Il principio di minima azione nell'elettrodinamica dei corpi ponderabili in moto[1][2]

J. Ishiwara

§1. Introduzione

La subordinazione di tutti i processi reversibili noti ad un solo principio che determini univocamente la loro evoluzione è diventata uno degli scopi principali della fisica teorica, ed è noto che oggi si considera il principio di minima azione come un siffatto principio.

In elettrodinamica Helmoltz[3] ha proposto una forma del principio di minima azione e ha derivato da esso le equazioni fondamentali di Hertz e l'espressione di Maxwell per la forza ponderomotrice. Ma poiché attualmente al posto dell'elettrodinamica di Hertz si assume un sistema costruito in base al principio di relatività di Einstein, ne consegue tra l'altro che la forza ponderomotrice non è determinata solamente dal tensore degli sforzi di Maxwell, ma anche dalla variazione temporale della quantità di moto elettromagnetica. La dissertazione recentemente apparsa del signor Henschke[4] rappresenta un tentativo di derivare da un principio variazionale le equazioni fondamentali elettromagnetiche ed un'espressione nuova della forza ponderomotrice che si conformi al principio di relatività.

Egli è arrivato a far ciò relativamente ai processi nel vuoto, assumendo uno scalare tetradimensionale per l'azione.

---

[1] Annalen der Physik **42**, 986 (1913).

[2] *Tradotto in collaborazione con L. Mihich.*

[3] H.v. Helmoltz, Wied. Ann. **47.** p. 1. 1892. Wiss. Abh. III p. 476 e p. 597. Leipzig 1895.

[4] E. Henschke, Berliner Dissertation, 1912; Ann. d. Phys. **40.** p. 887. 1913.

Tuttavia nella generalizzazione dei risultati da lui ottenuti per il vuoto al caso di corpi ponderabili in moto egli ha potuto ottenere solo le equazioni fondamentali di Minkowski, ma nessuna espressione plausibile per la forza ponderomotrice. Mi pare tuttavia che l'origine di questa manchevolezza non stia in una generalizzazione inadeguata dell'azione, ma in primo luogo nel fatto che Henschke non ha eseguito correttamente la variazione dell'azione.

Tuttavia in questo lavoro egli ha mostrato inoltre che introducendo un nuovo termine nel principio variazionale si può derivare l'espressione proposta a suo tempo da Abraham[5], ma che poi purtroppo si deve rinunciare ad associare al principio così mutato un'azione determinata.

Il grande significato del principio suddetto fa apparire desiderabile una nuova analisi del problema trattato da Henschke. Nella presente comunicazione dimostrerò ora che l'assunzione di una forma d'azione come ci è proposta nella prima ipotesi immodificata di Henschke, e che risulta senza dubbio anche la più naturale ed appropriata[6], dà l'espressione per la forza pondero-motrice precedentemente proposta da me[7]. Qui mi avvalgo una prima volta del metodo proposto da Lorentz[8], secondo il quale si fanno intervenire le variazioni delle quantità trasportate con sè da un punto sostanziale determinato, e una seconda volta del metodo di Helmoltz, secondo il quale invece si considerano le variazioni delle quantità in un punto fisso dello spazio. I due metodi danno naturalmente risultati concordanti.

---

[5]M. Abraham, Rendiconti Circ. mat. Palermo **28.** p. 1. 1909; **30.** p. 33. 1910.

[6]*Nel mio lavoro che apparirà tra poco su "il fondamento nella teoria degli elettroni dell'elettrodinamica dei corpi in moto" si dimostrerà che l'espressione dell'azione qui assunta discende anche univocamente dalla teoria degli elettroni.*

[7]J. Ishiwara, Proc Tôkyô math.-phys. Soc. (**2**) **5.** p.310. 1910; Jahrb. d. Radioakt. u. Elektronik **9.** p. 560. 1912.

[8]H.A. Lorentz, Enzyklopädie d. math. Wiss. V, **2.** Art. 13, p.130.

Le espressioni così derivate per il tensore degli sforzi elettromagnetico e per la quantità di moto elettromagnetica sono identiche a quelle di Minkowski[9]. Per quanto riguarda la differenza così risultante tra la densità d'impulso elettromagnetica e la corrente d'energia divisa per il quadrato della velocità della luce nel vuoto, credo che essa non si trovi in contraddizione nè con la teoria nè con le esperienze compiute finora.

§2. La formulazione del principio di minima azione.

Consideriamo una regione Σ dell'universo tetradimensionale (nel senso di Minkowski), il cui contorno tridimensionale chiameremo *S*. In ogni unità di volume della regione Σ agisca una tetraforza ponderomotrice **K**, e su ogni unità di superficie del contorno *S* un tensore degli sforzi **T**. Per l'equilibrio meccanico del sistema complessivo tra le due quantità deve sussistere la relazione:

$$\int_{\Sigma} \mathbf{K} d\Sigma + \int_{S} (\mathbf{Tn}) dS = 0 \,, \tag{1}$$

dove **n** è il tetravettore unitario nella direzione della normale esterna di *dS.* Trasformando con il teorema di Gauss possiamo ottenere[10] dalla (1) anche l'equazione che vale per ciascun elemento di volume

$$\mathbf{K} = -\mathbf{Div}\ \mathbf{T} \,. \tag{2}$$

Contrassegnamo con **r** il raggio vettore condotto dall'origine delle coordinate al punto da prendere in considerazione. Allora ad ogni elemento di volume è associata l'azione meccanica nell'ammontare di (**Kr**), e ad ogni elemento di superficie nell'ammontare di ((**Tn**),**r**). L'azione meccanica totale vale quindi

---

[9] H. Minkowski, Gött. Nachr. 1908. p. 53; zwei Abhandlungen über die Grundgleichungen der Elektrodynamik (Leipzig 1910), p. 42.

