

# Fondamenti di una teoria della materia<sup>1</sup>

Gustav Mie

*Prima comunicazione*

---

## Introduzione.

1. Quello che dicono sull'essenza dell'atomo i fatti sperimentali accertati negli ultimi tempi è tuttavia essenzialmente sempre solo qualcosa di negativo, cioè che al suo interno le leggi della meccanica e le equazioni di Maxwell non possono essere valide. Ma su che cosa si debba sostituire al posto di queste equazioni, per cogliere insieme in una prospettiva unica l'abbondanza di fatti singolari, che si associano al nome di quanto d'azione, e le leggi degli spettri atomici e via dicendo, l'esperienza non ci dice nulla in proposito. Io credo che qualcosa del genere dal solo esperimento uno non se lo possa aspettare. Esperimento e teoria devono lavorare di pari passo e ciò non è possibile finché la teoria non ha alcuna base sulla quale fondarsi.

Per il progresso ulteriore della nostra conoscenza mi pare quindi assolutamente necessario creare un nuovo fondamento per la teoria della materia. Ho cercato nel seguito con questo lavoro di dare un inizio, ma per la difficoltà della situazione non ci si può aspettare che si renda conto subito di risultati osservabili sperimentalmente. I fini più immediati che io mi sono proposto sono: spiegare l'esistenza di elettroni indivisibili e: vedere il fatto della gravitazione in una connessione necessaria con l'esistenza della materia. Credo che si debba cominciare da qui; infatti le azioni elettriche e gravitazionali sono sicuramente le manifestazioni più immediate delle forze sulle quali si fonda in generale l'esistenza della materia. Sarebbe insensato pensare una materia le cui particelle minime non abbiano cariche elettriche, e parimenti insensato una materia senza gravitazione. Solo quando i due suddetti fini saranno raggiunti si potrà pensare di porre in rapporto con la teoria i fenomeni complicati di cui ho parlato

---

<sup>1</sup>Annalen der Physik **37**, 511 (1912).

prima. Ma per il raggiungimento dei due primi fini c'è ancora altra strada, e nel seguito posso pubblicare solo lavori preliminari, che forse ci porteranno per quella strada.

L'ipotesi fondamentale della mia teoria è *che anche all'interno degli elettroni si hanno campi elettrici e magnetici*. Gli elettroni ed in generale le particelle minime della materia secondo questa idea non sono di essenza diversa dall'etere universale, non sono, come forse da vent'anni si insegna, dei corpi estranei nell'etere, *invece sono solo dei posti dove l'etere ha assunto uno stato tutto particolare, che indichiamo mediante la parola carica elettrica*. L'enorme intensità del campo e della carica nel posto che chiamiamo elettrone porta tuttavia con sè che ivi non valgono più le equazioni di Maxwell consuete. Il comportamento del campo elettromagnetico nell'elettrone apparirebbe presumibilmente assai strano, se ci si attendesse alle leggi dell'"etere puro". Ma non sarebbe comprensibile che in generale si possa parlare del campo elettromagnetico all'interno dell'elettrone, se non fosse possibile una transizione continua dal comportamento dell'etere "puro" al comportamento dell'etere all'interno dell'elettrone. Pertanto nella mia teoria l'elettrone non è una parte dello spazio nettamente delimitata nell'etere, ma consiste di un nucleo che passa con continuità ad un'atmosfera di carica elettrica che si estende fino all'infinito, ma che già vicinissimo al nucleo è così estremamente rarefatta che non la si può osservare sperimentalmente in alcun modo. Un atomo è un agglomerato di un gran numero di elettroni, che sono legati da una carica relativamente rada di segno opposto. Gli atomi sono presumibilmente circondati da atmosfere più dense, che però sono sempre così rade da non produrre alcun campo elettrico osservabile, ma che forse si fanno sentire nelle azioni gravitazionali.

Si penserà forse che con l'ipotesi fondamentale prima formulata non si possa cominciare granché. Essa tuttavia porta ad una forma generale per le equazioni fondamentali della fisica dell'etere, quando si introducano ancora altre due ipotesi. La prima afferma *che il principio di relatività deve avere validità generale*, e la seconda, *che le proprietà dell'etere finora note, cioè campo elettrico, campo magnetico, carica elettrica, corrente*

*di carica, sono del tutto sufficienti a descrivere tutti i fenomeni del mondo materiale.* La correttezza della prima ipotesi è del tutto fuor di dubbio. Se si possa sostenere la seconda, non lo si può dire a priori. Lo si deve dimostrare. Se con essa si formula una teoria che riproduce correttamente il mondo materiale, allora essa risulta giustificata. In caso contrario si dovrà porre la questione di come vada esteso il sistema delle grandezze fondamentali.

Nel seguito presenterò in primo luogo abbastanza estesamente le considerazioni che dalle tre ipotesi fatte mi hanno portato ad una forma generale per le equazioni dell'etere, per poi sollevare la questione, se la forma che io assumo sia l'unica possibile, o se invece ancora altre equazioni fondamentali della fisica dell'etere siano compatibili con le tre ipotesi. Confesso che non mi è riuscito di trovare altre possibilità. E' del tutto ovvio che io supponga giusto il principio della conservazione dell'energia e che assuma l'energia come una grandezza localizzabile.

Capitolo primo.

## **LE EQUAZIONI DI CAMPO.**

### **Forma generale delle equazioni di campo.**

2. Quando si considerano le equazioni di Maxwell, almeno nella forma che Minkowski ha dato loro, si riconosce immediatamente che l'esavettore tetradimensionale "intensità del campo elettromagnetico" non può bastare da solo a descrivere completamente i processi nello spazio e nel tempo. Infatti oltre a quello compare nelle equazioni di Maxwell anche un tetravettore indipendente, la "tetracorrente", che quindi dev'essere almeno anch'essa considerata, per render completa la descrizione.

Dal nostro punto di vista la componente temporale della tetracorrente, la densità di carica  $\rho$ , rappresenta una proprietà intrinseca dell'etere universale, che assume valori significativi solo in posti isolati, e che comporta che in questi posti le linee del campo elettrico  $\delta$  semplicemente si estinguano, che quindi  $\text{div}\delta$  sia diversa da zero. Possiamo di conseguenza assumere il valore di

$\text{div}\delta$  come misura della nuova proprietà dell'etere:

$$\rho = \text{div}\delta .$$

Anche la componente spaziale della tetracorrente, la corrente di carica  $\mathbf{v}$ , descrive una proprietà intrinseca dell'etere, che assume un'intensità osservabile solo in posizioni isolate, e che porta con sé una comparsa di vortici nel campo magnetico  $\mathbf{h}$ , che non è compensata da una variazione temporale del campo elettrico  $\delta$ . Possiamo quindi utilizzare la differenza  $\text{rot } \mathbf{h} - \dot{\delta}$  come misura della nuova proprietà dell'etere:

$$\text{rot}\mathbf{h} - \dot{\delta} = \mathbf{v} .$$

3. Facciamo ora uso delle nostre ipotesi avanzate in 1.. Se tutti i processi nel mondo materiale si devono poter descrivere mediante il "campo elettromagnetico" e la "tetracorrente", allora in base al principio di causalità per le dieci componenti delle grandezze di stato  $\delta, \mathbf{h}, \rho, \mathbf{v}$  si devono dare dieci equazioni differenziali, il cui primo membro sia sempre una derivata del prim'ordine rispetto al tempo di una di queste dieci grandezze o di una loro funzione, mentre al secondo membro sta una funzione delle grandezze e delle loro derivate spaziali. Solo tramite un siffatto sistema di equazioni dalla distribuzione assegnata delle proprietà dell'etere in un istante è sempre determinata la distribuzione che subentra nell'istante subito successivo, dopo il passaggio di un tempo infinitamente piccolo  $dt$ , e quindi è soddisfatto il principio di causalità.

