Il tensore d'energia e impulso del campo elettromagnetico nei dielettrici[1]

G. Marx e G. Györgyi

Sommario

§1. Il tensore d'energia e impulso del campo elettromagnetico.

L'elettrodinamica di Maxwell e Lorentz procura nel vuoto non solo le equazioni di campo, ma essa descrive anche l'interazione dinamica del campo e dei corpi carichi che si trovano nel campo in un modo che si accorda con l'esperienza e che è in generale accettato. Le leggi che valgono negli isolanti sono poi in linea di principio riconducibili alle precedenti, ma poiché i calcoli delle quantità macroscopiche mediante processi di media non sono univoci, l'elettrodinamica dei dielettrici si basa piuttosto su fondamenti fenomenologici. Le equazioni di campo sono note: sono le equazioni di campo di Maxwell e Minkowski; ma le espressioni che danno informazioni sulle interazioni meccaniche del campo e della materia polarizzabile (energia di campo, impulso di campo, forza ponderomotrice) stanno al centro di una discussione che si protrae da 50 anni, e finora non si è ottenuto un punto di vista generalmente accettato. I lavori apparsi negli ultimi tempi (si ricordino tra gli altri i lavori di M.v.Laue, K.F. Novobátzky, F. Beck, N.L. Balász) che sono partiti da punti di vista diversi sono pervenuti a risultati tra loro contraddittori. Nella presente dissertazione cercheremo se sia possibile soddisfare in modo unitario i requisiti posti dai diversi ricercatori mediante una legge di forza determinata che tenga conto dei punti di vista avanzati.

---

[1]Annalen der Physik **16**, 241 (1955).

Il tensore d'energia e impulso del campo dà informazione in modo complessivo sull'energia e sull'impulso del campo e sulle forze ponderomotrici che da esso derivano. Il metodo di validità più generale per la determinazione del tensore d'energia e impulso è fornito dal principio variazionale della teoria di campo[1]. Questo metodo è stato applicato alla determinazione del tensore d'energia e impulso del campo elettromagnetico nei mezzi dielettrici da K.F. Novobátzky[2]. Sia consentito ripetere qui i calcoli (in una forma che si discosta un poco da quella originale). Secondo Minkowski il campo elettromagnetico dev'essere descritto con due tensori emisimmetrici, ossia con il tensore F_{ik}, che riassume l'intensità di campo elettrico $\mathfrak{E}$ e il vettore d'induzione magnetica $\mathfrak{B}$, e con il tensore G_{ik}, che riassume il vettore di spostamento elettrico $\mathfrak{D}$ e l'intensità di campo magnetico $\mathfrak{H}$. Si può derivare F_{ik} da un potenziale vettore φ_i:

$$F_{ik}=\partial\varphi_k/\partial x_i-\partial\varphi_i/\partial x_k \quad . \tag{1}$$

La connessione tra F_{ik} e G_{ik} è determinata dalla tetra-velocità u^i, dal coefficiente dielettrico ε e dalla permeabilità magnetica μ del dielettrico (supposto isotropo):

$$G_{ik}=\frac{1}{\mu}F_{ik}+\frac{\varepsilon\mu-1}{\mu}(u_iF_k-u_kF_i) \tag{2}$$

(si è posto $F_i=F_{ik}u^k$). Le equazioni di Maxwell si scrivono:

$$\nabla_k G^{ik}=4\pi s^i \quad . \tag{3}$$

Le equazioni di campo si ottengono dall'integrale d'azione

$$\mathfrak{I}=\int\left(\frac{1}{16\pi}G_{rs}F^{rs}g^{1/2}-\varphi_r\mathfrak{s}^r\right)dx \quad . \tag{4}$$

(Qui $\mathfrak{s}^i$ indica la densità vettoriale corrispondente al vettore densità di corrente s^i). Dalla (4) si possono ottenere le equazioni (3) mediante variazione del potenziale, tenendo conto delle formule (1) e (2). Ma dall'integrale d'azione si può anche derivare il tensore d'energia e impulso mediante la variazione del tensore metrico g_{ik}, come segue[1]:

$$\delta\mathfrak{J} = \frac{1}{2}\int T_{ik} g^{1/2} \delta g^{ik} dx \ . \tag{5}$$

La variazione può essere eseguita solo quando si sappia come $\mathfrak{J}$ contenga il tensore metrico g_{ik}. Le quantità $\mathfrak{s}^i$, ε, μ e le quantità da variare separatamente φ_i, e di conseguenza F_{ik}, vanno considerate indipendenti dalla metrica. Occorre parlare a parte della dipendenza della tetravelocità u^i dalla metrica. u^i deve evidentemente contenere g_{ik}, poiché per valori arbitrari di quest'ultimo deve valere la relazione

$$g_{ik}u^i u^k = -1 \ . \tag{6}$$

La tetravelocità

$$u^i = dx^i/d\tau \ , \quad d\tau = (-g_{ik}dx^i dx^k)^{1/2} \tag{7}$$

di un punto materiale contiene g_{ik} mediante il tempo proprio τ. Per risolvere questo accoppiamento si dovrà parametrizzare la linea d'universo con un parametro p indipendente da g_{ik} e per il resto arbitrario. Daremo la direzione della linea d'universo mediante il vettore v^i indipendente dalla metrica:

$$v^i = dx^i/dp = u^i d\tau/dp \ .$$

Tenendo conto della formula (7) otteniamo:

$$u^i = v^i/(-g_{rs}v^r v^s)^{1/2} \ . \tag{8}$$

Questa equazione esprime la dipendenza di u^i dalle componenti g_{ik} del tensore metrico. La formula (8) può essere utilizzata non solo per il moto di un punto materiale, ma anche nel caso di un continuo; il campo di velocità può essere descritto univocamente con v^i invece che con u^i.

