Sulle forze che agiscono all'interno di un corpo polarizzato magneticamente o dielettricamente[1]

H. Helmholtz

(Da Berl. Monatsber. del 17 febbraio 1881, comunicato dall'Autore)

Il ferro dolce, portato in vicinanza di un magnete, mostra per conto suo repulsioni e attrazioni di un corpicciolo magnetico o magnetizzabile, che prima non mostrava. Per spiegarle si assume una certa distribuzione del magnetismo nelle molecole del ferro. Faraday mostrò inoltre che azioni di questo tipo appaiono non solo nel ferro, ma in quasi tutti i corpi conosciuti con un'intensità assai più piccola e in parte anche con segno opposto, e che fenomeni del tutto analoghi, che suggeriscono una distribuzione di elettricità con segni opposti nelle molecole di isolanti elettrici, si generano con forze di attrazione elettrica. Nell'ambito del magnetismo questi fenomeni sono stati riassunti per primo da Poisson in leggi relativamente semplici, che per lo meno per forti intensità della magnetizzazione e finchè non si mescolino gli effetti della forza coercitiva analoga all'attrito, rappresentano bene l'andamento dei fenomeni. Le stesse leggi generali si possono applicare anche alle azioni magnetiche più deboli nelle sostanze paramagnetiche e diamagnetiche, e si applicano pure alla polarizzazione elettrica dei dielettrici, purchè in questi ultimi non abbiano luogo conduzione e i restanti processi associati alla conduzione.

I fenomeni dai quali Poisson ha sviluppato la sua teoria erano moti di magneti rigidi e di ferro magnetizzabile in aria. Successivamente la teoria è stata estesa da Sir W. Thomson anche ai moti di corpi rigidi in fluidi magnetizzabili, in relazione agli esperimenti diamagnetici di Faraday. Quando le molecole di un mezzo polarizzabile magneticamente o elettricamente si possono spostare l'una rispetto all'altra, come nei fluidi o in corpi elastici flessibili, oltre alle forze a distanza introdotte

[1] Annalen der Physik und Chemie **13**, 385 (1881).

originariamente intervengono necessariamente anche le azioni molecolari. Le molecole che giacciono mutuamente nella direzione delle linee di forza si rivolgono mutuamente il polo amico e devono attrarsi reciprocamente, quelle che si trovano l'una di fianco all'altra devono respingersi tra loro. La nota teoria dell'azione magnetica a distanza mostra che magnetini orientati parallelamente si attraggono quando la linea congiungente dei loro punti di mezzo individua un angolo acuto con l'asse magnetico di entrambi che sia minore di 54^0 44′ (arc cos $1/\sqrt{3}$), mentre si respingono se l'angolo acuto è maggiore. Ciò è in accordo con l'ipotesi di Faraday, che nei mezzi polarizzati elettricamente o magneticamente sussista uno stato di tensione nella direzione delle linee di forza, in seguito al quale esse tendono ad accorciarsi, mentre trasversalmente alle suddette linee agisce una pressione, che disperde la materia in questa direzione. Sir W. Thomson[2] già nel 1843 ha portato la prova che forze di questo tipo possono dar luogo alle stesse azioni delle forze dirette a distanza della teoria di Coulomb, e Cl. Maxwell ha fatto di queste ipotesi di Faraday il fondamento di tutta la sua teoria dell'elettricità e del magnetismo. Gli esperimenti pubblicati recentemente da Quincke mostrano in modo molto evidente lo sforzo di un isolante elettrico, il suo dilatarsi trasversalmente alla direzione delle linee di forza elettriche, sebbene questi esperimenti lascino sussistere ancora dubbi sul comportamento nella direzione delle linee di forza.

Scopo del lavoro presente è di mostrare che, quand'anche si assumano le conseguenze della teoria di Poisson come descrizione di fatto giusta dei fenomeni osservati solo nell'ambito anzidetto, cioè nella loro applicazione ai moti di corpi rigidi in aria, e si assuma valida per questo ambito di fenomeni la legge della costanza dell'energia, questa legge da sola, senza tirare in ballo nessuna ipotesi sulla costituzione interna di corpi polarizzabili elettricamente o magneticamente, rende possibile trovare anche le forze ponderomotrici che agiscono sulle parti interne di quei

---

[2] Thomson, Cambridge Mathem. Journ. May 1843. - Reprint. Art. VII § 147.

corpi e che si fan sentire quando essi cambino di forma. Risulta quindi che il sistema ipotizzato da Faraday di tensioni lungo le linee di forza e di pressioni trasversalmente ad esse deve valere all'interno di corpi siffatti. La sola differenza che la mia analisi mostra rispetto alle formule proposte da W. Thomson e da Cl. Maxwell sta nel fatto che essa fa' intervenire una seconda costante mediante la quale il rapporto tra i valori di quelle pressioni e tensioni vien fatto dipendere dal tipo della sostanza[3].

1. Il lavoro nei moti di corpi rigidi polarizzati in aria.

Poiché i problemi a questo relativi assumono un'altra forma nella loro applicazione all'elettricità rispetto all'applicazione originaria di Poisson alla magnetizzazione, userò nel seguito la nomenclatura della scienza dell'elettricità. La traduzione per il magnete non richiede che mutamenti inessenziali. Siano λ, μ, ν le componenti del momento dielettrico di un isolante polarizzato, calcolati per l'unità di volume della sua sostanza, presi parallelamente agli assi delle x, y, z; inoltre ε indichi la densità di volume, e la densità di superficie di *elettricità introdotta dall'esterno* nel suo interno o sulla sua superficie, e sia φ la funzione potenziale di tutta l'elettricità libera, cioè non neutralizzata dalla polarizzazione della sostanza; allora secondo il procedimento di Poisson le equazioni che esprimono la dipendenza mutua delle suddette quantità sono:

$$\lambda=-\vartheta\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial x}\ ,\ \mu=-\vartheta\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial y}\ ,\ \nu=-\vartheta\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial z}\ . \tag{1}$$

La densità di volume dell'elettricità libera sarà:

---

[3]La trattazione da me data nel Vol. 72 del Borchardt's Journ. für r.u.a. Mathematik vale, in conformità allo scopo ivi perseguito, solo per elettricità che scorra all'interno di un conduttore ponderabile.

