

**Il tensore di energia-impulso di Bopp  
per il campo elettromagnetico<sup>1,2</sup>**

Friedrich Hehl

BOPP ha presentato un tensore di energia-impulso per il campo elettromagnetico, che si può ottenere dal tensore di MINKOWSKI con l'aggiunta di una tetra-rotazione opportuna. Discutiamo questo interessante tensore e mostriamo che esso porta a risultati che ci sembrano insoddisfacenti; perciò crediamo che il tensore di BOPP sia da respingere, nonostante alcune sue buone proprietà.

**1. Introduzione e sommario.**

Qualche tempo fa BOPP [1] ha derivato le equazioni di MAXWELL e le corrispondenti relazioni costitutive per il vuoto a partire da alcuni principî semplici. Inoltre per localizzare in modo univoco l'energia-impulso del campo di MAXWELL, si devono impiegare dei principî aggiuntivi, che BOPP [2] sceglie nel modo seguente:

4.1. Il flusso d'energia di campo trasporta con sè un impulso ad esso proporzionale.

4.2. Lo spin del campo elettromagnetico produce una distribuzione d'impulso aggiuntiva, che non è associata a trasporto d'energia.

4.3. Il flusso d'energia è indipendente dallo spin del campo."

Questo, illustrato con qualche esempio, conduce BOPP al tensore di energia-impulso<sup>3</sup>

---

<sup>1</sup>Annalen der Physik **25**, 215 (1970).

<sup>2</sup>Tradotto in collaborazione con L. Mihich.

<sup>3</sup> $\mu, \nu \dots = 1, 2, 3, 4$ ;  $i, k \dots = 1, 2, 3$ . Usiamo i simboli utilizzati da BOPP [2]. Le nostre convenzioni e le nostre unità sono, a meno che non venga detto esplicitamente altrimenti, quelle di LANDAU-LIFSHITZ [3]. Perciò, per esempio, nelle formule di BOPP verrà fatta la sostituzione  $1/\mu_0 \rightarrow -1/4\pi$ .  $c$  è la velocità della luce nel vuoto,  $\delta_{\mu\nu}$  è il simbolo di KRONECKER,  $\epsilon_{ijk}$  il tensore di LEVI

$$S_{\mu\nu} = {}^M S_{\mu\nu} + \partial_\lambda W_{\mu\nu\lambda} . \quad (1)$$

${}^M S_{\mu\nu}$  è qui il tensore simmetrico di MINKOWSKI

$${}^M S_{\mu\nu} = \frac{1}{4\pi} (f_{\mu\lambda} f_{\nu\lambda} - \frac{1}{4} f_{\rho\sigma} f_{\rho\sigma} \delta_{\mu\nu}) \quad (2)$$

con l'intensità di campo  $f_{\mu\nu}$ , e  $W_{\mu\nu\lambda}$  è un tensore introdotto di bel nuovo nell'elettrodinamica:

$$W_{\mu\nu\lambda} = \frac{1}{8\pi} (A_\mu f_{\nu\lambda} - A_\nu f_{\lambda\mu} - A_\lambda f_{\mu\nu}) . \quad (3)$$

$A_\mu$  è il tetrapotenziale, che deve soddisfare la condizione di LORENTZ

$$\partial_\mu A_\mu = 0 ; \quad (4)$$

inoltre si richiede:

$$\text{Sorgenti singolari di } A_\mu \text{ (anche all'infinito)} = 0. \quad (5)$$

Come BOPP [2] ha mostrato, il tensore (1) possiede alcune buone proprietà, in particolare che, nell'interferenza di due onde piane polarizzate linearmente, esso non porta ad alcuna corrente trasversale d'energia.