Se inoltre deve valere il principio di relatività, le derivate in queste equazioni devono potersi scrivere come operatori differenziali vettoriali di grandezze tetradimensionali. In tal modo il numero delle possibilità sarà enormemente ristretto. Per esempio si vede immediatamente che anche rispetto alle coordinate possono intervenire solo derivate del prim'ordine, che tutte le derivate devono intervenire soltanto alla prima potenza, eccetera.

Infine si deve richiedere ancora che le equazioni nell'etere "puro" vadano a coincidere con le equazioni di Maxwell, poiché tra etere puro e materia si è assunta una transizione graduale. Inoltre l'esistenza di cariche magnetiche vere dev'essere esclusa,

quindi per caratterizzare il campo magnetico si deve poter far uso di una grandezza  $\mathbf{b}$ , che ha ovunque la proprietà:  $\text{div}\mathbf{b} = 0$ . Giungiamo quindi alle equazioni:

$$\frac{\partial \delta}{\partial t} = \text{rot}\mathbf{h} - \mathbf{v} , \quad (1)$$

$$\frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t} = -\text{rote} , \quad (2)$$

e inoltre nell'etere puro devono essere  $\mathbf{b}$  identico ad  $\mathbf{h}$ ,  $\mathbf{e}$  identico a  $\delta$ . Invece all'interno della materia  $\mathbf{e}$  e  $\mathbf{b}$  possono essere funzioni complicate di  $\delta, \mathbf{h}, \rho, \mathbf{v}$ . Le equazioni (1) e (2) sono quindi uguali alle equazioni di Maxwell solo in modo del tutto esteriore. Poiché almeno per metà non sono più lineari, le leggi del campo all'interno dell'atomo sono completamente diverse da quelle nell'etere puro, possono per esempio non dar luogo ad onde elettromagnetiche, la cui esistenza presuppone equazioni lineari, e altre cose del genere.

Nel seguito distingueremo nettamente tra le due "intensità": forza del campo elettrico  $\mathbf{e}$  ed induzione magnetica  $\mathbf{b}$ , e le "quantità": spostamento elettrico  $\delta$  e forza del campo magnetico  $\mathbf{h}$ . Solo nell'etere puro vale il principio di sovrapposizione dei campi elettromagnetici, che esprimeremo con le equazioni  $\mathbf{e}=\delta$ ,  $\mathbf{b}=\mathbf{h}$ .

Con i simboli dell'analisi vettoriale tetradimensionale<sup>2</sup> le due equazioni (1) e (2) si scrivono nel modo seguente:

$$\Delta \iota \nu (\mathbf{h}, -i\delta) = (\mathbf{v}, i\rho) , \quad (1a)$$

$$\Delta \iota \nu (\mathbf{e}, i\mathbf{b}) = 0 . \quad (2a)$$

Si ha a che fare ora con le quattro equazioni che corrispondono al tetravettore  $(\mathbf{v}, i\rho)$ . Per un tetravettore si danno operatori differenziali tetradimensionali del prim'ordine di due tipi, cioè gli operatori Div e  $\mathfrak{Rot}$ .<sup>3</sup> Con il primo operatore sarà derivata rispetto a  $t$  la componente temporale, con il secondo lo saranno le tre componenti spaziali. Dobbiamo quindi utilizzare

---

<sup>2</sup>M. Laue, Das Relativitätsprinzip p. 70. Friedr. Vieweg & Sohn. 1911.

<sup>3</sup>M. Laue, l.c. p. 70.

entrambi questi operatori per ottenere le quattro equazioni differenziali che ancora ci mancano. L'operatore Div appare nell'equazione nota:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div} \mathbf{v} = 0 . \quad (3)$$

Nella notazione tetradimensionale essa si scrive:

$$\text{Div}(\mathbf{v}, i\rho) = 0 . \quad (3a)$$

Le equazioni ancora mancanti devono essere contenute in una formula:

$$\text{Rot}(\mathbf{f}, i\varphi) = \mathfrak{F} ,$$

dove  $(\mathbf{f}, i\varphi)$  è un tetravettore che sta rispetto a  $(\mathbf{v}, i\rho)$  in una relazione analoga a quella dell'esavettore  $(\mathbf{b}, -i\epsilon)$  rispetto ad  $(\mathbf{h}, -i\delta)$ . Per ora sappiamo soltanto che  $\mathbf{f}$  e  $\varphi$  sono certe funzioni di tutte le grandezze di stato, che insieme costituiscono un tetravettore. Il secondo membro  $\mathfrak{F}$  dell'equazione è un certo esavettore, sempre funzione delle grandezze di stato, del quale è noto soltanto che deve soddisfare la condizione<sup>4</sup>

$$\Delta \nu \mathfrak{F}^* = 0 ,$$

perché altrimenti non si potrebbe ottenerlo da un tetravettore mediante l'operazione **Rot**. Ma questa condizione, se non vogliamo assumere che sia  $\mathfrak{F} = \text{cost.}$ , nel qual caso sarebbe un'identità, dev'essere identica all'equazione (2a). Se ciò non accadesse avremmo oltre alle dieci equazioni differenziali, che secondo il principio di causalità sono necessarie per le dieci grandezze di stato, altre tre in soprannumero. L'andamento temporale dei processi nell'etere sarebbe allora sovradeterminato, cosa che naturalmente è impossibile. Dobbiamo quindi porre necessariamente o  $\mathfrak{F} = \text{cost.}$ , oppure  $\mathfrak{F} = C \cdot (\mathbf{b}, -i\epsilon)$ , dove  $C$  indica un fattore costante arbitrario. Possiamo portare questo fattore nell'altro membro della nostra equazione  $\text{Rot}(\mathbf{f}, i\varphi) = \mathfrak{F}$  e introdurlo in  $\mathbf{f}, i\varphi$ ; poniamo quindi semplicemente  $\mathfrak{F} = (\mathbf{b}, -i\epsilon)$ . Le tre equazioni che contengono una derivata rispetto al tempo, si scrivono perciò in generale:

---

<sup>4</sup>M. Laue, l.c. p. 71.

