Il principio di minima azione nell'elettrodinamica[1][2]

H. v. Helmholtz.

(Da Sitzungsber. dell'Accademia di Berlino del 12 Maggio 1892;

con aggiunte esplicative)

---

1. Introduzione

Ho mostrato nei miei lavori precedenti sul principio di minima azione[3], che esso ben si adatta anche alle forme incomplete del problema, nelle quali alcune coordinate possono essere eliminate, perché alcune forze, che altrimenti potrebbero intervenire, sono mancanti o inattive, e che inoltre si possono introdurre forme completamente differenti del potenziale cinematico, nelle quali non si deve più riconoscere la separazione delle due forme di energia, ma invece la funzione H, che sarà indicata come il *potenziale cinetico*, può essere una qualunque funzione delle coordinate generalizzate $p_{\mathfrak{a}}$ e delle corrispondenti velocità $q_{\mathfrak{a}}=dp_{\mathfrak{a}}/dt$. Si deve sempre presupporre inoltre che lo stato del sistema in ogni istante sia completamente determinato dal valore delle quantità $p_{\mathfrak{a}}$, $q_{\mathfrak{a}}$ ed eventualmente da un certo numero di costanti.

La forma principale di Hamilton del principio di minima azione ha il vantaggio che in essa l'espressione dell'energia potenziale può anche dipendere dal tempo e può anche includere termini che contengano forze esterne variabili, o forze che non appartengano alle pure forze motrici conservative, ma richiedano invece l'intervento di altri processi fisici. Ho già utilizzato questa circostanza nei miei precedenti lavori, per ricavare così l'espressione di Lagrange per le forze che agiscono nel senso delle singole coordinate. Indichiamo, come là, con $P_{\mathfrak{a}}$ le forze che agiscono nella direzione di $p_{\mathfrak{a}}$, cioè stabiliamo che $P_{\mathfrak{a}}\delta p_{\mathfrak{a}}$ sia il

---

[1]Annalen der Physik und Chemie, **47**, 1 (1892).

[2]*Tradotto in collaborazione con L. Mihich.*

[3]Journal für a. u. r. Mathematik **100.** p.141. 163.

lavoro che il sistema compie, quando in esso intervenga solo la variazione δp_α, e che inoltre P_α sia un insieme di componenti delle forze tale da non compiere lavoro, quando varî una qualche altra coordinata del sistema; allora la forma di Hamilton del principio si formula così:

$$\delta\int_{t_1}^{t_2}[\Phi + \Sigma\{P_\alpha . p_\alpha\} - L]dt = 0 \qquad (A)$$

e in essa la variazione va fatta rispetto a tutti i p_α, mentre le P_α sono funzioni del tempo da non variare. Si ottiene quindi la nota espressione, come data da Lagrange

$$\mathrm{P}_\alpha = - \frac{\partial\Phi}{\partial p_\alpha} + \frac{\partial L}{\partial p_\alpha} - \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial L}{\partial q_\alpha}\right]. \qquad (A_1)$$

Ma la condizione essenziale, per la quale si ottiene questa espressione della forza è che sotto il segno di integrazione le P_α non siano moltiplicati per coefficienti che contengano i q_α; altrimenti con la variazione risulta P_α moltiplicato per $\partial\delta p_\alpha/dt$, che, quand'anche P_α sia indipendente da t, non può più essere eliminato con una integrazione parziale e ridotto a δp_α, sicché risulti la pura espressione di P_α.

Questa condizione ora può anche essere soddisfatta quando il potenziale cinetico $[\Phi\text{-}L]$ viene portato mediante eliminazione in un'altra forma H, dove H indica una qualche funzione di p_α e q_α. Anche allora è possibile che i coefficienti di P_α non contengano i q_α, mentre sarebbero benissimo concepibili forme nelle quali più forze P_α siano raggruppate in una sola P, che risulti moltiplicata per una funzione delle sole coordinate.

Si troverà quindi l'espressione dell'energia totale del sistema:

$$E = + H - \sum_\alpha\left[\frac{\partial H}{\partial q_\alpha} . q_\alpha\right]. \qquad (\mathrm{A}_2)$$

Per ogni moto del sistema determinato dalla condizione (A) vale allora l'equazione:

$$- \frac{dE}{dt} = + \sum\left\{P_\alpha . \frac{dp_\alpha}{dt}\right\}. \qquad (A_3)$$

A destra compare qui l'espressione del lavoro ceduto dal sistema verso l'esterno, calcolato nell'unità di tempo, a sinistra la corrispondente perdita di energia del sistema; questa equazione esprime quindi il principio della costanza dell'energia per ogni sistema i cui moti possano essere rappresentati nella forma anzidetta.

Ora le indagini fisiche ci permettono di solito di determinare, anche per un sistema di composizione sconosciuta e con forze interne ignote, che passi attraverso stati variabili, riconoscibili mediante tracce esterne misurabili, quanto lavoro equivalente entri od esca dal sistema durante le diverse possibili variazioni del suo stato. Se indichiamo tali stati del sistema con una successione di quantità misurabili $\mathfrak{p}_{\mathfrak{a}}$, $\mathfrak{r}_{\mathfrak{a}}$, si potranno in generale determinare i quanti di lavoro ($\mathfrak{P}_{\mathfrak{a}}.d\mathfrak{p}_{\mathfrak{a}}$), rispettivamente ($\mathfrak{R}_{\mathfrak{a}}.d\mathfrak{r}_{\mathfrak{a}}$), che il sistema cede, quando in esso intervenga la variazione dello stato $\mathfrak{p}_{\mathfrak{a}}$ misurata da $d\mathfrak{p}_{\mathfrak{a}}$ o dello stato $\mathfrak{r}_{\mathfrak{a}}$ misurata da $d\mathfrak{r}_{\mathfrak{a}}$. Inoltre si deve naturalmente tener conto di tutti i tipi di lavoro equivalente, quindi in particolare anche del calore sviluppato. Possiamo quindi in generale, anche per un sistema di composizione interna completamente ignota, procurarci una conoscenza del modo nel quale la funzione E dipende da $\mathfrak{p}_{\mathfrak{a}}$, $\mathfrak{r}_{\mathfrak{a}}$, che determinano lo stato istantaneo. Naturalmente l'espressione di E conterrà una costante additiva arbitraria, poiché possono sempre essere misurate solo differenze di E, che corrispondono a stati diversi.

Uno studio siffatto o darà come risultato che la legge di conservazione dell'energia è soddisfatta nel sistema, oppure che dobbiamo cercare ancora altre variazioni finora ignote che comportino quantità d'energia.

Se supponiamo che valga la legge dell'energia, sicché possiamo assumere di conoscere davvero l'espressione di E in funzione di $\mathfrak{p}_{\mathfrak{a}}$ e $\mathfrak{r}_{\mathfrak{a}}$, come avviene realmente, per esempio, nel campo dei fenomeni elettromagnetici, bisognerà chiedersi inoltre quale sia il *potenziale cinetico* del sistema.

In un sistema di corpi ponderabili, le cui forze interne siano conservative, sappiamo di regola indicare quali delle quantità $\mathfrak{p}_{\mathfrak{a}}$ e $\mathfrak{r}_{\mathfrak{a}}$ rappresentino coordinate, e quali velocità, e possiamo uguagliare le prime alle $p_{\mathfrak{a}}$ prima introdotte, le velocità alle $q_{\mathfrak{a}}$. Allora è possibile fino a un certo punto determinare H per mezzo dell'equazione (A_2). Come ho mostrato nei miei lavori precedenti, rimane solo indeterminata una funzione lineare omogenea di $q_{\mathfrak{a}}$, che interviene additivamente nell'espressione di H, perché tali termini lineari si cancellano nell'espressione di E.

Ma questo non si può fare se non sappiamo riconoscere quali delle variazioni interne del sistema corrispondano a variazioni di posizione di singole parti, e quali invece a variazioni di velocità di moti interni ignoti, o anche forse a variazioni di quantità di moto. E in questa situazione siamo nel caso dell'elettrodinamica. In questa abbiamo a che fare con elettrizzazione e magnetizzazione di diversi corpi e sostanze. I due stati possono sussistere durevolmente. Le correnti elettriche generano forze magnetiche, le variazioni magnetiche forze elettriche.

Dobbiamo quindi cercare se sia possibile, senza poterci appoggiare all'equazione (A_2), che le leggi dell'elettrodinamica empiricamente trovate, come sono espresse dalle equazioni di Maxwell, si possano portare nella forma di un principio di minimo, e quali analogie questa forma mostri con quella per corpi ponderabili.