Ora si deve riscrivere l'integrale d'azione (4) in una forma che esprima la dipendenza dello stesso da g_{ik}:

$$\mathfrak{J} = \int\left[\frac{1}{16\pi\mu} F_{rs}F_{uv}g^{ru}g^{sv}g^{1/2} + \frac{\varepsilon\mu-1}{4\pi\mu} F_{rs}F_{uv}g^{ru}\frac{v^s v^v}{g_{ab}v^a v^b} g^{1/2} - \varphi_r \mathfrak{s}^r\right] dx \ .$$

Da questa si può determinare il tensore d'energia e impulso secondo la (5). Come risultato si ottiene quanto segue:

$$T_{ik} = \frac{1}{4\pi\mu}\left[F_{ir}F_k^{\ r} - \frac{1}{4}\, g_{ik}F_{rs}F^{rs}\right] - \frac{\varepsilon\mu-1}{4\pi\mu}\left[F_iF_k + (u_iu_k - \frac{1}{2}\, g_{ik})F_rF^r\right] .$$

Quando si passa ad uno spazio euclideo e si introduce un sistema di coordinate cartesiano ($g_{ik}=\delta_{ik}$), T_{ik} si scrive come segue:

$$T_{ik}=T_{ki}=\frac{1}{4\pi}\left(F_{ir}G_{kr} - \frac{1}{4}\,\delta_{ik}F_{rs}G_{rs}\right) - \frac{\varepsilon\mu-1}{4\pi\mu}\left(F_{ir}F_r - F_rF_ru_i\right)u_k . \qquad (9)$$

Questa forma del tensore d'energia e impulso (nella scrittura non relativistica) è stato proposto da M. Abraham. In letteratura è noto anche un altro tensore d'energia e impulso, sostenuto da Minkowski:

$$T^M_{ik} = \frac{1}{4\pi}\left(F_{ir}G_{kr} - \frac{1}{4}\,\delta_{ik}F_{rs}G_{rs}\right) . \qquad (10)$$

Quest'espressione, la cui forma è più semplice, ma non simmetrica, naturalmente non si può ottenere con un procedimento variazionale. E' stato dimostrato da K.F. Novobátzky che T^M_{ik} è in rapporto stretto con il tensore canonico del campo. La regola per costruire il tensore canonico è:

$$T^c_{ik} = \frac{\partial\varphi_r}{\partial x_i}\,\frac{\partial L}{\partial\partial\varphi_r/\partial x_k} - \delta_{ik}L .$$

Utilizzando la forma prima data della funzione di Lagrange T^c_{ik} si scrive:

$$T^c_{ik} = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{\partial\varphi_r}{\partial x_i}\,G_{kr} - \frac{1}{4}\,\delta_{ik}F_{rs}G_{rs}\right) + \delta_{ik}\varphi_r s_r . \qquad (11)$$

E' evidente dal confronto delle espressioni (10) e (11) che il tensore di Minkowski nel campo privo di correnti differisce dal tensore canonico solo per una divergenza[2)]:

$$T^M_{ik} = T^c_{ik} + \frac{1}{4\pi}\,\partial_r(\varphi_iG_{kr}) . \qquad (12)$$

Dagli sviluppi precedenti risulta che, mentre il tensore d'energia e impulso di Abraham descrive le proprietà dinamiche del campo, di contro il tensore di Minkowski gioca un ruolo nel formalismo canonico e nel passaggio alla teoria quantistica (per esempio nella costruzione dell'operatore di Hamilton). Nel caso di un sistema non chiuso (il campo elettromagnetico nei dielettrici è tale) il tensore canonico non è identico al tensore d'energia e impulso che descrive le proprietà dinamiche[3)].

La densità di forza ponderomotrice possiede un significato più immediato del tensore d'energia e impulso. Essa può essere costruita dal tensore d'energia e impulso. Il tensore di energia e impulso di Abraham (9) produce la seguente espressione della densità di forza:

$$f_i = -\frac{\partial T_{ik}}{\partial x_k} = F_{ir}s_r - \frac{1}{8\pi}F_rF_r\frac{\partial\varepsilon}{\partial x_i} - \frac{1}{8\pi\mu^2}\left(\frac{1}{2}F_{rs}F_{rs} + F_rF_r\right)\frac{\partial\mu}{\partial x_i}$$

$$+\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\varepsilon\mu-1}{4\pi\mu}\left(F_{ir}F_r - u_iF_rF_r\right)u_k\right) . \qquad (13)$$

Nell'espressione della densità di forza che risulta dal tensore di Minkowski (10) l'ultimo termine non compare:

$$f^M_i = -\frac{\partial T^M_{ik}}{\partial x_k} = F_{ir}s_r - \frac{1}{8\pi}F_rF_r\frac{\partial\varepsilon}{\partial x_i} - \frac{1}{8\pi\mu^2}\left(\frac{1}{2}F_{rs}F_{rs} + F_rF_r\right)\frac{\partial\mu}{\partial x_i} . \qquad (14)$$

E' evidente che secondo il punto di vista di Minkowski il campo oltre alle forze che agiscono sulle cariche e sulle correnti esercita una forza solo nei punti di disomogeneità dei dielettrici. Secondo il punto di vista di Abraham una forza appare anche in mezzi omogenei privi di cariche e di correnti. Questo fatto ha per conseguenza che per esempio una radiazione che si propaghi in un mezzo trasparente omogeneo è in interazione dinamica con l'isolante, cosa che risulta parecchio sorprendente[4)]. Nel prossimo paragrafo analizzeremo questa espressione della forza.

§2. La forza ponderomotrice

Nello sviluppo delle considerazioni seguenti tratteremo soltanto i dielettrici a riposo. Ciò non comporta alcuna restrizione della generalità, poiché si può, dal momento che le proprietà di trasformazione delle quantità introdotte nel § 1 sono note, passare sempre con una trasformazione di Lorentz al caso di dielettrici in moto. Si assume per semplicità che la polarizzabilità magnetica del mezzo sia nulla, $\mu=1$; di conseguenza questo può essere caratterizzato dando il coefficiente dielettrico ε ovvero l'indice di rifrazione $n=\varepsilon^{1/2}$.

L'espressione della forza ponderomotrice che appare in campi stazionari può essere determinata in base a considerazioni energetiche di validità generale, ed è nota in letteratura[5)6)]:

$$\mathfrak{F} = \rho\mathfrak{E} + \frac{1}{c}\,\mathfrak{j}\times\mathfrak{H} - \frac{1}{8\pi}\,\mathfrak{E}^2 \mathrm{grad}\,\varepsilon \,. \tag{15}$$

(Questa espressione coincide con la densità di forza di Abraham specializzata a questo caso, ed anche con quella di Minkowski).