Nel secondo paragrafo mostreremo tuttavia che i sopracitati principî per la localizzazione dell'energia-impulso non sono relativisticamente invarianti e perciò contraddicono la (1). Nel terzo paragrafo partiamo dal tensore di BOPP (1) e calcoliamo in generale con metodi appropriati della teoria dei campi la densità di spin del campo. Risulta allora per un raggio di luce polarizzato circolarmente uno spin nullo, cosa che ci sembra inaccettabile. Nel quarto paragrafo determiniamo per mezzo del tensore di BOPP la densità d'impulso e d'energia del campo elettromagnetico. Per quest'ultima non otteniamo, in generale, il valore noto dalla teoria di MAXWELL; inoltre la densità d'energia può assumere valori negativi anche con l'impiego di un "gauge" permesso, cosa che contraddice i principî della teoria classica di campo. Nel

---

*CIVITA; lavoriamo in coordinate (pseudo)ortogonali. La simmetrizzazione di un tensore verrà indicata con parentesi tonde, l'antisimmetrizzazione con parentesi quadre.*

quinto paragrafo rendiamo poi evidente con un esempio semplice il comportamento inaccettabile della densità di impulso e d'energia.

## 2. Principi di localizzazione di energia-impulso

È noto che per ogni tensore di energia-impulso vale lo schema seguente:

$$S_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} S_{ik} & icg_i \\ \frac{i}{c}S_i & -W \end{pmatrix}, \quad (6)$$

dove  $S_{ik}$  sono gli sforzi del campo,  $g_i$  la sua densità di impulso,  $s_i$  la sua densità di flusso d'energia e  $W$  la sua densità d'energia. I principî di BOPP 4.1 e 4.2 richiedono che il tensore di energia-impulso complessivo sia diviso in due parti, una parte orbitale e una parte di spin:

$$S_{\mu\nu} = {}^B S_{\mu\nu} + {}^S S_{\mu\nu}. \quad (7)$$

Per l'energia-impulso  ${}^S S_{\mu\nu}$  causata dallo spin si può naturalmente proporre ancora uno schema del tipo (6). Ora BOPP richiede che lo spin non causi alcun flusso d'energia:

$${}^S s_i = -ic {}^S S_{4i} \stackrel{!}{=} 0. \quad (8)$$

Questa condizione non è tuttavia relativisticamente invariante. Il flusso d'energia originato dallo spin rappresenta solo tre componenti di un tensore con 16 componenti - per la (9) tuttavia solo sei componenti sono mutuamente indipendenti - e in altri sistemi inerziali la condizione (8) sarà violata.

Nel formulare i suoi principî BOPP parte da un'analogia assai lampante tra un campo d'onda elettromagnetico e un materiale magnetizzato, che viene discussa estesamente nel suo lavoro [2]. Lo spin del campo di MAXWELL corrisponde alla magnetizzazione del materiale. Solo che, mentre per il campo d'onda non si privilegia alcun sistema inerziale (a causa della massa a riposo nulla del fotone), il sistema a riposo del materiale magnetizzato ha invece oggettivamente una posizione privilegiata.

Ora non può sussistere alcun dubbio che l'energia-impulso (1) di BOPP, in quanto espressione tensoriale, sia relativisticamente invariante. Dimostreremo che essa contraddice i principî 4.2 e 4.3. Dalle due equazioni che seguono la (20a) di [2] si può

desumere che per BOPP  ${}^S S_{\mu\nu}$  sia definito nel modo seguente<sup>4</sup>:

$${}^S S_{\mu\nu} = 2S_{[\mu\nu]} = 2\partial_\lambda W_{[\mu\nu]\lambda} = \partial_\lambda (A_\lambda f_{\nu\mu})/4\pi . \quad (9)$$

Ma da qui segue secondo la (6) un flusso d'energia causato dallo spin uguale a

$${}^S S_i = -ic {}^S S_{4i} = -\frac{c}{4\pi} \partial_\lambda (A_\lambda E_i) , \quad (10)$$

dove  $E_i$  indica il campo elettrico. Anche se vale la convenzione di LORENTZ, in generale la (10) non si annulla.