$$\mathfrak{e}=-(1/4\pi)\Delta\varphi=\varepsilon - \frac{\partial\lambda}{\partial x} - \frac{\partial\mu}{\partial y} - \frac{\partial\nu}{\partial z}, \qquad (1a)$$

e la densità di superficie, se N_1 ed N_2 sono le normali condotte alla superficie da entrambi i lati, e N_1 individua con gli assi coordinati presi nel verso positivo gli angoli a_1, b_1, c_1:

$$\mathfrak{E}=-(1/4\pi)\left[\frac{\partial\varphi}{\partial N_1} + \frac{\partial\varphi}{\partial N_2}\right]$$

$$=e - (\lambda_1-\lambda_2)\cdot\cos a_1 - (\mu_1-\mu_2)\cdot\cos b_1-(\nu_1-\nu_2)\cdot\cos c_1. \qquad (1b)$$

Le forze ponderomotrici che diventano attive quando uno dei corpi elettrizzati, che indicheremo con A, si muove, per l'ipotesi di Poisson sono uguali alle forze a distanza che l'elettricità libera complessiva dei corpi rimanenti esercita su quella di ciascuno individualmente. Il momento virtuale di queste forze per spostamenti che avvengono realmente ossia il lavoro che le forze anzidette eseguono per uno spostamento siffatto sarà dato di conseguenza dalla variazione che per lo spostamento interviene nel valore del potenziale P di tutta l'elettricità libera , quando la si consideri invariata in ogni punto del corpo mosso. Questo potenziale è:

$$P=(1/2)\int\int\int\varphi\cdot\mathfrak{e}dx\cdot dy\cdot dz + (1/2)\int\varphi\cdot\mathfrak{E}\cdot d\omega, \qquad (1c)$$

e la sua variazione per l'intervento del moto sarà:

$$\delta P=(1/2)\int\int\int\mathfrak{e}\cdot\delta\varphi\cdot dx\cdot dy\cdot dz + (1/2)\int\mathfrak{E}\cdot\delta\varphi\cdot d\omega$$

$$= -(1/8\pi)\int\int\int\Delta\varphi\cdot\delta\varphi\cdot dx\cdot dy\cdot dz -(1/8\pi)\int\left(\frac{\partial\varphi}{\partial N_1} + \frac{\partial\varphi}{\partial N_2}\right)\delta\varphi\cdot d\omega. \qquad (1d)$$

Qui $\delta\varphi$ indica la variazione che avviene nel punto considerato del corpo in moto sia per il suo proprio moto che per quello di tutti gli altri punti, in ciascuno dei quali si considera l'elettricità libera come immutata. Se si intendesse per $\delta\varphi$ solo la variazione prodotta dal moto proprio del punto considerato si dovrebbe cancellare il fattore 1/2.

La teoria di Poisson, come già notato, ha come base solo le esperienze che sono state compiute per il moto di corpi rigidi magnetizzati in aria. Per poter calcolare anche in casi più generali il valore del lavoro che si impiega per il moto di corpi elettrizzati ho dato una forma particolare agli integrali che esprimono il valore dell'energia. In generale interviene un'intera serie di quantità diverse, funzioni potenziale, momenti, densità, che dipendono l'una dall'altra tramite le condizioni di equilibrio, e per mezzo di queste ultime condizioni si può eliminare oppure includere ora una, ora l'altra delle suddette quantità. Tra tutte queste forme ce n'è una, che potrei chiamare la forma normale, per la quale risulta uguale a zero la variazione al prim'ordine dell'integrale relativo, che corrisponda ad una variazione arbitraria delle quantità indipendenti e che devono cambiare per realizzare l'equilibrio. Utilizzando una forma siffatta si ha il vantaggio che nel calcolo della variazione del valore del lavoro a seguito di una qualche altra influenza, le variazioni delle quantità prima nominate che per questa avvengono possono essere tralasciate, poiché il lavoro dovuto alla loro variazione è uguale a zero.

Nel nostro caso formiamo l'integrale da estendersi allo spazio infinito:

$$\mathfrak{B}=\iiint\left\{\varphi\cdot\varepsilon + \lambda\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \mu\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial y} + \nu\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial z} + \frac{1}{2\vartheta}(\lambda^2+\mu^2+\nu^2)\right.$$

$$\left.-(1/8\pi)\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2\right]\right\}dx\cdot dy\cdot dz + \int\varphi\cdot e\cdot d\omega, \tag{2}$$

con la condizione che $\delta\mathfrak{B}=0$ nel caso che λ, μ, ν o φ siano variati. Qui e nel seguito scriverò:

$$\delta_\lambda\mathfrak{B} = \delta_\mu\mathfrak{B} = \delta_\nu\mathfrak{B} = \delta_\varphi\mathfrak{B} = 0. \tag{2a}$$

Se eseguiamo queste variazioni otteniamo infatti le condizioni date dalle equazioni (1), (1a) e (1b).

Per calcolare quale variazione nel valore di $\mathfrak{B}$ avvenga per variazione della posizione di uno o più dei corpi rigidi elettrizzati assumeremo che in seguito ad essa non solo le quantità ε ed e, ma anche λ, μ, ν in ogni punto materiale ed elemento di volume dei corpi considerati mantengano inalterato il loro valore, quindi resterà invariato in ogni punto materiale il valore dell'elettricità libera, determinato dalle equazioni (1a) e

(1b) tramite $\Delta\varphi$ e $(\partial\varphi/\Delta N_1+\partial\varphi/\partial N_2)$, ma φ risulterà cambiato a causa delle mutate relazioni spaziali. Per trovare la corrispondente variazione di $\mathfrak{B}$ dovremo confrontare il valore delle quantità da integrare per ogni elemento di volume del corpo considerato prima e dopo lo spostamento, e poi dovremo trasformare la parte:

$$(1/8\pi)\iiint\left\{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2\right\}dx\cdot dy\cdot dz$$

$$=-(1/8\pi)\int\varphi\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial N}d\omega-(1/8\pi)\int\varphi\cdot\Delta\varphi\cdot dx\cdot dy\cdot dz$$

dalla prima alla seconda forma. Allora gli integrali vanno estesi solo all'interno dei corpi elettrizzati, poiché per la teoria di Poisson λ, ν, μ, $\Delta\varphi$ nello spazio tra i corpi van posti uguali a zero, e risulterà:

$$\delta\mathfrak{B}=\iiint\delta\varphi\cdot\left\{\varepsilon-\frac{\partial\lambda}{\partial x}-\frac{\partial\mu}{\partial y}-\frac{\partial\nu}{\partial z}+(1/8\pi)\Delta\varphi\right\}dx\cdot dy\cdot dz$$

$$+\int\delta\varphi\cdot\left\{e-\lambda\cdot\cos a-\mu\cdot\cos b-\nu\cdot\cos c+(1/8\pi)\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial N}\right\}d\omega.$$

