L'analisi tensoriale in quattro dimensioni[1,2]

H. Kafka

⋮

16. *Elettrodinamica dello spazio vuoto secondo la teoria della relatività speciale.*[3]

L'innalzamento antitensoriale [vedi (70)] del tetrapotenziale $\Phi_\nu(\mathfrak{U};i\phi)$ dà l'antitensore del secondo ordine

$$\mathbf{M}_{\mu\nu} = \nabla_{\lfloor\mu}\Phi_{\nu\rfloor} = \nabla_\mu\Phi_\nu - \nabla_\nu\Phi_\mu \qquad (76)$$

con le 12 componenti diverse da zero (6 numericamente distinte)

$$\left\{\begin{aligned}
\mathbf{M}_{23} &= -\mathbf{M}_{32} = \mathfrak{H}_x,\\
\mathbf{M}_{31} &= -\mathbf{M}_{13} = \mathfrak{H}_y,\\
\mathbf{M}_{12} &= -\mathbf{M}_{21} = \mathfrak{H}_z,\\
\mathbf{M}_{14} &= -\mathbf{M}_{41} = -i\mathfrak{E}_x,\\
\mathbf{M}_{24} &= -\mathbf{M}_{42} = -i\mathfrak{E}_y,\\
\mathbf{M}_{34} &= -\mathbf{M}_{43} = -i\mathfrak{E}_z.
\end{aligned}\right. \qquad (76a)$$

Significato della notazione $\Phi_\nu(\mathfrak{U};i\phi)$: le componenti del vettore tridimensionale prima del punto e virgola sono uguali alle componenti Φ_1, Φ_2 e Φ_3, lo scalare dopo il punto e virgola è uguale alla componente Φ_4. La prima relazione sarà scritta talora anche nella forma

$$\Phi_{(1,2,3)} = \mathfrak{U}\ .$$

Le sei componenti numericamente distinte dell'antitensore $\mathbf{M}_{\mu\nu}$, che per brevità chiameremo "tensore di campo", rappresentano le componenti dell'intensità di campo magnetica ed elettrica, cosa che indicheremo anche con la notazione

$$\mathbf{M}_{\mu\nu}(\mathfrak{H};-i\mathfrak{E}).$$

Le componenti del vettore tridimensionale prima del punto e virgola sono uguali alle componenti $\mathbf{M}_{23}$, $\mathbf{M}_{31}$ ed $\mathbf{M}_{12}$ dell'antiten-

---

[1]Annalen der Physik **58**, 1 (1919).

[2]*Tradotto in collaborazione con L. Mihich.*

[3]Vedi anche M.v.Laue, Das Relativitätsprinzip. p.87 e segg..

sore $\mathbf{M}_{\mu\nu}$, le componenti del vettore dopo il punto e virgola sono uguali alle componenti $\mathbf{M}_{14}$, $\mathbf{M}_{24}$ ed $\mathbf{M}_{34}$.

L'abbassamento di $\mathbf{M}_{\mu\nu}$ [vedi (72)] definisce la tetradensità $P_\mu(\rho\mathfrak{v}/c;i\rho)$:

$$\nabla_\sigma \mathbf{M}_{\mu\sigma} = P_\mu \ . \tag{77}$$

Lo sviluppo della (77) secondo l'indice di somma σ fornisce quattro equazioni che nella notazione usuale corrispondono alle equazioni di Maxwell-Lorentz

$$\mathrm{rot}\mathfrak{H} - \frac{1}{c}\frac{\partial\mathfrak{E}}{\partial t} = \frac{\rho\mathfrak{v}}{c}$$

e

$$\mathrm{div}\mathfrak{E} = \rho.$$

L'innalzamento antitensoriale di $\mathbf{M}_{\mu\nu}$ [vedi (71)] è zero:

$$\underbracket{\nabla_\sigma \mathbf{M}_{\mu\nu}} = \nabla_\sigma \mathbf{M}_{\mu\nu} + \nabla_\mu \mathbf{M}_{\nu\sigma} + \nabla_\nu \mathbf{M}_{\sigma\mu} = 0 \ . \tag{78}$$

Il primo membro della (78) rappresenta un antitensore del terzo ordine che, per quanto prima detto, ha 24 componenti diverse da zero, delle quali però solo quattro sono numericamente distinte. Porre uguali a zero queste quattro componenti rappresentate dalla (78) corrisponde nella notazione usuale alle equazioni

$$\mathrm{rot}\mathfrak{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial\mathfrak{H}}{\partial t} = 0$$

e

$$\mathrm{div}\mathfrak{H} = 0.$$

Con l'introduzione dell'antitensore duale, in analogia con la (67), la (78) si può sostituire con

$$\nabla_\sigma \overset{*}{\mathbf{M}}_{\mu\sigma} = 0 \ . \tag{79}$$

La tetraforza

$$F\{\mathfrak{F} = \rho\{\mathfrak{E} + \tfrac{1}{c}[\mathfrak{v}\mathfrak{H}]\};\ \tfrac{i}{c}(\mathfrak{v}\mathfrak{F})\} \ ,$$

si ottiene come prodotto interno della tetradensità e del tensore di campo:

$$F_\sigma = P_\mu \mathbf{M}_{\sigma\mu}. \tag{80}$$

F_σ si può anche rappresentare, come si farà vedere in seguito, come abbassamento di un tensore del secondo ordine, che come "tensore dell'energia e degli sforzi" gioca un ruolo importante nella teoria della relatività.- Poniamo nella (80) in conformità alla (77)

$$P_\mu = \nabla_\nu \mathbf{M}_{\mu\nu}$$

e otteniamo

$$F_\sigma = \mathbf{M}_{\sigma\mu} \nabla_\nu \mathbf{M}_{\mu\nu} = \nabla_\nu (\mathbf{M}_{\sigma\mu} \mathbf{M}_{\mu\nu}) - \mathbf{M}_{\mu\nu} \nabla_\nu \mathbf{M}_{\sigma\mu} \ .$$

Quando si scambiano nell'ultimo termine gli indici di somma μ e ν si ottiene un'espressione equivalente che si può scrivere anche nella forma

$$- \mathbf{M}_{\mu\nu} \nabla_\nu \mathbf{M}_{\sigma\mu} = - \tfrac{1}{2}(\mathbf{M}_{\mu\nu} \nabla_\nu \mathbf{M}_{\sigma\mu} + \mathbf{M}_{\nu\mu} \nabla_\mu \mathbf{M}_{\sigma\nu}) = - \tfrac{1}{2} \mathbf{M}_{\mu\nu} (\nabla_\nu \mathbf{M}_{\sigma\mu} + \nabla_\mu \mathbf{M}_{\nu\sigma}).$$

Ma per la (78) l'espressione nella parentesi tonda è uguale a $-\nabla_\sigma \mathbf{M}_{\mu\nu}$, cosicché

$$- \mathbf{M}_{\mu\nu} \nabla_\nu \mathbf{M}_{\sigma\mu} = \tfrac{1}{2} \mathbf{M}_{\mu\nu} \nabla_\sigma \mathbf{M}_{\mu\nu} = \tfrac{1}{4} \nabla_\sigma (\mathbf{M}_{\mu\nu} \mathbf{M}_{\mu\nu})$$

e quindi

$$F_\sigma = \nabla_\nu (\mathbf{M}_{\sigma\mu} \mathbf{M}_{\mu\nu}) + \tfrac{1}{4} \nabla_\sigma (\mathbf{M}_{\alpha\beta} \mathbf{M}_{\alpha\beta}) \ . \tag{81}$$