### 3. Momento angolare di spin

Sia  $V_{\mu\nu\lambda}$  il tensore del momento angolare di spin antisimmetrico nei primi due indici; dalla teoria dei campi è noto (vedi per esempio AHARONI [4]) che la legge del momento angolare si scrive come segue<sup>5,6</sup>:

$$\partial_\lambda V_{\mu\nu\lambda} = 2S_{[\mu\nu]} . \quad (11)$$

Se si prende la parte antisimmetrica della (1), si ha

$$\partial_\lambda W_{[\mu\nu]\lambda} = S_{[\mu\nu]} . \quad (12)$$

Da questa segue

$$V_{\mu\nu\lambda} = 2W_{[\mu\nu]\lambda} + \partial_\kappa Z_{\mu\nu\lambda\kappa} , \quad (13)$$

dove  $Z_{\mu\nu\lambda\kappa}$  è sempre antisimmetrico nella prima e nella seconda coppia di indici.

---

<sup>4</sup>Secondo i principî di BOPP si ha  $s_i = {}^B g_i c^2$  e  $g_i = {}^B g_i + {}^S g_i$ . Da qui con la (6) discende  ${}^S g_i = g_i - {}^B g_i = 2S_{[i4]}/ic = {}^S S_{i4}/ic$ . Quindi s'ottiene la (9) per l'invarianza relativistica .

<sup>5</sup>Dobbiamo tener conto del fatto che il tensore di energia-impulso di AHARONI comporta un segno opposto rispetto a quello di LANDAU-LIFSHITZ, delle convenzioni dei quali facciamo uso.

<sup>6</sup>Un tensore d'energia impulso antisimmetrico di un campo è quindi, come si riconosce dalla (11), del tutto sufficiente per la comparsa di un momento angolare di spin, ma non è necessario.

Naturalmente per la localizzazione dello spin si farebbe uso di principî determinati, proprio come per l'energia-impulso. Poichè tali principî da BOPP non vengono dati, nell'ambito della sua teoria lo spin non è veramente localizzabile in modo unico. Ma si comprende dall'argomentazione di BOPP che il tensore  $W_{\mu\nu\lambda}$  definito nella (3) deve già contenere tutti gli effetti che derivano dallo spin. Di conseguenza  $Z_{\mu\nu\lambda\kappa}$  è nullo e dalla (13) e dalla (2) si ottiene per lo spin

$$V_{\mu\nu\lambda} = 2W_{[\mu\nu]\lambda} = A_{\lambda} f_{\nu\mu} / 4\pi . \quad (14)$$

Da qui risulta in maniera del tutto generale la densità del momento angolare di spin<sup>7</sup>

$$m_{ik} = V_{ik4} / ic \quad \text{ovvero} \quad m_i = - \Phi H_i / 4\pi c . \quad (15)$$

$\Phi$  è qui il potenziale scalare,  $H_i$  è il campo magnetico. Se si applica la (15) a un'onda piana polarizzata circolarmente, per la quale si può porre  $\Phi = 0$ , per essa lo spin si annulla; ciò non ci sembra accettabile per motivi fisici. Parimenti si annulla lo spin - e con ciò naturalmente anche la sua media temporale - nel caso discusso da BOPP di due campi d'onda piana che interferiscono, in contraddizione con [2] eq. (20). Si può mostrare che l'ipotesi fatta da BOPP nel passaggio dall'equazione (19) alla (20) di [2], con la quale egli definisce la sua densità di spin, è in contraddizione con la legge del momento angolare (12), ed è perciò illegittima. Questa asserzione non sarà toccata dal fatto che le equazioni (19) e (20) di [2] devono valere solo come media temporale.