Utilizzando le equazioni (1a) e (1b) questa porta alla forma trovata in (1d):

$$\delta\mathfrak{B}=-(1/8\pi)\iiint\Delta\varphi\cdot\delta\varphi\cdot dx\cdot dy\cdot dz-(1/8\pi)\iint\left(\frac{\partial\varphi}{\partial N}\right)\delta\varphi\cdot d\omega=\delta P.$$

Ciò significa che l'incremento di $\mathfrak{B}$ per la variazione presupposta è uguale all'incremento che subirebbe il potenziale di tutta l'elettricità libera, quando questa subisse le stesse variazioni di posizione che subirebbe se fosse solidale alle parti ponderabili. Per le proprietà particolari della funzione $\mathfrak{B}$ questo valore non cambia più quando successivamente si fanno intervenire i valori dei momenti λ, μ, ν corrispondenti al nuovo equilibrio. E quindi, se per $\mathfrak{B}$ si suppongono permanentemente validi i valori delle variabili dipendenti λ, μ, ν, φ che corrispondono alle condizioni di equilibrio (2a), per variazione di posizione del singolo corpo rigido si avrà:

$$\mathfrak{B}-P=\text{cost.},$$

dove P indica il lavoro che si deve applicare per vincere le forze ponderomotrici dell'elettricità nella variazione di posizione del corpo rigido considerato. E risulta anche che questo lavoro, malgrado la variabilità della distribuzione dell'elettricità, dipende solo dalle posizioni iniziale e finale del corpo considerato, non dal cammino lungo il quale lo si è portato da una posizione all'altra.

Va inoltre osservato che anche per variazioni nella distribuzione dell'elettricità di conduzione ε ed e la variazione di $\mathfrak{B}$:

$$\delta\mathfrak{B}=\int\int\int\varphi\cdot\delta\varepsilon\cdot dx\cdot dy\cdot dz + \int\varphi\cdot\delta e d\omega$$

è di nuovo uguale al lavoro che si dovrebbe compiere per far avanzare in fili conduttori con forze elettromotrici opportunamente applicate i quanti mossi $\delta\varepsilon$ e δe tra posizioni con valori diversi del potenziale φ.

Se sostituiamo nell'equazione (2) i valori di λ, μ, ν, e, ε che risultano dalle equazioni (1), (1a) ed (1b), otteniamo le formule per il valore di $\mathfrak{B}$ che valgono all'equilibrio:

$$\mathfrak{B}_b=(1/2)\int\int\int\varphi\cdot\varepsilon\cdot dx\cdot dy\cdot dz + (1/2)\int\varphi\cdot e\cdot d\omega. \tag{2b}$$

$$\mathfrak{B}_c=\frac{1+4\pi\vartheta}{8\pi}\int\int\int\left\{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2\right\}dx\cdot dy\cdot dz. \tag{2c}$$

La combinazione:

$$\mathfrak{B}=2\mathfrak{B}_b-\mathfrak{B}_c \text{ con la condizione: } \delta_\varphi\mathfrak{B}=0 \tag{2d}$$

è ancora una forma normale, dalla quale λ, μ, ν sono eliminati.

Dalla formula (2b) discende che $\mathfrak{B}=0$ quando gli elementi dei corpi che contengono elettricità accumulata sono portati a distanza infinita tra loro e rispetto agli altri.

La grandezza $\mathfrak{B}$ è quindi la misura del lavoro che si deve compiere per realizzare la corrispondente disposizione dei corpi elettrizzati, se i quanti di elettricità libera si erano trovati prima al valore zero del potenziale. Ciò si applica ad ogni tipo di elettrizzazione che si possa realizzare con un'arbitraria ripartizione di quanti elettrici mobili all'interno o alla superficie dei corpi considerati.

Nel caso che i corpi elettrizzati siano anche conduttori all'interno di ogni conduttore anche ε e rispettivamente e saranno variabili, ma in modo tale che la quantità complessiva dell'elettricità contenuta in tutta l'estensione del conduttore rimanga invariata; cioè all'interno del conduttore si deve porre:

$$\delta_{\varepsilon}\mathfrak{B} + C\int\int\int\delta\varepsilon\cdot dx\cdot dy\cdot dz + C\int\delta\varepsilon\cdot d\omega = 0.$$

Le condizioni che risultano da questa variazione sono:

$$0=\delta\varepsilon\{\varphi + C\}, \quad 0=\delta e\{\bar{\varphi} + C\},$$

e valgono per l'estensione di ogni conduttore individuale. Per conduttori separati si devono introdurre costanti C diverse, tra loro indipendenti.

Si arriva inoltre allo stesso risultato se si assume che la quantità di elettricità che sarà contenuta dal conduttore sia una quantità ε da determinarsi, e si ponga poi $\vartheta=\infty$. Per render minimo il valore di $\mathfrak{B}$ nella (2c) nella situazione per la quale $\vartheta=\infty$ dev'essere:

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2 = 0, \text{ ovvero } \varphi=C,$$

e il quanto di elettricità contenuto nel conduttore non sarà mutato dalla sopravvenuta polarizzazione dielettrica dello stesso. Se scegliamo questa forma di trattazione del problema anche il caso del conduttore sarà incluso come caso limite nelle formule precedenti.

Nell'applicazione alla distribuzione magnetica si può procedere in modo del tutto analogo, solo i quanti ε ed e vanno considerati come fissi nell'intorno del polo del magnete permanente, e il quanto complessivo di essi va posto uguale a zero in ogni magnete. Le equazioni formulate comprenderanno il caso che, oltre al magnetismo permanente, che corrisponde ai quanti ε ed e, nella massa del magnete si sviluppi per induzione magnetismo temporaneo.