[10] *Tutte le notazioni usate presentemente per le operazioni matematiche coincidono con quelle nella mia dissertazione "Sulla teoria della relatività" in* Jahrb. d. Radioakt. u. Elektronik, *l.c..*

$$\mathbf{W}^{(m)} = \int_{\Sigma} (\mathbf{Kr})d\Sigma + \int_{S} ((\mathbf{Tn}),\mathbf{r})dS \ . \tag{3}$$

Siano inoltre **F** ed **H** i due esavettori del campo elettromagnetico, **P** la tetracorrente elettrica. Il vettore **F** risulterà dal tetrapotenziale elettromagnetico Φ secondo la

$$\mathbf{F} = \mathbf{Rot}\ \Phi \ . \tag{4}$$

Scegliamo come azione elettromagnetica uno scalare:

$$\mathbf{W}^{(e)} = \int_{\Sigma} \{-\mathbf{U} + (\mathbf{P}\Phi)\}d\Sigma \ , \tag{5}$$

dove

$$\mathbf{U} = \frac{1}{4}\,(\mathbf{FH}) \tag{6}$$

è l’eccesso della densità d’energia magnetica su quella elettrica. L’azione complessiva si compone delle due quantità (3) e (5):

$$\mathbf{W} = \mathbf{W}^{(m)} + \mathbf{W}^{(e)}. \tag{7}$$

Il principio di minima azione nella sua forma generale asserisce:

La variazione prima dell’azione complessiva **W** si annulla per un sistema fisico chiuso; quindi

$$\delta\mathbf{W} = 0 \ . \tag{8}$$

§3. La derivazione delle equazioni di campo.

Si darà in primo luogo a partire dal principio su formulato una derivazione semplice delle equazioni fondamentali elettromagnetiche.

A tal fine consideriamo la posizione della materia, le costanti materiali, la tetracorrente elettrica e le forze meccaniche tutte assegnate come funzioni note delle coordinate. Invece lasciamo variare il tetrapotenziale elettrico Φ e cerchiamo le condizioni che rendono l’azione **W** un estremo.

In questo caso la variazione dell’azione meccanica $\mathbf{W}^{(m)}$ si annulla ed è

$$\delta\int(\mathbf{P}\Phi)d\Sigma = \int(\mathbf{P}\delta\Phi)d\Sigma \ . \tag{9}$$

Per il calcolo della variazione di **U** si osservi in primo luogo che **U** è uno scalare tetradimensionale, cioè un invariante rispetto a trasformazioni spazio-temporali. Se si indicano con un apice le quantità corrispondenti in un sistema di riferimento in moto con il corpo ponderabile, sussiste la relazione

$$\frac{1}{2}\,(\mathbf{FH}) = \frac{1}{2}\,(\mathbf{F}'\mathbf{H}') = \frac{\mathfrak{B}'^2}{\mu} - \varepsilon\mathfrak{E}'^2. \tag{10}$$

In questa ε indica la costante dielettrica, μ la permeabilità magnetica, $\mathfrak{E}'$ l'intensità di campo elettrico e $\mathfrak{B}'$ l'induzione magnetica. Questi due ultimi vettori costituiscono nel modo noto l'esavettore $\mathbf{F}'$ e stanno in stretto rapporto con Φ[11].

La variazione di **U** che interviene quando si vari il valore di Φ mantenendo costanti ε e μ è quindi data da

$$\delta\mathbf{U} = \frac{\mathfrak{B}'}{\mu}\,\delta\mathfrak{B}' - \varepsilon\mathfrak{E}'\delta\mathfrak{E}' = \frac{1}{2}\,(\mathbf{H}'\delta\mathbf{F}') = \frac{1}{2}\,(\mathbf{H}\delta\mathbf{F}) \ ,$$

e di conseguenza si trova

$$\delta\int_\Sigma \mathbf{U}d\Sigma = \frac{1}{2}\int_\Sigma(\mathbf{H}\delta\mathbf{F})d\Sigma = \frac{1}{2}\int_\Sigma(\mathbf{H},\mathbf{Rot}\,\delta\Phi)d\Sigma \ .$$

Ma quest'integrale si trasforma ancora mediante integrazione per parti in

$$\int_\Sigma(\mathbf{Div\ H},\delta\Phi)d\Sigma + \int_S(\mathbf{Hn})\delta\Phi dS \ .$$

Il principio d'azione (8) produce quindi l'equazione che vale per ogni elemento di volume:

$$\mathbf{Div\ H} = \mathbf{P} \ , \tag{11}$$

e l'equazione che vale per ogni elemento di superficie

$$(\mathbf{Hn}) = 0 \ . \tag{12}$$

L'equazione (11) e l'equazione

---

[11] *Vedi per esempio Minkowski, l.c..*

$$\mathbf{Div}\,\mathbf{F}^* = 0 \tag{13}$$

che si ricava già dalla (4) con la formula di analisi vettoriale

$$\mathbf{Div}(\mathbf{Rot}^*\Phi) = 0\ ,$$

costituiscono insieme il sistema delle equazioni fondamentali.