$$-\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t} = \nabla \varphi + C \cdot \mathbf{e} + \mathbf{c} ,$$

dove  $C$  o è zero o è uguale ad uno e  $\mathbf{c}$  indica un vettore costante sull'intera regione spazio-temporale. In una regione nell'etere puro, dove  $\mathbf{f}=0$  ed anche  $\mathbf{e}=0$ , dev'essere:  $\nabla \varphi = -\mathbf{c}$ . Quand'anche tutte le grandezze di stato fossero costantemente uguali a zero,  $\varphi$ , che tuttavia dev'essere una funzione delle grandezze di stato, avrebbe un gradiente diverso da zero, non sarebbe costante. Ciò è impossibile, e quindi dev'essere:  $\mathbf{c}=0$ . D'altra parte si può dimostrare facilmente che  $C$  dev'essere diverso da zero. Quando nell'intorno di un elettrone che si muove con velocità costante tutte le grandezze dell'etere sono in equilibrio, tutte le derivate rispetto al tempo devono essere nulle. L'equazione si scrive allora:

$$\nabla \varphi + C \cdot \mathbf{e} = 0 .$$

Se ora fosse  $C=0$ , sarebbe anche  $\nabla \varphi = 0$  e quindi  $\varphi = \text{cost.}$ . La grandezza  $\varphi$  non dipenderebbe perciò dalle grandezze di campo, e lo stesso allora avverrebbe per il principio di relatività anche per  $\mathbf{f}$ , e l'equazione proposta diventerebbe un'identità. Dev'essere quindi  $C=1$ . Le ultime tre equazioni della dinamica dell'etere sono quindi:

$$-\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t} = \nabla \varphi + \mathbf{e} , \quad (4)$$

ovvero scritto con simboli tetradimensionali:

$$\text{Rot}(\mathbf{f}, i\varphi) = (\mathbf{b}, -i\mathbf{e}) . \quad (4a)$$

Nell'espressione (4a) sono presenti ancora le seguenti tre equazioni, che non contengono alcuna derivata rispetto al tempo:

$$\text{rot } \mathbf{f} = \mathbf{b} . \quad (4b)$$

Si vede facilmente che le equazioni (4b) si possono derivare dalla (4) per mezzo della (2); esse non contengono quindi niente di nuovo.

Quando nell'intorno di un elettrone a riposo o in moto con velocità uniforme tutto è in equilibrio, l'equazione (4) si scrive:

$$\nabla \varphi + \mathbf{e} = 0 .$$

Possiamo indicare questa come *la condizione d'equilibrio* del campo nell'intorno dell'elettrone. Essa si può interpretare chiaramente come l'asserzione che le due forze  $\epsilon$  e  $\nabla\phi$  devono essere tra loro uguali ed opposte. La forza del campo elettrico  $\epsilon$  cerca di spingere in fuori la carica dell'elettrone e di disperderla sul massimo volume possibile, essa rappresenta quindi la *forza espansiva* insita nella materia. Contro di essa agisce la *forza di coesione*  $\nabla\phi$ , che si calcola come gradiente di una pressione di coesione  $\phi^5$  propria della carica elettrica. Forza di espansione e forza di coesione sono le due azioni sulle quali si fonda in generale l'esistenza della materia, esse devono intervenire quindi in ogni possibile teoria della materia.

L'equazione (4) si può indicare come l'equazione del moto della corrente di carica. Il vettore  $\mathbf{f}$  è la *quantità di moto* corrispondente alla corrente di carica  $\mathbf{v}$ . Nella meccanica consueta la quantità di moto è notoriamente massa per velocità, ed è misurata mediante l'impulso che è necessario per produrre la velocità. Poiché ora quantità di moto e pressione vanno designate come "intensità", ossia come grandezze che si misurano con azioni di forze, contrapporremo alle "intensità"  $\phi$  ed  $\mathbf{f}$  le "quantità"  $\rho$  e  $\mathbf{v}$  ad esse associate.

Possiamo quindi descrivere lo stato dell'etere o con dieci quantità  $(\delta, \mathbf{h}, \rho, \mathbf{v})$  oppure con dieci intensità  $(\epsilon, \mathbf{b}, \phi, \mathbf{f})$ .

4. Le sei equazioni differenziali (4) e (4b), riassunte nella (4a) in una formula, sono proprio le stesse delle equazioni differenziali del cosiddetto tetrapotenziale, che è composto dal potenziale scalare  $\phi$  e dal potenziale vettore  $\mathbf{f}$ . Si potrebbe quindi asserire con un certo diritto che la teoria qui sviluppata consiste semplicemente nell'attribuire ai due potenziali  $\phi$  ed  $\mathbf{f}$  il significato di proprietà fisiche dell'etere universale, ossia di pressione di coesione e di quantità di moto.

Dobbiamo tuttavia aggiungere un'osservazione importante. E'

---

<sup>5</sup>E' noto che una siffatta pressione l'ha ipotizzata per primo H. Poincaré (Compt. rend. **140**. p. 1504. 1905). Vedi anche H. Th. Wolff, Ann. d. Phys. **36**. p. 1066. 1911.



noto che la soluzione dell'equazione (4a) per un dato esavettore  $(\mathbf{b}, -i\mathbf{e})$  è ancora indeterminata se non si fa un'ipotesi per  $\text{Div}(\mathbf{f}, i\varphi)$ . Nella teoria dell'elettricità si definiscono i due potenziali ponendo semplicemente  $\text{Div}(\mathbf{f}, i\varphi) = 0$ . Ma quest'equazione non vale per le proprietà dell'etere assunte nella nostra teoria, ed essi sono di conseguenza in generale non identici ai potenziali calcolati di solito. Al posto dell'equazione ora scritta della teoria dell'elettricità nella nostra dinamica dell'etere compare infatti l'equazione (3):  $\text{Div}(\mathbf{v}, i\rho) = 0$ . Questa non può sussistere assieme all'altra equazione, poiché allora l'evoluzione temporale dei processi dell'etere sarebbe governata da undici equazioni, quindi sarebbe sovradeterminata, cosa che è impossibile. Di conseguenza abbiamo in generale  $\text{Div}(\mathbf{f}, i\varphi) \neq 0$ . In un paragrafo successivo (p. 534) si troverà un significato semplice per la grandezza  $\text{Div}(\mathbf{f}, i\varphi)$ .

Nel caso della quiete ( $\mathbf{v}=0$ ,  $\mathbf{h}=0$ ) la quantità  $\varphi$  è realmente identica al potenziale elettrostatico, poiché allora vale l'equazione:

$$\mathbf{e} + \nabla\varphi = 0 .$$

5. Se paragoniamo  $\varphi$  ad una pressione e  $\rho$  ad una densità, si potrebbe facilmente pensare che potrebbe essere vantaggioso attribuire a queste quantità sempre valori positivi, analogamente a come succede nella fisica dei gas.

Attribuiremo quindi all'etere puro, dove è completamente libero da campi, un valore costante positivo  $\rho_0$ , la densità normale; con un'arbitraria scelta del sistema di coordinate spazio-temporale si dovrebbe avere naturalmente un tetravettore  $(\mathbf{v}_0, i\rho_0)$ , costante nell'intera regione dello spazio-tempo. Campi elettrici e magnetici compariranno solo laddove  $\rho$  e  $\mathbf{v}$  assumono valori diversi da  $\rho_0$  e  $\mathbf{v}_0$ , e le equazioni (1) e (3) si dovranno quindi scrivere:

$$\Delta \mathbf{v}(\mathbf{h}, -i\delta) = ((\mathbf{v}-\mathbf{v}_0), i \cdot (\rho-\rho_0)) ,$$

$$\text{Div}((\mathbf{v}-\mathbf{v}_0), i \cdot (\rho-\rho_0)) = 0 .$$

Si potrebbe naturalmente scegliere  $\rho_0$  in modo tale che la grandezza  $\rho$  che interviene in queste equazioni, la "densità

dell'etere", risultasse sempre positiva. Ma non si vede che vantaggio ci sarebbe. Di conseguenza porrò sempre nel seguito di nuovo semplicemente  $\mathbf{v}$  e  $\rho$  al posto di  $\mathbf{v}-\mathbf{v}_0$  e di  $\rho-\rho_0$ , e quindi calcolerò con densità positive e negative, avendo posto uguale a zero la densità nell'etere puro.