La funzione $\mathfrak{B}$, calcolata per lo stato d'equilibrio nei corpi polarizzati, può esser posta anche nella forma:

$$\mathfrak{B} = \frac{1+4\pi\vartheta}{8\pi\vartheta^2}\int\int\int\left[\lambda^2+\mu^2+\nu^2\right]dx\cdot dy\cdot dz, \text{ ovvero:} \tag{2e}$$

$$\mathfrak{B} = \iiint\left\{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2\right\}dx\cdot dy\cdot dz \; +$$

$$+\iiint\frac{1}{2\vartheta}(\lambda^2+\mu^2+\nu^2)\cdot dx\cdot dy\cdot dz. \qquad (2f)$$

Nella seconda formula il primo integrale è il lavoro dell'elettricità libera, calcolata secondo la sua azione in aria, l'altro è il contributo che aggiunge la polarizzazione della sostanza dielettrica. La formula (2e) corrisponde alla teoria di Faraday, secondo la quale anche in aria si ha polarizzazione. Se si applicasse all'aria con l'ipotesi $\vartheta=\lambda=\mu=\nu=0$, si dovrebbbe porre per λ/ϑ la forza elettrica $(-\partial\varphi/\partial x)$, eccetera, per sfuggire alla forma (0/0), come si vede nella (2f).

Se assumiamo che la polarizzazione determinata dalle equazioni (1), (1a) e (1b) possa esser resa permanente, come realmente succede in una certa misura nelle sostanze magnetiche mediante la forza coercitiva, e che si vogliano poi introdurre nuovi quanti elettrici di densità ε_1 ed e_1 che, presi per conto loro, darebbero luogo alla funzione potenziale ψ, il loro assembramento richiederebbe contro la loro forza propria il lavoro:

$$(1/8\pi)\iiint\left\{\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)^2\right\}dx\cdot dy\cdot dz \;.$$

Inoltre dovrebbe venir superata la repulsione dei quanti e dei momenti presenti da prima, la funzione potenziale dei quali è φ. Questo dà:

$$\int\!\!\int\!\!\int\varphi\cdot\varepsilon_1\cdot dx\cdot dy\cdot dz + \int\varphi\cdot e_1\cdot d\omega$$

$$=(1/4\pi)\iiint\left\{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right) + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)\right\}dx\cdot dy\cdot dz \;.$$

Se raccogliamo questi due contributi al lavoro sotto il simbolo $\mathfrak{B}$, il lavoro complessivo, introducendo il valore di $\mathfrak{B}$ dato dalla (2f), risulta:

$$\mathfrak{B} + \mathfrak{W} = (1/8\pi)\iiint\left\{\left(\frac{\partial(\varphi+\psi)}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial(\varphi+\psi)}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial(\varphi+\psi)}{\partial z}\right)^2\right\}dx\cdot dy\cdot dz$$

$$+\iiint\frac{1}{2\vartheta}\left\{\lambda^2+\mu^2+\nu^2\right\}\cdot dx\cdot dy\cdot dz \;, \tag{2g}$$

una formula del tutto analoga alla (2f). Da ciò risulta che questa mantiene il suo significato anche quando i momenti λ, μ, ν hanno una disposizione tale come risulterebbe dall'effetto di elettricità indotta, ma non corrispondono ad una distribuzione elettrica permanente.

Questa formula si ritrova per esempio nell'equazione per la costanza dell'energia (20k) della mia prima dissertazione sulla teoria dell'elettrodinamica[4], sebbene là intervengano anche le forze elettromotrici indotte. Per le forze magnetiche si trova nello stesso posto la formula (2e) corrispondente ad una posizione d'equilibrio. Là però questa posizione di equilibrio si realizza per l'influenza di correnti elettriche. Secondo l'idea di Ampère queste agiscono in maniera analoga a magneti permanenti, ma rendono la funzione potenziale ψ a più valori. Essa sarà ad un sol valore solo se rendiamo con opportune superfici di taglio semplicemente connesso lo spazio, che attorno al conduttore è a connessione multipla. Ad ogni siffatta superficie di taglio la funzione potenziale φ deve fare un salto, sicchè:

$$\varphi_1 - \varphi_0 = -4\pi J,$$

dove J indica la densità di corrente. Le superfici di taglio non possono tagliare il magnete permanente, che nelle equazioni usate finora è rappresentato solo dai quanti magnetici e ed ε dei suoi poli, poiché non è indifferente se la sbarra magnetica che unisce i poli passa da un lato o dall'altro del conduttore. Negli spostamenti dei varî corpi non si possono quindi portare i quanti ε ed e attraverso le anzidette superfici di taglio.

Se ci si attiene a ciò è subito evidente che il valore di $\mathfrak{W}$, com'è dato nell'equazione (2), non dipende dalla posizione delle

[4]Helmholtz, Borchardt's Journ. für r.u.a. Math. **72**, p. 125, 1870.

suddette superfici di taglio. Infatti quando le spostiamo cambia solo il valore di φ, ma non quello delle sue derivate, in quei punti dello spazio attraverso i quali è passata la superficie. Poichè φ interviene nell'equazione (2) solo moltiplicato per ε o per e, e i poli del magnete non possono attraversare la superficie, il valore di $\mathfrak{B}$ non cambia per uno spostamento della superficie di taglio entro la regione dei corpi magnetizzati solo temporaneamente, e la funzione $\mathfrak{B}$ sarà quindi anche in questo caso adatta ad esprimere il lavoro ponderomotore che con intensità di corrente mantenuta costante deve essere sviluppato, perché i diversi corpi magnetici o magnetizzabili si muovano in prossimità del conduttore. Solo la precedente espressione di $\mathfrak{B}$ non si può mantenere con la condizione aggiunta che φ aumenti della quantità $4\pi J$ dopo un giro attorno al conduttore, l'intensità di corrente del quale sia J.

Va osservato che il valore di $\mathfrak{B}$ nella (2e), che qui viene ottenuto solo considerando *il lavoro impiegato per stabilire la magnetizzazione*, è stato trovato, nella mia prima dissertazione sull'elettrodinamica, nell'equazione (20k) già citata, come *valore complessivo dell'energia elettrocinetica della corrente galvanica*. Ma i valori di λ, μ, ν là introdotti si riferiscono solo alla magnetizzazione prodotta dalla corrente, poiché essi tengono conto solo della parte della stessa che si annulla con la corrente. La derivazione del valore si fonda là su un principio del tutto diverso, cioè sul calcolo del calore sviluppato dalla corrente d'induzione; esso può apparire problematico per correnti non chiuse, ma per correnti chiuse ha fondamento sicuro. Se in aria si assume $\vartheta=0$, si deve parimenti sostituire λ/ϑ con il valore della forza magnetica.