Dalla (11) segue per l'identità

$$\mathbf{div}(\mathbf{Div}\,\mathbf{H}) = 0\ ,$$

l'equazione di continuità dell'elettricità:

$$\mathbf{div}\,\mathbf{P} = 0\ . \tag{14}$$

Registreremo qui ancora le formule che si ottengono dalla (11) e dalla (13) per integrazione su un arbitrario volume tridimensionale S, il cui contorno sia σ[12]:

$$\int_\sigma \mathbf{H}^*_\sigma d\sigma = \int_S \mathbf{P}_n dS\ ,$$

$$\int \mathbf{F}_\sigma d\sigma = 0\ ,$$

e quelle che si ottengono dalla (4) per integrazione su una superficie bidimensionale arbitraria σ, la curva di contorno della quale sia λ:

$$\int_\sigma \mathbf{F}_\sigma d\sigma = \int_\lambda \Phi_\lambda d\lambda\ .$$

Con queste formule integrali si vede che le quantità ($\mathbf{P}_n ds$), ($\mathbf{H}^*_\sigma d\sigma$), ($\mathbf{F}_\sigma d\sigma$), ($\Phi_\lambda d\lambda$) assumono per una particella sostanziale un significato fisico definito.

§4. Il primo metodo di derivazione dell'espressione per la forza ponderomotrice.

Per derivare dal principio variazionale l'espressione per la

[12] $\mathbf{H}^*_\sigma$ *indica la componente di* $\mathbf{H}^*$ *corrispondente all'elemento di superficie* $d\sigma$, $\mathbf{P}_n$ *la componente di* $\mathbf{P}$ *lungo la normale esterna* $\mathbf{n}$ *di* dS.

forza ponderomotrice dobbiamo eseguire ora la variazione della coordinata $\mathbf{r}$. Pensiamo cioè ad uno spostamento virtuale $\delta\mathbf{r}$ del punto sostanziale, ed indichiamo con il simbolo δ, posto davanti ad un'altra quantità, quella variazione della quantità considerata che subisce sempre lo stesso punto sostanziale per il suddetto spostamento virtuale.

Assumeremo che tutte le quantità fisiche caratteristiche per un punto sostanziale restino invariate in seguito allo spostamento virtuale del punto. Per tali quantità intendiamo le quantità elettromagnetiche su menzionate $(\mathbf{P}_n dS)$, $(\mathbf{H}^*_\sigma d\sigma)$, $(\mathbf{F}_\sigma d\sigma)$, $(\Phi_\lambda d\lambda)$, e inoltre le forze meccaniche $(\mathbf{K}d\Sigma)$, $((\mathbf{Tn})dS)$ che agiscono sull'elemento sostanziale, come pure le costanti materiali ε e μ. Si scrivono quindi le relazioni[13]

$$\delta(\mathbf{H}^*_\sigma d\sigma) = 0\ , \qquad \delta(\mathbf{F}_\sigma d\sigma) = 0\ , \tag{15a}$$

$$\delta(\mathbf{P}_n dS) = 0\ , \qquad \delta(\Phi_\lambda d\lambda) = 0\ , \tag{15b}$$

$$\delta(\mathbf{K}d\Sigma) = 0\ , \qquad \delta((\mathbf{Tn})dS) = 0\ , \tag{15c}$$

$$\delta\varepsilon = 0\ , \qquad \delta\mu = 0\ . \tag{15d}$$

Dobbiamo calcolare la variazione dell'azione sotto queste condizioni.

Considerando in primo luogo l'azione meccanica, abbiamo per la (15c)

$$\delta\mathbf{W}^{(m)} = \int(\mathbf{r},\delta(\mathbf{K}d\Sigma)) + \int(\mathbf{K}\delta\mathbf{r})d\Sigma + \int(\mathbf{r},\delta(\mathbf{T},\mathbf{n})dS + \int((\mathbf{Tn})\delta\mathbf{r})dS$$

$$= \int_\Sigma(\mathbf{K}d\mathbf{r})d\Sigma + \int_S((\mathbf{Tn})\delta\mathbf{r})dS\ . \tag{16}$$

Si intenda ora per un momento con dn un elemento di linea che cada nella direzione di Φ, e con dS un elemento di volume normale a dn; sarà allora

$$\delta\int_\Sigma(\mathbf{P}\Phi)d\Sigma = \int_\Sigma((\mathbf{P}_n dS)\delta(\Phi_n dn)) + \int_\Sigma((\Phi_n dn)\delta(\mathbf{P}_n dS))\ ,$$

che però si annulla per la (15b).