Nel primo termine del secondo membro bisogna sommare sugli indici ν, μ, quindi ∇_ν assume tutti i valori da

$$\nabla_1 = \frac{\partial}{\partial x} \quad \text{a} \quad \nabla_4 = \frac{\partial}{ic\partial t} \ ;$$

anche il ∇_σ del secondo termine assume questi valori. Introducendo il tensore speciale del secondo ordine $\delta_{\sigma\nu}$ [vedi (14)] i due termini anzidetti si possono raccogliere:

$$F_\sigma = \nabla_\nu (\mathbf{M}_{\sigma\mu} \mathbf{M}_{\mu\nu} + \tfrac{1}{4} \delta_{\sigma\nu} \mathbf{M}_{\alpha\beta} \mathbf{M}_{\alpha\beta}) \ . \tag{81a}$$

Da quest'equazione si vede che F_σ si può rappresentare nella forma

$$F_\sigma = \nabla_\nu \bar{T}_{\sigma\nu} \tag{81b}$$

come abbassamento di un tensore del secondo ordine, dove

$$\bar{T}_{\sigma\nu} = - \mathbf{M}_{\sigma\mu} \mathbf{M}_{\nu\mu} + \tfrac{1}{4} \delta_{\sigma\nu} \mathbf{M}_{\alpha\beta} \mathbf{M}_{\alpha\beta} \ . \tag{82}$$

Questa espressione è il cercato tensore d'energia e degli sforzi per lo spazio vuoto; $\bar{T}_{\sigma\nu}$ è simmetrico (fatto indicato dalla sopralineatura del simbolo), poiché lo scambio dell'ordine degli indici σ, ν lascia invariate le componenti. Il secondo termine del secondo membro della (82) interviene solo per quelle componenti di $\bar{T}_{\sigma\nu}$ che abbiano indici uguali ($\bar{T}_{11}, \bar{T}_{22}, \bar{T}_{33}$ e $\bar{T}_{44}$); in questo caso è $\delta_{\sigma\nu} = 1$. Per tutte le altre componenti il termine summenzionato si annulla, perché $\delta_{\sigma\nu} = 0$.

Laue assume il tennsore dell'energia e degli sforzi nella forma

$$\bar{T}_{\sigma\nu} = \frac{1}{2}\left(\overset{*}{\mathbf{M}}_{\sigma\mu}\overset{*}{\mathbf{M}}_{\nu\mu} - \mathbf{M}_{\sigma\mu}\mathbf{M}_{\nu\mu}\right) , \qquad (82a)$$

che è identica alla (82), poiché il calcolo esplicito dà la relazione

$$\overset{*}{\mathbf{M}}_{\sigma\mu}\overset{*}{\mathbf{M}}_{\nu\mu} = - \mathbf{M}_{\sigma\mu}\mathbf{M}_{\nu\mu} + \frac{1}{2}\,\delta_{\sigma\nu}\,\mathbf{M}_{\alpha\beta}\mathbf{M}_{\alpha\beta} . \qquad (83)$$

17. *Elettrodinamica dei corpi ponderabili.*

In presenza di corpi ponderabili il campo elettromagnetico sarà descritto dai vettori $\mathfrak{D}$ e $\mathfrak{B}$ e dai vettori $\mathfrak{E}$ ed $\mathfrak{H}$ rispettivamente, le cui componenti possono essere viste come le componenti numericamente distinte di due antitensori del second'ordine, cioè del "tensore di campo"

$$\mathbf{M}_{\mu\nu}(\mathfrak{B};\ -i\mathfrak{E})$$

e del "tensore di spostamento"

$$\mathbf{V}_{\mu\nu}(\mathfrak{H};\ -i\mathfrak{D}) .$$

L'abbassamento del tensore di campo definisce la tetracorrente

$$P_{\mu}\{\frac{1}{c}(\mathfrak{J} + \rho\mathfrak{v});\ i\rho\}:$$

$$\nabla_{\sigma}\mathbf{M}_{\mu\sigma} = P_{\mu} . \qquad (84)$$

Con la notazione usuale le quattro equazioni (84) corrispondono alle equazioni di Maxwell completate con la corrente di convezione

$$\mathrm{rot}\mathfrak{H} - \frac{1}{c}\frac{\partial\mathfrak{D}}{\partial t} = \frac{1}{c}(\mathfrak{J} + \rho\mathfrak{v})$$

e

$$\mathrm{div}\mathfrak{D} = \rho .$$

L'innalzamento antitensoriale del tensore di spostamento è nullo:

$$\nabla_{\underline{\sigma} \mathbf{V}_{\mu\nu\rfloor}} = \nabla_\sigma \mathbf{V}_{\mu\nu} + \nabla_\mu \mathbf{V}_{\nu\sigma} + \nabla_\nu \mathbf{V}_{\sigma\mu} = 0 \; ; \tag{85}$$

sviluppata secondo le osservazioni fatte per la (78), la (85) dà le equazioni

$$\mathrm{rot}\mathfrak{E} - \frac{1}{c}\frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial t} = 0$$

e

$$\mathrm{div}\mathfrak{B} = 0 \; .$$

Per esprimere in notazione tetradimensionale le relazioni

$$\mathfrak{D} = \varepsilon \mathfrak{E}$$
$$\mathfrak{B} = \mu \mathfrak{H}$$

che valgono secondo la teoria di Maxwell per i corpi isotropi, introduciamo, utilizzando la tetravelocità Y_σ, quattro nuove espressioni tensoriali. Le componenti di Y_σ sono[4]

$$\begin{cases} Y_{(1,2,3)} = \dfrac{\mathfrak{v}}{c}\,(1-v^2/c^2)^{-1/2} = \kappa \mathfrak{q} \; , \\ Y_4 = i\,(1-v^2/c^2)^{-1/2} = i\kappa \; , \end{cases} \tag{86}$$

dove abbiamo introdotto le abbreviazioni

$$\mathfrak{q} = \frac{\mathfrak{v}}{c} \; , \; q = \frac{v}{c} \; , \tag{87}$$

e

$$(1-v^2/c^2)^{-1/2} = (1-q^2)^{-1/2} = \kappa \; . \tag{88}$$

Per il prodotto interno della tetravelocità con se stessa il calcolo dà

$$Y_\sigma Y_\sigma = -1 \; . \tag{89}$$

Con il prodotto interno della tetravelocità per il tensore di campo otteniamo il tetravettore

$$\mathrm{E}_\mu = Y_\sigma \mathbf{M}_{\mu\sigma} \; ; \tag{90}$$

---

[4] *Vedi per esempio M. v. Laue, l.c. p. 69.*

il calcolo delle sue componenti dà:

$$\begin{cases} E_{(1,2,3)} = \kappa(\mathfrak{E} + [\mathfrak{q}\mathfrak{B}]) = \kappa\mathfrak{E}^{*}, \\ E_{4} = i\kappa(\mathfrak{q}\mathfrak{E}) = i\kappa(\mathfrak{q}\mathfrak{E}^{*}) , \end{cases} \tag{90a}$$

dove, con Laue[5], si è posto

$$\mathfrak{E}^{*} = \mathfrak{E} + [\mathfrak{q}\mathfrak{B}] , \tag{91}$$

("forza elettromotrice ").