Esattamente lo stesso vale per la pressione di coesione  $\varphi$ . Poiché  $\varphi$  ed  $\mathbf{f}$  intervengono nelle equazioni fondamentali della fisica dell'etere solo derivate rispetto al tempo o rispetto alla posizione, si può accrescerle di una quantità  $\varphi_0$ ,  $\mathbf{f}_0$  indipendente dalla posizione e dal tempo e del tutto arbitraria, senza che perciò la descrizione dei processi risulti cambiata di qualcosa nell'essenziale. Si potrebbe per esempio aggiungere un valore  $\varphi_0$  così grande che  $\varphi_0-\varphi$  risulti sempre positivo. La condizione d'equilibrio sarebbe allora:

$$\epsilon - \nabla(\varphi_0-\varphi) = 0 .$$

Nell'etere puro avremmo ora la pressione positiva grande  $\varphi_0$ , nell'elettrone la pressione minore  $(\varphi_0-\varphi)$ , ed  $\epsilon$  fornirebbe la forza equilibrante per il salto di pressione  $-\nabla(\varphi_0-\varphi)$ , che l'etere compie nell'elettrone. H. Poincarè (l.c.) parla in effetti di una pressione che l'elettrone sperimenta dall'esterno. Credo tuttavia che per l'esposizione sia più semplice scegliere il punto di zero della pressione nell'etere puro, e perciò tener sempre conto del fatto che a distanza infinita dall'elettrone  $\varphi$  va posto uguale a zero.

Parimenti anche per l'energia, alla quale è noto che si può sempre aggiungere una costante additiva arbitraria, fisseremo il punto di zero in modo che la densità d'energia nell'etere puro, privo di campi, sia uguale a zero. Allo stesso modo di  $\rho$  e  $\varphi$  anche la densità d'energia  $W$  potrà quindi assumere sia valori positivi che negativi; non esiste proprio il minimo fondamento che ci spinga a porre  $W$  sempre positivo.

In seguito a queste deliberazioni  $\rho, \varphi, W$  vanno ora considerate come quantità completamente determinate senza alcuna arbitrarietà additiva.

#### **L'energia.**

6. Suppongo che valgano non solo il principio della conservazione dell'energia, ma anche il principio della localizzabilità dell'energia e del trasferimento dell'energia<sup>6</sup>. Ciò significa: se indichiamo con  $W$  la densità dell'energia, con  $\mathfrak{s}$  la corrente d'energia, dalle equazioni (1)-(4) deve discendere la seguente relazione:

$$\frac{\partial W}{\partial t} = - \operatorname{div} \mathfrak{s} ,$$

dove sia lo scalare  $W$  che il vettore  $\mathfrak{s}$  sono funzioni universali delle proprietà che valgono nel punto dello spazio-tempo considerato. Si può arrivare a questa equazione dell'energia dalle equazioni di campo soltanto in un modo: si devono determinare dei fattori  $\mathbf{k}, \mathbf{l}, m, \mathbf{n}$ , che siano funzioni universali delle grandezze di stato, per i quali moltiplicare le equazioni (1)-(4), e poi si devono sommare le equazioni. Dev'essere quindi possibile determinare i fattori  $\mathbf{k}, \mathbf{l}, m, \mathbf{n}$  in modo che al primo membro risulti una derivata complessiva rispetto al tempo, e al secondo membro una divergenza. Cercheremo ora le condizioni perché ciò avvenga.

$$\begin{aligned} & \mathbf{k} \cdot \frac{\partial \delta}{\partial t} + \mathbf{l} \cdot \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t} + m \cdot \frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{n} \cdot \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t} \\ & = \mathbf{k} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{h} - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v} - \mathbf{l} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{e} - m \cdot \operatorname{div} \mathbf{v} - \mathbf{n} \cdot \nabla \varphi - \mathbf{n} \cdot \mathbf{e} . \end{aligned}$$

Bisogna notare subito che i due termini  $-\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}$  e  $-\mathbf{n} \cdot \mathbf{e}$ , che sono funzioni universali pure delle grandezze di stato, devono sparire, poiché  $\operatorname{div} \mathfrak{s}$  può essere composta solo di termini che contengano le derivate rispetto alle coordinate. Dev'essere quindi:

$$\mathbf{k} = u \cdot \mathbf{e} , \quad \mathbf{n} = -u \cdot \mathbf{v} ,$$

dove  $u$  è ancora una funzione universale delle grandezze di stato. Un piccolo calcolo dà ora per il secondo membro dell'equazione:

$$\begin{aligned} & \operatorname{div}(u \cdot [\mathbf{h} \cdot \mathbf{e}]) + \operatorname{div}(u \cdot \varphi \cdot \mathbf{v}) + (u \cdot \mathbf{h} - \mathbf{l}) \cdot \operatorname{rot} \mathbf{e} - \mathbf{h} \cdot [\mathbf{e} \cdot \nabla u] \\ & - (m + u \cdot \varphi) \cdot \operatorname{div} \mathbf{v} - \varphi \cdot (\mathbf{v} \cdot \nabla u) . \end{aligned}$$

Quest'espressione può in generale essere una divergenza solo quando gli ultimi quattro addendi spariscono, e pertanto quando:

---

<sup>6</sup>G. Mie, Wiener Sitzungsber. **107**. Parte IIa. p. 1117 e 1126. 1898.

$$\nabla u = 0, \quad u \cdot \mathbf{h} - \mathbf{l} = 0, \quad m + u \cdot \varphi = 0.$$

La prima di queste equazioni dà  $u = \text{cost.}$ , e il valore di questa costante è determinato dal fatto che l'espressione per la corrente d'energia nell'etere puro deve coincidere con la nota espressione di Poynting  $[\delta \cdot \mathbf{h}] = [\mathbf{e} \cdot \mathbf{h}]$ . Da ciò segue:

$$u = 1, \quad \mathbf{k} = \mathbf{e}, \quad \mathbf{l} = \mathbf{h}, \quad m = -\varphi, \quad \mathbf{n} = -\mathbf{v}.$$

Abbiamo quindi trovato per l'equazione dell'energia:

$$\mathbf{e} \cdot \frac{\partial \delta}{\partial t} + \mathbf{h} \cdot \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t} - \varphi \cdot \frac{\partial \rho}{\partial t} - \mathbf{v} \cdot \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t} = -\text{div}([\mathbf{e} \cdot \mathbf{h}] - \varphi \cdot \mathbf{v}).$$

L'espressione per la corrente d'energia nella dinamica generale dell'etere è quindi:

$$\mathbf{s} = [\mathbf{e} \cdot \mathbf{h}] - \varphi \cdot \mathbf{v}. \quad (5)$$