2. Le forze che agiscono all'interno d'un corpo polarizzato dielettricamente.

Per portare un certo numero di corpi elettrizzati e o conduttori o polarizzabili dielettricamente da una distanza infinita a una posizione contrassegnata con l'indice 0 utilizziamo il lavoro $\mathfrak{W}_0$ indipendente dal cammino; per portarli invece in una qualche altra posizione, contrassegnata dall'indice 1, il lavoro $\mathfrak{W}_1$; di conseguenza, per portarli dalla posizione 0 nello stato elettrizzato nella posizione 1, il lavoro $\mathfrak{W}_1 - \mathfrak{W}_0$. Questa diversità delle due posizioni può comprendere anche una diversità di forma dei corpi dielettrici, poiché essi, lontano dai corpi elettrizzati, prima di venir portati nella posizione 1, possono subire variazioni arbitrarie della forma, senza che si debba compiere lavoro contro le forze elettriche. Si dovrebbero pensare i corpi elettrizzati come suddivisi prima in particelle, o caricati per conduzione. Entrambi i procedimenti danno in conclusione, come si è dimostrato prima, lo stesso contributo al lavoro.

Come forma normale di $\mathfrak{W}$ da variare possiamo qui utilizzare quella più semplice data in (2d), che contiene solo le quantità ε, e e φ, cioè:

$$\mathfrak{W} = \iiint\left\{\varphi\cdot\varepsilon - \frac{1+4\pi\vartheta}{8\pi}\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2\right]\right\}dx\cdot dy\cdot dz. \tag{2d}$$

Se le masse dielettriche si muovono, nelle singole posizioni dello spazio a causa del moto cambia il valore di ϑ. Indichiamo rispettivamente con ξ, η, ζ gli spostamenti che il punto x, y, z subisce nelle direzioni di queste coordinate, e consideriamo provvisoriamente ξ, η, ζ come funzioni continue delle coordinate con la riserva che, nel caso di una variazione con salto di queste quantità su una superficie secondo la soluzione trovata, la si consideri come limite di una variazione continua sempre più ripida: allora dopo lo spostamento la variazione del valore di ϑ nel punto dello spazio x, y, z prodotta da questo sarà:

$$\delta\vartheta = -\frac{\partial\vartheta}{\partial x}\cdot\xi - \frac{\partial\vartheta}{\partial y}\cdot\eta - \frac{\partial\vartheta}{\partial z}\cdot\zeta + \frac{\partial\vartheta}{\partial\log\sigma}\, d\,\log\sigma,$$

dove indichiamo con σ la densità della sostanza. Ma per la nota legge si ha:

$$d\,\log\sigma = -\frac{\partial\xi}{\partial x} - \frac{\partial\eta}{\partial y} - \frac{\partial\zeta}{\partial z}\,.$$

Indichiamo la costante dipendente dalla sostanza:

$$\frac{\partial\vartheta}{\partial\log\sigma} = \theta,$$

allora sarà:

$$\delta\vartheta = -\frac{\partial\vartheta}{\partial x}\cdot\xi - \frac{\partial\vartheta}{\partial y}\cdot\eta - \frac{\partial\vartheta}{\partial z}\cdot\zeta - \theta\left[\frac{\partial\xi}{\partial x} + \frac{\partial\eta}{\partial y} + \frac{\partial\zeta}{\partial z}\right]. \qquad (3)$$

Parimenti, se ε si muove con il corpo, sarà:

$$\delta\varepsilon = -\frac{\partial\varepsilon}{\partial x}\cdot\xi - \frac{\partial\varepsilon}{\partial y}\cdot\eta - \frac{\partial\varepsilon}{\partial z}\cdot\zeta - \varepsilon\left[\frac{\partial\xi}{\partial x} + \frac{\partial\eta}{\partial y} + \frac{\partial\zeta}{\partial z}\right], \text{ ovvero:}$$

$$-\delta\varepsilon = \frac{\partial}{\partial x}(\varepsilon\xi) + \frac{\partial}{\partial y}(\varepsilon\eta) + \frac{\partial}{\partial z}(\varepsilon\zeta). \qquad (3a)$$

Se ora eseguiamo la variazione di $\mathfrak{P}$ in modo tale che in ogni punto dello spazio i valori di φ restino invariati, nella quantità $\mathfrak{P}$ solo ϑ ed ε vanno variati dell’ammontare prima dato. Se variamo in seguito i valori di φ in modo che essi raggiungano i valori consentiti dal nuovo stato d’equilibrio, per le ipotesi fatte non cambia più il valore della variazione complessiva, poiché:

$$\delta_\varphi\mathfrak{P} = 0.$$

Il contenuto d’energia quindi cresce anche mantenendo lo stato d’equilibrio per il contributo a $\delta\mathfrak{P}$ ottenuto dalla variazione di ϑ e di ε, mentre contemporaneamente le forze ponderomotrici X, Y, Z prodotte dalla magnetizzazione compiono il loro lavoro. Il principio della costanza dell’energia richiede:

$$\delta\mathfrak{P} + \iiint[X\cdot\xi+Y\cdot\eta+Z\cdot\zeta]dx\cdot dy\cdot dz = 0. \qquad (3b)$$

Se calcoliamo $\delta\mathfrak{P}$ dalla (2d) l’equazione (3b) non può esser soddisfatta se i singoli fattori moltiplicati per ξ, η, ζ raccolti sotto il segno di integrale non sono uguali a zero. Quindi la prima di queste equazioni è:

$$0 = X + \varepsilon\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{1}{2}\frac{\partial\vartheta}{\partial x}\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2\right]$$

$$-\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}\left\{\theta\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2\right]\right\}. \qquad (4)$$