Il prodotto interno della tetravelocità per il tensore di spostamento dà il tetravettore

$$D_{\mu} = Y_{\sigma}\mathbf{V}_{\mu\sigma} \tag{92}$$

con le componenti

$$\begin{cases} D_{(1,2,3)} = \kappa(\mathfrak{D} + [\mathfrak{q}\mathfrak{H}]) = \kappa\mathfrak{D}^{*}, \\ D_{4} = i\kappa(\mathfrak{q}\mathfrak{D}) = i\kappa(\mathfrak{q}\mathfrak{D}^{*}) , \end{cases} \tag{92a}$$

dove

$$\mathfrak{D}^{*} = \mathfrak{D} + [\mathfrak{q}\mathfrak{H}] . \tag{93}$$

Per $\mathfrak{q} = 0$ (sistema a riposo) $E_{(1,2,3)}$ si riduce a $\mathfrak{E}$, $D_{(1,2,3)}$ si riduce a $\mathfrak{D}$, E_4 e D_4 si annullano. Questa circostanza suggerisce di fare per i corpi isotropi l'ipotesi

$$D_{\mu} = \varepsilon E_{\mu} \tag{94}$$

che con la notazione usuale esprime la relazione

$$\mathfrak{D}^{*} = \varepsilon\mathfrak{E}^{*}. \tag{94a}$$

Il prodotto esterno antitensoriale della tetravelocità con il tensore di campo conduce all'antitensore del terz'ordine

$$\mathbf{B}_{\sigma\mu\nu} = Y_{\lfloor\sigma}\mathbf{M}_{\mu\nu\rfloor} = Y_{\sigma}\mathbf{M}_{\mu\nu} + Y_{\mu}\mathbf{M}_{\nu\sigma} + Y_{\nu}\mathbf{M}_{\sigma\mu} \tag{95}$$

con 24 componenti diverse da zero (4 numericamente distinte) che sono riassunte qui di seguito:

---

[5] *p.149.*

$$\begin{cases} \mathbf{B}_{234} = -\mathbf{B}_{243} = \mathbf{B}_{342} = -\mathbf{B}_{324} = \mathbf{B}_{423} = -\mathbf{B}_{432} = i\kappa\mathfrak{B}^*_x, \\ \mathbf{B}_{143} = -\mathbf{B}_{134} = \mathbf{B}_{431} = -\mathbf{B}_{413} = \mathbf{B}_{314} = -\mathbf{B}_{341} = i\kappa\mathfrak{B}^*_y, \\ \mathbf{B}_{412} = -\mathbf{B}_{421} = \mathbf{B}_{124} = -\mathbf{B}_{142} = \mathbf{B}_{241} = -\mathbf{B}_{214} = i\kappa\mathfrak{B}^*_z, \\ \mathbf{B}_{321} = -\mathbf{B}_{312} = \mathbf{B}_{213} = -\mathbf{B}_{231} = \mathbf{B}_{132} = -\mathbf{B}_{123} = -\kappa(\mathfrak{q}\mathfrak{B}^*). \end{cases} \tag{95a}$$

In esse si è posto

$$\mathfrak{B}^* = \mathfrak{B} - [\mathfrak{q}\mathfrak{E}] \ . \tag{96}$$

Infine il prodotto esterno antitensoriale della tetravelocità con il tensore di spostamento dà l'antitensore del terz'ordine

$$\mathbf{H}_{\sigma\mu\nu} = \underbrace{Y_\sigma \mathbf{V}_{\mu\nu}} = Y_\sigma \mathbf{V}_{\mu\nu} + Y_\mu \mathbf{V}_{\nu\sigma} + Y_\nu \mathbf{V}_{\sigma\mu} \ , \tag{97}$$

con le componenti

$$\begin{cases} \mathbf{H}_{234} = i\kappa\mathfrak{H}^*_x, \\ \mathbf{H}_{143} = i\kappa\mathfrak{H}^*_y, \\ \mathbf{H}_{412} = i\kappa\mathfrak{H}^*_z, \\ \mathbf{H}_{321} = -\kappa(\mathfrak{q}\mathfrak{H}^*), \end{cases} \tag{97a}$$

dove

$$\mathfrak{H}^* = \mathfrak{H} - [\mathfrak{q}\mathfrak{D}] \ . \tag{98}$$

Per la (95a) le prime tre componenti numericamente distinte di $\mathbf{B}_{\sigma\mu\nu}$ si riducono per $\mathfrak{q} = 0$ alle componenti di $\mathfrak{B}$, mentre per la (97a) quelle di $\mathbf{H}_{\sigma\mu\nu}$ si riducono alle componenti di $\mathfrak{H}$, cosicché, in analogia con la (94), si può fare l'ipotesi

$$\mathbf{B}_{abc} = \mu\mathbf{H}_{abc} \ , \tag{99}$$

che riassume 24 equazioni tra le componenti non nulle degli antitensori $\mathbf{B}_{abc}$ e $\mathbf{H}_{abc}$; ma queste equazioni sono identiche a sei a sei, cosicché rimangono solo quattro equazioni distinte che, nella notazione usuale, portano all'espressione

$$\mathfrak{B}^* = \mu\mathfrak{H}^* .$$

Con l'introduzione dei duali di $\mathbf{M}_{\mu\nu}$ e $\mathbf{V}_{\mu\nu}$ possiamo sostituire[6] le (95) e (97) con

$$B_\mu = Y_\sigma \overset{*}{\mathbf{M}}_{\mu\sigma} \tag{100}$$

e rispettivamente con

$$H_\mu = Y_\sigma \overset{*}{\mathbf{V}}_{\mu\sigma} \tag{101}$$

e la (99) con

$$B_\mu = \mu H_\mu \;. \tag{102}$$

Si sarebbe potuto certo evitare l'introduzione degli antitensori del terz'ordine, tuttavia ciò non comporta alcuna semplificazione.

Con l'utilizzo delle espressioni ora introdotte la radiazione a riposo di Minkowski[7] si può rappresentare nella forma

$$\Omega_\sigma = Y_a E_b \mathbf{H}_{\sigma ab} \;. \tag{103}$$

Calcoleremo qui esplicitamente come esempio la componente Ω_1. Al secondo membro della (103) occorre sommare su tutte le combinazioni degli indici *a* e *b*. Ma poiché $\mathbf{H}_{\sigma ab}$ è un antitensore, sono nulli tutti gli addendi per i quali $a = b$, e anche quelli per i quali $a = b = \sigma$; le combinazioni restanti degli indici sono quindi: 23, 24, 32, 34, 42, 43, cosicché

$$\Omega_1 = Y_2E_3\mathbf{H}_{123} + Y_2E_4\mathbf{H}_{124} + Y_3E_2\mathbf{H}_{132} + Y_3E_4\mathbf{H}_{134} + Y_4E_2\mathbf{H}_{142} + Y_4E_3\mathbf{H}_{143}$$

$$= (Y_2E_3 - Y_3E_2)\mathbf{H}_{123} + (Y_2E_4 - Y_4E_2)\mathbf{H}_{124} + (Y_3E_4 - Y_4E_3)\mathbf{H}_{134} \;.$$

Con la sostituzione dei valori su riportati per le componenti di Y_a, E_b e $\mathbf{H}_{\sigma ab}$ si ottiene

$$\Omega_1 = \kappa^3\{[\mathfrak{q}\overset{*}{\mathfrak{E}}]_x(\mathfrak{q}\overset{*}{\mathfrak{H}}) - [\mathfrak{q}\overset{*}{\mathfrak{H}}]_x(\mathfrak{q}\overset{*}{\mathfrak{E}}) + [\overset{*}{\mathfrak{E}}\overset{*}{\mathfrak{H}}]_x\} \;;$$

analoghe espressioni valgono per le componenti Ω_2 e Ω_3, che riassumiamo insieme a Ω_1 in

$$\Omega_{(1,2,3)} = \kappa^3\{[\mathfrak{q}[\mathfrak{q}[\overset{*}{\mathfrak{E}}\overset{*}{\mathfrak{H}}]]] + [\overset{*}{\mathfrak{E}}\overset{*}{\mathfrak{H}}]\} \;.$$

---

[6] *Vedi M .v. Laue, l. c. p. 150.*

[7] H.Minkowski, Zwei Abhandlungen über die Grundgleichungen der Elektrodinamik. B.G. Teubner 1910. p. 35.