7. Il principio dell'energia richiede inoltre che l'espressione al primo membro dell'equazione dell'energia sia complessivamente una derivata. Dobbiamo quindi imporre la condizione che

$$\mathbf{e} \cdot d\delta + \mathbf{h} \cdot d\mathbf{b} - \varphi \cdot d\rho - \mathbf{v} \cdot d\mathbf{f} = dW \quad (6)$$

sia un differenziale totale, che quindi  $W$  si possa determinare come funzione di  $(\delta, \mathbf{h}, \rho, \mathbf{v})$ . Al posto di  $W$  possiamo anche proporre di cercare una grandezza  $H$ , che sia determinata dall'equazione seguente:

$$W = H + \mathbf{h} \cdot \mathbf{b} - \mathbf{v} \cdot \mathbf{f}. \quad (7)$$

Se  $W$  è una funzione di  $(\delta, \mathbf{h}, \rho, \mathbf{v})$  lo è anche  $H$ , e viceversa. Dalla (6) e dalla (7) risulta la seguente espressione per il differenziale di  $H$ :

$$dH = \mathbf{e} \cdot d\delta - \mathbf{b} \cdot d\mathbf{h} - \varphi \cdot d\rho + \mathbf{f} \cdot d\mathbf{v}, \quad (8)$$

dove  $\mathbf{e}, \mathbf{b}, \varphi, \mathbf{f}$  sono funzioni di  $(\delta, \mathbf{h}, \rho, \mathbf{v})$ . Per un vettore, le cui componenti siano

$$\frac{\partial H}{\partial \delta_x}, \quad \frac{\partial H}{\partial \delta_y}, \quad \frac{\partial H}{\partial \delta_z},$$

per brevità diremo semplicemente  $\partial H / \partial \delta$ , e analogamente in casi analoghi. Allora segue senz'altro dalla (8):

$$\epsilon = \frac{\partial H}{\partial \delta}, \quad \mathbf{b} = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{h}}, \quad \varphi = -\frac{\partial H}{\partial \rho}, \quad \mathbf{f} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{v}}. \quad (9)$$

La condizione perchè valga il principio dell'energia è che tutte le intensità  $\epsilon, \mathbf{b}, \varphi, \mathbf{f}$  si possano calcolare per mezzo di una sola funzione delle quantità  $H(\delta, \mathbf{h}, \rho, \mathbf{v})$ , che chiameremo la funzione hamiltoniana. E in particolare ogni intensità si deve ottenere come derivata di  $H$  rispetto alla quantità corrispondente, in due casi ( $\mathbf{b}$  e  $\varphi$ ) con il segno negativo.

Ora anche la densità d'energia  $W$  si può trovare dalla sola funzione hamiltoniana. Infatti tenendo conto delle (9) la (7) dà:

$$W = H - \frac{\partial H}{\partial \mathbf{h}} \cdot \mathbf{h} - \frac{\partial H}{\partial \mathbf{v}} \cdot \mathbf{v}. \quad (10)$$

Dalla forma delle equazioni fondamentali della dinamica dell'etere (1)-(4) si ottiene immediatamente, tenendo conto delle equazioni (9), la legge seguente:

*Il principio di relatività è valido per tutti i processi fisici, purchè la funzione hamiltoniana  $H(\delta, \mathbf{h}, \rho, \mathbf{v})$  sia invariante per la trasformazione di Lorentz.*

Quindi ora avremmo enunciato completamente le equazioni della dinamica dell'etere, se solo sapessimo che forma abbia la funzione universale  $H$ . Trovare questa forma è altresì un compito assai difficile.

*Il problema di una teoria della materia si riconduce al problema di trovare la funzione universale  $H(\delta, \mathbf{h}, \rho, \mathbf{v})$ .*

Finora sappiamo di  $H$  solo una cosa: nell'etere puro vale con grande esattezza il principio di sovrapposizione dei campi elettromagnetici; se da  $H$  si separa un addendo  $(\delta^2 - \mathbf{h}^2)/2$ :

$$H = \frac{1}{2} (\delta^2 - \mathbf{h}^2) + H_1,$$

nelle posizioni dove  $\rho$  è assai piccolo il resto  $H_1$  dev'essere così piccolo da essere trascurabile rispetto al primo termine. Invece nell'interno dell'atomo, dove  $\rho$  è grande, il termine  $H_1$  sarà di gran lunga prevalente, di modo che ivi le leggi del campo saranno completamente diverse da quelle nell'etere puro.

**8.** Per il calcolo è in generale molto più comodo assumere le intensità  $(\epsilon, \mathbf{b}, \varphi, \mathbf{f})$  come le variabili indipendenti mediante le

quali sarà descritto lo stato dell'etere, e considerare le quantità  $(\delta, \mathfrak{h}, \rho, \mathfrak{v})$  come funzioni di quelle.

Costruiremo ora la seguente funzione:

$$\Phi(\mathfrak{e}, \mathfrak{b}, \varphi, \mathfrak{f}) = H - (\mathfrak{e} \cdot \delta - \mathfrak{b} \cdot \mathfrak{h}) + (\varphi \cdot \rho - \mathfrak{f} \cdot \mathfrak{v}) , \quad (11)$$

calcolando le grandezze  $\delta, \mathfrak{h}, \rho, \mathfrak{v}$  in funzione di  $\mathfrak{e}, \mathfrak{b}, \varphi, \mathfrak{f}$  mediante le (9) e sostituendo le espressioni trovate al secondo membro dell'equazione (11). Utilizzando la (8) arriviamo allora alla seguente espressione per il differenziale di  $\Phi$ :

$$d\Phi = -\delta \cdot d\mathfrak{e} + \mathfrak{h} \cdot d\mathfrak{b} + \rho \cdot d\varphi - \mathfrak{v} \cdot d\mathfrak{f} . \quad (12)$$

Da qui segue:

$$\delta = - \frac{\partial \Phi}{\partial \mathfrak{e}} , \quad \mathfrak{h} = \frac{\partial \Phi}{\partial \mathfrak{b}} , \quad \rho = \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} , \quad \mathfrak{v} = - \frac{\partial \Phi}{\partial \mathfrak{f}} . \quad (13)$$

*Le quantità  $\delta, \mathfrak{h}, \rho, \mathfrak{v}$  si possono tutte calcolare mediante una sola funzione delle intensità  $\Phi(\mathfrak{e}, \mathfrak{b}, \varphi, \mathfrak{f})$ , derivando quest'ultima rispetto alle intensità corrispondenti. In due casi ( $\delta$  e  $\mathfrak{v}$ ) bisogna dare alle derivate il segno negativo.*

La densità d'energia  $W$  si ottiene da  $\Phi$  nel modo seguente:

$$W = \Phi + \mathfrak{e} \cdot \delta - \varphi \cdot \rho = \Phi - \frac{\partial \Phi}{\partial \mathfrak{e}} \cdot \mathfrak{e} - \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \cdot \varphi . \quad (14)$$

La funzione hamiltoniana  $H$  si calcola secondo la (11):

$$H = \Phi - \frac{\partial \Phi}{\partial \mathfrak{e}} \cdot \mathfrak{e} - \frac{\partial \Phi}{\partial \mathfrak{b}} \cdot \mathfrak{b} - \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \cdot \varphi - \frac{\partial \Phi}{\partial \mathfrak{f}} \cdot \mathfrak{f} . \quad (15)$$

*Invece di cercare la funzione universale  $H(\delta, \mathfrak{h}, \rho, \mathfrak{v})$  si può anche cercare la funzione universale  $\Phi(\mathfrak{e}, \mathfrak{b}, \varphi, \mathfrak{f})$ .*

Per brevità indicherò spesso  $\Phi$  come la funzione d'universo.

*Anche  $\Phi$  come  $H$  dev'essere un invariante per la trasformazione di Lorentz.*

Analogamente ad  $H$ , anche  $\Phi$  si può scomporre in due parti:

$$\Phi = \frac{1}{2} (\mathfrak{b}^2 - \mathfrak{e}^2) + \Phi_1 ,$$

delle quali la prima prevale nell'etere puro, la seconda all'interno dell'atomo.