Va d'altronde notato che, se non fissiamo dall'inizio o indichiamo con la notazione che dev'essere $q_{\mathfrak{a}}=dp_{\mathfrak{a}}/dt$, possiamo far risultare questa relazione con l'aggiunta di un termine appropriato all'equazione di minimo. Ho mostrato già nel mio lavoro precedente[4] che l'equazione (A) può essere portata a una tale forma. Quando infatti l'espressione della forza viva L è data esplicitamente in funzione dei $q_{\mathfrak{a}}$,

$$L = \frac{1}{2} . \Sigma_{\mathfrak{a}} \Sigma_{\mathfrak{b}} \left\{ A_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}} q_{\mathfrak{a}} . q_{\mathfrak{b}} \right\}, \qquad (A_4)$$

il potenziale cinetico risulta

$$A = \Phi + \Sigma_{\mathfrak{a}} \left[P_{\mathfrak{a}} . p_{\mathfrak{a}} \right] + \Sigma_{\mathfrak{a}} \Sigma_{\mathfrak{b}} \left[A_{\mathfrak{a}\mathfrak{b}} . q_{\mathfrak{b}} \left[\frac{1}{2} q_{\mathfrak{a}} - \frac{dp_{\mathfrak{a}}}{dt} \right] \right]. \qquad (A_5)$$

I due indici $\mathfrak{a},\mathfrak{b}$ saranno trattati come numeri interi che assumano tutti i valori compresi tra 0 e ∞ indipendentemente l'uno dall'altro. Allora la variazione rispetto a $q_{\mathfrak{b}}$ dà

---

[4] v. Helmholtz, Journal für Math. **100**. p. 151.

$$\Sigma_{\mathfrak{a}}\left\{A_{\mathfrak{a}\mathfrak{b}}.q_{\mathfrak{b}}\left[q_{\mathfrak{a}} - \frac{dp_{\mathfrak{a}}}{dt}\right]\right\} = 0,$$

per tutti gli indici $\mathfrak{b}$. Poiché il determinante dei coefficienti $A_{\mathfrak{a}\mathfrak{b}}.q_{\mathfrak{b}}$ a causa delle variabili $q_{\mathfrak{b}}$ non può in generale essere uguale a zero, si ottengono le seguenti equazioni:

$$\left(q_{\mathfrak{a}} - \frac{dp_{\mathfrak{a}}}{dt}\right) = 0,$$

mentre con la variazione di $p_{\mathfrak{a}}$ si ottiene

$$\left\{\begin{aligned} P_{\mathfrak{a}} &= -\frac{\partial\Phi}{\partial p_{\mathfrak{a}}} - \Sigma_{\mathfrak{a}\mathfrak{b}}\left\{\frac{\partial A_{\mathfrak{a}\mathfrak{b}}}{\partial p_{\mathfrak{a}}} q_{\mathfrak{b}}\left[\frac{1}{2} q_{\mathfrak{a}} - \frac{dp_{\mathfrak{a}}}{dt}\right]\right\} + \frac{d}{dt}\Sigma\left\{A_{\mathfrak{a}\mathfrak{b}}.q_{\mathfrak{b}}\right\} \\ &= -\frac{\partial\Phi}{\partial p_{\mathfrak{a}}} + \frac{\partial L}{\partial p_{\mathfrak{a}}} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial q_{\mathfrak{a}}}\right) \end{aligned}\right. \qquad (A_6)$$

come nella (A_1).

Se vogliamo costruirci delle rappresentazioni riguardanti l’essenza delle forze elettriche e magnetiche e la natura del substrato materiale che le supporta, in primo luogo sappiamo che entrambe sono soggette alla legge della costanza dell’energia; ma non sappiamo separare con certezza le due forme di energia, e inoltre non sappiamo se esse partecipino delle altre proprietà generali di tutte le forze motrici conservative della materia ponderabile, che trovano la loro più concisa espressione nel principio di minima azione e che, come ho dimostrato, portano ad esprimere una serie di leggi di reciprocità caratteristiche tra le forze di diversa origine in un sistema di masse ponderabili.

Ho già fatto notare nell’articolo citato, che il principio di minima azione vale in un campo limitato di fenomeni elettro-dinamici, vale a dire fin dove giungono le leggi del potenziale proposte da F. E. Neumann ed estese da me, per correnti chiuse, con lo spazio interposto libero da sostanze elettriche e magnetiche.

Ci si pone ora la domanda se il principio possa includere anche le equazioni più generali dell’elettrodinamica, come le ha proposte Cl. Maxwell, e H. Hertz ha completato con lo sviluppo esplicito dei termini dipendenti dal moto del mezzo.

A prescindere dalle questioni teoriche sulla natura delle forze fondamentali, si pongono anche altre domande sui fenomeni osservabili. Le espressioni della forze elettromotrici nei sistemi elettromagnetici sono state infatti derivate finora solo dall'espressione dell'energia. Tuttavia ho fatto notare (loc.cit.) che nei casi in cui il potenziale cinetico contenga dei termini lineari nelle velocità, essi si cancellano nell'espressione dell'energia e quindi anche le forze che da essi originano non possono essere trovate dall'energia. Ora tali termini lineari intervengono già di fatto nel potenziale cinetico costruito secondo il procedimento di F. E. Neumann, quando interagiscono un magnete permanente e una corrente chiusa. La questione se non esistano altri esempi siffatti non si può decidere senza una ricerca particolare a ciò diretta.

Nella funzione indicata con Φ nell'equazione (*A*) si può comprendere solo il lavoro di forze conservative, il cui ammontare è completamente dato dalla posizione istantanea del sistema; proprio per questo solo forze siffatte possono entrare nella funzione *H*. Tutte le forze non conservative, come per esempio la resistenza analoga all'attrito, che il movimento elettrico genera nei conduttori, come pure quelle forze che sono provocate da masse che non appartengono al sistema, e dalla variazione del loro stato, possono entrare solo nella serie delle forze $P_{\mathfrak{a}}$, poiché queste possono essere funzioni arbitrarie del tempo.

Nel potenziale cinetico possiamo includere quindi solo i processi negli isolanti. In questi possono notoriamente intervenire accanto alle *polarizzazi0ni dielettriche, i cui momenti per unità di volume indichiamo con* $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$, anche le *polarizzazioni magnetiche*, sia *temporanee* che *permanenti.* Indichiamo le componenti delle prime con $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$, quelle delle altre con *l*, *m*, *n*. L'elettricità vera accumulata, come mostreranno le nostre equazioni, in un isolante rimane stabilmente attaccata alle parti materiali nelle quali essa è posta. La sua *densità spaziale* σ è notoriamente data dalla quantità

$$\sigma = \frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{Y}}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial z} \tag{1}$$

Assumiamo come quantità da variarsi nel potenziale elettrocinetico oltre alle componenti della polarizzazione dielettrica $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ anche i cosiddetti potenziali vettori $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{W}$, che introduciamo al posto dei momenti magnetici, dai quali questi ultimi, come troveremo, dipendono tramite le equazioni:

$$\left\{\begin{aligned} \mathfrak{L} + l &= \frac{\partial \mathfrak{W}}{\partial y} - \frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial z} \\ \mathfrak{M} + m &= \frac{\partial \mathfrak{U}}{\partial z} - \frac{\partial \mathfrak{W}}{\partial x} \\ \mathfrak{N} + n &= \frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial x} - \frac{\partial \mathfrak{U}}{\partial y}. \end{aligned}\right. \tag{2}$$

Poiché $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ non entrano affatto nella quantità da variare, le equazioni (2) hanno qui solo il significato di dare una definizione del senso di questi simboli. Dopo aver completato la variazione riconosceremo che le quantità definite così soddisfano alle stesse equazioni alle quali soddisfano secondo Maxwell le espressioni dei momenti magnetici temporanei, cosicché possiamo identificarle con essi.

Le quantità l, m, n indicano i momenti magnetici permanenti, che almeno entro certi limiti non cambiano e inoltre, nell'elemento di materia considerato, mantengono rispetto a questo una direzione invariata. Per dilatazione e torsione del volume considerato, che in un magnete con grande forza coercitiva rimangono sempre del tutto trascurabili, a meno che non lo si rompa, rimangono sempre estremamente trascurabili, possiamo qui ben supporre che esse si comportino come, per il medesimo intervento, volumi a magnetizzazione temporanea, e che quindi le variazioni sotto queste condizioni delle loro componenti soddisfino le equazioni:

$$\left\{\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial l}{\partial t} + \alpha\left[\frac{\partial l}{\partial x} + \frac{\partial m}{\partial y} + \frac{\partial n}{\partial z}\right] + \frac{\partial}{\partial y}[\beta . l - \alpha . m] + \frac{\partial}{\partial z}[\gamma . l - \alpha . n] \\ 0 &= \frac{\partial m}{\partial t} + \beta\left[\frac{\partial l}{\partial x} + \frac{\partial m}{\partial y} + \frac{\partial n}{\partial z}\right] + \frac{\partial}{\partial z}[\gamma . m - \beta . n] + \frac{\partial}{\partial x}[\alpha . m - \beta . l] \\ 0 &= \frac{\partial n}{\partial t} + \gamma\left[\frac{\partial l}{\partial x} + \frac{\partial m}{\partial y} + \frac{\partial n}{\partial z}\right] + \frac{\partial}{\partial x}[\alpha . n - \gamma . l] + \frac{\partial}{\partial y}[\beta . n - \gamma . m]. \end{aligned}\right. \tag{2a}$$

Nel caso in cui queste equazioni non s'adattino esattamente a un magnete fisico, le deviazioni a ciò dovute possono tuttavia dar luogo solo a correzioni insignificanti.