Se risolviamo il triplo prodotto vettore nella differenza

$$\mathfrak{q}(\mathfrak{q}[\overset{*}{\mathfrak{E}}\overset{*}{\mathfrak{H}}]) - q^2[\overset{*}{\mathfrak{E}}\overset{*}{\mathfrak{H}}]$$

e teniamo conto della relazione

$$\kappa^2(1 - q^2) = 1 \tag{104}$$

che vale per la (88), si ottiene infine analogamente

$$\begin{cases} \Omega_{(1,2,3)} = \kappa[\overset{*}{\mathfrak{E}}\overset{*}{\mathfrak{H}}] + \kappa^3\mathfrak{q}(\mathfrak{q}[\overset{*}{\mathfrak{E}}\overset{*}{\mathfrak{H}}]) \; ; \\ \Omega_4 = i\kappa^3(\mathfrak{q}[\overset{*}{\mathfrak{E}}\overset{*}{\mathfrak{H}}]) \; . \end{cases} \tag{103a}$$

Per $\mathfrak{q} = 0$, $\Omega_{(1,2,3)}$ si riduce a $[\mathfrak{E}\mathfrak{H}]$, vale a dire al vettore di Poynting $\mathfrak{S} = c[\mathfrak{E}\mathfrak{H}]$ diviso per la velocità della luce c.

La radiazione a riposo di Minkowski si può scrivere, per la (67), anche nella forma

$$\Omega_i = Y_k \overset{*}{\mathbf{S}}_{ik}$$

dove

$$\overset{*}{\mathbf{S}}_{ik} = \tfrac{1}{2}\,\mathbf{I}_{iklm}\, E_{\lfloor l}H_{m\rfloor} .$$

Un’espressione analoga alla radiazione a riposo è quella del tetravettore

$$\varepsilon\mu\Omega_{\sigma} = Y_a D_b \mathbf{V}_{\sigma ab} \; , \tag{105}$$

le componenti del quale si ottengono dalle equazioni (103a), sostituendo in esse $\overset{*}{\mathfrak{E}}$ con $\overset{*}{\mathfrak{D}}$ e $\overset{*}{\mathfrak{H}}$ con $\overset{*}{\mathfrak{B}}$. Importante è inoltre l’espressione

$$\Omega'_{\sigma} = (\varepsilon\mu - 1)\Omega_{\sigma} = Y_a(D_b\mathbf{B}_{\sigma ab} - E_b\mathbf{H}_{\sigma ab}) \tag{106}$$

con le componenti

$$\begin{cases} \Omega'_{(1,2,3)} = \kappa\{[\overset{*}{\mathfrak{D}}\overset{*}{\mathfrak{B}}] - [\overset{*}{\mathfrak{E}}\overset{*}{\mathfrak{h}}]\} + \kappa^3\mathfrak{q}\,\{\mathfrak{q},[\overset{*}{\mathfrak{D}}\overset{*}{\mathfrak{B}}] - [\overset{*}{\mathfrak{E}}\overset{*}{\mathfrak{H}}]\} \; , \\ \Omega'_4 = i\kappa^3(\mathfrak{q},\; [\overset{*}{\mathfrak{D}}\overset{*}{\mathfrak{B}}] - [\overset{*}{\mathfrak{E}}\overset{*}{\mathfrak{H}}]) \; . \end{cases} \tag{106a}$$

Poniamo per brevità

$$\mathfrak{W} = \kappa^2\{[\overset{*}{\mathfrak{D}}\overset{*}{\mathfrak{B}}] - [\overset{*}{\mathfrak{E}}\overset{*}{\mathfrak{H}}] + \kappa^2\mathfrak{q}(\mathfrak{q},[\overset{*}{\mathfrak{D}}\overset{*}{\mathfrak{B}}] - [\overset{*}{\mathfrak{E}}\overset{*}{\mathfrak{H}}])\} \; ;$$

si ottiene

$$\begin{cases} \Omega'_{(1,2,3)} = \dfrac{\mathfrak{B}}{\kappa} \;, \\ \Omega'_{4} \qquad = \dfrac{i}{\kappa}(\mathfrak{q}\mathfrak{B}) \;. \end{cases} \tag{107}$$

18. *Il tensore dell'energia e degli sforzi per corpi ponderabili*.

Nella (82) abbiamo derivato il tensore dell'energia e degli sforzi per lo spazio vuoto nella forma

$$\bar{T}_{\sigma\nu} = - \mathbf{M}_{\sigma\mu}\mathbf{M}_{\nu\mu} + \frac{1}{4}\,\delta_{\sigma\nu}\mathbf{M}_{\alpha\beta}\mathbf{M}_{\alpha\beta} \;,$$

nella quale è determinato per mezzo del tensore di campo $\mathbf{M}_{\mu\nu}$. Nell'elettrodinamica dei corpi ponderabili dobbiamo tuttavia distinguere tra il tensore di campo $\mathbf{M}_{\mu\nu}$ e il tensore di spostamento $\mathbf{V}_{\mu\nu}$, e ci si chiede come in questo caso vada fissato il tensore dell'energia e degli sforzi. Si può pensare di modificare l'ipotesi (82) in

$$T''_{\sigma\nu} = - \mathbf{M}_{\sigma\mu}\mathbf{V}_{\nu\mu} + \frac{1}{4}\,\delta_{\sigma\nu}\mathbf{M}_{\alpha\beta}\mathbf{V}_{\alpha\beta} \tag{108}$$

oppure

$$T'''_{\sigma\nu} = T''_{\nu\sigma} = - \mathbf{V}_{\sigma\mu}\mathbf{M}_{\nu\mu} + \frac{1}{4}\,\delta_{\sigma\nu}\mathbf{M}_{\alpha\beta}\mathbf{V}_{\alpha\beta} \;; \tag{109}$$

i primi termini al secondo membro della (108) e della (109) non sono uguali, perché vanno uno nell'altro per scambio degli indici (tensori coniugati).

Le proposte (108) e (109) hanno il "difetto estetico" di non essere simmetriche; otteniamo una proposta simmetrica con la loro semisomma

$$\bar{T}'_{\sigma\nu} = \frac{1}{2}(T''_{\sigma\nu} + T'''_{\sigma\nu}) = - \frac{1}{2}(\mathbf{M}_{\sigma\mu}\mathbf{V}_{\nu\mu} + \mathbf{M}_{\nu\mu}\mathbf{V}_{\sigma\mu}) + \frac{1}{4}\,\delta_{\sigma\nu}\mathbf{M}_{\alpha\beta}\mathbf{V}_{\alpha\beta} \;. \tag{110}$$

L'espressione nella parentesi tonda è il prodotto simmetrico misto $\overline{\mathbf{M}_{\sigma\mu}\mathbf{V}_{\nu\mu}}$ [vedi (58)], cosicché possiamo anche scrivere:

$$\bar{T}'_{\sigma\nu} = - \frac{1}{2}\,\overline{\mathbf{M}_{\sigma\mu}\mathbf{V}_{\nu\mu}} + \frac{1}{4}\,\delta_{\sigma\nu}\mathbf{M}_{\alpha\beta}\mathbf{V}_{\alpha\beta} \;. \tag{110a}$$

Le proposte (108), (109), e (110) si riducono alla (82) quando si pone $V_{\mu\nu} = \mathbf{M}_{\mu\nu}$, sicché sono equivalenti sotto questo aspetto. Ma ciò non basta, perché nessuna di queste proposte contiene la velocità dei corpi ponderabili. Ora Grammel ha mostrato[8], che le tre proposte citate devono essere completate con termini aggiuntivi, in modo che i loro abbassamenti eseguiti secondo la (81b) diano espressioni soddisfacenti per la tetraforza. Alla conclusione di questo lavoro viene osservato:

"La differenza fra le tre proposte si rende percettibile solo quando si abbia a cha fare con velocità variabili della materia. Nelle tre proposte le leggi dell'impulso e dell'energia assumono tuttavia forme diverse già per corpi in moto uniforme."

In realtà l'ultimo fatto non accade, anzi le proposte di Grammel di completamento del tensore, come si mostrerà più sotto, sono del tutto identiche.