In questa formula il significato fisico intuitivo del terzo termine non è evidente. Ma se si introduce il vettore di polarizzazione $\mathfrak{P} = (\varepsilon-1)\mathfrak{E}/4\pi$ e si utilizza l'equazione $\mathrm{rot}\mathfrak{E} = 0$, la (15) si può portare nella forma seguente:

$$\mathfrak{F} = \rho\mathfrak{E} + \frac{1}{c}\,\mathfrak{j}\times\mathfrak{H} + (\mathfrak{P}\,\mathrm{grad})\mathfrak{E} - \mathrm{grad}(\tfrac{1}{2}\,\mathfrak{E}\mathfrak{P}) \,. \tag{16}$$

Il terzo termine dà la forza di traslazione dovuta al momento di dipolo presente per unità di volume che agisce in un campo disomogeneo, che è stata già introdotta da Einstein e Laub[7)]. L'ultimo termine non dà nei mezzi incomprimibili nessuna forza nè potenza risultante. Essa assume significato solo in un dielettrico comprimibile e, come è facile mostrare, questa espressione di forza è in stretto rapporto con l'elettrostrizione. (Il caso dei dielettrici comprimibili sarà trattato in seguito altrove in modo esauriente). Nei mezzi anisotropi compare un termine di carattere analogo a quello dell'equazione (16), che è in relazione con il momento angolare ceduto dal campo al cristallo[8)].

Studieremo ora come l'espressione della forza valida per campi variabili nel tempo si distingua dalla (16). La forza che deriva dalla corrente degli elettroni non legati alle molecole è già presa in considerazione. Ma è noto che anche lo spostamento degli elettroni legati a seguito di una polarizzazione variabile nel tempo dà luogo ad una corrente, la cui densità è $\partial\mathfrak{P}/\partial t$. Anche questa corrente, come la corrente di conduzione, suscita un campo magnetico, e di conseguenza il campo magnetico deve agire sulla corrente di polarizzazione allo stesso modo che sulla corrente di conduzione. Tenendo conto della forza che agisce sulla corrente di polarizzazione la legge di forza (16) sarà in campi generali così modificata:

$$\mathfrak{F} = \rho\mathfrak{E} + \frac{1}{c}\left(\mathfrak{j}+\frac{\partial\mathfrak{P}}{\partial t}\right)\times\mathfrak{H} + (\mathfrak{P}\mathrm{grad})\mathfrak{E} - \mathrm{grad}\left(\frac{1}{2}\,\mathfrak{E}\mathfrak{P}\right) . \qquad (17)$$

Qui il significato intuitivo di ogni termine è evidente, tuttavia questa formula è poco adatta per calcoli concreti. Perciò la si trasformerà utilizzando le relazioni

$$(\mathfrak{P}\mathrm{grad})\mathfrak{E} - \mathrm{grad}\left(\frac{1}{2}\,\mathfrak{E}\mathfrak{P}\right) = \mathrm{rot}\mathfrak{E}\times\mathfrak{P} - \frac{1}{8\pi}\,\mathfrak{E}^2\mathrm{grad}\ \varepsilon$$

$$= \frac{1}{c}\,\mathfrak{P}\times\frac{\partial\mathfrak{H}}{\partial t} - \frac{1}{8\pi}\,\mathfrak{E}^2\mathrm{grad}\ \varepsilon\ . \qquad (18)$$

Si dà quindi quanto segue:

$$\mathfrak{F} = \rho\mathfrak{E} + \frac{1}{c}\,\mathfrak{j}\times\mathfrak{H} - \frac{1}{8\pi}\,\mathfrak{E}^2\mathrm{grad}\ \varepsilon + \frac{1}{c}\,\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\varepsilon-1}{4\pi}\,\mathfrak{E}\times\mathfrak{H}\right) . \qquad (19)$$

Si deve considerare questa formula come la generalizzazione dell’espressione (15) per i campi non stazionari.

L’espressione della forza (19) ora ottenuta è in completo accordo con la formula di Abraham (13) specializzata al caso di mezzi a riposo e con μ=1. I risultati di Abraham vengono quindi confortati dalle considerazioni precedenti. (I calcoli esposti in questo paragrafo possono essere generalizzati senza particolari difficoltà ai mezzi che presentino una polarizzazione magnetica[8)10)]).

Le conclusioni di Einstein e Laub[7)] sono vicine ai risultati precedenti. Essi scrivono l’espressione della forza (18), con l’eccezione dell’ultimo termine, direttamente sulla base di considerazioni di teoria degli elettroni. Poiché il termine menzionato per ultimo dà conto di un azione di forza del tipo d’una pressione, il cui integrale esteso a tutto il dielettrico si annulla, la (18) porta ad una forza complessiva che coincide con la formula di Einstein e Laub, purché in essa si tralasci la pressione di polarizzazione. Questa è il motivo per il quale Gans[5] ha mosso certe obiezioni alla legge di forza differenziale di Einstein e Laub (L'espressione della forza di Smith-White[9] coincide essenzialmente con quella di Einstein e Laub).

Minkowski ricava dal tensore d'energia e impulso (10) una legge di forza che si discosta dalla precedente. Nel caso di mezzi a riposo e con μ=1 suona così:

$$\mathfrak{F}^{M} = \rho\mathfrak{E} + \frac{1}{c}\, \mathfrak{j}\times\mathfrak{H} - \frac{1}{8\pi}\, \mathfrak{E}^{2}\mathrm{grad}\ \varepsilon\ . \tag{20}$$

Quest'espressione si discosta dalla (19), poiché qui l'ultimo termine della formula (19) manca. In conseguenza di ciò la (20) non si può portare in una forma analoga ad una delle formule (18). Se si tenta una trasformazione simile, si arriva alle formule

$$f^{M} = \rho\mathfrak{E} + \frac{1}{c}\, \mathfrak{j}\times\mathfrak{H} + (\mathfrak{P}\mathrm{grad})\mathfrak{E} - \mathrm{grad}(\tfrac{1}{2}\, \mathfrak{E}\mathfrak{P}) + \mathfrak{P}\times\mathrm{rot}\mathfrak{E}$$

$$= \rho\mathfrak{E} + \frac{1}{c}\, \mathfrak{j}\times\mathfrak{H} + (\mathfrak{P}\mathrm{grad})\mathfrak{E} - \mathrm{grad}(\tfrac{1}{2}\, \mathfrak{E}\mathfrak{P}) - \frac{1}{c}\, \mathfrak{P}\times \frac{\partial\mathfrak{H}}{\partial t}\ ,$$

l'ultimo termine delle quali è difficile da interpretare fisicamente. La più grande differenza tra le espressioni della forza di Abraham e di Minkowski consiste nel fatto che la forza di Lorentz che agisce sulla corrente di polarizzazione è tralasciata da Minkowski. Come ha notato Einstein[7], in tal modo Minkowski porrebbe una distinzione di principio tra la corrente di polarizzazione e la corrente di conduzione. Ciò è tuttavia in contrasto con il punto di vista della teoria degli elettroni, ed anche con il contenuto intuitivo del principio di azione e reazione.