#### 4. Densità di impulso e di energia

Per poter discutere i problemi connessi alla scelta del "gauge" del tensore di BOPP, calcoliamo per esempio l'impulso e la densità d'energia del campo elettromagnetico dal tensore di BOPP. La densità d'impulso risulta in generale dalle (1), (2), (3) e (6)

---

<sup>7</sup>La densità di spin data da BOPP si può ottenere partendo dal tensore d'energia-impulso canonico  ${}^M S_{\mu\nu} + \partial_{\lambda} (A_{\mu} f_{\nu\lambda}) / 4\pi$  invece che da quello di BOPP.

$$g_i = -\frac{i}{c} S_{i4} = \frac{1}{4\pi c} \left[ \epsilon_{ikm} E_k H_m + \partial_k (A_i E_k) + \frac{1}{2} \epsilon_{ikm} \partial_k (\Phi H_m) \right]. \quad (16)$$

Per la densità d'energia si ottiene dalle stesse equazioni

$$W = -S_{44} = \frac{1}{8\pi} [E^2 + H^2 + 2\partial_i (\Phi E_i)]. \quad (17)$$

La (17) si può trasformare ancora un poco. Introducendo nella (17) assieme all'ipotesi sul potenziale ( $A_i$  = potenziale vettore):

$$E_i = -\partial_i \Phi - \frac{1}{c} \frac{\partial A_i}{\partial t} \quad (18)$$

anche l'equazione di MAXWELL ( $\rho$  = densità di carica):

$$\partial_i E_i = 4\pi\rho \quad (19)$$

si ottiene l'espressione alternativa

$$W = \frac{1}{8\pi} \left[ H^2 - E^2 + 8\pi\rho\Phi - \frac{2}{c} E_i \frac{\partial A_i}{\partial t} \right]. \quad (20)$$

Secondo i principî della teoria di campo classica si deve richiedere in ogni caso

$$W \geq 0. \quad (21)$$

Il tensore di BOPP e quindi evidentemente anche le (16), (17) e (20) non sono invarianti per trasformazioni di "gauge". Per questo motivo BOPP cerca di fissare il "gauge" con le condizioni aggiuntive (4) e (5); inoltre "tutti i campi verso l'esterno debbono diminuire abbastanza rapidamente", in particolare anche i campi di "gauge" [5].

Ma dobbiamo tener conto anche della (21). La (21) appare in generale compatibile con la (17) ossia con la (20) solo se si pone

$$\Phi = 0. \quad (22)$$

Allora si otterrebbe per  $W$  il valore noto dalla teoria di MAXWELL, che si può considerare come sperimentalmente accertato. Ma la (22) non è però una condizione aggiuntiva covariante e perciò è poco soddisfacente; inoltre secondo la (15) la (22) porterebbe sempre ad uno spin nullo, cosa che non ci sembra conforme ai fatti. Ma l'argomento forse più stringente contro la (22) è che nel caso di un puro campo elettrostatico secondo le (18) e (22) risulterebbe un potenziale vettore proporzionale al tempo; ciò porterebbe

secondo la (16) ad una densità d'impulso parimenti proporzionale al tempo - un risultato inaccettabile in un problema statico.

La (22) è perciò da respingere come condizione di "gauge" valida in generale, ma ciò in generale contraddice sia la (21) che il valore accettato per la densità d'energia.

### 5. Carica elettrica puntiforme nel vuoto

Le considerazioni dell'ultimo paragrafo saranno illustrate con un semplice esempio. Una carica puntiforme  $Q$  nell'origine genera un campo

$$E_i = \frac{Qx_i}{(x_k x_k)^{3/2}} . \quad (23)$$

La legge consueta per il potenziale<sup>8</sup>

$$A_i = 0; \quad \Phi = Q/(x_k x_k)^{1/2} \quad (24)$$

soddisfa la (4) e la (5), inoltre  $\Phi$  diminuisce verso l'esterno. Dalle (16) e (20) otteniamo immediatamente per lo spazio libero da cariche

$$g_i = 0 , \quad (25)$$

$$W = - E^2/8\pi < 0 . \quad (26)$$

Ma quest'ultima non soddisfa la condizione necessaria (21).