Inizieremo dalla proposta simmetrica (110), che Grammel completa con il (semi)prodotto esterno dei tetravettori Y_σ e Ω'_ν [vedi (106)]

$$\overbracket{Y_\sigma \Omega'_\nu} = Y_\sigma \Omega'_\nu + Y_\nu \Omega'_\sigma \ . \tag{111}$$

Il tensore dell'energia e degli sforzi per corpi ponderabili si dà allora nella forma

$$\bar{T}_{\sigma\nu} = -\frac{1}{2}\overbracket{\mathbf{M}_{\sigma\mu}\mathbf{V}_{\nu\mu}} + \frac{1}{4}\delta_{\sigma\nu}\mathbf{M}_{\alpha\beta}\mathbf{V}_{\alpha\beta} + \frac{1}{2}\overbracket{Y_\sigma \Omega'_\nu} \ ; \tag{112}$$

le sue componenti sono:

---

[8]R.Grammel, Zur relativitätstheoretischen Elektrodynamik bewegter körper. Ann. d. Phys. **41.** p.570 e segg. 1913.

$$
\left\{\begin{aligned}
T_{11} &= \tfrac{1}{2}\{\mathfrak{E}_x\mathfrak{D}_x - \mathfrak{E}_y\mathfrak{D}_y - \mathfrak{E}_z\mathfrak{D}_z + \mathfrak{H}_x\mathfrak{B}_x - \mathfrak{H}_y\mathfrak{B}_y - \mathfrak{H}_z\mathfrak{B}_z\} + \mathfrak{q}_x\mathfrak{M}_x\\
T_{22} &= \tfrac{1}{2}\{-\mathfrak{E}_x\mathfrak{D}_x + \mathfrak{E}_y\mathfrak{D}_y - \mathfrak{E}_z\mathfrak{D}_z - \mathfrak{H}_x\mathfrak{B}_x + \mathfrak{H}_y\mathfrak{B}_y - \mathfrak{H}_z\mathfrak{B}_z\} + \mathfrak{q}_y\mathfrak{M}_y\\
T_{33} &= \tfrac{1}{2}\{-\mathfrak{E}_x\mathfrak{D}_x - \mathfrak{E}_y\mathfrak{D}_y + \mathfrak{E}_z\mathfrak{D}_z - \mathfrak{H}_x\mathfrak{B}_x - \mathfrak{H}_y\mathfrak{B}_y + \mathfrak{H}_z\mathfrak{B}_z\} + \mathfrak{q}_z\mathfrak{M}_z\\
T_{44} &= \tfrac{1}{2}\{\mathfrak{E}_x\mathfrak{D}_x + \mathfrak{E}_y\mathfrak{D}_y + \mathfrak{E}_z\mathfrak{D}_z + \mathfrak{H}_x\mathfrak{B}_x + \mathfrak{H}_y\mathfrak{B}_y + \mathfrak{H}_z\mathfrak{B}_z\} - (\mathfrak{q}\mathfrak{M})\\
T_{23} &= T_{32} = \tfrac{1}{2}\{\mathfrak{E}_y\mathfrak{D}_z + \mathfrak{E}_z\mathfrak{D}_y + \mathfrak{H}_y\mathfrak{B}_z + \mathfrak{H}_z\mathfrak{B}_y + \mathfrak{q}_y\mathfrak{M}_z + \mathfrak{q}_z\mathfrak{M}_y\}\\
T_{31} &= T_{13} = \tfrac{1}{2}\{\mathfrak{E}_z\mathfrak{D}_x + \mathfrak{E}_x\mathfrak{D}_z + \mathfrak{H}_z\mathfrak{B}_x + \mathfrak{H}_x\mathfrak{B}_z + \mathfrak{q}_z\mathfrak{M}_x + \mathfrak{q}_x\mathfrak{M}_z\}\\
T_{12} &= T_{21} = \tfrac{1}{2}\{\mathfrak{E}_x\mathfrak{D}_y + \mathfrak{E}_y\mathfrak{D}_x + \mathfrak{H}_x\mathfrak{B}_y + \mathfrak{H}_y\mathfrak{B}_x + \mathfrak{q}_x\mathfrak{M}_y + \mathfrak{q}_y\mathfrak{M}_x\}\\
T_{14} &= T_{41} = -\tfrac{i}{2}\{[\mathfrak{E}\mathfrak{H}]_x + [\mathfrak{D}\mathfrak{B}]_x - \mathfrak{M}_x - \mathfrak{q}_x(\mathfrak{q}\mathfrak{M})\}\\
T_{24} &= T_{42} = -\tfrac{i}{2}\{[\mathfrak{E}\mathfrak{H}]_y + [\mathfrak{D}\mathfrak{B}]_y - \mathfrak{M}_y - \mathfrak{q}_y(\mathfrak{q}\mathfrak{M})\}\\
T_{34} &= T_{43} = -\tfrac{i}{2}\{[\mathfrak{E}\mathfrak{H}]_z + [\mathfrak{D}\mathfrak{B}]_z - \mathfrak{M}_z - \mathfrak{q}_z(\mathfrak{q}\mathfrak{M})\}.
\end{aligned}\right. \tag{112a}
$$

L'abbassamento del tensore dell'energia e degli sforzi (112) è la tetraforza per corpi ponderabili

$$F_\sigma = \nabla_\nu \bar{T}_{\sigma\nu} \; . \tag{113}$$

19. Per gli sviluppi successivi sono necessari alcuni calcoli intermedi. - Consideriamo in primo luogo il prodotto esterno antitensoriale

$$\underline{Y_\sigma \Omega'_\nu} = Y_\sigma \Omega'_\nu - Y_\nu \Omega'_\sigma \; , \tag{114}$$

che si può trasformare in modi diversi.

a) Poniamo nella (106)

$$D_b = Y_c \mathbf{V}_{bc} \text{ [per la (92)],}$$

$$E_b = Y_c \mathbf{M}_{bc} \text{ [per la (90)],}$$

$$\mathbf{B}_{\sigma ab} = \underline{Y_\sigma \mathbf{M}_{ab}} = Y_\sigma \mathbf{M}_{ab} + Y_a \mathbf{M}_{b\sigma} + Y_b \mathbf{M}_{\sigma a} \text{ [per la (95)],}$$

$$\mathbf{H}_{\sigma ab} = \underline{Y_\sigma \mathbf{V}_{ab}} = Y_\sigma \mathbf{V}_{ab} + Y_a \mathbf{V}_{b\sigma} + Y_b \mathbf{V}_{\sigma a} \text{ [per la (97)],}$$

e otteniamo

$$\Omega'_{\boldsymbol{\sigma}} = Y_a Y_c \mathbf{V}_{bc} Y_{\boldsymbol{\sigma}} \mathbf{M}_{ab} + Y_a Y_c \mathbf{V}_{bc} Y_a \mathbf{M}_{b\boldsymbol{\sigma}} + Y_a Y_c \mathbf{V}_{bc} Y_b \mathbf{M}_{\boldsymbol{\sigma}a}$$

$$- Y_a Y_c \mathbf{M}_{bc} Y_{\boldsymbol{\sigma}} \mathbf{V}_{ab} - Y_a Y_c \mathbf{M}_{bc} Y_a \mathbf{V}_{b\boldsymbol{\sigma}} - Y_a Y_c \mathbf{M}_{bc} Y_b \mathbf{V}_{\boldsymbol{\sigma}a} \ .$$

I primi due termini che stanno l'uno sotto l'altro sono, come risulta con lo scambio degli indici di somma *a* e *c*, numericamente uguali e si elidono per sottrazione; gli ultimi due termini contengono le espressioni

$$Y_b Y_c \mathbf{V}_{bc} \qquad \text{e} \qquad Y_b Y_c \mathbf{M}_{bc}$$

che sono nulle per la (75), e sono quindi essi stessi nulli. Quando per la (89) si pone nei due termini rimanenti

$$Y_a Y_a = -1$$

si ottiene:

$$\Omega'_{\boldsymbol{\sigma}} = - Y_c \mathbf{V}_{bc} \mathbf{M}_{b\boldsymbol{\sigma}} + Y_c M_{bc} \mathbf{V}_{b\boldsymbol{\sigma}} = D_b \mathbf{M}_{\boldsymbol{\sigma}b} - \mathrm{E}_b \mathbf{V}_{\boldsymbol{\sigma}b} \ . \tag{115}$$