---

[13] *Certamente non tutte queste relazioni sono tra loro indipendenti.*

Per la variazione dell'integrale di **U** si ponga in primo luogo

$$\delta\int_{\Sigma}\mathbf{U}d\Sigma = \int_{\Sigma}\delta\mathbf{U}d\Sigma + \int_{\Sigma}\mathbf{U}\delta(d\Sigma) \ . \tag{17}$$

Si calcola il valore di $\delta\mathbf{U}$ esprimendo la quantità (**FH**) invece che con la (10) nella forma:

$$\frac{1}{2}\,(\mathbf{FH}) = \frac{1}{2}\,(\mathbf{F}'\mathbf{H}') = \mu\mathfrak{H}'^2 - \frac{\mathfrak{D}'^2}{\varepsilon} \ , \tag{18}$$

dove $\mathfrak{H}'$ è l'intensità di campo magnetico, $\mathfrak{D}'$ lo spostamento dielettrico; di conseguenza

$$\delta\mathbf{U} = \mu\mathfrak{h}'\delta\mathfrak{h}' - \frac{\mathfrak{D}'}{\varepsilon}\,\delta\mathfrak{D}' = \frac{1}{2}\,(\mathbf{F}'\delta\mathbf{H}') = \frac{1}{2}\,(\mathbf{F}\delta\mathbf{H}) \ . \tag{19}$$

Dobbiamo ora esprimere $\delta\mathbf{H}$ nella sua dipendenza da $\delta\mathbf{r}$. Utilizziamo per questo la relazione generale:

$$\delta(\mathbf{H}^*_{\sigma}d\sigma) = \delta\mathbf{H}^*_{\sigma}\cdot d\sigma + \mathbf{H}^*_{\sigma}\cdot\delta(d\sigma) \ ,$$

e[14]

$$\mathbf{H}^*_{\sigma}\cdot\delta(d\sigma) = -\{(\delta\mathbf{r},\mathrm{lor})\mathbf{H}^* + [\mathbf{Div\ H},\delta\mathbf{r}]^* + \mathbf{Rot}(\mathbf{H}^*,\delta\mathbf{r})\}_{\sigma}d\sigma \ ,$$

dalla quale risulta[15]:

$$\delta(\mathbf{H}^*_{\sigma}d\sigma) = \{\delta\mathbf{H}^* - (\delta\mathbf{r},\mathrm{lor})\mathbf{H}^* - [\mathbf{Div\ H},\delta\mathbf{r}]^* - \mathbf{Rot}(\mathbf{H}^*,\delta\mathbf{r})\}_{\sigma}d\sigma \ .$$

Poiché il primo membro di questa identità per la (15a) va posto uguale a zero, da qui si può concludere

$$\delta\mathbf{H}^* = (\delta\mathbf{r},\mathrm{lor})\mathbf{H}^* + [\mathbf{Div\ H},\delta\mathbf{r}]^* + \mathbf{Rot}(\mathbf{H}^*,\delta\mathbf{r}) \ ,$$

ovvero

$$\delta\mathbf{H} = (\delta\mathbf{r},\mathrm{lor})\mathbf{H} + [\mathbf{Div\ H},\delta\mathbf{r}] + \mathbf{Rot}^*(\mathbf{H}^*,\delta\mathbf{r}) \ . \tag{20}$$

Se si sostituisce questo valore nell'espressione (19) per $\delta\mathbf{U}$ e si integra sulla regione Σ, si ottiene mediante un'integrazione per parti e successivo riordinamento

$$\int_{\Sigma}\delta\mathbf{U}d\Sigma = \frac{1}{2}\int_{\Sigma}(\mathbf{F}(\delta\mathbf{r},\mathrm{lor})\mathbf{H})d\Sigma + \int_{\Sigma}(\mathbf{F},\mathbf{Div\ H})\delta\mathbf{r}d\Sigma$$

---

[14] *vedi per esempio* E. Henschke, Berliner Diss. *l.c. p. 42.*

[15] *l.c. p. 41, Eq. (79), e p. 42, Eq. (80).*

$$- \int_{\Sigma}(\mathbf{H}^*,\mathbf{Div}\ \mathbf{F}^*)\delta\mathbf{r}d\Sigma - \int_{S}((\mathbf{F}^*\mathbf{n})(\mathbf{H}^*\delta\mathbf{r})dS\ . \qquad (21)$$

L'altro integrale nella (17), tenendo conto della (6) e di

$$\delta(d\Sigma) = \mathbf{div}(\delta\mathbf{r})d\Sigma\ , \qquad (22)$$

si può calcolare così:

$$\int_{\Sigma}\mathbf{U}\delta(d\Sigma) = -\frac{1}{4}\int_{\Sigma}(\delta\mathbf{r},\mathrm{lor})(\mathbf{FH})d\Sigma + \frac{1}{4}\int_{S}(\mathbf{FH})(\delta\mathbf{r},\mathbf{n})dS\ . \qquad (23)$$

La somma dei due integrali (21) e (23) vale quindi

$$\delta\int_{\Sigma}\mathbf{U}d\Sigma = \int_{\Sigma}(\mathbf{F},\mathbf{Div}\ \mathbf{H})\delta\mathbf{r}d\Sigma - \int_{\Sigma}(\mathbf{H}^*,\mathbf{Div}\ \mathbf{F}^*)\delta\mathbf{r}d\Sigma$$

$$+ \frac{1}{2}\int_{\Sigma}(\mathbf{F}(\delta\mathbf{r},\mathrm{lor})\mathbf{H})d\Sigma - \frac{1}{4}\int_{\Sigma}(\delta\mathbf{r},\mathrm{lor})(\mathbf{FH})d\Sigma$$

$$- \int_{S}((\mathbf{F}^*\mathbf{n})(\mathbf{H}^*\delta\mathbf{r}))dS + \frac{1}{4}\int_{S}(\mathbf{FH})(\delta\mathbf{r},\mathbf{n})dS\ . \qquad (24)$$