Se si scrive

$$\frac{\partial l}{\partial x} + \frac{\partial m}{\partial y} + \frac{\partial n}{\partial z} = -\,\tau, \tag{2b}$$

risulta che

$$0 = \frac{\partial \tau}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\alpha\tau) + \frac{\partial}{\partial y}(\beta\tau) + \frac{\partial}{\partial z}(\gamma\tau), \tag{2c}$$

vale a dire che, durante le variazioni che intervengono ($\tau . dx . dy . dz$) rimane costante.

Dalle equazioni (2) risulta allora che

$$\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{N}}{\partial z} = + \tau \tag{2d}$$

L'ultima espressione è la densità spaziale del magnetismo permanente ai poli di un magnete, per il quale la costanza del *quantum* contenuto in ogni elemento del corpo è affermata anche nelle equazioni di Maxwell.

Va qui notato ancora che le equazioni (2) determinano completamente le espressioni di $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$, quando siano date completamente le espressioni di $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{W}$ e di l, m, n, ma che invece $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{W}$ non sono determinati completamente dalle espressioni di $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ e di l, m, n, a meno che non fissiamo come condizione al contorno all'infinito che $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{W}$ debbano annullarsi a distanza infinita, come sempre accadrà, quando i moti elettrici dopo un tempo finito si sono propagati in distanza da uno spazio finito.

Per determinare completamente l'espressione di $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{W}$, dovremo trovare anche l'espressione di

$$\frac{\partial \mathfrak{U}}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{W}}{\partial z} = \Delta\Psi. \tag{2e}$$

Troveremo in seguito come si determini Ψ mediante il problema variazionale. Quando ciò accade, $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{W}$ sono determinate comletamente in modo noto dalle equazioni (2) e (2e).

Le quantità $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ e $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{W}$ saranno considerate come funzioni delle coordinate ortogonali x, y, z del punti fissi dello spazio, che corrispondono alle posizioni iniziali del sistema al tempo $t = t_0$. Ma poiché il mezzo che è il supporto dei fenomeni elettromagnetici deve essere considerato mobile, dobbiamo tener conto anche degli spostamenti dei punti del mezzo dalle posizioni iniziali dello stesso. Le loro componenti siano ξ, η, ζ, ed anch'esse funzioni di x, y, z, t, cosicché $(x+\xi)$, $(y+\eta)$, $(z+\zeta)$ sono da considerare come le coordinate di un identico punto fissato del mezzo. Un punto siffatto lo chiameremo *sostanziale*, poiché certamente non gli possiamo attribuire massa, cioè inerzia, e pertanto la denominazione più consueta di "punto materiale" non si presta.

Indico le componenti della velocità con

$$\frac{d\xi}{dt} = \alpha, \qquad \frac{d\eta}{dt} = \beta, \qquad \frac{d\zeta}{dt} = \gamma.$$

Variazioni della posizione d'un punto sostanziale saranno misurate da $\delta\xi$, $\delta\eta$, $\delta\zeta$. Non occorre considerare le x, y, z come variabili, perché ogni posizione occupata dal sistema nel corso del moto può essere considerata come posizione iniziale per gli spostamenti nel successivo tempuscolo dt, e per questo si possono scrivere le equazioni di moto.

Dò al potenziale elettrocinetico Φ l'espressione seguente, che scompongo in più termini al fine d'una migliore comprensione:

$$\Phi = \Phi_e + \Phi_m + \Phi_q + R, \tag{3}$$

$$\Phi_e = \iiint dx.dy.dz \left\{ \frac{\mathfrak{X}^2 + \mathfrak{Y}^2 + \mathfrak{Z}^2}{2\varepsilon} \right\}, \tag{3a}$$

$$\left\{ \begin{aligned} \Phi_m = \iiint \frac{dx.dy.dz}{2\mu} \Bigg\{ & \left[\frac{\partial\mathfrak{B}}{\partial z} - \frac{\partial\mathfrak{W}}{\partial y} + l \right]^2 + \left[\frac{\partial\mathfrak{W}}{\partial x} - \frac{\partial\mathfrak{U}}{\partial z} + m \right]^2 \\ & + \left[\frac{\partial\mathfrak{U}}{\partial y} - \frac{\partial\mathfrak{B}}{\partial x} + n \right]^2 \Bigg\}. \end{aligned} \right. \tag{3b}$$

$$\Phi_q = \Phi_{q,1} + \Phi_{q,2} + \Phi_{q,3}$$

$$\left\{ \begin{aligned} \Phi_{q,1} &= A\iiint dx.dy.dz.\mathfrak{U} \left\{ \frac{\partial\mathfrak{X}}{\partial t} + \alpha.\sigma + \frac{\partial}{\partial y}(\mathfrak{X}.\beta - \mathfrak{Y}.\alpha) + \frac{\partial}{\partial z}(\mathfrak{X}.\gamma - \mathfrak{Z}.\alpha) \right\} \\ \Phi_{q,2} &= A\iiint dx.dy.dz.\mathfrak{B} \left\{ \frac{\partial\mathfrak{Y}}{\partial t} + \beta.\sigma + \frac{\partial}{\partial z}(\mathfrak{Y}.\gamma - \mathfrak{Z}.\beta) + \frac{\partial}{\partial x}(\mathfrak{Y}.\alpha - \mathfrak{X}.\beta) \right\} \\ \Phi_{q,3} &= A\iiint dx.dy.dz.\mathfrak{W} \left\{ \frac{\partial\mathfrak{Z}}{\partial t} + \gamma.\sigma + \frac{\partial}{\partial x}(\mathfrak{Z}.\alpha - \mathfrak{X}.\gamma) + \frac{\partial}{\partial y}(\mathfrak{Z}.\beta - \mathfrak{Y}.\gamma) \right\}. \end{aligned} \right. \tag{3c}$$

L'ultima parte R comprende le forze interne, con le quali il processo presupposto nel mezzo agisce sull'esterno e che devono essere bilanciate da forze esterne opposte, per lasciar avvenire indisturbate le variazioni presupposte in Φ:

$$\left\{ \begin{aligned} R = \iiint \Bigg\{ & \left[X.\mathfrak{X} + Y.\mathfrak{Y} + Z.\mathfrak{Z} \right] + A\left(u.\mathfrak{U} + v.\mathfrak{B} + w.\mathfrak{W} \right) \\ & + \left(\Xi.\xi + \Upsilon.\eta + \mathrm{Z}.\zeta \right) \Bigg\} dx.dy.dz. \end{aligned} \right. \tag{3d}$$

Qui X, Y, Z sono le componenti della forza elettrica, Ξ, Υ, Z le componenti della forza ponderomotrice, u, v, w le componenti della corrente elettrica nel conduttore.

Tutti gli integrali spaziali vanno estesi fino all'infinito. All'infinito $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$, $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{W}$, α, β, γ van posti uguali a zero. Finché non si effettua alcuna variazione di posizione, σ, l, m, n, ε e μ van considerate indipendenti dal tempo, ma funzioni continue delle coordinate; lo stesso vale per α, β, γ. Prescindiamo qui dal fatto che ε e μ non sono in realtà completamente indipendenti dall'intensità della polarizzazione, rispettivamente dalla deforma- zione dell'elemento di volume. Nel caso che in esempi particolari dovessero intervenire discontinuità di queste quantità su alcune superfici limite, queste vanno sempre trattate come casi limite di transizioni continue.

Il problema variazionale è quindi

$$0 = \delta\int_{t_0}^{t_1}\Phi.dt. \tag{4}$$

In questo saranno considerate come variabili indipendenti le quantità

$(\mathfrak{U}.Dx)$, $(\mathfrak{B}.Dy)$, $(\mathfrak{W}.Dz)$, $(\mathfrak{X}.Dy.Dz)$, $(\mathfrak{Y}.Dz.Dx)$, $(\mathfrak{Z}.Dx.Dy)$, ξ, η, ζ.

Le prime sei saranno riferite agli elementi di linea Dx, Dy, Dz che si spostano con il mezzo, e le $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{W}$ alle componenti che giacciono sull'elemento di linea in moto, le $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$, a quelle che giacciono sulla normale dell'elemento di superficie in moto. Quando ξ, η, ζ non variano, si devono trattare di conseguenza $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{W}$, ,$\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$, come variabili indipendenti, poiché Dx, Dy, Dz non variano nel tempo. Invece nella variazione di ξ, η, ζ intervengono certe definizioni, delle quali si parlerà ulteriormente in seguito, riguardanti le variazioni dipendenti da queste delle quantità orientate associate alle strutture spaziali.