Scriviamo ora le seguenti tre equazioni l'una sotto l'altra:

$$\begin{aligned} Y_{\boldsymbol{\sigma}} \Omega'_{\boldsymbol{\nu}} &= Y_c \mathbf{V}_{bc} Y_{\boldsymbol{\sigma}} \mathbf{M}_{\boldsymbol{\nu}b} - Y_c \mathbf{M}_{bc} Y_{\boldsymbol{\sigma}} \mathbf{V}_{\boldsymbol{\nu}b} \\ - Y_{\boldsymbol{\nu}} \Omega'_{\boldsymbol{\sigma}} &= Y_c \mathbf{V}_{bc} Y_{\boldsymbol{\nu}} \mathbf{M}_{b\boldsymbol{\sigma}} - Y_c \mathbf{M}_{bc} Y_{\boldsymbol{\nu}} \mathbf{V}_{b\boldsymbol{\sigma}} \\ 0 &= Y_c \mathbf{V}_{bc} Y_b \mathbf{M}_{\boldsymbol{\sigma\nu}} - Y_c \mathbf{M}_{bc} Y_b \mathbf{V}_{\boldsymbol{\sigma\nu}} \ . \end{aligned}$$

Le prime due equazioni si ottengono con prodotto esterno della (115) per la tetravelocità, la terza è soddisfatta per la (89); la loro somma dà

$$Y_{\boldsymbol{\sigma}} \Omega'_{\boldsymbol{\nu}} - Y_{\boldsymbol{\nu}} \Omega'_{\boldsymbol{\sigma}} = Y_c \mathbf{V}_{bc} \underbracket{Y_{\boldsymbol{\sigma}} \mathbf{M}_{\boldsymbol{\nu}b}} - Y_c \mathbf{M}_{bc} \underbracket{Y_{\boldsymbol{\sigma}} \mathbf{V}_{\boldsymbol{\nu}b}} \tag{116}$$

ovvero

$$\underbracket{Y_{\boldsymbol{\sigma}} \Omega'_{\boldsymbol{\nu}}} = D_b \mathbf{B}_{\boldsymbol{\sigma\nu}b} - E_b \mathbf{H}_{\boldsymbol{\sigma\nu}b} = (\varepsilon\mu - 1) E_b \mathbf{H}_{\boldsymbol{\sigma\nu}b} \ . \tag{116b}$$

b) Per ottenere un'altra rappresentazione del prodotto anti-tensoriale esterno $\underbracket{Y_{\boldsymbol{\sigma}} \Omega'_{\boldsymbol{\nu}}}$, partiamo dal prodotto misto

$$\mathbf{H}_{\boldsymbol{\nu}bc} \mathbf{B}_{\boldsymbol{\sigma}bc} = \underbracket{Y_{\boldsymbol{\nu}} \mathbf{V}_{bc}} \ \underbracket{Y_{\boldsymbol{\sigma}} \mathbf{M}_{bc}}$$

e in esso sviluppiamo prima di tutto $\underbracket{Y_{\boldsymbol{\nu}} \mathbf{V}_{bc}}$ secondo la (97):

$$\mathbf{H}_{\nu bc}\mathbf{B}_{\sigma bc} = Y_\nu \mathbf{V}_{bc}\underline{Y_\sigma \mathbf{M}_{bc}} + Y_b \mathbf{V}_{c\nu}\underline{Y_\sigma \mathrm{M}_{bc}} + Y_c \mathbf{V}_{\nu b}\underline{Y_\sigma \mathbf{M}_{bc}} . \qquad (117)$$

Il primo termine del secondo membro dà con lo sviluppo del prodotto antitensoriale

$$Y_\nu \mathbf{V}_{bc} Y_\sigma \mathbf{M}_{bc} + Y_\nu \mathbf{V}_{bc} Y_b \mathbf{M}_{c\sigma} + Y_\nu \mathbf{V}_{bc} Y_c \mathbf{M}_{\sigma b} ;$$

gli ultimi due termini dell'espressione precedente sono uguali (risulta dallo scambio degli indici di somma b e c) e si possono raccogliere in

$$2\, Y_\nu \mathbf{V}_{bc} Y_b \mathbf{M}_{c\sigma} = -\, 2D_c Y_\nu \mathbf{M}_{c\sigma} .$$

Gli ultimi due termini della (117) sono anch'essi uguali; li raccogliamo in

$$2Y_b \mathbf{V}_{c\nu}\underline{Y_\sigma \mathrm{M}_{bc}} ,$$

e sviluppiamo $\underline{Y_\sigma \mathrm{M}_{bc}}$:

$$2Y_b \mathbf{V}_{c\nu} Y_\sigma \mathrm{M}_{bc} + 2Y_b \mathbf{V}_{c\nu} Y_b \mathrm{M}_{c\sigma} + 2Y_b \mathbf{V}_{c\nu} Y_c \mathrm{M}_{\sigma b} = 2E_c Y_\sigma \mathbf{V}_{\nu c} - 2\mathbf{M}_{\sigma c}\mathbf{V}_{\nu c} - 2\varepsilon E_\sigma E_\nu .$$

Quando si raccolgono i termini trasformati del secondo membro della (117) e si pone nel primo membro

$$\mathbf{B}_{\sigma bc} = \mu\, \mathbf{H}_{\sigma bc} ,$$

si ottiene

$$\left\{ \begin{aligned} \mu \mathbf{H}_{\nu bc}\mathbf{H}_{\sigma bc} &= -\, 2D_c Y_\nu \mathbf{M}_{c\sigma} + 2E_c Y_\sigma \mathbf{V}_{\nu c} \\ &\quad - 2\mathbf{M}_{\sigma c}\mathbf{V}_{\nu c} + Y_\nu Y_\sigma \mathbf{M}_{bc}\mathbf{V}_{bc} - 2\varepsilon E_\sigma E_\nu . \end{aligned} \right. \qquad (117a)$$

Immaginiamoci ora d'aver costruito dalla (117a) per scambio degli indici ν e σ una seconda equazione, che sottraiamo a quella scritta prima. Allora i primi membri e gli ultimi due termini dei secondi membri si elidono; rimane

$$0 = -\, D_c(Y_\sigma \mathbf{M}_{\nu c} + Y_\nu \mathbf{M}_{c\sigma}) + E_c(Y_\sigma \mathbf{V}_{\nu c} + Y_\nu \mathbf{V}_{c\sigma}) - (\mathbf{M}_{\sigma c}\mathbf{V}_{\nu c} - \mathbf{M}_{\nu c}\mathbf{V}_{\sigma c}).$$

Completiamo a prodotti antitensoriali le espressioni in parentesi dei primi due termini del secondo membro dell'equazione precedente per mezzo di

$$-\, D_c Y_c \mathbf{M}_{\sigma\nu} = -\, Y_b \mathbf{V}_{cb} Y_c \mathbf{M}_{\sigma\nu} = 0 \quad \text{[per la (75)]} ,$$

e rispettivamente di

$$E_c Y_c \mathbf{V}_{\sigma\nu} = Y_b \mathbf{M}_{cb} Y_c \mathbf{V}_{\sigma\nu} = 0 \ ,$$

e portiamoli al primo membro:

$$D_c Y_{\lfloor\sigma} \mathbf{M}_{\nu c\rfloor} - E_c Y_{\lfloor\sigma} \mathbf{V}_{\nu c\rfloor} = -(\mathbf{M}_{\sigma c} \mathbf{V}_{\nu c} - \mathbf{M}_{\nu c} \mathbf{V}_{\sigma c}) \tag{118}$$

ovvero

$$D_c \mathbf{B}_{\sigma\nu c} - \mathrm{E}_c \mathbf{H}_{\sigma\nu c} = - \mathbf{M}_{\lfloor\sigma c} \mathbf{V}_{\nu c\rfloor} \ . \tag{118a}$$