Se cambiamo il "gauge" nella (24) per mezzo della funzione  $(\Phi ct)$  otteniamo

$$A'_i = - E_i ct ; \quad \Phi' = 0 . \quad (27)$$

La (4) e la (5) sono naturalmente ancora soddisfatte, però  $A'_i$  va linearmente con  $t$  verso l'infinito, cosa che pare contraddire il requisito di BOPP sulla diminuzione del campo. Dalla (16) si ottiene questa volta

$$g'_i = \frac{1}{4\pi c} \partial_k (A_{i k} - E_{i k}) = - \frac{t}{4\pi} E_k \partial_k E_i \quad (28)$$

ossia

---

<sup>8</sup>Anche BOPP in [2] Eq. (32) sceglie per il dipolo elettrico una legge analoga alla (24).

$$g'_i = \frac{Q^2}{2\pi} \frac{x_i t}{(x_k x_k)^3}, \quad (29)$$

e dalla (17)

$$W' = E^2/8\pi. \quad (30)$$

Otterremmo per  $W'$  un valore ragionevole, ma  $g'_i$  è evidentemente non adeguato a un problema statico<sup>9</sup>.

Ringrazio il Prof. Dr. BOPP per una corrispondenza sulle questioni sollevate in questo articolo. Egli ha contribuito in modo

<sup>9</sup>Nota aggiunta alla correzione delle bozze: Il Prof. Dr. BOPP mi ha gentilmente messo a disposizione preventivamente le sue argomentazioni stampate qui di seguito. Su di esse ecco alcune osservazioni: BOPP ha senza dubbio proposto il suo tensore allo scopo di localizzare correttamente l'energia e l'impulso del campo. Da parte nostra s'è dimostrato che per una carica puntiforme nel vuoto la densità d'energia elettrica risulta negativa. Questo risultato è accettato da BOPP. Egli obietta tuttavia che l'energia totale (integrata) risulta positiva e giusta, come naturalmente succede. Se però si vuole localizzare l'energia, allora anche la densità deve portare il giusto segno, e perciò l'argomento di BOPP è da questo punto di vista irrilevante. La densità negativa d'energia ci pare dimostri da sola che il tensore di Bopp non è utilizzabile. - Nel suo nuovo calcolo dello spin BOPP trascura il fatto che per una localizzazione preassegnata dell'energia-impulso mediante il tensore di BOPP lo spin è localizzato fino ad un certo punto, come risulta espresso nelle nostre equazioni (11)-(13). Non si può, come fa BOPP, sottrarre al tensore del momento angolare delle divergenze arbitrarie e senza dimostrazione. Risulta in particolare che la parte di spin del tensore  $M^{\mu\nu\tau}$  derivato nell'equazione (10) di BOPP (sono gli ultimi due termini tra parentesi) non si conforma alla nostra Eq. (11) che esprime la legge del momento angolare e quindi non può neanche essere il giusto tensore di spin. Con ciò viene a cadere l'equazione (11) di BOPP. Poiché inoltre BOPP non mette in dubbio il nostro calcolo dello spin, non vediamo alcun motivo per cambiare le nostre conclusioni relativamente allo spin.

del tutto essenziale alla precisazione degli argomenti da me avanzati. Ringrazio la Deutschen Forschungsgemeinschaft di Bad Godesberg per il sostegno finanziario.

#### **Riferimenti**

- [1] BOPP, F., Z. Phys. **169** (1962) 45.
- [2] BOPP, F., Ann. Phys. Leipzig (7) **11** (1963) 35.
- [3] LANDAU, L.D. e E.M. LIFSHITZ, Feldtheorie (trad. dal russo) Berlin 1963.
- [4] AHARONI, J., The Special Theory of Relativity (2<sup>a</sup> ed.), Oxford 1965.
- [5] BOPP, F., comunicazione privata (1968).

Clausthal-Zellerfeld, Institut für Theoretische Physik der TU Clausthal.

Giunto in redazione il 3 agosto 1968.