Tenendo conto delle equazioni fondamentali (11) e (13), ed eseguendo alcune trasformazioni quest'equazione diventa

$$\delta\int_{\Sigma}\mathbf{U}d\Sigma = \int_{\Sigma}(\mathbf{FP})\delta\mathbf{r}d\Sigma + \frac{1}{4}\int_{\Sigma}(\mathbf{F}(\delta\mathbf{r},\mathrm{lor})\mathbf{H})d\Sigma - \frac{1}{4}\int_{\Sigma}(\mathbf{H}(\delta\mathbf{r},\mathrm{lor})\mathbf{F})d\Sigma$$

$$+ \frac{1}{2}\int_{S}([[\mathbf{FH}]],\mathbf{n})\delta\mathbf{r}dS - \frac{1}{2}\int_{S}([[\mathbf{H}^*\mathbf{F}^*]],\mathbf{n})\delta\mathbf{r}dS\ . \qquad (24')$$

Il principio di minima azione richiede quindi[16]

$$\mathbf{K} = (\mathbf{FP}) + \frac{1}{4}(\mathbf{F}\ \mathrm{lor}\mathbf{H}) - \frac{1}{4}(\mathbf{H}\ \mathrm{lor}\mathbf{F})\ , \qquad (25)$$

e

$$\mathbf{T} = -\frac{1}{2}\ \{[[\mathbf{H}^*\mathbf{F}^*]]-[[\mathbf{FH}]]\}\ . \qquad (26)$$

Si può verificare facilmente che queste due espressioni (25) e (26) soddisfano proprio l'equazione (2).

---

[16] *Si ha* $(\mathbf{F}\ \mathrm{lor}\mathbf{H})_j = \sum_{h=1}^{4}\ \sum_{k=1}^{4}(\mathbf{F}_{hk}\ \frac{\partial}{\partial\mathbf{r}_j}\ \mathbf{H}_{hk})$ *per j=1,2,3,4.*

§5. Il secondo metodo di derivazione dell'espressione per la forza ponderomotrice.

Si spiegherà ora in breve che la derivazione dell'espressione della forza può essere condotta secondo Helmoltz in modo tale che non si debba considerare come nei paragrafi precedenti la variazione dei valori delle quantità fisiche che appartengono ad un determinato punto sostanziale, ma che si consideri invece la variazione delle quantità in un punto fissato dello spazio. Chiameremo questa variazione con Henschke variazione locale e la indicheremo con il simbolo δ_0.

Si deve qui osservare che per il principio d'azione si deve sempre considerare la variazione totale dell'azione dell'intero sistema fisico chiuso, e che quindi oltre alla variazione complessiva locale dell'azione nella regione Σ tenuta fissa si deve tener conto del fatto che per lo spostamento $\delta\mathbf{r}$ del punto sostanziale una parte dell'azione che corrisponde al sistema fisico considerato viene trascinata al di fuori della regione Σ.

Per la variazione complessiva di $\mathbf{W}$ si deve quindi porre:

$$\delta\mathbf{W} = \int_{\Sigma}\delta_0(\mathbf{Kr})d\Sigma + \int_{S}(\mathbf{Kr})(\delta\mathbf{r},\mathbf{n})dS + \int_{S}((\mathbf{Tn}),\delta\mathbf{r})dS$$

$$+ \int_{\Sigma}\delta_0\{-\mathbf{U} + (\mathbf{P\Phi})\}d\Sigma + \int_{S}\{-\mathbf{U} + (\mathbf{P\Phi})\}(\delta\mathbf{r},\mathbf{n})dS \;. \qquad (27)$$

Tratteremo in primo luogo i primi due integrali. Poiché in generale si ha

$$\delta(\mathbf{K}d\Sigma) = \delta\mathbf{K}\cdot d\Sigma + \mathbf{K}\delta(d\Sigma)$$

e

$$\delta\mathbf{K} = \delta_0\mathbf{K} + (\delta\mathbf{r},\mathrm{lor})\mathbf{K} \;,$$

si ottiene tenendo conto della (22)

$$\delta(\mathbf{K}d\Sigma) = \{\delta_0\mathbf{K} + (\delta\mathbf{r},\mathrm{lor})\mathbf{K} + \mathbf{K}\,\mathbf{div}(\delta\mathbf{r})\}d\Sigma \;.$$

La condizione (15c) dà quindi

$$\delta_0\mathbf{K} = -(\delta\mathbf{r},\mathrm{lor})\mathbf{K} - \mathbf{K}\,\mathbf{div}(\delta\mathbf{r}) \;,$$

con l'aiuto della quale l'integrale in questione si può calcolare così:

$$\int_\Sigma \delta_0(\mathbf{Kr})d\Sigma = \int_\Sigma(\mathbf{r}\delta_0\mathbf{K})d\Sigma = -\int_\Sigma(\mathbf{r},(\delta\mathbf{r},\mathrm{lor})\mathbf{K})d\Sigma$$

$$+\int_\Sigma(\delta\mathbf{r},\mathrm{lor})(\mathbf{rK})d\Sigma - \int_S(\mathbf{rK})(\delta\mathbf{r},\mathbf{n})dS \;;$$

e si ottiene

$$\int_\Sigma \delta_0(\mathbf{Kr})d\Sigma + \int_S(\mathbf{r},\mathbf{K})(\delta\mathbf{r},\mathbf{n})dS = \int_\Sigma(\mathbf{K},\delta\mathbf{r})d\Sigma \;. \tag{28}$$