Poiché il primo membro della (118a), a causa della (116a), è uguale al prodotto antitensoriale $Y_{\lfloor\sigma} \Omega'_{\nu\rfloor}$, si ottiene infine l'importante relazione

$$\boxed{Y_{\lfloor\sigma} \Omega'_{\nu\rfloor} = - \mathbf{M}_{\lfloor\sigma c} \mathbf{V}_{\nu c\rfloor}} \ . \tag{119}$$

I risultati del calcolo della (119) in corrispondenza dei valori σ,ν = 23, 31 e 12 si possono riassumere nella notazione usuale in

$$[\mathfrak{q}\mathfrak{W}] = [\mathfrak{E}\mathfrak{D}] + [\mathfrak{H}\mathfrak{B}] \ , \tag{120}$$

quelli per σ,ν = 14, 24, 34 in

$$- i\{\mathfrak{W} - \mathfrak{q}(\mathfrak{q}\mathfrak{W})\} = - i\{[\mathfrak{D}\mathfrak{B}] - [\mathfrak{E}\mathfrak{H}]\} \ . \tag{121}$$

Dall'ultima equazione risulta per il vettore $\mathfrak{W}$ introdotto nella (107) l'espressione

$$\mathfrak{W} = [\mathfrak{D}\mathfrak{B}] - [\mathfrak{E}\mathfrak{H}] + \mathfrak{q}(\mathfrak{q}\mathfrak{W}) \ , \tag{122}$$

in accordo con Abraham[9].

Poiché

$$(\mathfrak{q}\mathfrak{W}) = (\mathfrak{q},[\mathfrak{D}\mathfrak{B}] - [\mathfrak{E}\mathfrak{H}]) + q^2(\mathfrak{q}\mathfrak{W}) = \kappa^2(\mathfrak{q},[\mathfrak{D}\mathfrak{B}] - [\mathfrak{E}\mathfrak{H}]) \ ,$$

sarà anche

$$\mathfrak{W} = [\mathfrak{D}\mathfrak{B}] - [\mathfrak{E}\mathfrak{H}] + \kappa^2\mathfrak{q}(\mathfrak{q},[\mathfrak{D}\mathfrak{B}] - [\mathfrak{E}\mathfrak{H}]) \ . \tag{122a}$$

Dalla (120) e dalla (121) deriva anche la relazione, alquanto macchinosa a dimostrarsi per un'altra via

---

[9] M. Abraham, Theorie der Elektrizität, II vol. B.G. Teubner 1914. p. 311.

$$(\mathfrak{q}, [\mathfrak{D}\mathfrak{B}] - [\mathfrak{E}\mathfrak{H}]) = [\mathfrak{E}\mathfrak{D}] + [\mathfrak{H}\mathfrak{B}] \ . \tag{123}$$

20. *La determinazione della tetraforza per corpi ponderabili.*

Per dimostrare che le proposte di Grammel per il completamento del tensore sono identiche, scriviamo le equazioni (112) e (119) l'una sotto l'altra:

$$\begin{cases} \bar{T}_{\sigma\nu} = - \frac{1}{2}\mathbf{M}_{\sigma\mu}\mathbf{V}_{\nu\mu} - \frac{1}{2}\mathbf{M}_{\nu\mu}\mathbf{V}_{\sigma\mu} + \frac{1}{4}\delta_{\sigma\nu}\mathbf{M}_{\alpha\beta}\mathbf{V}_{\alpha\beta} + \frac{1}{2}Y_{\sigma}\Omega'_{\nu} + \frac{1}{2}Y_{\nu}\Omega'_{\sigma} \ , \\ 0 = - \frac{1}{2}\mathbf{M}_{\sigma\mu}\mathbf{V}_{\nu\mu} + \frac{1}{2}\mathbf{M}_{\nu\mu}\mathbf{V}_{\sigma\mu} - \frac{1}{2}Y_{\sigma}\Omega'_{\nu} + \frac{1}{2}Y_{\nu}\Omega'_{\sigma} \ ; \end{cases} \tag{124}$$

la loro somma

$$\bar{\bar{T}}_{\sigma\nu} = - \mathbf{M}_{\sigma\mu}\mathbf{V}_{\nu\mu} + \frac{1}{4}\,\delta_{\sigma\nu}\mathbf{M}_{\alpha\beta}\mathbf{V}_{\alpha\beta} + Y_{\nu}\Omega'_{\sigma} \tag{124a}$$

corrisponde alla proposta (108) completata con il termine aggiuntivo $Y_{\nu}\Omega'_{\sigma}$ (Grammel indica la proposta completata con S''[10]); la loro differenza

$$\bar{\bar{T}}_{\sigma\nu} = - \mathbf{M}_{\nu\mu}\mathbf{V}_{\sigma\mu} + \frac{1}{4}\,\delta_{\sigma\nu}\mathbf{M}_{\alpha\beta}\mathbf{V}_{\alpha\beta} + Y_{\sigma}\Omega'_{\nu} \tag{124b}$$

corrisponde alla proposta (109), completata con $Y_{\sigma}\Omega'_{\nu}$ (per Grammel S''_{c}).[11]

Le tre proposte di Grammel sono perciò completamente equivalenti e si distinguono solo per la notazione. Nella (124) la simmetria dell'espressione proposta risulta in modo immediato, mentre nella (124a) e nella (124b) ciò non avviene.

Un'altra via per la determinazione del tensore dell'energia e degli sforzi per i corpi ponderabili, che corrisponde meglio allo spirito della teoria della relatività speciale, consiste nel trasformare "al caso del moto" una proposta per i corpi a riposo confermata dall'esperienza. Però questa via, già nel caso che il moto sia assunto parallelo ad un asse del sistema a riposo, è notevolmente complicata; le espressioni così ottenute per le componenti del tensore non consentono poi una conclusione univoca per moti altrimenti diretti.

---

[10] *R. Grammel, l.c. p. 576, la seconda delle equazioni (31).*

[11] *p. 576, la terza delle equazioni (31).*

La tetraforza è per la (113)

$$F_\sigma = \nabla_\nu \bar{T}_{\sigma\nu} \ .$$

Per ragioni formali scegliamo per $\bar{T}_{\sigma\nu}$ la notazione (124a); eseguendo l'operazione di derivazione otteniamo

$$F_\sigma = - \mathbf{M}_{\sigma\mu} \nabla_\nu \mathbf{V}_{\nu\mu} + Y_\nu \nabla_\nu \Omega'_\sigma + Z_\sigma \ , \qquad (125)$$

nella quale

$$Z_\sigma = - \mathbf{V}_{\nu\mu} \nabla_\nu \mathbf{M}_{\sigma\mu} + \frac{1}{4} \nabla_\sigma (\mathbf{M}_{\alpha\beta} \mathbf{V}_{\alpha\beta}) \ . \qquad (126)$$