**9.** Per mezzo della funzione d'universo si può costruire una

matrice quattro  $\times$  quattro<sup>7</sup>, che contiene la corrente d'energia e gli sforzi d'etere di Maxwell per la nostra dinamica generale dell'etere:

$S =$

$$\begin{array}{ll}
 \Phi - bh + e \frac{\delta}{x x} + h \frac{b}{x x} + f \frac{v}{x x}, & e \frac{\delta}{x y} + h \frac{b}{x y} + f \frac{v}{x y}, \\
 e \frac{\delta}{x z} + h \frac{b}{x z} + f \frac{v}{x z}, & -i \cdot (\delta \frac{b}{y z} - \delta \frac{b}{z y} - \rho f \frac{v}{x}), \\
 \\ 
 e \frac{\delta}{y x} + h \frac{b}{y x} + f \frac{v}{y x}, & \Phi - bh + e \frac{\delta}{y y} + h \frac{b}{y y} + f \frac{v}{y y}, \\
 e \frac{\delta}{y z} + h \frac{b}{y z} + f \frac{v}{y z}, & -i \cdot (\delta \frac{b}{z x} - \delta \frac{b}{x z} - \rho f \frac{v}{y}), \\
 \\ 
 e \frac{\delta}{z x} + h \frac{b}{z x} + f \frac{v}{z x}, & e \frac{\delta}{z y} + h \frac{b}{z y} + f \frac{v}{z y}, \\
 \Phi - bh + e \frac{\delta}{z z} + h \frac{b}{z z} + f \frac{v}{z z}, & -i \cdot (\delta \frac{b}{x y} - \delta \frac{b}{y x} - \rho f \frac{v}{z}), \\
 \\ 
 -i \cdot (e \frac{h}{y z} - e \frac{h}{z y} - \varphi v \frac{v}{x}), & -i \cdot (e \frac{h}{z x} - e \frac{h}{x z} - \varphi v \frac{v}{y}), \\
 -i \cdot (e \frac{h}{x y} - e \frac{h}{y x} - \varphi v \frac{v}{z}), & \Phi + e\delta - \varphi\rho . \quad (16)
 \end{array}$$

Se si applica alla riga più bassa della matrice l'operazione

$$\Delta \iota v = \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{i\partial t},$$

si ottiene l'equazione dell'energia ponendo uguale a zero l'espressione così prodotta:

$$\text{div}([\mathbf{e} \cdot \mathbf{h}] - \varphi \cdot \mathbf{v}) + \frac{\partial}{\partial t} (\Phi + \mathbf{e} \cdot \delta - \varphi \cdot \rho) = 0 ;$$

infatti per la (14) è  $\Phi + \mathbf{e} \cdot \delta - \varphi \cdot \rho = W$ . Dal principio di relatività segue senz'altro:

$$\Delta \iota v S = 0 . \quad (17)$$

D'altra parte le tre equazioni che corrispondono alle tre prime righe di  $S$  si possono anche ottenere senza gran fatica direttamente delle equazioni di campo (1)-(4).

Sulla questione, se la matrice (16) sia simmetrica o meno rispetto alla diagonale, ritorneremo ancora una volta (p. 533) nel seguito.

---

<sup>7</sup>H. Minkowski, Zwei Abhandlungen, B.G. Teubner. 1910. p.36.

## Il principio di Hamilton.

10. Sebbene in quanto precede sia stato dimostrato in modo ineccepibile che è possibile soltanto la forma delle equazioni di campo da me proposta, si può forse ancora discutere in proposito. Mi pare perciò importante dimostrare che si possono ottenere le equazioni con operazioni matematiche del tutto semplici, se si assume la validità del principio di Hamilton.

Faccio quindi solo le seguenti due ipotesi: in primo luogo lo stato dell'etere è completamente caratterizzato dalle grandezze  $\delta, \mathfrak{h}, \rho, \mathfrak{v}$ , e in particolare le ultime due sono definite dalle equazioni:

$$\rho = \text{div} \delta, \quad \mathfrak{v} = \text{rot} \mathfrak{h} - \dot{\delta};$$

in secondo luogo i processi dell'etere soddisfano il principio di Hamilton qui sotto formulato.

*Il principio di Hamilton. Esiste una funzione  $H(\delta, \mathfrak{h}, \rho, \mathfrak{v})$ , il cui integrale su una certa regione limitata dello spazio-tempo per tutti i processi reali è un massiminimo, quando si varino le grandezze di stato in tutti i punti all'interno della regione, ma non sul contorno della regione.*

$$\int_G \delta H(\delta, \mathfrak{h}, \rho, \mathfrak{v}) dx dy dz dt = 0. \quad (18)$$

Sul confine della regione vale:

$$\delta \delta = \delta \mathfrak{h} = \delta \rho = \delta \mathfrak{v} = 0.$$

Si può mostrare che vale il principio di relatività quando  $H$  è invariante per la trasformazione di Lorentz. Assumiamo che questo sia il caso, e sostituiamo le grandezze  $\delta, \mathfrak{h}, \rho, \mathfrak{v}$  con le note espressioni in  $\delta', \mathfrak{h}', \rho', \mathfrak{v}'$  che devono comparire al loro posto in seguito ad una trasformazione dal sistema di coordinate  $(x, y, z, t)$  ad un altro  $(x', y', z', t')$ ; allora dobbiamo arrivare ad una funzione  $H'(\delta', \mathfrak{h}', \rho', \mathfrak{v}')$  che è costruita con le nuove variabili  $(\delta', \mathfrak{h}', \rho', \mathfrak{v}')$  esattamente come  $H$  lo è con le vecchie variabili  $(\delta, \mathfrak{h}, \rho, \mathfrak{v})$ . Esprimiamo questo fatto ponendo:  $H' = H$ . Sia ora  $G'$  la regione nelle nuove coordinate  $(x', y', z', t')$ , nella quale  $G$  va con la trasformazione. E' allora



$$\int_{G'} H(\delta', \mathfrak{h}', \rho', \mathfrak{v}') dx' dy' dz' dt' = \int_G H(\delta, \mathfrak{h}, \rho, \mathfrak{v}) dx dy dz dt .$$

Se il principio di Hamilton vale per il sistema di coordinate  $(x, y, z, t)$ , discende da questa equazione che esso vale anche per ogni altro  $(x', y', z', t')$  scelto a piacere. Infatti la funzione hamiltoniana è la stessa funzione  $H$  in tutti i sistemi di coordinate.

Le leggi di natura, cioè le equazioni differenziali che si ottengono dal principio di Hamilton, sono quindi le stesse in tutti i sistemi di coordinate ai quali si arriva con la trasformazione di Lorentz. Questo è il principio di relatività.