§3. L'impulso di campo e il moto del centro di massa

Poiché la variazione delle intensità di campo è prescritta da equazioni di campo univocamente definite, la differenza tra le formule delle forze può fondarsi solo sul fatto che le quantità dinamiche secondo i due punti di vista sono intese in modo diverso. Dall'ultima colonna del tensore d'energia e impulso di Abraham si ottiene per la densità dell'impulso di campo la seguente espressione:

$$\mathfrak{G} = \frac{1}{4\pi c}\, \mathfrak{E}\times\mathfrak{H} \ . \tag{21}$$

Se si confronta questa con la forma generalmente riconosciuta del vettore di Poynting

$$\mathfrak{S} = \frac{c}{4\pi}\, \mathfrak{E}\times\mathfrak{H} \ , \tag{22}$$

si vede che la legge di Planck sull'inerzia dell'energia risulta soddisfatta dal punto di vista di Abraham:

$$\mathfrak{G} = (1/c^2)\mathfrak{S} \ , \tag{23}$$

l'impulso di campo risulta sempre dalla corrente dell'energia di campo.

Ma se si riconosce per giusta l'espressione della forza di Minkowski, alla densità dell'impulso di campo dall'ultima colonna del tensore (10) va attribuita la forma

$$\mathfrak{G}^M = \frac{1}{4\pi c}\, \mathfrak{D}\times\mathfrak{B} \ . \tag{24}$$

L'equazione (23) secondo Minkowski non è valida. Ciò significherebbe che nel campo elettromagnetico può comparire un impulso che non è associato ad una corrente d'energia. Un punto di vista siffatto è in contrasto con la concezione relativistica ed è - secondo l'opinione degli autori - anche inutile.

Le difficoltà che sorgono per il punto di vista di Minkowski dal tralasciare la legge di Planck, appaiono più in evidenza quando si studi il moto del centro di massa del campo elettromagnetico (ovvero del dielettrico). Balász[11)] è stato il primo a mostrare attraverso alcuni esempi le conseguenze paradossali che derivano dall'utilizzo della (24). Tratteremo ora questo problema in generale.

Sia T_{ik} uno dei due tensori d'energia e impulso, e si indichi con $f_i = -\partial T_{ik}/\partial x_k$ la tetradensità della forza prodotta da questo. Costruiamo l'espressione seguente:

$$-\frac{\partial}{\partial x_r}\,(x_i T_{kr} - x_k T_{ir}) = T_{ik} - T_{ki} + x_i f_k - x_k f_i \ . \tag{25}$$

Quest'equazione va ora integrata sull'intero spazio tridimensionale. Se si considerano le componenti i, k =1,2,3, si ottiene la legge di conservazione del momento angolare. (Poiché in mezzi isotropi a riposo le componenti spaziali dei tensori (9) e (10) coincidono, non vi è in questo caso alcuna differenza tra i due punti di vista). Si hanno tuttavia conseguenze interessanti dalla considerazione delle componenti i=1,2,3: k=4. Tenendo conto dell'annullarsi delle grandezze di campo all'infinito, dalla (25) si arriva al seguente risultato:

$$\frac{d}{dt}\int \mathfrak{r}\,\frac{u}{c^2}\,dV = \frac{1}{c^2}\int \mathfrak{S}\,dV + \int \mathfrak{r}\,\frac{(-w)}{c^2}\,dV\ . \tag{26}$$

(Nelle trasformazioni intervengono la relazione esistente tra la densità d'impulso di campo $\mathfrak{G}_i = T_{ik}/ic$ e la densità di forza f_i:

$$\mathfrak{F} = \mathrm{Div}\mathfrak{T} - \frac{\partial \mathfrak{G}}{\partial t} \qquad (\mathfrak{T}_{ik}=-T_{ik};\ \ i,k=1,2,3)\ , \tag{27}$$

e la relazione tra il vettore di Poynting e l'ultima riga del tensore d'energia e impulso: $\mathfrak{S}_i = -icT_{ki}$. $u=-T_{44}$ indica la densità d'energia e $w=-icf_4$ la densità di potenza del campo. La densità delle forze di reazione che operano sul campo è la stessa col segno cambiato).

Dall'equazione (26) risulta che il moto del centro dell'energia del campo elettromagnetico risulta da due contributi: da una corrente d'energia ($\mathfrak{S}\neq 0$) ovvero dal prodursi di energia elettromagnetica a partire da altri tipi d'energia ($-w\neq 0$).

Si deve ora costruire la derivata seconda rispetto al tempo dell'espressione $\int(\mathfrak{r}u/c^2)dV$ che determina la posizione del centro dell'energia. Dalla (26), utilizzando la formula (27), si può giungere al seguente risultato:

$$\frac{d^2}{dt^2}\int (\mathfrak{r}u/c^2)dV = \int\left[-\mathfrak{F} + \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{c^2}\,\mathfrak{S} - \mathfrak{G}\right) - \frac{1}{c^2}\,\mathfrak{r}\,\frac{\partial w}{\partial t}\right]dV\ . \tag{28}$$

(Si sono nuovamente tralasciati integrali di divergenze spaziali). Si assumerà ora che il campo non compia alcun lavoro (w=0). Allora l'energia totale del campo è costante. Se si divide il primo membro dell'equazione per questa si ottiene l'accelerazione del centro dell'energia. La nostra equazione dice che il centro dell'energia del campo può essere accelerato anche quando il campo non esercita alcuna forza, e quindi nessuna forza di reazione opera sul campo ($-\mathfrak{F}$=0). Tali conseguenze paradossali si possono evitare soltanto se la legge (23) di Planck è soddisfatta.

Si tratterà ora l'equazione di moto del centro di massa del dielettrico.