Per il calcolo dei due ultimi integrali nella (27) presupponiamo la conoscenza delle relazioni

$$\delta_0\mathbf{P} = \mathbf{div}\ \mathbf{P}\cdot\delta\mathbf{r} - \mathbf{Div}[\mathbf{P},\delta\mathbf{r}] \;,$$

$$\delta_0\Phi = (\mathbf{Rot}\Phi,\delta\mathbf{r}) - \mathbf{Grad}(\Phi,\delta\mathbf{r}) \;,$$

che risultano dall’annullarsi delle due espressioni (15b)[17]:

$$\delta(\mathbf{P}_n dS) = \{\delta_0\mathbf{P} - (\mathbf{div}\ \mathbf{P},\delta\mathbf{r}) + \mathbf{Div}[\mathbf{P},\delta\mathbf{r}]\}_n dS \;,$$

$$\delta(\Phi_\lambda d\lambda) = \{\delta_0\Phi - (\mathbf{Rot}\Phi,\delta\mathbf{r}) + \mathbf{Grad}(\Phi,\delta\mathbf{r})\}_\lambda d\lambda \;.$$

Perciò si trova con integrazione per parti:

$$\int_\Sigma(\Phi\delta_0\mathbf{P})d\Sigma = \int_\Sigma \mathbf{div}\ \mathbf{P}\ (\Phi,\delta\mathbf{r})d\Sigma + \int_\Sigma((\mathbf{P},\mathbf{Rot}\Phi),\delta\mathbf{r})d\Sigma$$

$$+ \int_S(\mathbf{Pn})(\Phi,\delta\mathbf{r})dS - \int_S(\mathbf{P}\Phi)(\delta\mathbf{r},\mathbf{n})dS \;,$$

$$\int_\Sigma(\mathbf{P}\delta_0\Phi)d\Sigma = \int_\Sigma(\mathbf{P},(\mathbf{Rot}\Phi,\delta\mathbf{r}))d\Sigma - \int_\Sigma \mathbf{div}\ \mathbf{P}\ (\Phi,\delta\mathbf{r})d\Sigma - \int_S(\mathbf{Pn})(\Phi,\delta\mathbf{r})dS \;,$$

e ancora sommando queste due equazioni

$$\int_\Sigma \delta_0(\mathbf{P}\Phi)d\Sigma + \int_S(\mathbf{P}\Phi)(\delta\mathbf{r},\mathbf{n})dS = 2\int_\Sigma \mathbf{div}\ \mathbf{P}\ (\Phi,\delta\mathbf{r})d\Sigma \;, \tag{29}$$

che si annulla per la (14).

Per quanto riguarda ora $\delta_0\mathbf{U}$ si deve osservare che in contrasto con quanto avviene per la variazione $\delta\mathbf{U}$ in questo caso

---

[17] *Vedi per esempio E. Henschke, Berl. Diss. l.c. p. 41, Eq. (77) e p. 43, Eq. (82).*

si deve tener conto della variazione delle costanti materiali ε e μ, poiché in seguito allo spostamento del punto sostanziale subentrerà nel punto dello spazio considerato un'altra parte della sostanza (con ε e μ diversi). Di conseguenza ora invece che come nella (19) bisogna procedere nel modo seguente:

$$\delta_0\mathbf{U} = \frac{1}{2}\,\delta_0\left(\mu\mathfrak{H}'^2 - \frac{\mathfrak{D}'^2}{\varepsilon}\right)$$

$$= \mu\mathfrak{h}'\delta_0\mathfrak{h}' - \frac{\mathfrak{D}'}{\varepsilon}\,\delta_0\mathfrak{D}' + \frac{1}{2}\left(\mathfrak{H}'^2\delta_0\mu + \frac{\mathfrak{D}'^2}{\varepsilon^2}\,\delta_0\varepsilon\right)\ . \tag{30}$$

L'espressione per $\delta_0\varepsilon$ e per $\delta_0\mu$ si ottiene dall'annullarsi delle variazioni:

$$\delta\varepsilon = \delta_0\varepsilon + (\delta\mathbf{r},\mathrm{lor})\varepsilon\ ,$$

$$\delta\mu = \delta_0\mu + (\delta\mathbf{r},\mathrm{lor})\mu\ ,$$

(vedi (15d)), e quindi nella forma

$$\delta_0\varepsilon = -(\delta\mathbf{r},\mathrm{lor})\varepsilon\ , \qquad \delta_0\mu = -(\delta\mathbf{r},\mathrm{lor})\mu\ .$$

Se si sostituiscono questi valori nella (30), l'espressione tra parentesi sarà

$$\mathfrak{H}'^2\delta_0\mu + \frac{\mathfrak{D}'^2}{\varepsilon^2}\,\delta_0\varepsilon = -\mathfrak{H}'^2(\delta\mathbf{r},\mathrm{lor})\left(\frac{\mathfrak{B}'}{\mathfrak{H}'}\right) - \mathfrak{E}'^2(\delta\mathbf{r},\mathrm{lor})\left(\frac{\mathfrak{D}'}{\mathfrak{E}'}\right)$$

$$= \mathfrak{B}'(\delta\mathbf{r},\mathrm{lor})\mathfrak{H}' - \mathfrak{H}'(\delta\mathbf{r},\mathrm{lor})\mathfrak{B}' + \mathfrak{D}'(\delta\mathbf{r},\mathrm{lor})\mathfrak{E}' - \mathfrak{E}'(\delta\mathbf{r},\mathrm{lor})\mathfrak{D}'\ ,$$