Deriveremo ora le equazioni di campo dal principio di Hamilton. Allo scopo costruiamo la variazione:

$$\delta H = \frac{\partial H}{\partial \delta} \cdot \delta \delta + \frac{\partial H}{\partial \mathfrak{h}} \cdot \delta \mathfrak{h} + \frac{\partial H}{\partial \rho} \cdot \delta \rho + \frac{\partial H}{\partial \mathfrak{v}} \cdot \delta \mathfrak{v} .$$

Introdurremo ora le seguenti abbreviazioni:

$$\frac{\partial H}{\partial \delta} = \mathfrak{e}, \quad \frac{\partial H}{\partial \mathfrak{h}} = -\mathfrak{b}, \quad \frac{\partial H}{\partial \rho} = -\varphi, \quad \frac{\partial H}{\partial \mathfrak{v}} = \mathfrak{f}. \quad (19)$$

La variazione di  $H$  è allora:

$$\delta H = \mathfrak{e} \cdot \delta \delta - \mathfrak{b} \cdot \delta \mathfrak{h} - \varphi \cdot \delta \rho + \mathfrak{f} \cdot \delta \mathfrak{v} . \quad (20)$$

Per la trasformazione ulteriore di questa espressione utilizziamo una formula del calcolo vettoriale tetradimensionale, che deriveremo in breve: come prodotto del tetravettore  $P = (\mathfrak{f}, i\varphi)$  e dell'esavettore  $\mathfrak{F} = (\mathfrak{h}, -i\delta)$  indichiamo il tetravettore seguente<sup>8</sup>:

$$[P \cdot \mathfrak{F}] = ([\mathfrak{f} \cdot \mathfrak{h}] + \varphi \cdot \delta, i \cdot (\mathfrak{f} \cdot \delta)) .$$

Costruiamo la Div di questo vettore:

$$\text{Div}[P \cdot \mathfrak{F}] = \text{div}\{[\mathfrak{f} \cdot \mathfrak{h}] + \varphi \cdot \delta\} + \frac{\partial(\mathfrak{f} \cdot \delta)}{\partial t} .$$

Ora è:

$$\text{div}[\mathfrak{f} \cdot \mathfrak{h}] = \mathfrak{h} \cdot \text{rot } \mathfrak{f} - \mathfrak{f} \cdot \text{rot } \mathfrak{h} ,$$

$$\text{div}(\varphi \cdot \delta) = \delta \cdot \nabla \varphi + \varphi \cdot \text{div} \delta ,$$

$$\frac{\partial(\mathfrak{f} \cdot \delta)}{\partial t} = \delta \cdot \frac{\partial \mathfrak{f}}{\partial t} + \mathfrak{f} \cdot \frac{\partial \delta}{\partial t} .$$

---

<sup>8</sup>M. Laue, Das Relativitätsprinzip. p. 67.

Quindi si ha:

$$\begin{aligned} \operatorname{div}\{[\mathbf{f} \cdot \mathbf{h}] + \varphi \cdot \delta\} + \frac{\partial(\mathbf{f} \cdot \delta)}{\partial t} &= \mathbf{h} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{f} + \delta \cdot \left( \nabla \varphi + \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t} \right) \\ &- \mathbf{f} \cdot \left( \operatorname{rot} \mathbf{h} - \frac{\partial \delta}{\partial t} \right) + \varphi \cdot \operatorname{div} \delta . \end{aligned} \quad (21)$$

Con simboli tetradimensionali questa formula si scrive:

$$\operatorname{Div}[P \cdot \mathfrak{F}] = -(\mathfrak{F} \cdot \mathfrak{K} \operatorname{ot} P) - (P \cdot \Delta \iota \nu \mathfrak{F}) . \quad (22)$$

Applicheremo ora questa formula al nostro problema. Si deve notare ancora in proposito che:

$$\operatorname{rot} \mathbf{h} - \frac{\partial \delta}{\partial t} = \mathbf{v} , \quad \operatorname{div} \delta = \rho .$$

Quindi:

$$\operatorname{Div}[P \cdot \mathfrak{F}] = \mathbf{h} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{f} + \delta \cdot \left( \nabla \varphi + \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t} \right) - \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} + \varphi \cdot \rho .$$

Sostituiamo al posto di  $\delta$  e  $\mathbf{h}$  le variazioni  $\delta \delta$  e  $\delta \mathbf{h}$ ; arriviamo allora a:

$$\mathbf{f} \cdot \delta \mathbf{v} - \varphi \cdot \delta \rho = \operatorname{rot} \mathbf{f} \cdot \delta \mathbf{h} + \left( \nabla \varphi + \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t} \right) \cdot \delta \delta - \operatorname{Div}[P \cdot \delta \mathfrak{F}] .$$

Ora l'integrale

$$\int_G \operatorname{Div}[P \cdot \delta \mathfrak{F}] \cdot dx dy dz dt ,$$

esattamente come l'integrale spaziale di una divergenza tridimensionale si trasforma in un integrale sul contorno della regione  $G$ . Ma poiché nel principio di Hamilton è prescritto che sul contorno le variazioni di tutte le variabili di stato, quindi anche  $\delta \mathfrak{F}$ , siano nulle, si ha:

$$\int_G \operatorname{Div}[P \cdot \delta \mathfrak{F}] \cdot dx dy dz dt = 0 .$$

Di conseguenza risulta, utilizzando la formula (20) per  $\delta H$ :

$$\int_G \delta H \cdot dx dy dz dt = \int_G \left( (\mathbf{e} + \nabla \varphi + \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t}) \cdot \delta \delta + (\operatorname{rot} \mathbf{f} - \mathbf{b}) \cdot \delta \mathbf{h} \right) \cdot dx dy dz dt .$$

Poiché tra  $\delta$  e  $\mathbf{h}$  non esistono altre relazioni e di conseguenza  $\delta \mathbf{h}$  e  $\delta \delta$  sono del tutto indipendenti tra loro, il principio di Hamilton può essere soddisfatto solo quando valgono le due equazioni differenziali seguenti:

$$\mathbf{e} + \nabla\varphi + \frac{\partial\mathbf{f}}{\partial t} = 0, \quad \text{rot } \mathbf{f} - \mathbf{b} = 0.$$

Da queste due equazioni segue ancora:

$$\frac{\partial\mathbf{b}}{\partial t} + \text{rot } \mathbf{e} = 0.$$

Poiché ora le equazioni di definizione (19) per  $\mathbf{e}, \mathbf{b}, \varphi, \mathbf{f}$  coincidono con le equazioni (9), queste equazioni sono identiche alle equazioni di campo (2) e (4); le equazioni (1) e (3) le abbiamo assunte a priori come equazioni di definizione.

E' così dimostrato che la forma delle equazioni di campo da me assunta è l'unica che sia in accordo con il principio di Hamilton.

In conclusione si noti ancora che si può dare all'equazione (21) un'altra forma interessante, se si tien conto che:

$$\text{rot } \mathbf{f} = \mathbf{b}, \quad \nabla\varphi + \frac{\partial\mathbf{f}}{\partial t} = -\mathbf{e}, \quad \text{rot } \mathbf{h} - \frac{\partial\delta}{\partial t} = \mathbf{v}, \quad \text{div}\delta = \rho.$$

Tenendo presente l'equazione (11) otteniamo:

$$\frac{\partial(\mathbf{f}\cdot\delta)}{\partial t} + \text{div}\{[\mathbf{f}\cdot\mathbf{h}] + \varphi\cdot\delta\} = \Phi - H. \quad (23)$$

### Gli invarianti.

11. Se la funzione  $H(\delta, \mathbf{h}, \rho, \mathbf{v})$  dev'essere invariante per la trasformazione di Lorentz, cioè se dev'essere uno scalare tetradimensionale, essa dev'essere una funzione di puri scalari tetradimensionali che si possono costruire con  $\delta, \mathbf{h}, \rho, \mathbf{v}$ . Esistono quattro grandezze siffatte che sono tra loro indipendenti.