Le analoghe espressioni per Y e Z si costruiscono facilmente. Il valore qui trovato di queste componenti racchiude ora tutti gli influssi elettrici che operano sull'elemento di volume della sostanza nella posizione x, y, z. Questi possono essere in parte azione diretta di parti lontane, in parte azione dell'intorno prossimo. Come si effettui la suddivisione tra le due è in certa misura arbitrario. Le forze molecolari devono sottostare alle condizioni che pone il principio d'azione e reazione, e che sono note dalla teoria del corpo elastico. Indichiamo infatti con A forze che giacciano nella direzione x, con B quelle nella direzione y, con C quelle nella direzione z; con l'indice x quelle che agiscono nel verso x positivo sull'unità di superficie parallela al piano yz, eccetera; allora dev'essere:

$$A_y = B_x,\ B_z = C_y,\ C_x = A_z\ . \tag{4a}$$

Le forze che agiscono sull'unità di superficie di un piano la cui normale faccia gli angoli a, b, c con gli assi coordinati positivi, e nel verso di questa normale, devono quindi essere:

$$A_n = A_x \cdot \cos a + A_y \cdot \cos b + A_z \cdot \cos c,$$

$$B_n = B_x \cdot \cos a + B_y \cdot \cos b + B_z \cdot \cos c,$$

$$C_n = C_x \cdot \cos a + C_y \cdot \cos b + C_z \cdot \cos c.$$

Le forze che agiscono sull'elemento di volume dello spazio interno risultano poi nella forma:

$$X = \frac{\partial}{\partial x} A_x + \frac{\partial}{\partial y} A_y + \frac{\partial}{\partial z} A_z,$$

$$Y = \frac{\partial}{\partial x} B_x + \frac{\partial}{\partial y} B_y + \frac{\partial}{\partial z} B_z,$$

$$Z = \frac{\partial}{\partial x} C_x + \frac{\partial}{\partial y} C_y + \frac{\partial}{\partial z} C_z. \tag{4b}$$

Il problema della riconduzione alle forze molecolari assume quindi la forma, se sia possibile portare i valori trovati di X, Y, Z nella forma (4b) rispettando le condizioni (4a), dove le quantità A, B, C possono dipendere solo dallo stato locale della polarizzazione dielettrica.

Ora è possibile di fatto risolvere interamente la forze date in (4) in forze molecolari della forma (4b).

Per eseguire questa riduzione serve la trasformazione seguente:

le equazioni (1) ed (1a) danno:

$$-4\pi\varepsilon = \frac{\partial}{\partial x}\left[(1+4\pi\vartheta)\ \frac{\partial\varphi}{\partial x}\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[(1+4\pi\vartheta)\ \frac{\partial\varphi}{\partial y}\right] + \frac{\partial}{\partial z}\left[(1+4\pi\vartheta)\ \frac{\partial\varphi}{\partial z}\right]$$

dalla quale segue che:

$$4\pi\varepsilon\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial x} = -\frac{\partial}{\partial x}\left[(1+4\pi\vartheta)\ \frac{\partial\varphi}{\partial x}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right] - \frac{\partial}{\partial y}\left[(1+4\pi\vartheta)\ \frac{\partial\varphi}{\partial x}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right]$$

$$-\frac{\partial}{\partial z}\left[(1+4\pi\vartheta)\ \frac{\partial\varphi}{\partial x}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right] + \frac{1}{2}\ \frac{\partial}{\partial x}\left\{(1+4\pi\vartheta)\cdot\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2\right]\right\}$$

$$-2\pi\frac{\partial\vartheta}{\partial x}\cdot\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2\right]. \tag{4d}$$

Se, mediante le equazioni (1), si esprimono le derivate di φ con λ, μ, ν, le forze X, Y, Z si possono portare nella forma (4b) se si pone:

$$A_x = \frac{1+4\pi\vartheta}{8\pi\vartheta^2}\left[\lambda^2-\mu^2-\nu^2\right] + \frac{\theta}{2\vartheta^2}\left[\lambda^2+\mu^2+\nu^2\right],$$

$$B_y = \frac{1+4\pi\vartheta}{8\pi\vartheta^2}\left[-\lambda^2+\mu^2-\nu^2\right] + \frac{\theta}{2\vartheta^2}\left[\lambda^2+\mu^2+\nu^2\right],$$

$$C_z = \frac{1+4\pi\vartheta}{8\pi\vartheta^2}\left[-\lambda^2-\mu^2+\nu^2\right] + \frac{\theta}{2\vartheta^2}\left[\lambda^2+\mu^2+\nu^2\right],$$

$$A_y = B_x = \frac{1+4\pi\vartheta}{4\pi\vartheta^2}\cdot\lambda\mu,\quad B_z = C_x = \frac{1+4\pi\vartheta}{4\pi\vartheta^2}\cdot\mu\nu,\quad C_x = A_z = \frac{1+4\pi\vartheta}{4\pi\vartheta^2}\cdot\nu\lambda, \tag{4e}$$

ovvero anche

$$A_x = \frac{1+4\pi\vartheta}{8\pi}\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 - \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 - \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2\right] + \frac{\vartheta}{2}\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2\right] \text{ ecc.}$$

$$A_y = B_x = \frac{1+4\pi\vartheta}{4\pi}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial x}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial y} \quad \text{ecc.}$$

Queste forze si possono pensare riassunte in:

1) una pressione che ovunque agisce nella direzione della normale esterna di ogni superficie di contorno, dell’ammontare:

$$\frac{1+4\pi(\vartheta-\theta)}{8\pi\vartheta^2}\left[\lambda^2+\mu^2+\nu^2\right],$$

2) una tensione che agisce nella direzione delle linee di forza, dell'ammontare:

$$\frac{1+4\pi\vartheta}{4\pi\vartheta^2}\left[\lambda^2+\mu^2+\nu^2\right]\cdot\cos\eta,$$

dove con η si indica l'angolo acuto che la direzione della forza elettrica fa' con la normale alla superficie.

Indichiamo la risultante della forza elettrica con R:

$$R^2=(1/\vartheta^2)\left[\lambda^2+\mu^2+\nu^2\right],$$

allora la tensione qui menzionata si può porre uguale a:

$$\frac{1+4\pi\vartheta}{4\pi}\cdot R\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial N}$$

e giace nella direzione della linea di forza entrante.