e quindi $\delta_0\mathbf{U}$ diventa

$$\delta_0\mathbf{U} = \frac{1}{2}\,\mathbf{F}'\delta_0\mathbf{H}' + \frac{1}{4}\,\{\,\mathbf{F}'(\delta\mathbf{r},\mathrm{lor})\mathbf{H}' - \mathbf{H}'(\delta\mathbf{r},\mathrm{lor})\mathbf{F}'\}$$

$$= \frac{1}{2}\,\mathbf{F}\,\delta_0\mathbf{H} + \frac{1}{4}\,\{\,\mathbf{F}(\delta\mathbf{r},\mathrm{lor})\mathbf{H} - \mathbf{H}(\delta\mathbf{r},\mathrm{lor})\mathbf{F}\}\ . \tag{31}$$

La variazione locale $\delta_0\mathbf{H}$ si collega a $\delta\mathbf{H}$ nel modo seguente:

$$\delta_0\mathbf{H} = \delta\mathbf{H} - (\delta\mathbf{r},\mathrm{lor})\mathbf{H}\ ,$$

e per la (20) sarà quindi

$$\delta_0\mathbf{H} = [\mathbf{Div}\ \mathbf{H},\delta\mathbf{r}] + \mathbf{Rot}^*(\mathbf{H}^*\delta\mathbf{r})\ . \tag{32}$$

Otteniamo quindi dalla (31) e dalla (32)

$$\int_\Sigma \delta_0 \mathbf{U} d\Sigma = \int_\Sigma (\mathbf{F},\mathbf{Div\ H})\delta\mathbf{r} d\Sigma - \int_\Sigma (\mathbf{H}^*,\mathbf{Div\ F}^*)\delta\mathbf{r} d\Sigma$$

$$+ \frac{1}{4}\int_\Sigma (\mathbf{F}(\delta\mathbf{r},\mathrm{lor})\mathbf{H} - \mathbf{H}(\delta\mathbf{r},\mathrm{lor})\mathbf{F}) d\Sigma - \int_S ((\mathbf{F}^*\mathbf{n})(\mathbf{H}^*\delta\mathbf{r})) dS \ ,$$

e quindi per

$$\int_\Sigma \delta_0 \mathbf{U} d\Sigma + \int_S \mathbf{U}(\delta\mathbf{r},\mathbf{n}) dS$$

proprio la stessa espressione della (24) o (24’).

Con la formula (27) arriviamo pertanto dal principio d’azione alle stesse leggi (25) e (26), come bisognava aspettarsi.

§6. Considerazioni ulteriori sul risultato.

L’equazione vettoriale tetradimensionale (25) comprende la consueta equazione dell’energia:

$$\mathfrak{K}_t = -\mathrm{div}[\mathfrak{E}\mathfrak{H}] - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}(\mathfrak{E}\mathfrak{D} + \mathfrak{H}\mathfrak{B}) \qquad (33)$$

e l’equazione dell’impulso:

$$\mathfrak{K} = \mathfrak{E}\rho + \frac{1}{c}[\mathfrak{J}+\mathfrak{v}\rho,\mathfrak{B}] + \frac{1}{2}(\mathfrak{D}\nabla\mathfrak{E}) - \frac{1}{2}(\mathfrak{E}\nabla\mathfrak{D}) + \frac{1}{2}(\mathfrak{B}\nabla\mathfrak{H}) - \frac{1}{2}(\mathfrak{H}\nabla\mathfrak{B}) \ . \qquad (34)$$

Qui ρ indica la densità di carica elettrica, $\mathfrak{J}$ la corrente elettrica di conduzione, $\mathfrak{v}$ la velocità del corpo, c la velocità della luce nel vuoto.

E’ ben degno di nota che l’espressione per la forza ponderomotrice $\mathfrak{K}$ così derivata dal principio d’azione coincida completamente con quella che ho ottenuto precedentemente[18] mediante la trasformazione dell’equazione dell’energia per il sistema comovente ad un sistema di riferimento in moto relativamente alla materia. E’ anche dimostrato che questa espressione si accorda con tutte le esperienze compiute finora.

Il tensore tetradimensionale **T** contiene in modo noto il

---

[18] *J. Ishiwara, l.c..*

tensore degli sforzi $\mathfrak{T}$, la densità d'impulso $\mathfrak{g}$, la corrente d'energia $\mathfrak{S}$ e la densità d'energia *u* del campo elettromagnetico. Queste quantità sono definite dalla formula (26) in questo modo[19]:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{T} &= [[\mathfrak{E}\mathfrak{D}]] + [[\mathfrak{H}\mathfrak{B}]] - \frac{1}{2}\,\mathfrak{t}\{(\mathfrak{E}\mathfrak{D}) + (\mathfrak{H}\mathfrak{B})\} , \\
\mathfrak{g} &= \frac{1}{c}\,[\mathfrak{D}\mathfrak{B}] , \\
\mathfrak{S} &= c[\mathfrak{E}\mathfrak{H}] , \\
u &= \frac{1}{2}\,(\mathfrak{E}\mathfrak{D} + \mathfrak{H}\mathfrak{B}) .
\end{aligned} \tag{35}$$

L'espressione (26) per **T** è stata derivata prima da Minkowski[20] e poi da me, assieme all'espressione su data per $\mathfrak{K}$[21]. E' asimmetrica già per corpi a riposo. La nota relazione:

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{S}/c^2 \tag{36}$$

va pertanto limitata esclusivamente al vuoto.