Dopo queste determinazioni si ottengono mediante la variazione delle prime sei quantità le seguenti equazioni come condizione per soddisfare la (4) tenendo conto delle definizioni date nelle (2):

$$
\begin{cases}
0 = \delta\mathfrak{U}\left\{A.u + \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\mathfrak{N}}{\mu}\right) - \dfrac{\partial}{\partial z}\left(\dfrac{\mathfrak{M}}{\mu}\right) + A\left[\dfrac{\partial\mathfrak{X}}{\partial t} + \alpha.\sigma + \dfrac{\partial}{\partial y}(\mathfrak{X}.\beta-\mathfrak{Y}.\alpha) + \dfrac{\partial}{\partial z}(\mathfrak{X}.\gamma-\mathfrak{Z}.\alpha)\right]\right\} \\
0 = \delta\mathfrak{B}\left\{A.v + \dfrac{\partial}{\partial z}\left(\dfrac{\mathfrak{L}}{\mu}\right) - \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\mathfrak{N}}{\mu}\right) + A\left[\dfrac{\partial\mathfrak{Y}}{\partial t} + \beta.\sigma + \dfrac{\partial}{\partial z}(\mathfrak{Y}.\gamma-\mathfrak{Z}.\beta) + \dfrac{\partial}{\partial x}(\mathfrak{Y}.\alpha-\mathfrak{X}.\beta)\right]\right\} \\
0 = \delta\mathfrak{W}\left\{A.w + \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\mathfrak{M}}{\mu}\right) - \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\mathfrak{L}}{\mu}\right) + A\left[\dfrac{\partial\mathfrak{Z}}{\partial t} + \gamma.\sigma + \dfrac{\partial}{\partial x}(\mathfrak{Z}.\alpha-\mathfrak{X}.\gamma) + \dfrac{\partial}{\partial y}(\mathfrak{Z}.\beta-\mathfrak{Y}.\gamma)\right]\right\}.
\end{cases}
\tag{4a}
$$

Quando il mezzo è un isolante, e quindi u=v=w=0, si ottiene da queste tre equazioni, derivando il fattore con $\delta\mathfrak{U}$ rispetto a x, quello con $\delta\mathfrak{B}$ rispetto a y, e quello con $\delta\mathfrak{W}$ rispetto a z:

$$0 = \frac{\partial\sigma}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\alpha.\sigma) + \frac{\partial}{\partial y}(\beta.\sigma) + \frac{\partial}{\partial z}(\gamma.\sigma), \tag{4b}$$

che è la condizione nota perché il *quantum*

$$[\sigma.dx.dy.dz]$$

resti invariato in un volume che racchiuda sempre lo stesso punto sostanziale del mezzo.

In un mezzo non isolante dove u, v, w possono essere diversi da zero, risulta

$$\frac{\partial}{\partial t}\{\sigma.dx.dy.dz\} = -\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right)dx.dy.dz,$$

l’equazione nota dalla teoria delle correnti galvaniche.

Inoltre le variazioni di $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ danno le seguenti equazioni:

$$
\left\{
\begin{aligned}
0 &= X + \frac{\mathfrak{X}}{\varepsilon} - A\left\{ \frac{\partial \mathfrak{U}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}[\alpha.\mathfrak{U} + \beta.\mathfrak{B} + \gamma.\mathfrak{W}] + \beta\left[\frac{\partial \mathfrak{U}}{\partial y} - \frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial z} \right] \right. \\
&\qquad\qquad \left. + \gamma\left[\frac{\partial \mathfrak{U}}{\partial z} - \frac{\partial \mathfrak{W}}{\partial x} \right] \right\} \\
0 &= Y + \frac{\mathfrak{Y}}{\varepsilon} - A\left\{ \frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial y}[\alpha.\mathfrak{U} + \beta.\mathfrak{B} + \gamma.\mathfrak{W}] + \gamma\left[\frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial z} - \frac{\partial \mathfrak{W}}{\partial y} \right] \right. \\
&\qquad\qquad \left. + \alpha\left[\frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial x} - \frac{\partial \mathfrak{U}}{\partial y} \right] \right\} \\
0 &= Z + \frac{\mathfrak{Z}}{\varepsilon} - A\left\{ \frac{\partial \mathfrak{W}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z}[\alpha.\mathfrak{U} + \beta.\mathfrak{B} + \gamma.\mathfrak{W}] + \alpha\left[\frac{\partial \mathfrak{W}}{\partial x} - \frac{\partial \mathfrak{U}}{\partial z} \right] \right. \\
&\qquad\qquad \left. + \beta\left[\frac{\partial \mathfrak{W}}{\partial y} - \frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial z} \right] \right\}.
\end{aligned}
\right.
\tag{4c}
$$

Nel caso che le forze elettromotrici esterne siano $X=Y=Z=0$, o della forma $\partial\varphi/\partial x$, $\partial\varphi/\partial y$, $\partial\varphi/\partial z$, da queste equazioni se ne possono ricavare tre nuove, eseguendo le derivazioni che sono necessarie per eliminare la quantità

$$[\mathfrak{U}.\alpha + \mathfrak{B}.\beta + \mathfrak{W}.\gamma].$$

Si ottiene così:

$$
\left\{
\begin{aligned}
0 &= \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\mathfrak{Y}}{\varepsilon}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\mathfrak{Z}}{\varepsilon}\right) + A\left\{ \frac{\partial}{\partial t}[\mathfrak{L} + l] \right. \\
&\qquad \left. + \frac{\partial}{\partial y}[\beta(\mathfrak{L} + l) - \gamma(\mathfrak{M} + m)] + \frac{\partial}{\partial z}[\gamma(\mathfrak{L} + l) - \alpha(\mathfrak{N} + n)] \right\} \\
0 &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\mathfrak{Z}}{\varepsilon}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\mathfrak{X}}{\varepsilon}\right) + A\left\{ \frac{\partial}{\partial t}[\mathfrak{M} + m] \right. \\
&\qquad \left. + \frac{\partial}{\partial z}[\gamma(\mathfrak{M} + m) - \beta(\mathfrak{N} + n)] + \frac{\partial}{\partial x}[\alpha(\mathfrak{M} + m) - \beta(\mathfrak{L} + l)] \right\} \\
0 &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\mathfrak{X}}{\varepsilon}\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\mathfrak{Y}}{\varepsilon}\right) + A\left\{ \frac{\partial}{\partial t}[\mathfrak{N} + \mathrm{n}] \right. \\
&\qquad \left. + \frac{\partial}{\partial x}[\alpha(\mathfrak{N} + n) - \gamma(\mathfrak{L} + l)] + \frac{\partial}{\partial y}[\beta(\mathfrak{N} + n) - \gamma(\mathfrak{M} + m)] \right\}
\end{aligned}
\right.
\tag{4d}
$$

Per le variazioni delle quantità l, m, n abbiamo stabilito prima le equazioni (2a); se le moltiplichiamo per A e le sommiamo alle equazioni (4d) otteniamo

$$
\left\{
\begin{aligned}
0 &= \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\mathfrak{Y}}{\varepsilon}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\mathfrak{Z}}{\varepsilon}\right) + A\left\{\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial t} + \alpha\,.\,\tau\right.\\
&\qquad \left. + \frac{\partial}{\partial y}\left[\beta.\mathfrak{L} - \alpha.\mathfrak{M}\right] + \frac{\partial}{\partial z}\left[\gamma.\mathfrak{L} - \alpha.\mathfrak{N}\right]\right\}\\
0 &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\mathfrak{Z}}{\varepsilon}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\mathfrak{X}}{\varepsilon}\right) + A\left\{\frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial t} + \beta\,.\,\tau\right.\\
&\qquad \left. + \frac{\partial}{\partial z}\left[\gamma.\mathfrak{M} - \beta.\mathfrak{N}\right] + \frac{\partial}{\partial x}\left[\alpha.\mathfrak{M} - \beta.\mathfrak{L}\right]\right\}\\
0 &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\mathfrak{X}}{\varepsilon}\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\mathfrak{Y}}{\varepsilon}\right) + A\left\{\frac{\partial \mathfrak{N}}{\partial t} + \gamma\,.\,\tau\right.\\
&\qquad \left. + \frac{\partial}{\partial x}\left[\alpha.\mathfrak{N} - \gamma.\mathfrak{L}\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[\beta.\mathfrak{N} - \gamma.\mathfrak{M}\right]\right\}.
\end{aligned}
\right.
\qquad (4f)
$$

A senso le equazioni (4f) e (4a) sono in accordo con le equazioni (1a) e (1b) date da H. Hertz nel volume 41 dei Wiedemann's Annalen a pagina 374. Le notazioni sono sostanzialmente identiche. Le nostre costanti ε e μ là sono scritte $4\pi\varepsilon$ e $4\pi\mu$: inoltre le forze elettromotrici X, Y, Z che risultano qui sono quelle esercitate dal sistema elettromagnetico verso l'esterno, e hanno perciò il segno contrario, come quelle che producono i momenti $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$. Parimenti compaiono al posto delle forze magnetiche L, M, N, come risultano per Hertz, la cui espressione è data tramite i momenti.

La trattazione del magnetismo permanente che interviene là è abbastanza diversa. Per Hertz il magnetismo permanente ai poli di un magnete d'acciaio può esser trattato solo come una quantità costante ivi accumulata, come l'elettricità vera in un isolante. Là non c'è bisogno di tenere conto della suddivisione in molecole, come pure nelle nostre ultime equazioni (4f); le leggi contenute nelle equazioni (4e) valgono infatti nel senso che anche i momenti magnetici interni del magnete d'acciaio appaiono solo come temporanei, indotti dalle masse dei poli. Tuttavia la derivazione della costanza delle masse polari mi ha costretto alla via diversa, con la quale ci si attiene al fatto decisivo, che la magnetizzazione molecolare permanente è riconoscibile nelle particelle materiali dello stesso tipo che congiungono le masse polari.