Trasformazione di Z_σ. - Il primo termine del secondo membro della (126) si può, in maniera simile a quella usata nel paragrafo 16 per l'espressione - $\mathbf{M}_{\nu\mu} \nabla_\nu \mathbf{M}_{\sigma\mu}$, portare nella forma

$$- \frac{1}{2} \mathbf{V}_{\mu\nu} \nabla_\sigma \mathbf{M}_{\mu\nu} \ .$$

Per la trasformazione del secondo termine consideriamo il prodotto interno

$$\mathbf{H}_{\alpha\beta\gamma} \mathbf{B}_{\alpha\beta\gamma} = \underbrace{Y_\alpha \mathbf{V}_{\beta\gamma}}_{} \ \underbrace{Y_\alpha \mathbf{M}_{\beta\gamma}}_{} \ ;$$

se sviluppiamo $\underbrace{Y_\alpha \mathbf{V}_{\beta\gamma}}_{}$, si ottengono tre addendi uguali, cosicché possiamo scrivere:

$$\mathbf{H}_{\alpha\beta\gamma} \mathbf{B}_{\alpha\beta\gamma} = 3 Y_\alpha \mathbf{V}_{\beta\gamma} \underbrace{Y_\alpha \mathbf{M}_{\beta\gamma}}_{} = 3 Y_\alpha \mathbf{V}_{\beta\gamma} Y_\alpha \mathbf{M}_{\beta\gamma} + 3 Y_\alpha \mathbf{V}_{\beta\gamma} Y_\beta \mathbf{M}_{\gamma\alpha} + 3 Y_\alpha \mathbf{V}_{\beta\gamma} Y_\gamma \mathbf{M}_{\alpha\beta} .$$

Nel primo termine di questo sviluppo bisogna porre $Y_\alpha Y_\alpha = -1$; gli ultimi due termini sono uguali e si possono riassumere in

$$- 6 Y_\beta \mathbf{V}_{\gamma\beta} Y_\alpha \mathbf{M}_{\gamma\alpha} = - 6 D_\gamma E_\gamma \ ;$$

otteniamo quindi la relazione

$$\mathbf{H}_{\alpha\beta\gamma} \mu \mathbf{H}_{\alpha\beta\gamma} = - 3 \mathbf{V}_{\alpha\beta} \mathbf{M}_{\alpha\beta} - 6 \varepsilon E_\alpha E_\alpha \qquad (127)$$

e da questa

$$\mathbf{M}_{\alpha\beta} \mathbf{V}_{\alpha\beta} = - 2 \varepsilon E_\alpha E_\alpha - \frac{1}{3} \mu \mathbf{H}_{\alpha\beta\gamma} \mathbf{H}_{\alpha\beta\gamma} \ . \qquad (128)$$

L'ultimo termine della (128), introducendo il tetravettore H_α [vedi (101)], si può anche scrivere nella forma

$$-2 \mu H_\alpha H_\alpha .$$

L'equazione (128) rende ora possibile la trasformazione del secondo termine di Z_σ:

$$\frac{1}{4}\nabla_\sigma(\mathbf{M}_{\alpha\beta}\mathbf{V}_{\alpha\beta}) = -\frac{1}{2}E_\alpha E_\alpha \nabla_\sigma \varepsilon - \frac{1}{2}H_\alpha H_\alpha \nabla_\sigma \mu - \varepsilon E_\alpha \nabla_\sigma E_\alpha - \frac{1}{6}\mathbf{H}_{\alpha\beta\gamma}\nabla_\sigma(\mu \mathbf{H}_{\alpha\beta\gamma}) .$$

Nell’eseguire la derivata dell’ultimo termine dell’espressione precedente si deve considerare μ costante. Dalla (127) segue poi

$$-\varepsilon E_\alpha \nabla_\sigma E_\alpha - \frac{1}{6}\mathbf{H}_{\alpha\beta\gamma}\nabla_\sigma(\mu \mathbf{H}_{\alpha\beta\gamma}) = \frac{1}{2}\mathbf{V}_{\alpha\beta}\nabla_\sigma \mathbf{M}_{\alpha\beta} ,$$

espressione che si cancella con quella ottenuta per il primo termine di Z_σ. Si ha quindi:

$$Z_\sigma = -\frac{1}{2}E_\alpha E_\alpha \nabla_\sigma \varepsilon - \frac{1}{2}H_\alpha H_\alpha \nabla_\sigma \mu \tag{126a}$$

e quindi

$$\left\{ \boxed{F_\sigma = -\mathbf{M}_{\sigma\mu}\nabla_\nu \mathbf{V}_{\nu\mu} + Y_\nu \nabla_\nu \Omega'_\sigma - \frac{1}{2}E_\alpha E_\alpha \nabla_\sigma \varepsilon - \frac{1}{2}H_\alpha H_\alpha \nabla_\sigma \mu .} \right. \tag{125a}$$

Questa è l’espressione completa della tetraforza per corpi isotropi in moto non accelerato. Per corpi omogenei gli innalzamenti $\nabla_\sigma \varepsilon$ e $\nabla_\sigma \mu$ sono nulli; allora $Z_\sigma = 0$ e

$$F_\sigma = -\mathbf{M}_{\sigma\mu}\nabla_\nu \mathbf{V}_{\nu\mu} + Y_\nu \nabla_\nu \Omega'_\sigma . \tag{129}$$

Il calcolo delle componenti di F_σ nella (125a) dà, con la notazione usuale, le espressioni:

$$F_{(1,2,3)} = \rho\mathfrak{E}^* + \frac{1}{c}[\mathfrak{J}\mathfrak{B}] + \frac{1}{c}\left\{(\mathfrak{v}\nabla)\mathfrak{W} + \frac{\partial \mathfrak{W}}{\partial t}\right\}$$

$$-\frac{\kappa^2}{2}\left\{\mathfrak{E}^{*2} - \frac{1}{c^2}(\mathfrak{v}\mathfrak{E}^*)^2\right\}\nabla\varepsilon - \frac{\kappa^2}{2}\left\{\mathfrak{H}^{*2} - \frac{1}{c^2}(\mathfrak{v}\mathfrak{H}^*)^2\right\}\nabla\mu ,$$

$$F_4 = \frac{i}{c}\left\{\rho(\mathfrak{v}\mathfrak{E}^*) + (\mathfrak{E}\mathfrak{J}) + \frac{1}{c}\left((\mathfrak{v},(\mathfrak{v}\nabla)\mathfrak{W}) + (\mathfrak{v}\frac{\partial\mathfrak{W}}{\partial t})\right)\right.$$

$$\left. + \frac{\kappa^2}{2}\left(\mathfrak{E}^{*2} - \frac{1}{c^2}(\mathfrak{v}\mathfrak{E}^*)^2\right)\frac{\partial\varepsilon}{\partial t} + \frac{\kappa^2}{2}\left(\mathfrak{H}^{*2} - \frac{1}{c^2}(\mathfrak{v}\mathfrak{H}^*)^2\right)\frac{\partial\mu}{\partial t}\right\} ; \tag{125b}$$

nelle quali secondo le (91), (98) e (122) è

$$\mathfrak{E}^* = \mathfrak{E} + \frac{1}{c}[\mathfrak{v}\mathfrak{B}] ,$$

$$\mathfrak{H}^* = \mathfrak{H} - \frac{1}{c}[\mathfrak{v}\mathfrak{D}] ,$$

$$\mathfrak{W} = [\mathfrak{D}\mathfrak{B}] - [\mathfrak{E}\mathfrak{H}] + \frac{\kappa^2}{c^2}\mathfrak{v}(\mathfrak{v},[\mathfrak{D}\mathfrak{B}] - [\mathfrak{E}\mathfrak{H}]) .$$

Per corpi omogenei i gradienti $\nabla\varepsilon$ e $\nabla\mu$ nella (125b) sono nulli; per le componenti F_1, F_2, ed F_3 della tetraforza risulta allora complessivamente l'espressione

$$F_{(1,2,3)} = \rho\mathfrak{E}^* + \frac{1}{c}\,[\mathfrak{J}\mathfrak{B}] + \frac{1}{c}\left\{(\mathfrak{v}\nabla)\mathfrak{B} + \frac{\partial\mathfrak{B}}{\partial t}\right\},$$

che anche Abraham ha derivato[12].

(ricevuto il 6 Luglio 1918)

---

[12] *M. Abraham, l. c. p. 314.*