Nella forma come qui sono stati trovati i valori della forza van bene senza difficoltà anche nel caso che alle superfici dei corpi l'andamento dei valori di ϑ sia discontinuo, oppure che vi siano là concentrati degli strati superficiali di elettricità, poiché nei valori di A, B, C non intervengono nè la quantità ε, nè le derivate di ϑ rispetto alle coordinate. Se tuttavia, per controllare la giustezza del procedimento si considerano fin dall'inizio come tali le discontinuità che intervengono nel valore di ϑ al confine tra sostanze diverse, nell'esecuzione del conto si deve tener presente che l'equazione prima costruita:

$$\delta_\varphi\mathfrak{B} = 0$$

si riferisce solo alla variazione di primo grado. Ma l'ammontare complessivo della variazione di $\mathfrak{B}$ corrisponde a questo valore di $\delta\mathfrak{B}$ solo quando i quadrati ed i prodotti delle variazioni possono essere trascurati rispetto ai termini di primo grado. Ora quando un confine tra corpi, dove si congiungono due mezzi le cui costanti dielettriche siano ϑ_1 e ϑ_2, che sia ricoperto dalla densità superficiale e, si muove nella direzione della normale N_0 in modo tale che uno strato dello spessore dN, che prima aveva la costante ϑ_0, ora assuma il valore ϑ_1, risulta immediatamente per valori invariati di φ una variazione di $\mathfrak{B}$ dell'ammontare:

$$-\int d\omega\cdot dN\left\{\frac{\vartheta_1-\vartheta_0}{2}\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2\right]-e\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial N_0}\right\}.$$

Se indichiamo con $\partial\varphi/\partial s$ la derivata massima che φ ha in direzione della superficie, questo si può anche scrivere:

$$-\int d\omega\cdot dN\left\{\frac{\vartheta_1-\vartheta_0}{2}\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial s}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial N_0}\right)^2\right]-e\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial N_0}\right\}.$$

Allora, prima che i valori di φ siano riportati al nuovo stato d'equilibrio, nello strato considerato vale ancora il vecchio valore locale di $\partial\varphi/\partial N_0$. Se ora avviene questa transizione nello stato di equilibrio, nello strato interviene il valore della derivata $\partial\varphi/\partial N_1$ che corrisponde all'altra faccia della superficie, e differisce da quello di una quantità finita secondo l'equazione:

$$-4\pi e=(1+4\pi\vartheta_0)\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial N_0}+(1+4\pi\vartheta_1)\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial N_1}\ . \qquad (4f)$$

Poniamo ora:

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial N_0}\right)^2=\left(\frac{\partial\varphi}{\partial N_1}\right)^2-2\frac{\partial\varphi}{\partial N_1}\cdot\frac{\delta\partial\varphi}{\partial N}+\left(\frac{\delta\partial\varphi}{\partial N}\right)^2,$$

dove in approssimazione:

$$\frac{\delta\partial\varphi}{\partial N}=\frac{\partial\varphi}{\partial N_0}+\frac{\partial\varphi}{\partial N_1}\ ;$$

pertanto questa variazione della derivata nello strato di spessore dN è finito ed anche il suo quadrato non va trascurato. Quando si parte da una configurazione di equilibrio i termini di primo grado saranno naturalmente nulli anche in questo caso, sia che i $\delta\varphi$ siano infinitamente piccoli oppure siano finiti. Ma se togliamo il termine quadratico della variazione, il valore della variazione di $\mathfrak{B}$ che origina da questa variazione di posizione della superficie sarà ora mutato in:

$$-\int d\omega\cdot dN\left\{\frac{\vartheta_1-\vartheta_0}{2}\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial N_0}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial s}\right)^2\right]-\frac{1+4\pi\vartheta_1}{8\pi}\cdot\left[\frac{\partial\varphi}{\partial N_0}+\frac{\partial\varphi}{\partial N_1}\right]^2-e\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial N_0}\right\}\ .$$

Utilizzando l'equazione (4f) per il valore di e questa si riduce a:

$$\int d\omega \cdot dN \left\{ \frac{1+4\pi\vartheta_1}{8\pi} \left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial N_1}\right)^2 - \left(\frac{\partial\varphi}{\partial s}\right)^2 \right] - \frac{1+4\pi\vartheta_0}{8\pi} \left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial N_0}\right)^2 - \left(\frac{\partial\varphi}{\partial s}\right)^2 \right] \right\} .$$

La parte indipendente da θ che agisce secondo la normale alla superficie verso l'interno risulta quindi uguale a:

$$\frac{1+4\pi\vartheta}{8\pi} \left\{ \left(\frac{\partial\varphi}{\partial N}\right)^2 - \left(\frac{\partial\varphi}{\partial s}\right)^2 \right\}$$

in accordo con i valori dati nella (4e) per i piani coordinati. Si hanno parimenti forze tangenziali, quando si suppongano inoltre spostamenti dello strato *e* nella direzione della superficie.

Nella rappresentazione[5] data da Cl. Maxwell di questo sistema di forze manca il termine moltiplicato per θ. Esso è introdotto nella nostra analisi che deriva dalle ipotesi di Poisson, poiché abbiamo tenuto in conto la possibilità dell'allungamento dei dielettrici ponderabili. Ma per il vuoto tra i corpi in moto, per esempio in aria, per le ipotesi di Poisson, che noi qui abbiamo seguito, ϑ è ovunque nullo e resta nullo anche se si cambiano la forma e il volume del vuoto. Queste ipotesi implicano quindi per il vuoto il valore $\theta=0$. Di fatto risulta che solo nei mezzi nei quali o $\theta=0$, oppure che siano incompressibili, le forze ponderomotrici mostrano esattamente la stessa distribuzione che avrebbero nel vuoto secondo l'ipotesi di Coulomb.

Se trattiamo il mezzo come un fluido omogeneo, che non contiene una ε indotta, nel quale la pressione sia p, la densità σ, mentre P rappresenta il potenziale delle forze ponderomotrici esterne (per esempio il peso) che agiscono sull'unità di massa del fluido, le condizioni dell'equilibrio sono:

$$X = \frac{\partial p}{\partial x} + \sigma \frac{\partial P}{\partial x}\ ,\ Y = \frac{\partial p}{\partial y} + \sigma \frac{\partial P}{\partial y}\ ,\ Z = \frac{\partial p}{\partial z} + \sigma \frac{\partial P}{\partial z}\ .$$

In un fluido omogeneo ϑ e σ dipenderanno solo dalla pressione p, e poiché:

$$\theta = \frac{\partial\vartheta}{\partial \log\sigma}\ ,$$

[5] Cl. Maxwell, Electricity and Magnetism. **1**. §§ 104-107. Oxford 1873.

tenendo conto della (4) possiamo scrivere la prima di quelle equazioni come:

$$\frac{\partial p}{\partial x} + \sigma \frac{\partial P}{\partial x} = - \frac{\theta}{2\vartheta^2} (\lambda^2+\mu^2+\nu^2)\frac{1}{\sigma}\cdot\frac{\partial \sigma}{\partial x} + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{\theta}{\vartheta^2}(\lambda^2+\mu^2+\nu^2)\right\},$$

oppure se al posto della pressione p introduciamo la funzione ψ di σ per la quale:

$$\frac{\partial \psi}{\partial \sigma} = \frac{1}{\sigma}\cdot\frac{\partial p}{\partial \sigma},$$

otteniamo dalle tre equazioni di equilibrio precedenti la singola equazione integrale:

$$\psi + P + C = \frac{\theta}{2\sigma}\left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)^2\right], \qquad (4f)$$

la quale mostra che sotto l’azione delle forze trovate anche i mezzi fluidi possono essere in equilibrio; inoltre, che quando $\theta=0$, mediante le forze elettriche non possono essere introdotte all’interno del fluido differenze di pressione.