La funzione Ψ dell'equazione (2e) può anche essere derivata dalle equazioni (4c); ma non si ottiene in tal modo alcuna equazione che dica di più di quanto risulti per integrazione dalle equazioni di Maxwell.

Variazione della posizione. Per trovare le forze ponderomotrici, dobbiamo variare la posizione del punto sostanziale, vale a dire le quantità ξ, η, ζ. Inoltre, come già osservato prima, vanno considerate come variabili indipendenti che devono restare costanti al variare di ξ, η, ζ non più $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{W}$, $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$, ma

$$(\mathfrak{U}.Dx),\ (\mathfrak{B}.Dy),\ (\mathfrak{W}.Dz),$$
$$(\mathfrak{X}.Dy.Dz),\ (\mathfrak{Y}.Dz.Dx),\ (\mathfrak{Z}.Dx.Dy).$$

Inoltre è stato stabilito prima che ε e μ debbano restare costanti in ogni punto sostanziale, σ e τ in ogni elemento di volume del corpo. Ne conseguirà che nell'elemento di volume spaziale $(dx.dy.dz)$ entreranno altri punti sostanziali con altri valori delle suddette quantità. Se procediamo così, l'integrazione può come finora essere estesa allo spazio infinito secondo gli elementi di volume $dx.dy.dz$, solo per ciascuno di essi devono essere moltiplicate quelle variazioni, che sono associate ai mutamenti dovuti alle particelle sostanziali che entrano in essi.

Dobbiamo in primo luogo determinare le variazioni, prese in questo senso, che subiscono quantità che appartengono a tipi diversi di strutture spaziali sostanziali.

1.*Quantità il cui valore afferisce a un punto materiale*; annoveriamo tra queste le costanti dielettriche e magnetiche della sostanza, ε e μ. Poiché la possibile variazione di queste costanti per dilatazione o compressione del supporto materiale non è stata considerata nei lavori di Maxwell e Hertz, e poiché per il momento ci occorre solo di riprodurre le loro leggi, poniamo:

$$0 = \delta\varepsilon + \frac{\partial\varepsilon}{\partial x}.\xi + \frac{\partial\varepsilon}{\partial y}.\eta + \frac{\partial\varepsilon}{\partial z}.\zeta,$$

ovvero:

$$\delta\varepsilon = -\frac{\partial\varepsilon}{\partial x}.\xi - \frac{\partial\varepsilon}{\partial y}.\eta - \frac{\partial\varepsilon}{\partial z}.\zeta \qquad (5)$$

e parimenti

$$\delta\mu = -\frac{\partial\mu}{\partial x}.\xi - \frac{\partial\mu}{\partial y}.\eta - \frac{\partial\mu}{\partial z}.\zeta. \qquad (5a)$$

Qui $\delta\varepsilon$ indica la variazione del valore prodotta nel punto x, y, z dallo spostamento, quando ogni singolo punto materiale del substrato mantenga invariato il suo valore di ε.

2. *Quantità il quantum delle quali rimane costante in un volume.* Annoveriamo tra queste il *quantum* di elettricità vera e di magnetismo vero, le cui densità abbiamo prima indicato con σ e τ.

Indichiamo ancora con $\delta\sigma$ la variazione di densità nel punto (x, y, z), cosicché:

$$0 = \delta[\sigma.dx.dy.dz]$$

$$= dx.dy.dz\left\{\delta\sigma + \frac{\partial\sigma}{\partial x}.\xi + \frac{\partial\sigma}{\partial y}.\eta + \frac{\partial\sigma}{\partial z}.\zeta + \sigma.\frac{\delta(dxdydz)}{dxdydz}\right\};$$

ossia, poiché

$$\frac{\delta(dxdydz)}{dxdydz} = \frac{\partial\xi}{\partial x} + \frac{\partial\eta}{\partial y} + \frac{\partial\zeta}{\partial z},$$

si ottiene:

$$\delta\sigma = -\frac{\partial}{\partial x}(\xi.\sigma) - \frac{\partial}{\partial y}(\eta.\sigma) - \frac{\partial}{\partial z}(\zeta.\sigma). \qquad (5b)$$

Parimenti

$$\delta\tau = -\frac{\partial}{\partial x}(\xi.\tau) - \frac{\partial}{\partial y}(\eta.\tau) - \frac{\partial}{\partial z}(\zeta.\tau). \qquad (5c)$$

3. *Prodotti di un vettore per un elemento di linea con la stessa direzione.* Richiediamo che per qualunque valore di Dx, Dy, Dz la variazione:

$$\delta\left\{\mathfrak{U}.Dx + \mathfrak{V}.Dy + \mathfrak{W}.Dz\right\} = 0. \qquad (6)$$

Oltre alla variazione per cambiamento di posizione, costruita secondo lo schema (5), intervengono qui ancora le variazioni di Dx, Dy, Dz, che sono:

$$\left\{\begin{aligned} \delta Dx &= \frac{\partial\delta x}{\partial x}.Dx + \frac{\partial\delta x}{\partial y}.Dy + \frac{\partial\delta x}{\partial z}.Dz \\ \delta Dy &= \frac{\partial\delta y}{\partial x}.Dx + \frac{\partial\delta y}{\partial y}.Dy + \frac{\partial\delta y}{\partial z}.Dz \\ \delta Dz &= \frac{\partial\delta z}{\partial x}.Dx + \frac{\partial\delta z}{\partial y}.Dy + \frac{\partial\delta z}{\partial z}.Dz. \end{aligned}\right. \qquad (6a)$$

Quando inseriamo queste espressioni nell'equazione (6) e teniamo conto che l'equazione risultante deve essere soddisfatta per qualunque valore di Dx, Dy, Dz, si ottiene:

$$\delta\mathfrak{U} = \mathfrak{U}.\frac{\partial\delta x}{\partial x} + \mathfrak{V}.\frac{\partial\delta y}{\partial x} + \mathfrak{W}.\frac{\partial\delta z}{\partial x} + \delta x.\frac{\partial U}{\partial x} + \delta y.\frac{\partial\mathfrak{U}}{\partial y} + \delta z.\frac{\partial\mathfrak{U}}{\partial z}$$

ovvero[5]

$$\begin{cases} -\delta\mathfrak{U} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left[\mathfrak{U}.\delta\xi + \mathfrak{B}.\delta\eta + \mathfrak{W}.\delta\zeta\right] + \delta y\left[\dfrac{\partial\mathfrak{U}}{\partial y} - \dfrac{\partial\mathfrak{B}}{\partial x}\right] + \delta z\left[\dfrac{\partial\mathfrak{U}}{\partial z} - \dfrac{\partial\mathfrak{W}}{\partial x}\right] \\ -\delta\mathfrak{B} = \dfrac{\partial}{\partial y}\left[\mathfrak{U}.\delta\xi + \mathfrak{B}.\delta\eta + \mathfrak{W}.\delta\zeta\right] + \delta z\left[\dfrac{\partial\mathfrak{B}}{\partial z} - \dfrac{\partial\mathfrak{W}}{\partial y}\right] + \delta x\left[\dfrac{\partial\mathfrak{W}}{\partial x} - \dfrac{\partial\mathfrak{U}}{\partial y}\right] \\ -\delta\mathfrak{W} = \dfrac{\partial}{\partial z}\left[\mathfrak{U}.\delta\xi + \mathfrak{B}.\delta\eta + \mathfrak{W}.\delta\zeta\right] + \delta x\left[\dfrac{\partial\mathfrak{W}}{\partial x} - \dfrac{\partial\mathfrak{U}}{\partial z}\right] + \delta y\left[\dfrac{\partial\mathfrak{W}}{\partial y} - \dfrac{\partial\mathfrak{B}}{\partial z}\right] \end{cases} \quad (6b)$$

Le quantità $\delta\mathfrak{U}$, $\delta\mathfrak{B}$, $\delta\mathfrak{W}$ sono qui ancora le variazioni che, nel punto x,y,z e nel suo intorno, devono intervenire nei valori delle componenti $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{W}$ affinché non cambi la quantità, la cui variazione nella (6) è posta uguale a zero. Se le variazioni qui calcolate procedono continuamente con velocità costante nel tempuscolo δt, si ha

$$\delta\mathfrak{U} = \frac{\partial\mathfrak{U}}{\partial t}\,.\,\delta t$$
$$\delta\xi = \frac{\partial\xi}{\partial t}.\delta t = \alpha.\delta t$$
$$\delta\eta = \frac{\partial\eta}{\partial t}.\delta t = \beta.\delta t$$
$$\delta\zeta = \frac{\partial\zeta}{\partial t}.\delta t = \gamma.\delta t.$$