Sia θ_{ik} il tensore d'energia e impulso del sistema chiuso costituito dal campo e dal dielettrico, e t_{ik} quello del dielettrico; la relazione tra di essi sia espressa dalle equazioni

$$\theta_{ik} = T_{ik} + t_{ik} \ , \qquad \theta_{ik} = \theta_{ki} \ , \tag{29}$$

$$\frac{\partial t_{ik}}{\partial x_k} = - \frac{\partial T_{ik}}{\partial x_k} = f_i \ , \qquad \frac{\partial \theta_{ik}}{\partial x_k} = 0 \ . \tag{30}$$

Contrassegnando con un apice le quantità che sono contenute in t_{ik} e che si riferiscono al dielettrico indichiamo la densità di massa del dielettrico con $\mu = u'/c^2 = -t_{44}/c^2$. Allora, allo stesso modo della (28), si può scrivere l'equazione seguente:

$$\frac{d^2}{dt^2} \int \mathfrak{r}\mu dV = \int \left[\mathfrak{F} + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{c^2} \mathfrak{S}' - \mathfrak{G}' \right) - \frac{1}{c^2} \mathfrak{r} \frac{\partial w}{\partial t} \right] dV \ . \tag{31}$$

Tenendo conto della (29) si ha

$$\frac{d^2}{dt^2} \int \mathfrak{r} \left(\mu + \frac{u}{c^2} \right) dV = 0 \ ,$$

cosa che naturalmente era da aspettarsi, poiché il campo ed il dielettrico costituiscono un sistema chiuso[12)].

I risultati su menzionati hanno una validità indipendente dalla scelta particolare della densità di forza $\mathfrak{F}$ e dalla densità d'impulso. Se si utilizzano le espressioni di Abraham (19) e (21) si ottiene $\mathfrak{G} - \mathfrak{S}/c^2 = 0$. Secondo Abraham il centro dell'energia del campo elettromagnetico sarà accelerato solo quando agisce sul campo una forza (la forza di reazione alla forza esercitata sulle cariche e sul dielettrico) e quando l'energia di campo muta ($-w \neq 0$) per l'esecuzione di un lavoro da parte di questa forza. Ma se si riconoscono come corrette le espressioni (20), (24) di Minkowski questa conclusione non vale. In questo caso vale la relazione seguente, che descrive la variazione temporale del vettore posizione $\mathfrak{r}_E$ del centro dell'energia:

$$\frac{E}{c^2}\frac{d^2\mathbf{r}_E}{dt^2} = -\int\left[\mathfrak{F}^M + \frac{\partial}{\partial t}\left(\mathfrak{G}^M - \frac{1}{c^2}\mathfrak{S}\right)\right]dV \ .$$

Si è assunto qui w=0, ed E indica l'energia di campo (costante nel tempo). Il centro dell'energia può quindi essere accelerato anche se nessuna forza compie lavoro, purché l'espressione

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\mathfrak{G}^M - \frac{1}{c^2}\mathfrak{S}\right) = \frac{1}{4\pi c}\left(\mathfrak{D}\times\mathfrak{B} - \mathfrak{E}\times\mathfrak{H}\right)$$

sia diversa da zero. (Un caso del genere può per esempio verificarsi all'interno di un isolante omogeneo). Queste conseguenze contraddicono le nostre idee sul moto del centro dell'energia. Vale la pena di notare che il termine che genera l'accelerazione del centro dell'energia

$$\mathfrak{F}^M + \frac{\partial}{\partial t}\left(\mathfrak{G}^M - \frac{1}{c^2}\mathfrak{S}\right)$$

coincide esattamente con la densità di forza di Abraham. Questo fatto mostra che, anche se non si riconosce a priori l'ultimo termine dell'equazione (19) come una densità di forza, ad esso va attribuito un "ruolo di causa d'accelerazione".

Sia ora $\mathfrak{v}$ la velocità della corrente d'energia elettromagnetica:

$$\mathfrak{v} = \frac{\mathfrak{S}}{u} \ .$$

Tenendo conto dell'equazione (26) si può portare la (28) nella forma seguente:

$$\frac{d}{dt}\int\frac{u}{c^2}\mathfrak{v}'dV = -\int\left[\mathfrak{F} + \frac{\partial}{\partial t}\left(\mathfrak{G} - \frac{1}{c^2}\mathfrak{S}\right)\right]dV \ ,$$

e per il dielettrico

$$\frac{d}{dt}\int\mu\,\mathfrak{v}'dV = \int\left[\mathfrak{F} + \frac{\partial}{\partial t}\left(\mathfrak{G} - \frac{1}{c^2}\mathfrak{S}\right)\right]dV \ ,$$

(qui si è posto $\mathfrak{v}'_i = ict_{4i}/t_{44}$). Poiché è evidente che l'espressione

$$\int\left[\mu\mathfrak{v}' + \frac{u}{c^2}\mathfrak{v}\right]dV = \int\left[\mu\mathfrak{v}' + \frac{1}{4\pi c}\mathfrak{E}\times\mathfrak{H}\right]dV$$

è costante nel tempo, la si può con ragione considerare come l'impulso del sistema chiuso costituito dal campo e dal dielettrico. La separazione naturale di queste quantità:

$$\mathfrak{G}_{\text{campo}} = \frac{1}{4\pi c} \int \mathfrak{E}\times\mathfrak{H}\ dV\ , \qquad \mathfrak{G}_{\text{diel.}} = \int \mu\mathfrak{v}'\,dV$$

corrisponde al punto di vista di Abraham. Con la scelta dell'espressione della forza di Minkowski (20) l'equazione del moto mostra la forma: variazione dell'impulso per unità di tempo uguale forza - solo quando l'impulso complessivo viene suddiviso nel modo innaturale seguente:

$$\mathfrak{G}^{M}_{\text{campo}} = \frac{1}{4\pi c} \int \mathfrak{D}\times\mathfrak{B}\ dV\ , \qquad \mathfrak{G}^{M}_{\text{diel.}} = \int \left[\mu\mathfrak{v}' - \frac{1}{4\pi c}\left(\mathfrak{D}\times\mathfrak{B} - \mathfrak{E}\times\mathfrak{H}\right)\right] dV\ .$$

Questa suddivisione non solo contraddice le legge dell'inerzia dell'energia (e dà $\mathfrak{G}^{M}_{\text{diel.}} \neq 0$ anche quando $\mathfrak{v}'=0$), ma costituisce anche una trasgressione alla legge classica riguardante il moto del centro di massa.