Se il fluido è incompressibile:

$$\psi = \frac{p}{\sigma},$$

e la polarizzazione elettrica produce accanto alle differenze di pressione già esistenti la pressione:

$$p_s = \frac{\theta}{2}\left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)^2\right].$$

Ma ai confini del mezzo a questa si contrappone la parte, altrettanto grande, della forza di superficie dipendente da ϑ, che indicano le equazioni (4e). Al di là dei confini del corpo considerato la pressione dipendente da θ non ha in queste condizioni influenza alcuna. Questa è la conseguenza logica dell’argomento con il quale è stato introdotto θ. Questo influenza si aveva nell’ipotesi che la sostanza potesse subire variazioni della sua costante dielettrica mediante variazioni di densità. Se essa è incompressibile, questa possibilità non vale.

Solo in un mezzo nel quale ϑ è costante, nel quale quindi o $\theta=0$ oppure σ è costante, l’equazione (4e) per $\varepsilon=0$ dà:

$$\Delta\varphi = 0,$$

come si deve trovare secondo la teoria di Coulomb nello spazio vuoto. In un mezzo con altre proprietà, per il quale le due ipotesi anzidette non valgono, anche l'equazione differenziale per φ dovrà cambiare.

Le leggi qui esposte si estendono anche alle *sostanze magnetizzate temporaneamente*, ma con l'esclusione delle variazioni di forma dei magneti permanenti, poiché non sappiamo se l'equazione (3a) sia applicabile al loro comportamento.

Nella formula (4e) le forze a distanza sono completamente assenti e sostituite dalle reazioni del mezzo polarizzato. Questo è il punto di vista di Faraday e Cl. Maxwell, che considerano l'etere come portatore di questi sforzi anche nello spazio vuoto di sostanza ponderabile.

Ma si possono anche lasciar coesistere l'una accanto all'altra le due cause, se non si vuol rinunciare alle azioni dirette a distanza. Poichè infatti la densità dell'elettricità libera nello spazio può essere rappresentata da:

$$- (1/4\pi)\Delta\varphi \ ,$$

e possiamo formare l'identità:

$$0 = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\cdot\Delta\varphi - \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial\varphi}{\partial x}\,\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right] - \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial\varphi}{\partial x}\,\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right] - \frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{\partial\varphi}{\partial x}\,\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right]$$

$$+ \frac{1}{2}\left\{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2\right\} ,$$

possiamo aggiungere questa espressione divisa per 4π al valore di X senza cambiarlo. Allora risulta:

$$X = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\cdot\frac{\Delta\varphi}{4\pi} + \frac{\partial}{\partial x}(\mathfrak{U}_x) + \frac{\partial}{\partial y}(\mathfrak{U}_y) + \frac{\partial}{\partial z}(\mathfrak{U}_z) \ . \qquad (5)$$

$$\mathfrak{U}_x = \frac{1}{2\vartheta}(\lambda^2-\mu^2-\nu^2) + \frac{\theta}{2\vartheta^2}(\lambda^2+\mu^2+\nu^2) \text{ ecc.,} \quad \mathfrak{U}_y = \mathfrak{B}_x = \frac{1}{\vartheta}\lambda\mu \text{ ecc.,} \qquad (5a)$$

e poiché $\lambda^2/\vartheta = \vartheta\cdot(\partial\varphi/\partial x)^2$ ecc., le tensioni molecolari spariscono nel vuoto, dove $\vartheta=0$. Queste agiscono solo nei dielettrici ponderabili, e accanto ad esse le azioni a distanza dell'elettricità libera, che compaiono nel primo termine del valore di X. Che le forze di tensione mostrate dalla teoria risultino trasverse rispetto alle linee di forza, è stato provato per una serie di sostanze dagli esperimenti di G. Quincke pubblicati da poco[6].

Una dimostrazione della legge delle attrazioni all'interno di un fluido dielettrico (olio di trementina) è stata condotta da P. Silow già nell'anno 1875 in questo istituto di fisica[7].

In conclusione faccio ancora notare che la forma normale più semplice di $\mathfrak{B}$ data nella (2d) resta invariata se moltiplichiamo tutti i coefficienti $(1+4\pi\vartheta)$ e θ per lo stesso numero N^2, mentre dividiamo tutti i valori di φ per N, e invece moltiplichiamo ε e e per N. Poichè dall'espressione di $\mathfrak{B}$ si derivano sia le leggi della distribuzione del potenziale nello spazio, sia i valori della forza ponderomotrice, esse rimangono tutte invariate, come del resto si può riconoscere anche dall'equazione per ε data nella (4c) e dai valori della forza (p. 400 dopo la (4e)). Ma in tal modo nell'equazione (5) il primo termine della forza, ricondotto all'azione diretta a distanza dell'elettricità, si riduce del fattore $1/N^2$, sicchè nella materia, con il crescere di N^2, l'azione a distanza diretta diventa sempre più trascurabile rispetto alla parte trasmessa dal mezzo dielettrico. Il quanto dell'elettricità libera, misurato da $\Delta\varphi$, si riduce parimenti ad $1/N$ del suo valore precedente. Per grandi valori di N l'elettricità libera e l'azione a distanza quindi spariscono, cosa che riconduce alla teoria di Maxwell. Pertanto queste leggi, che avevo già introdotto alla conclusione della mia prima dissertazione sull'elettrodinamica, si confermano qui anche rispetto all'analisi più completa delle forze ponderomotrici.

---

[6] Quincke, Pogg. Ann. **156.** p. 389. 1875.

[7] Silow, Wied. Ann. **10**, p. 161. 374. 513. 1880.