Se si pone

$$\left[\frac{d\mathfrak{U}}{dt}\right] = \frac{\partial\mathfrak{U}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}[\mathfrak{U}.\alpha + \mathfrak{B}.\beta + \mathfrak{W}.\gamma] + \beta\left[\frac{\partial\mathfrak{U}}{\partial y} - \frac{\partial\mathfrak{B}}{\partial x}\right] + \gamma\left[\frac{\partial\mathfrak{U}}{\partial z} - \frac{\partial\mathfrak{W}}{\partial x}\right]$$

e analogamente per le altre componenti, allora

$$\left[\frac{d\mathfrak{U}}{dt}\right] = \left[\frac{d\mathfrak{B}}{dt}\right] = \left[\frac{d\mathfrak{W}}{dt}\right] = 0$$

sono le condizioni per la validità dell’equazione (6), cioè che le variazioni della quantità $[\mathfrak{U}.Dx + \mathfrak{B}.Dy + \mathfrak{W}.Dz]$ dovute a variazioni di posizione siano uguali a zero. Ma se le quantità $[d\mathfrak{U}/dt]$, $[d\mathfrak{B}/dt]$, $[d\mathfrak{W}/dt]$ non sono uguali a zero, il loro ammontare dà evidentemente quegli incrementi di $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{W}$ che si verificano in queste indipendentemente dalla variazione di posizione dell’elemento Ds, e che compaiono nelle equazioni (4c), che di conseguenza

---

[5] *Ho già pubblicato questo schema sul* Borchardt’s Journal für r.u.a. Mathematik **78.** p.307-309.

si possono infine scrivere:

$$-X = \frac{\mathfrak{X}}{\varepsilon} - A.\left[\frac{d\mathfrak{U}}{dt}\right]$$

$$-Y = \frac{\mathfrak{Y}}{\varepsilon} - A.\left[\frac{d\mathfrak{V}}{dt}\right]$$

$$-Z = \frac{\mathfrak{Z}}{\varepsilon} - A.\left[\frac{d\mathfrak{W}}{dt}\right]$$

4.*Prodotto di un elemento di superficie per un vettore che abbia la direzione della normale a questa.* Per la variazione di ξ, η, ζ con valori arbitrari di Dx, Dy, Dz si deve aver sempre:

$$0 = \delta\left\{\mathfrak{X}.Dy.Dz + \mathfrak{Y}.Dz.Dx + \mathfrak{Z}.Dx.Dy\right\}. \tag{7}$$

Intervengono di nuovo le variazioni per cambiamento di posizione secondo lo schema dell'equazione (5), e inoltre le variazioni

$$\delta[Dy.Dz] = Dy.\delta Dz + Dz.\delta Dy,$$

dove i valori delle variazioni δDy, δDz van presi ancora dalle equazioni (6a), e ancora per tutti i valori di Dx, Dy, Dz deve valere l'equazione derivata dalla (7):

$$-\delta\mathfrak{X} = \frac{\partial\mathfrak{X}}{\partial x}.\delta\xi + \frac{\partial\mathfrak{X}}{\partial y}.\delta\eta + \frac{\partial\mathfrak{X}}{\partial z}.\delta\zeta + \left(1 + \frac{\partial\delta\eta}{\partial y} + \frac{\partial\delta\zeta}{\partial z}\right).\mathfrak{X}$$
$$- \frac{\partial\delta\xi}{\partial y}.\mathfrak{Y} - \frac{\partial\delta\xi}{\partial z}.\mathfrak{Z}$$

ovvero

$$\left\{\begin{aligned}
-\delta\mathfrak{X} &= \delta\xi\left[\frac{\partial\mathfrak{X}}{\partial x} + \frac{\partial\mathfrak{Y}}{\partial y} + \frac{\partial\mathfrak{Z}}{\partial z}\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[\mathfrak{X}.\delta\eta - \mathfrak{Y}.\delta\xi\right] + \frac{\partial}{\partial z}\left[\mathfrak{X}.\delta\zeta - \mathfrak{Z}.\delta\xi\right]\\
-\delta\mathfrak{Y} &= \delta\eta\left[\frac{\partial\mathfrak{X}}{\partial x} + \frac{\partial\mathfrak{Y}}{\partial y} + \frac{\partial\mathfrak{Z}}{\partial z}\right] + \frac{\partial}{\partial z}\left[\mathfrak{Y}.\delta\zeta - \mathfrak{Z}.\delta\eta\right] + \frac{\partial}{\partial x}\left[\mathfrak{Y}.\delta\xi - \mathfrak{X}.\delta\eta\right]\\
-\delta\mathfrak{Z} &= \delta\zeta\left[\frac{\partial\mathfrak{X}}{\partial x} + \frac{\partial\mathfrak{Y}}{\partial y} + \frac{\partial\mathfrak{Z}}{\partial z}\right] + \frac{\partial}{\partial x}\left[\mathfrak{Z}.\delta\xi - \mathfrak{X}.\delta\zeta\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[\mathfrak{Z}.\delta\eta - \mathfrak{Y}.\delta\zeta\right].
\end{aligned}\right. \tag{7a}$$

Si considerino ancora le variazioni come cambiamenti che avvengano con continuità nel tempo; otteniamo allora le equazioni (4a) nella loro forma originaria, come hanno in Maxwell:

$$0 = Au + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\mathfrak{N}}{\mu}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\mathfrak{M}}{\mu}\right) + A.\left[\frac{d\mathfrak{X}}{dt}\right],$$

ecc.

ove

$$\left[\frac{d\mathfrak{X}}{dt}\right] = \frac{\partial\mathfrak{X}}{\partial t} + \alpha\sigma + \frac{\partial}{\partial y}\left[\beta.\mathfrak{X} - \alpha.\mathfrak{Y}\right] + \frac{\partial}{\partial z}\left[\gamma.\mathfrak{X} - \alpha.\mathfrak{Z}\right],$$

come in H. Hertz[6].

Questa $[Dy.Dz.d\mathfrak{X}/dt]$ è la quantità di elettricità che attraversa nell'unità di tempo l'elemento di superficie sostanziale $Dy.Dz$. Le altre due quantità $[Dz.Dx.d\mathfrak{Y}/dt]$ e $[Dx.Dy.d\mathfrak{Z}/dt]$ hanno analogo significato per le altre due direzioni coordinate.

Mi permetto di far notare che nella teoria di Maxwell, secondo l'interpretazione data da H. Hertz, che coincide con la nostra, nelle azioni elettromagnetiche dei moti elettrici, si ha sempre a che fare con moti relativi dell'elettricità rispetto al mezzo che supporta le azioni elettriche.

Le azioni elettromagnetiche di un disco carico di elettricità statica osservate da Rowland devono essere spiegate con il trascinamento dell'etere.

5. *Le variazioni delle componenti della velocità* α, β, γ si ottengono nel modo migliore come segue.

La quantità di sostanza, che, in un intervallo di tempo dt attraversa l'elemento di superficie $Dy.Dz$, è$(\rho.\alpha.Dy.Dz.dt)$, quando si indichi con ρ la densità della sostanza. Se intervengono gli spostamenti ξ, η, ζ, ,non deve più passare la stessa massa, che sarebbe passata con la velocità originale α, β, γ, ma bisognerà sottrarre quella massa che si trova tra la prima e la seconda posizione della superficie $Dy.Dz$ all'inizio e alla fine dell'intervallo di tempo dt, nel caso che la velocità $\partial\xi/\partial t$ sia positiva.

Si deve quindi porre:

$$\delta\,[\rho.\alpha.Dy.Dz\,] - \rho.Dy.Dz.\frac{\partial\delta\xi}{\partial t} = 0$$

ovvero, poiché le variazioni di $\rho\alpha$, $\rho\beta$, $\rho\gamma$ rientrano nello schema (7a)

---

[6]Hertz, Wied. Ann. **41**, p. 374. *Ivi le derivate parziali non sono distinte con il simbolo* ∂.

$$\begin{cases} \rho . \dfrac{\partial \delta\xi}{\partial t} = \delta(\rho\alpha) + \delta\xi \left[\dfrac{\partial(\rho\alpha)}{\partial x} + \dfrac{\partial(\rho\beta)}{\partial y} + \dfrac{\partial(\rho\gamma)}{\partial z} \right] \\ \qquad + \dfrac{\partial}{\partial y} \left[\rho\alpha\delta\eta - \rho\beta\delta\xi\right] + \dfrac{\partial}{\partial z} \left[\rho\alpha\delta\zeta - \rho\gamma\delta\xi\right]. \end{cases} \tag{8}$$

Poiché

$$\delta\rho = -\left(\frac{\partial}{\partial x}(\rho\delta\xi) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho\delta\eta) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho\delta\zeta) \right)$$

si deve quindi porre

$$\begin{cases} \delta\alpha = \dfrac{\partial\delta\xi}{\partial t} + \dfrac{\partial}{\partial y}\left[\beta\delta\xi - \alpha\delta\eta \right] + \dfrac{\partial}{\partial z}\left[\gamma\delta\xi - \alpha\delta\zeta \right] \\ \qquad - \delta\xi \left[\dfrac{\partial\alpha}{\partial x} + \dfrac{\partial\beta}{\partial y} + \dfrac{\partial\gamma}{\partial z} \right] + \alpha \left[\dfrac{\partial\delta\xi}{\partial x} + \dfrac{\partial\delta\eta}{\partial y} + \dfrac{\partial\delta\zeta}{\partial z} \right]. \end{cases} \tag{8a}$$