§4. Studio della radiazione che si propaga in mezzi trasparenti

La distinzione fondamentale tra il punto di vista di Abraham e quello di Minkowski risulta chiara quando si consideri la differenza

$$\mathfrak{F}^{s} = \mathfrak{F} - \mathfrak{F}^{M} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{n^2-1}{4\pi c}\,\mathfrak{E}\times\mathfrak{H}\right) = \frac{1}{c}\,\frac{\partial}{\partial t}\,(\mathfrak{P}\times\mathfrak{H})\ . \qquad (32)$$

Questa forza non ha in generale significato pratico, e la sua esistenza non è ancora dimostrabile sperimentalmente. (Il seguente dispositivo pare adatto per la dimostrazione: si deve introdurre un condensatore cilindrico in un campo magnetico assiale omogeneo, e si deve sospendere tra le armature un isolante di forma dotata di simmetria assiale, di grande coefficiente dielettrico. Se il condensatore viene caricato e scaricato con il periodo delle oscillazioni torsionali, la forza di Lorentz che agisce sulla corrente di polarizzazione può produrre oscillazioni osservabili. La legge di forza di Minkowski non può rendere conto in nessun modo di tali oscillazioni). Si studieranno ora le conseguenze dell'espressione della forza (32) in un dielettrico omogeneo, privo di cariche e di correnti. In queste condizioni secondo il punto di vista di Minkowski non agisce all'interno del dielettrico alcuna forza, e la forza che agisce sulla superficie di contorno del mezzo risulta nella direzione della normale alla superficie. Secondo Abraham appare oltre a questa anche la densità di forza (32) che agisce all'interno dell'isolante. Le derivate che appaiono in questa formula $\partial\mathfrak{E}/c\partial t$, $\partial\mathfrak{H}/c\partial t$ possiedono in generale un valore non piccolo solo nel caso di onde elettromagnetiche, ma allora la (32) cambia di segno periodicamente, quindi la media temporale della forza ammonta a zero. Pertanto la (32) non gioca alcun ruolo nell'esercizio della pressione di radiazione, e sia la formula della forza di Abraham che quella di Minkowski portano allo stesso risultato (confermato anche dall'esperienza).[8)13)]

Ma la forza di Abraham ha un ruolo significativo quando la radiazione entra nel mezzo. Allora la forza che agisce sul dielettrico

$$\mathfrak{f} = \frac{d}{dt}\int \frac{n^2-1}{4\pi c}\,\mathfrak{E}\times\mathfrak{H}\; dV$$

è diversa da zero (la regione d'integrazione è il volume del mezzo). Se essa viene ora integrata sull'intervallo di tempo durante il quale la radiazione entra si ottiene

$$\Delta\mathfrak{G}_{\mathrm{diel.}} = (n^2-1)\int \frac{1}{4\pi c}\,\mathfrak{E}\times\mathfrak{H}\; dV = (n^2-1)\mathfrak{G}\ .$$

Qui $\mathfrak{G}$ indica l'impulso della radiazione. Nello studio del comportamento dinamico delle onde luminose (cioè quando si voglia determinare la variazione d'impulso che risulta nella rifrazione della luce) questo impulso gioca un ruolo fondamentale. Tratteremo come esempio l'effetto Čerenkov[14)]. L'elettrone che si muove con la velocità v irraggia un treno d'onde, il cui impulso è $\mathfrak{G}$. La diminuzione della componente dell'impulso dell'elettrone nella direzione del moto vale:

$$-\Delta G_e = (|\mathfrak{G}|+|\Delta\mathfrak{G}_{\mathrm{diel.}}|)\cos\vartheta = n^2|\mathfrak{G}|\cos\vartheta\ . \tag{34}$$

Poiché nel caso di un dielettrico a riposo l'effetto secondo la

(13) risulta nullo, l'intera perdita d'energia dell'elettrone può essere ricondotta esclusivamente alla radiazione:

$$-\Delta E_e = E = \int u dV \ . \qquad (35)$$

Tra la variazione dell'energia e dell'impulso sussiste la seguente relazione

$$dE_e/dG_e = \frac{d}{dG_e}\,[(mc^2)^2+(cG_e)^2]^{1/2} = G_e c^2/E = v \ ;$$

d'altra parte tenendo conto delle espressioni (34) e (35) risulta

$$dE_e/dG_e = \frac{E}{n^2|\mathfrak{G}|\cos\vartheta} \simeq v \ . \qquad (36)$$

Tenendo conto della relazione che sussiste tra energia, impulso e velocità c/n:

$$|\mathfrak{G}| = (E/c^2)(c/n) = E/(nc) \ , \qquad (37)$$

si ottiene dalla (36)

$$\cos\vartheta = uv/c \ .$$

L'elettrone che si muove nel dielettrico può irraggiare solo in questa direzione. Questa conclusione è in accordo con l'esperienza.

I fenomeni che si verificano con la propagazione della radiazione in un mezzo trasparente si possono riassumere nel modo seguente: le intensità di campo variabili deformano permanentemente le molecole, e perciò la radiazione è in interazione dinamica anche con un mezzo totalmente trasparente. Ciò è espresso dalla densità di forza (32) con il suo cambiamento di segno: la radiazione cede al dielettrico un impulso, ma esso viene restituito nel semiperiodo immediatamente successivo. Se il dielettrico è fissato rigidamente, la forza prodotta dalla radiazione non provoca alcun moto macroscopico delle singole parti del dielettrico, solo al posto di un impulso vengono generati questi sforzi. Ciò si esprime matematicamente nel modo seguente: la parte t'_{ik} del tensore d'energia e impulso t_{ik} del dielettrico, che descrive gli effetti della radiazione, possiede solo componenti spaziali, poiché il dielettrico fisso non può ricevere nè energia nè impulso. La parte spaziale di $-t_{ik}$ coincide con il tensore $\mathfrak{t}$ degli sforzi elastici. Gli sforzi sono provocati dalla radiazione, quindi

$$-\mathrm{Div}\,\mathfrak{t} = \mathfrak{F}^{s} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{n^2-1}{4\pi c}\,\mathfrak{E}\times\mathfrak{H}\right) . \tag{38}$$

D'altra parte per la legge dell'impulso che vale per il campo

$$\mathrm{Div}\,\mathfrak{T} - \frac{\partial\mathfrak{G}}{\partial t} = \mathfrak{F}^{s} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{n^2-1}{4\pi c}\,\mathfrak{E}\times\mathfrak{H}\right) .$$

