{D}_x = \varepsilon\mathfrak{E}_x = \varepsilon\mathfrak{E}'_x \qquad \mathfrak{B}_x = \mu\mathfrak{H}_x = \mu\mathfrak{H}'_x$$

$$\mathfrak{D}_y = \kappa^2\{\varepsilon\mathfrak{E}'_y + v\mathfrak{H}'_z\} \qquad \mathfrak{B}_y = \kappa^2\{\mu\mathfrak{H}'_y - v\mathfrak{E}'_z\}$$

$$\mathfrak{D}_z = \kappa^2\{\varepsilon\mathfrak{E}'_z - v\mathfrak{H}'_y\} \qquad \mathfrak{B}_z = \kappa^2\{\mu\mathfrak{H}'_z + v\mathfrak{E}'_y\}$$

$$\mathfrak{E}_y = \mathfrak{E}'_y + v\kappa^2\{\mu\mathfrak{H}'_z + v\mathfrak{E}'_y\} \qquad \mathfrak{H}_y = \mathfrak{H}'_y - v\kappa^2\{\varepsilon\mathfrak{E}'_z - v\mathfrak{H}'_y\}$$

$$\mathfrak{E}_z = \mathfrak{E}'_z - v\kappa^2\{\mu\mathfrak{H}'_y - v\mathfrak{E}'_z\} \qquad \mathfrak{H}_z = \mathfrak{H}'_z + v\kappa^2\{\varepsilon\mathfrak{E}'_y + v\mathfrak{H}'_z\}.$$

Se si introducono così le quantità primate, si determina

---

[18] *Vedi a proposito M. Laue, l.c. p. 151.*

[19] M.Abraham, Rend. Palermo **28.** p.24, Eq. (60) e p. 25, Eq. (60a). 1909.

facilmente che adesso $\mathfrak{K}''$ e k'', e rispettivamente $\mathfrak{K}'''$ e k''', si annullano identicamente.

La differenza fra le tre proposte si rende percettibile solo quando si abbia a che fare con velocità variabili della materia. Nelle tre proposte le leggi dell’impulso e dell’energia assumono tuttavia forme diverse già per corpi in moto uniforme. Se si aggiungesse alle cinque condizioni di cui sopra ancora una sesta, che il tensore d’universo corrispondente debba essere simmetrico per ogni stato di moto, risulterebbe provata dagli sviluppi precedenti l’unicità della proposta di Abraham a discapito delle altre due. Ma un motivo stringente per una tale condizione non pare sussistere; per lo meno non da parte del principio della relatività.

Danzig-Langfuhr, aprile 1913.

(ricevuto il 10 Aprile 1913)