Se poniamo

$$\begin{cases} \delta\alpha_0 = + \dfrac{\partial}{\partial y}\left[\beta\delta\xi - \alpha\delta\eta \right] + \dfrac{\partial}{\partial z}\left[\gamma\delta\xi - \alpha\delta\zeta \right] \\ \qquad - \delta\xi \left[\dfrac{\partial\alpha}{\partial x} + \dfrac{\partial\beta}{\partial y} + \dfrac{\partial\gamma}{\partial z} \right], \end{cases} \tag{8b}$$

si ottiene la complessiva

$$\delta\alpha = \delta\alpha_o + \frac{\partial\delta\xi}{\partial t} + \alpha \left[\frac{\partial\delta\xi}{\partial x} + \frac{\partial\delta\eta}{\partial y} + \frac{\partial\delta\zeta}{\partial z} \right]. \tag{8c}$$

$\delta\alpha_0$ ha la forma esatta della variazione dei momenti elettrici e magnetici. Questa osservazione rende possibile eseguire il calcolo assai intricato delle variazioni in maniera molto più trasparente e più facile.[7]

6. *Derivate rispetto al tempo.* Poiché il tempo non è sottoposto ad alcuna variazione, per esso è semplice porre:

---

[7]*Faccio notare ancora che, per mezzo della forma delle variazioni qui sviluppata, si riescono a ricavare le equazioni dell'aerodinamica di Eulero a partire dal principio di minimo di Hamilton, cosa che, per quanto ne so, non si era ancora riusciti a fare, e che può servire come un buon esempio a riprova del metodo qui intrapreso.*

$$\delta\left[\frac{\partial\mathfrak{X}}{dt}\right] = \frac{\partial}{\partial t}[\delta\mathfrak{X}].$$

Inoltre anche ξ, η, ζ vanno derivati rispetto al tempo, poiché durante il tempuscolo *dt*, per il quale vien presa la derivata, anche gli spostamenti cambiano.

Le forze ponderomotrici. Indichiamo come prima le loro componenti con Ξ, Υ, Z. Il loro lavoro è compiuto a spese della scorta di lavoro interna del sistema, se i moti avvengono nella direzione delle forze. Estendiamo quindi la variazione rispetto alle coordinate alla quantità

$$0 = \delta\left\{\Phi + \iiint [\Xi.\xi + \Upsilon.\eta + Z.\zeta] dx.dy.dz\right\}$$

nella quale le componenti summenzionate delle forze vanno considerate indipendenti dalle coordinate e perciò invariabili.

Variamo in primo luogo la parte di Φ prima indicata con Φ_e.

$$\delta\iiint \frac{1}{2}\left[\frac{\mathfrak{X}^2+\mathfrak{Y}^2+\mathfrak{Z}^2}{\varepsilon}\right].dx.dy.dz = \iiint\left\{\frac{1}{2}\,\delta\left(\frac{1}{\varepsilon}\right).(\mathfrak{X}^2+\mathfrak{Y}^2+\mathfrak{Z}^2)\right.$$
$$\left. + \frac{1}{\varepsilon}[\mathfrak{X}.\delta\mathfrak{X} + \mathfrak{Y}.\delta\mathfrak{Y} + \mathfrak{Z}.\delta\mathfrak{Z}]\right\}.dx.dy.dz.$$

Se in primo luogo ci si limita alla variazione rispetto a ξ, si ottiene dalle equazioni (5b) e (7a):

$$-\Xi_e = -\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)[\mathfrak{X}^2+\mathfrak{Y}^2+\mathfrak{Z}^2] - \frac{\mathfrak{X}}{\varepsilon}\left[\frac{\partial\mathfrak{X}}{\partial x} + \frac{\partial\mathfrak{Y}}{\partial y} + \frac{\partial\mathfrak{Z}}{\partial z}\right]$$
$$- \mathfrak{Y}.\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\mathfrak{X}}{\varepsilon}\right) - \mathfrak{Z}.\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\mathfrak{X}}{\varepsilon}\right) + \mathfrak{Y}.\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\mathfrak{Y}}{\varepsilon}\right) + \mathfrak{Z}.\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\mathfrak{Z}}{\varepsilon}\right)$$

ossia

$$\Xi_e = +\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\mathfrak{X}^2-\mathfrak{Y}^2-\mathfrak{Z}^2}{\varepsilon}\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\mathfrak{X}.\mathfrak{Y}}{\varepsilon}\right] + \frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{\mathfrak{X}.\mathfrak{Z}}{\varepsilon}\right].$$

Ξ_e indica qui quella parte della forza Ξ esercitata sulla massa in moto che origina dalla parte Φ_e di Φ.

Questa forma è già nota dalle ricerche di Maxwell; altrettanto le espressioni corrispondenti per le altre coordinate e per le forze magnetiche.

Possiamo ora procedere allo stesso modo per la parte di Φ indicata con Φ_q, che possiamo scrivere

$$\delta\iiint dx.dy.dz\int dt\Big\{U\Big[\frac{\partial\mathfrak{X}}{\partial t}+\alpha.\sigma\Big]+V\Big(\frac{\partial\mathfrak{Y}}{\partial t}+\beta.\sigma\Big)+W\Big(\frac{\partial\mathfrak{Z}}{\partial t}+\gamma.\sigma\Big)$$

$$-\alpha\,[\mathfrak{Z}.(\mathfrak{M}+m)-\mathfrak{Y}.(\mathfrak{N}+n)]-\beta\,[\mathfrak{X}(\mathfrak{N}+n)-\mathfrak{Z}.(\mathfrak{L}+l)]$$

$$-\gamma\,[\mathfrak{Y}(\mathfrak{L}+l)-\mathfrak{X}(\mathfrak{M}+m)]\Big\}=\delta\Phi q.$$

Se ora si variano i singoli fattori di questo termine, sostituendo le espressioni precedentemente date dalle equazioni (5)-(5f), e si esegue inoltre la ripartizione di $\delta\alpha$ prescritta nella (6c), si trova che la variazione dell'integrale, presa su

$$\Big[U.\frac{\partial\mathfrak{X}}{\partial t}+V.\frac{\partial\mathfrak{Y}}{\partial t}+W\frac{\partial\mathfrak{Z}}{\partial t}\Big],$$

si cancella con i restanti termini dell'integrale, se in questo non si varia altro che α, β, γ e della loro variazione si sostituisce solo la parte indicata con $\partial\delta\xi/\partial t$, $\partial\delta\eta/\partial t$ e $\partial\delta\zeta/\partial t$.

Delle variazioni $\delta\alpha$, $\delta\beta$, $\delta\gamma$ occorre poi considerare i termini indicati sopra con $\delta\alpha_0$, $\delta\beta_0$, $\delta\gamma_0$ che, come abbiamo già prima notato, hanno una forma del tutto uguale a $\delta\mathfrak{X}$, $\delta\mathfrak{Y}$, $\delta\mathfrak{Z}$ e $\delta(\mathfrak{L}+l)$, $\delta(\mathfrak{M}+m)$, $\delta(\mathfrak{N}+n)$. Perciò è facile eseguire la variazione del determinante

$$\mathrm{Det.}\begin{vmatrix}\alpha_0, & \beta_0, & \gamma_0\\ \mathfrak{X}, & \mathfrak{Y}, & \mathfrak{Z}\\ (\mathfrak{L}+l), & (\mathfrak{M}+m), & (\mathfrak{N}+n)\end{vmatrix}.$$

Si ottiene per la variazione rispetto a ξ l'espressione

$$\delta|\mathrm{Det}|=\delta\xi.\frac{\partial}{\partial x}|\mathrm{Det}|;$$

e anche questa si elide, se si tien conto dell'ultimo termine delle variazioni $\delta\alpha$ nella (8c) ecc., che danno il prodotto:

$$|\mathrm{Det}|.\Big(\frac{\partial\delta\xi}{\partial x}+\frac{\partial\delta\eta}{\partial y}+\frac{\partial\delta\zeta}{\partial z}\Big),$$

dal quale con integrazione per parti risulta per la variazione rispetto a ξ l'espressione

$$-\frac{\partial}{\partial x}|\mathrm{Det}|.$$

Esattamente allo stesso modo si eliminano infine i termini dell'integrale preso su

$$[U\alpha\sigma + V\beta\sigma + W\gamma\sigma],$$

quando si fanno variare U, V, W, σ secondo le regole su riportate, e per α, β, γ si tien conto dell'unica variazione ancora rimasta di

$$\left(\delta\alpha - \frac{\partial\delta\xi}{\partial t}\right), \left(\delta\beta - \frac{\partial\delta\eta}{\partial t}\right), \left(\delta\gamma - \frac{\partial\delta\zeta}{\partial t}\right).$$

Si conclude quindi da questa ricerca che con il nostro principio di minimo le forze ponderomotrici risultano in effetti del tutto identiche a quelle della teoria di Maxwell.

L'energia E del sistema, come Maxwell ed H. Hertz hanno mostrato, è:

$$E = \Phi_e + \Phi_m \tag{9}$$

Invece l'espressione di Φ_q, quando le condizioni di minimo (4a) sono soddisfatte ed $u = v = w = 0$, sarà:

$$\Phi_q = - 2\Phi_m, \tag{9a}$$

cosicché il potenziale cinematico è:

$$\Phi = \Phi_e + \Phi_m + \Phi_q = \Phi_e - \Phi_m.$$

Pertanto qui le due parti dell'energia giocano l'una rispetto all'altra lo stesso ruolo dell'energia potenziale e attuale nei problemi con masse ponderabili.