Qui $\mathfrak{T}$ è il tensore degli sforzi di Maxwell, le componenti del quale, moltiplicate per -1, sono le componenti spaziali del tensore d'energia e impulso T_{ik}. Tenendo conto delle equazioni (21) e (38) risulta:

$$\mathrm{Div}\,\mathfrak{T} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{n^2}{4\pi c}\,\mathfrak{E}\times\mathfrak{H}\right) . \tag{39}$$

Dal confronto delle formule (38) e (39) risulta che gli sforzi che esistono all'interno del dielettrico fisso possono essere espressi nel modo seguente mediante il tensore degli sforzi di Maxwell $\mathfrak{T}$:

$$\mathfrak{t} = -\frac{n^2-1}{n^2}\,\mathfrak{T} . \tag{40}$$

Questa equazione è stata data per la prima volta da K. Nagy nel caso speciale di onde piane[15)]. Tenendo conto dell'equazione (40) le componenti di t'_{ik} per mezzi a riposo si possono scrivere:

$$t'_{ik} = -\frac{n^2-1}{n^2}\,T_{ik} \text{ , se } i,k=1,2,3; \quad \text{altrimenti } t'_{ik} = t'_{ki}=0 . \tag{41}$$

In un dielettrico in moto anche le componenti t'_{ik}, t'_{ki} saranno naturalmente diverse da zero. Ciò è un segno del fatto che il mezzo in moto può ricevere anche energia e impulso.

Mediante la determinazione della forma generale del tensore t'_{ik} è diventato possibile definire in modo covariante per trasformazioni di Lorentz, allo stesso modo che nel vuoto, l'energia e l'impulso costanti nel tempo della radiazione elettromagnetica.

Poiché il dielettrico in assenza di radiazione ($\mathfrak{E}=\mathfrak{H}=0$) è un sistema chiuso, il suo tensore d'energia e impulso t^{0}_{ik} soddisfa le seguenti condizioni:

$$\partial t^0_{ik}/\partial x_k = 0 \ , \qquad t^0_{ik} = t^0_{ki} \ .$$

A causa della radiazione compaiono nel mezzo energia e impulso di campo e anche sforzi. Il tensore d'energia e impulso complessivo sarà dato dall'equazione (29). E' conveniente caratterizzare la forma dell'energia e dell'impulso e gli sforzi associati alla radiazione mediante la differenza tra il tensore d'energia e impulso totale θ_{ik} e il tensore d'energia e impulso t^0_{ik} del dielettrico privo di radiazione. E' evidente che questo tensore, che sarà chiamato il tensore d'energia e impulso della radiazione, non è identico al tensore T_{ik} del campo:

$$S_{ik} = \theta_{ik} - t^0_{ik} = T_{ik} + t'_{ik} \ .$$

S_{ik} è naturalmente simmetrico e a divergenza nulla, poiché sia θ_{ik} che t^0_{ik} possiedono queste stesse proprietà. Nel caso di dielettrici in moto sarà prodotto un lavoro dalla forza di Abraham (32) che varia con la frequenza della radiazione, e così l'energia disponibile oscillerà tra la forma elettromagnetica ($-T_{44}$) e quella elastica ($-t_{44}$). Poiché il mezzo è stato assunto completamente trasparente, l'energia non è assorbita permanentemente, ma segue l'avanzare della radiazione. Di conseguenza si renderà conto dell'energia totale costante nel tempo della radiazione non mediante il tensore T_{ik} del campo, ma mediante il tensore completato S_{ik}, che dà conto anche dei fenomeni elastici provocati dalla radiazione. Si può dire che S_{ik} ha qui lo stesso ruolo che ha nel vuoto il tensore a divergenza nulla T_{ik}. La forma covariante di S_{ik} è data nel lavoro[14)]; qui si scriverà la sua forma per un'onda che si propaghi nella direzione x, polarizzata a piacere[8)]:

$$S_{ik} = \begin{pmatrix} u/n^2 & 0 & 0 & iu/n \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ iu/n & 0 & 0 & -u \end{pmatrix} \ . \qquad (43)$$

(Se si tiene conto che la densità d'energia u dipende solo da (t-nx/c) si possono dimostrare la solenoidalità e il soddisfacimento degli altri requisiti).

Laue aveva proposto nell'anno 1950 un notevole postulato riguardo alla propagazione dell'energia di radiazione[16]. Poiché un punto materiale in un dielettrico si può muovere solidalmente con un pacchetto d'onda, e poiché questo moto solidale dev'essere un fenomeno obbiettivo indipendente dall'osservatore, è necessario che la velocità dell'energia dell'onda luminosa si trasformi per una trasformazione di Lorentz allo stesso modo della velocità di un punto materiale, cioè deve trasformarsi secondo il teorema di addizione delle velocità di Einstein. Si può ritenere giusta solo una teoria della propagazione della radiazione che soddisfi a questo criterio. Møller ha dato a pag. 165 del suo libro[4] un criterio semplice, con il quale si può decidere facilmente se un tensore d'energia e impulso soddisfi al criterio di Laue oppure no. Sostituendo le componenti del tensore dato dalla (43) si può mostrare facilmente che il tensore S_{ik} costruito secondo il punto di vista di Abraham soddisfa il criterio di Møller, e quindi il punto di vista di Abraham è in completo accordo con il criterio di Laue.

Si noti ancora che secondo l'espressione della forza che si ricava dal tensore d'energia e impulso di Minkowski la radiazione all'interno del dielettrico non è in interazione dinamica. Ma come è già stato notato in proposito da Beck[12], il tensore di Minkowski a causa della sua asimmetria non è adatto alla descrizione dell'energia totale e dell'impulso totale della radiazione. Il completamento del tensore di Minkowski secondo Beck si deve realizzare tenendo conto degli sforzi che esistono nella materia (e si ottiene un risultato analogo al nostro), tuttavia si deve constatare che il tensore S_{ik} nell'ambito della teoria di Abraham si può costruire in un modo naturale, poiché secondo questo punto di vista gli sforzi esistenti nella materia sono generati da forze ponderomotrici reali. Di ciò non si può parlare nel caso del punto di vista di Minkowski (per lo meno in senso macroscopico).