In contrasto con questa asserzione alcuni altri fisici teorici richiedono la validità generale dell'equazione (36). Così Abraham[22] si sforza di trovare l'espressione del tensore d'universo preservando quest'equazione. Anche Grammel[23] si è occupato recentemente della costruzione di diverse espressioni possibili di **T**, che

---

[19]$\mathfrak{t}$ *è un tensore le cui tre componenti diagonali siano uguali ad 1, e le cui sei componenti fuori diagonale siano tutte nulle.*

[20]*H. Minkowski, l.c..*

[21]*Da Minkowski viene assunta per la tetraforza ponderomotrice non la quantità* **K***, ma il vettore* **K**+(*v***K**)*v normale al vettore di moto v. Abraham* (Phys. Zeitschr. **10.** p. 737. 1909) *ha discusso il perché l'assunzione di quest'ultima espressione della forza porti ad un'espressione fisicamente inverosimile per il calore di Joule. (Vedi* J. Ishiwara, Jahrb. d. Radioakt. u. Elektron. l.c. p. 606.*).*

[22]*M. Abraham, l.c..*

[23]R. Grammel, Ann. d. Phys. **41.** p. 570. 1913.

nel caso della quiete risultino simmetriche[24]. Laue[25] in accordo con Planck[26] ha indicato l'equazione (36) come la legge dell'inerzia dell'energia e l'ha proposta come una legge fondamentale della dinamica generale. Mi pare tuttavia che affermare che la (36) debba avere validità universale non abbia base più profonda dell'affermare che le rispettive componenti del tensore d'universo **T** siano simmetriche.

In connessione con l'equazione (36) si è potuta dimostrare proprio l'esistenza dell'inerzia dell'energia raggiante. Tuttavia l'essenza dell'inerzia non si basa di per sè sulla validità dell'equazione suddetta, ma genericamente sul concetto d'impulso, il quale si potrebbe trovare con l'energia ad esso associata in una relazione quantitativa diversa dalla (36).

A causa della semplicità di questa relazione si inclina peraltro ad attribuirle un significato fondamentale. Tuttavia, come Grammel ha mostrato nel lavoro prima citato, con essa sono purtroppo compatibili solo espressioni assai complicate del tensore d'universo, che devono essere sempre dotate di termini che contengano esplicitamente la velocità del corpo. Dalla ricerca di Henschke appare anche assai probabile che, se si assume l'espressione della forza di Abraham come corretta, nel principio variazionale non si possa più parlare di un'azione determinata.

La nostra espressione ha rispetto a quella il vantaggio, primo, che contiene la velocità del corpo completamente in modo solo implicito, e che ha proprio la stessa forma che nel sistema

---

[24] *Per completezza va ricordato che G. Nordström trattando l'elettrodinamica di Lorentz ha attribuito alla densità d'impulso l'espressione* $1/c[\mathfrak{E}\mathfrak{B}]$*, con la quale risulta la simmetria del tensore d'universo per corpi a riposo.* (Die Energiegleichung für das elektromagnetische Feld bewegter Körper, Helsingfors 1908, p. 49. Eq. (103)).

[25] M. Laue, Das Relativitätsprinzip, 2. Aufl. (Braunschweig 1913) p. 164.

[26] M. Planck, Phys. Zeitschr. **9.** p. 828. 1909; Verh. d. Deutsch. Phys. Ges. **6.** p. 728. 1908.

comovente, cosa che si conforma al "postulato della relatività" posto da Minkowski al vertice della sua fondamentale dissertazione, e in secondo luogo, che può essere derivata da un principio variazionale, generalizzazione la più naturale possibile del principio variazionale valido per il vuoto.

Del resto ho già mostrato tre anni fa in una comunicazione[27] che nel calcolo della pressione di radiazione su uno specchio perfetto, posto in un mezzo materiale trasparente per la luce, la legge dell'energia da un lato e la legge dell'impulso dall'altro danno rispetto ad un sistema di riferimento in moto relativo un risultato concordante solo quando si assumano per $\mathfrak{g}$ e per $\mathfrak{S}$ le espressioni in (35). Di contro con l'assunzione della (36) si giunge ad una contraddizione.

In relazione a questi problemi può essere interessante menzionare che nell'ottica dei corpi isotropi in moto l'irraggiamento d'impulso, definito come $1/c[\mathfrak{D}\mathfrak{B}]$, si trova nella direzione della normale d'onda, mentre l'irraggiamento d'energia si esprime con il vettore $c[\mathfrak{E}\mathfrak{H}]$, non sempre diretto secondo la normale d'onda[28].

Posso infine ancora accennare al fatto che in un lavoro di prossima apparizione credo d'aver fondato le espressioni (25) e (26) per la forza ponderomotrice anche direttamente sulla teoria degli elettroni, cosa che mi pare un ulteriore supporto alla loro validità.

Zürich, 15 luglio 1913.

(ricevuto il 24 luglio 1913)

[27] J. Ishiwara, Proc. Tôkyô math.-phys. Soc. l. c. p. 324.

[28] J. Ishiwara, l.c.. *Vedi ancora* Proc. Tôkyô math.-phys. Soc. (2) **5.** p. 327. 1910.