L'*energia elettrica* si manifesta quindi come *energia potenziale* delle masse a riposo, fino a che non intervenga nessuna variazione dei momenti o delle correnti elettriche, l'*energia magnetica* come *forza viva.* Malgrado la perfetta analogia nelle equazioni di Maxwell, non ho ancora potuto trovare alcuna forma del principio di minima azione per l'ipotesi opposta, senza dover per questo rinunciare alla prova della costanza nel tempo della massa elettrica nei conduttori isolati, e all'esistenza di forze esterne elettrizzanti X, Y, Z.

Nella forma da me data le componenti del potenziale vettore secondo il significato fisico si dovrebbero chiamare *momenti* *cinetici*, poiché si può scrivere l'espressione:

$$2\mathfrak{L} = \Phi_q = A\left[U.\frac{d\mathfrak{X}}{dt} + V.\frac{d\mathfrak{Y}}{dt} + W.\frac{d\mathfrak{Z}}{dt}\right]. \tag{9b}$$

Una seconda espressione di $\mathfrak{L}$ secondo le equazioni (3b) e (2) è

$$\mathfrak{L} = \Phi_m = \iiint \frac{dx.dy.dz}{2\mu}\left\{\mathfrak{L}^2 + \mathfrak{M}^2 + \mathfrak{N}^2\right\}. \tag{10}$$

Se indichiamo con

$$\begin{cases} \mathfrak{u} = u + \left[\dfrac{d\mathfrak{X}}{dt}\right], \\ \mathfrak{v} = v + \left[\dfrac{d\mathfrak{Y}}{dt}\right], \\ \mathfrak{w} = w + \left[\dfrac{d\mathfrak{Z}}{dt}\right], \end{cases} \tag{10a}$$

la densità di corrente elettrica totale scomposta secondo le tre direzioni coordinate, le equazioni (4a) danno:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\mathfrak{N}}{\mu}\right) - \dfrac{\partial}{\partial z}\left(\dfrac{\mathfrak{M}}{\mu}\right) = A.\mathfrak{u} \\ \dfrac{\partial}{\partial z}\left(\dfrac{\mathfrak{L}}{\mu}\right) - \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\mathfrak{N}}{\mu}\right) = A.\mathfrak{v} \\ \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\mathfrak{M}}{\mu}\right) - \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\mathfrak{L}}{\mu}\right) = A.\mathfrak{W}. \end{cases} \tag{10b}$$

Nelle parti dello spazio dove μ è costante, e non interviene alcun magnetismo permanente, e quindi

$$l = m = n = 0,$$

si ottiene introducendo le espressioni date dalle (2) e (2e)

$$\begin{aligned} -\Delta\mathfrak{U} + \Delta\frac{\partial\Psi}{\partial x} &= A.\mu.\mathfrak{u} \\ -\Delta\mathfrak{B} + \Delta\frac{\partial\Psi}{\partial y} &= A.\mu.\mathfrak{v} \\ -\Delta\mathfrak{W} + \Delta\frac{\partial\Psi}{\partial z} &= A.\mu.\mathfrak{w}. \end{aligned}$$

Pertanto le quantità

$$\left(\mathfrak{U} - \frac{\partial\Psi}{\partial x}\right), \left(\mathfrak{B} - \frac{\partial\Psi}{\partial y}\right), \left(\mathfrak{W} - \frac{\partial\Psi}{\partial z}\right)$$

sono funzioni potenziali delle densità [$-A.\mu.\mathfrak{u}/4\pi$], [$-A.\mu.\mathfrak{v}/4\pi$],

[$-A.\mu.\mathfrak{w}/4\pi$], assieme a quelle derivanti da masse esterne. $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{V}$, $\mathfrak{W}$ sono i cosiddetti potenziali vettori delle componenti della densità di corrente.

Quando in spazi più estesi μ non è costante e il magnetismo permanente non è uguale a zero, la costruzione di queste funzioni sarà più complicata, come si è mostrato con le equazioni differenziali di prima.

Se poi considerassimo le quantità $\mathfrak{u}$, $\mathfrak{v}$, $\mathfrak{w}$ come velocità e le $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{V}$, $\mathfrak{W}$ come potenziali di velocità, la forma dell'espressione della forza viva indicherebbe solo che la stessa non dipenderebbe soltanto dalle particolari velocità nell'elemento di volume considerato, ma che sarebbe accresciuta qualora le velocità degli elementi di volume adiacenti avessero la stessa direzione.

Forme come quelle dell'equazione 9b intervengono in idrodinamica per la forza viva. In quel caso, però $d\mathfrak{X}/dt$, $d\mathfrak{Y}/dt$, $d\mathfrak{Z}/dt$ devono indicare le corrispondenti velocità di rotazione del fluido e $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{V}$, $\mathfrak{W}$ devono essere i loro potenziali vettori a meno di un opportuno fattore costante[8].

Questa analogia tuttavia non si può sviluppare ulteriormente; infatti se le $\mathfrak{u}$, $\mathfrak{v}$, $\mathfrak{w}$ fossero velocità di rotazione, le $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ sarebbero rotazioni, e ciò non si accorderebbe con l'esistenza di linee di forza elettriche, che confluiscono in un punto elettrizzato.

Ciononostante l'analogia con la forma data nelle equazioni dalla A_5 alla A_7 è abbastanza profonda. Anche là intervengono due forme della forza viva:

$$\mathfrak{L}_1 = \frac{1}{2}\sum_{\mathfrak{a}}\sum_{\mathfrak{b}}\left[A_{\mathfrak{a}\mathfrak{b}}\cdot q_{\mathfrak{a}}\cdot q_{\mathfrak{b}}\right],$$

l'altra:

$$\mathfrak{L}_2 = \frac{1}{2}\sum_{\mathfrak{a}}\sum_{\mathfrak{b}}\left[A_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}\cdot q_{\mathfrak{b}}\frac{dp_{\mathfrak{a}}}{dt}\right],$$

ossia:

$$= \frac{1}{2}\sum_{\mathfrak{a}}\left[s_{\mathfrak{a}}\frac{dp_{\mathfrak{a}}}{dt}\right],$$

---

[8] *Vedi il mio lavoro sul moto dei vortici sul* Journal f. r. u. a. Math **55**. p.25-55. 1858, *equazione* (6a), *che può essere estesa allo spazio infinito*.

quando si pone il momento cinetico

$$s_{\mathfrak{a}} = \frac{\partial \mathfrak{L}}{dq_{\mathfrak{a}}},$$

e il potenziale cinetico ha la forma

$$H = \Phi + \mathfrak{L}_1 - 2\mathfrak{L}_2;$$

dal fatto che intervengano queste due espressioni distinte di $\mathfrak{L}$, si otterrà in entrambi i casi la relazione tra $q_{\mathfrak{a}}$, rispettivamente $s_{\mathfrak{a}}$, e i $p_{\mathfrak{a}}$.

Le forze esterne $\mathcal{P}_{\mathfrak{a}}$ dei sistemi ponderabili riguardano il moto dei punti pateriali, cioè la variazione delle loro coordinate $p_{\mathfrak{a}}$; abbiamo già notato sopra, che il prodotto $P_{\mathfrak{a}}.dp_{\mathfrak{a}}$ misura il lavoro che il sistema cede all'esterno in seguito alla variazione $dp_{\mathfrak{a}}$. Per moti ciclici invece, quando le coordinate p_e delle masse circolanti non intervengono nel potenziale cinetico, sarà

$$P_e = \frac{ds_e}{dt},$$

e quindi

$$P_e.q_e.dt = q_e.ds_e = dQ_e,$$

dove dQ_e è la cessione di lavoro dovuta alla variazione. Questa può essere rappresentata anche nell'ultima forma, come una forza q_e che agisce in corrispondenza alla variazione di s_e. Ciò è analogo al fatto, che nelle nostre equazioni elettrodinamiche le componenti della corrente galvanica intervengono come forze, che cercano di cambiare i potenziali vettori $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{W}$. Questi ultimi corrispondono infatti a moti magnetici ciclici.

Le correnti galvaniche nei conduttori compaiono nella rappresentazione qui fornita in primo luogo come processi, che determinano intorno a sé delle forze magnetiche circolari, come $d\mathfrak{X}/dt$; solo in secondo luogo succede che esse per la legge di Ohm annullino oppure non lascino aumentare i momenti elettrici. Si risolve così la contraddizione del fatto che l'aumento di $\mathfrak{X}$, che tuttavia non ha luogo con correnti costanti, sia causa di azioni magnetiche nel circondario.

Discostandoci dalle forme note del problema risulta qui che le quantità $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{V}$, $\mathfrak{W}$, che infine abbiamo caratterizzato come momenti cinetici, siano d’ora in poi da trattare come variabili indipendenti nella variazione. Io rimando, a questo proposito, alla formula da me considerata nel Journal f. Math. Vol. 100. p.151, dove le velocità $q_{\mathfrak{a}}$ sono parimenti trattate come variabili indipendenti, e il significato di queste quantità lo si trova solo con la variazione stessa. Mi riservo di trattare più approfonditamente in una successiva comunicazione casi nei quali intervengano quantità, delle quali non si sappia se esse siano stati oppure velocità di variazione di quelli.