In conclusione va ricordato che anche nello studio dei quanti di luce che si muovono in mezzi trasparenti si deve partire dal tensore S_{ik}. L'energia di un fotone consiste solo in parte di energia di natura elettromagnetica, esso contiene anche una certa parte di energia elastica, che viene suscitata nel mezzo dal campo. La radiazione che si propaga in mezzi trasparenti è stata trattata da K. Nagy[17] secondo la teoria dei quanti, e i suoi risultati dimostrano ciò che è stato qui enunciato: i fotoni (nel senso su accennato) esibiscono una definita natura di particella, la loro energia (costante nel tempo) e il loro impulso si trasformano come componenti di un tetravettore. Il loro tetravettore corrisponde ad una massa a riposo diversa da zero reale positiva (poiché la velocità di propagazione è <c). I risultati ottenuti da K. Nagy sulla base del punto di vista di Abraham sono quindi completamente soddisfacenti. Jauch e Watson[18] sono giunti mediante la quantizzazione del tensore d'energia e impulso di Minkowski (non completato) a energie dei fotoni, ai quali deve corrispondere una massa a riposo immaginaria; secondo i loro risultati un osservatore che si muovesse assieme alla radiazione avvertirebbe un'energia del fotone a riposo nulla, ma un impulso diverso da zero. Tali conseguenze non si hanno nel caso di K. Nagy.

§5. Riepilogo

Nell'esposizione precedente abbiamo voluto esaminare la serie di osservazioni che rappresentano una traccia per la corretta scelta del tensore d'energia e impulso dell'elettrodinamica fenomenologica. Secondo l'opinione degli autori non resta alcun problema che non possa essere chiarito in un modo naturale in base al punto di vista di Abraham. Nella presente esposizione il problema del campo elettromagnetico in mezzi anisotropi non è stato toccato. E' noto che in questo caso compaiono dei problemi particolari, poiché per esempio in un mezzo cristallino a riposo la densità d'impulso di Minkowski (24) e la densità della corrente d'energia non sono tra loro parallele: secondo Minkowski la massa e l'energia non solo non sono tra loro proporzionali, ma si muovono in direzioni diverse. In questo ambito sono stati ottenuti anche alcuni risultati sui principi variazionali e sul momento angolare in campi statici. Riguardo a questi si rimanda ai lavori precedenti degli autori[8][19].

Non è affatto inutile riepilogare qui in breve quelle osservazioni enunciate precedentemente e adesso, che parlano a favore della giustezza dellle espressioni del tensore d'energia e impulso e della forza di Abraham:

1. Il metodo variazionale della teoria dei campi produce univocamente e spontaneamente questo tensore d’energia e impulso, quando si parta dalla funzione di Lagrange che dà le equazioni di campo[2], § 1.

2. L’espressione della forza che si ottiene come divergenza di questo tensore descrive correttamente le forze che compaiono con campi statici e stazionari, ed anche la pressione di radiazione; si rende conto anche delle forze che agiscono sulla corrente di polarizzazione[8], §§ 2, 3.

3. La legge della forza è in accordo con la legge di conservazione dell’energia, dell’impulso, come pure del momento angolare e con la legge del baricentro[3], § 3.

4. Il tensore d’energia e impulso si conforma a causa della sua simmetria al contenuto della legge di Planck sull’inerzia dell’energia. Ciò è strettamente collegato col fatto che l’impulso complessivo del campo e del dielettrico sono suddivisi nel modo più naturale[1][8], § 3.

5. La velocità di propagazione della radiazione soddisfa il criterio di Laue. Per una trasformazione di Lorentz essa si trasforma come la velocità di un punto materiale, § 4.

6. L’energia di campo elettromagnetica è secondo il punto di vista di Abraham definita positiva[2]. La quantizzazione del campo produce fotoni di energia positiva con massa a riposo reale. L’impulso e l’energia si trasformano come le componenti di un tetravettore[17].

Oltre a quella di Abraham nessun’altra espressione della forza, ovvero tensore d’energia e impulso, soddisfa da sola tutti i requisiti anzidetti. In base a ciò tale tensore si può considerare nell’ambito della teoria macroscopica come quello che descrive al meglio i fenomeni fisici.

Budapest, Istituto di fisica teorica dell’università Roland Eötvös - Istituto centrale di ricerca per la fisica, sezione per la radiazione cosmica.

Riferimenti

1) W. Pauli, Relativitätstheorie. Enzyklopädie der math. Wissenschaften V.

2) K.F. Novobátzky, Hung. Acta Phys. **1**, No. 5 (1949).

3) G. Marx, Acta Phys. Hung. **1**, 209 (1952).

4) C. Møller, The Theory of Relativity, Clarendon Press, p. 195.

5) R. Gans, Physik. Z. **12**, 806 (1911).

6) R. Becker, Theorie der Elektrizität, Vol. I. B.G. Teubner, Leipzig 1951.

7) A. Einstein, J. Laub, Ann. Physik (4) **26**, 541 (1908).

8) G. Marx, G.Györgyi, Acta Phys. Hung. **3**, 213 (1954).

9) W.B. Smith-White, Philos. Mag. **40**, 466 (1949).

10) G. Marx, Acta Phys. Hung. **2**, 67 (1952).

11) N.L. Balász, Physic. Rev. **91**, 408 (1953).

12) F. Beck, Z. Physik **134**, 136 (1953).

13) R.V. Jones, Nature **167**, 439 (1951).

14) La spiegazione dinamica dell'effetto Čerenkov è stata data per primo da Ginzburg (vedi: D. Iwanenko, A. Sokolov, Teoria classica dei campi, Berlin 1953). Essa trascura però l'impulso comunicato al dielettrico. I calcoli danno tuttavia un risultato in accordo con l'esperienza, poiché l'impulso della luce, invece che secondo la (37), è stato assunto uguale a nE/c; ciò contraddice il principio dell'inerzia dell'energia. In base a ciò pare opportuno modificare i calcoli di Ginzburg secondo il punto di vista introdotto nel presente lavoro.

15) G. Marx, K. Nagy, Acta Phys. Hung. **4**, 297 (1955).

16) M.v.Laue, Z. Physik, **128**, 387 (1950).

17) K. Nagy, Acta Phys. Hung. In stampa.

18) J.M. Jauch, K.M. Watson, Physic. Rev. **74**, 950 (1948).

19) G. Marx, Acta Phys. Hung. **3**, 75 (1953).

Ricevuto dalla Redazione l'8 febbraio 1954.