1. Il valore assoluto del tetravettore  $P = (\mathbf{v}, i\rho)$ . E':

$$\sigma = (\rho^2 - \mathbf{v}^2)^{1/2} = \rho(1 - \beta^2)^{1/2}, \quad \beta = \mathbf{v}/\rho.$$

2. Il valore assoluto dell'esavettore  $\mathfrak{F} = (\mathbf{h}, -i\delta)$ . Ne prenderemo il quadrato:

$$p = \delta^2 - \mathbf{h}^2.$$

3. Il prodotto scalare dell'esavettore  $\mathfrak{F} = (\mathbf{h}, -i\delta)$  per il suo vettore duale  $\mathfrak{F}^* = (-i\delta, \mathbf{h})$ . Moltiplicheremo questo prodotto per  $i/2$ , e otterremo la grandezza:

$$q = (\mathbf{h}\cdot\delta).$$

4. Per moltiplicazione del tetravettore  $P$  per l'esavettore  $\mathfrak{F}$

e per il suo duale  $\mathfrak{F}^*$  si ottengono due nuovi tetra-vettori:

$$A = P \cdot \mathfrak{F} = ((\boldsymbol{\rho} \cdot \boldsymbol{\delta} + [\mathbf{v} \cdot \mathbf{h}], -i \cdot (\mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\delta})) ,$$

$$B = P \cdot \mathfrak{F}^* = (i(\boldsymbol{\rho} \cdot \mathbf{h} - [\mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\delta}]), (\mathbf{v} \cdot \mathbf{h})) .$$

I quadrati dei loro valori assoluti sono:

$$A^2 = (\rho \cdot \delta + [\mathbf{v} \cdot \mathbf{h}])^2 - (\mathbf{v} \cdot \delta)^2 ,$$

$$B^2 = -(\rho \cdot \mathbf{h} - [\mathbf{v} \cdot \delta])^2 + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{h})^2 .$$

Queste due quantità non sono più indipendenti tra loro; infatti si può vedere facilmente che:

$$A^2 + B^2 = (\delta^2 - \mathbf{v}^2) \cdot (\mathbf{v}^2 - \rho^2) = \sigma^2 \cdot p .$$

Anche il prodotto scalare dei due non produce nulla di nuovo:

$$\begin{aligned} (A \cdot B) &= i((\rho \cdot \delta + [\mathbf{v} \cdot \mathbf{h}]) \cdot (\rho \cdot \mathbf{h} - [\mathbf{v} \cdot \delta]) - (\mathbf{v} \cdot \delta) \cdot (\mathbf{v} \cdot \mathbf{h})) \\ &= -i \cdot (\mathbf{h} \cdot \delta) \cdot (\mathbf{v}^2 - \rho^2) = i \cdot \sigma^2 \cdot q . \end{aligned}$$

Pertanto otteniamo ancora solo un quarto scalare, e sceglieremo per esso la grandezza  $s = -B^2$ :

$$s = (\rho \cdot \mathbf{h} - [\mathbf{v} \cdot \delta])^2 - (\mathbf{v} \cdot \mathbf{h})^2 .$$

Dalla teoria dei vettori tetradimensionali si può dimostrare che non si possono avere altri scalari indipendenti, ma qui tralascierò la dimostrazione.

Abbiamo quindi trovato come possibili le seguenti quattro variabili:

$$\begin{aligned} \sigma &= (\rho^2 - \mathbf{v}^2)^{1/2} = \rho(1 - \mathbf{v}^2/\rho^2)^{1/2} , \\ p &= \delta^2 - \mathbf{h}^2 , \\ q &= (\delta \cdot \mathbf{h}) , \\ s &= (\rho \cdot \mathbf{h} - [\mathbf{v} \cdot \delta])^2 - (\mathbf{v} \cdot \mathbf{h})^2 . \end{aligned} \tag{24}$$

**12.** Le intensità  $\mathbf{e}, \varphi, \mathbf{b}, \mathbf{f}$  si calcolano ora nel modo seguente:

$$\begin{aligned} \mathbf{e} &= 2 \cdot \frac{\partial H}{\partial p} \cdot \delta + \frac{\partial H}{\partial q} \cdot \mathbf{h} + 2 \cdot \frac{\partial H}{\partial s} \cdot \left[ \mathbf{v} \cdot (\rho \cdot \mathbf{h} - [\mathbf{v} \cdot \delta]) \right] , \\ \varphi &= - \frac{\partial H}{\partial \sigma} \cdot \frac{\rho}{\sigma} - 2 \cdot \frac{\partial H}{\partial s} \cdot (\rho \cdot \mathbf{h} - [\mathbf{v} \cdot \delta]) \cdot \mathbf{h} , \\ \mathbf{b} &= 2 \cdot \frac{\partial H}{\partial p} \cdot \mathbf{h} - \frac{\partial H}{\partial q} \cdot \delta - 2 \cdot \frac{\partial H}{\partial s} \cdot \left( \rho \cdot (\rho \cdot \mathbf{h} - [\mathbf{v} \cdot \delta]) - \mathbf{v} \cdot (\mathbf{v} \cdot \mathbf{h}) \right) , \\ \mathbf{f} &= - \frac{\partial H}{\partial \sigma} \cdot \frac{\mathbf{v}}{\sigma} - 2 \cdot \frac{\partial H}{\partial s} \cdot \left( \left[ \delta \cdot (\rho \cdot \mathbf{h} - [\mathbf{v} \cdot \delta]) \right] + \mathbf{h} \cdot (\mathbf{v} \cdot \mathbf{h}) \right) . \end{aligned} \tag{25}$$

Osserviamo che:

$$(\mathbf{v} \cdot \mathbf{h}) = \frac{1}{\rho} \left( \mathbf{v} \cdot (\rho \cdot \mathbf{h} - [\mathbf{v} \cdot \delta]) \right) ,$$

e riconosciamo immediatamente che nelle quattro espressioni (25) il fattore di  $\partial H / \partial s$  si annulla quando:

$$\rho \cdot \mathbf{h} - [\mathbf{v} \cdot \delta] = 0 .$$

Se inoltre facciamo l'ipotesi che nel campo di un elettrone a riposo sia  $\mathbf{b}=0$ ,  $\partial H / \partial q$  deve avere o il fattore  $q$  o il fattore  $s$ , perché altrimenti non si annullerebbe per  $\mathbf{v}=0$ ,  $\mathbf{h}=0$ ; ma si ha

$$q = (\delta \cdot \mathbf{h}) = \frac{1}{\rho} \left( \delta \cdot (\rho \cdot \mathbf{h} - [\mathbf{v} \cdot \delta]) \right) .$$

Dunque  $\partial H / \partial q$  si annullerà sotto la stessa condizione come per il fattore di  $\partial H / \partial s$ , ossia quando:

$$\rho \cdot \mathbf{h} - [\mathbf{v} \cdot \delta] = 0 .$$

Ora si ottiene la grandezza  $\rho' \cdot \mathbf{h}' = \rho \cdot \mathbf{h} - [\mathbf{v} \cdot \delta]$  quando si applica allo stato dell'etere una trasformazione di Lorentz, con la quale un sistema di coordinate va in un altro che si muove con la velocità  $\mathbf{q} = \mathbf{v} / \rho$ . Se  $\mathbf{q}$  è costante nello spazio e nel tempo, si può trasformare alla quiete, quindi è  $\mathbf{h}' = 0$ , cioè: per un moto stazionario la condizione su scritta è soddisfatta.

*Se facciamo l'ipotesi che nel campo di un elettrone a riposo non solo  $\mathbf{v}$  ed  $\mathbf{h}$ , ma anche  $\mathbf{b}$  ed  $\mathbf{f}$  siano ovunque nulli, per i moti stazionari si cancellano nelle intensità tutti i termini che devono la loro esistenza agli invarianti  $q$  ed  $s$ .*

Poiché finora tutte le esperienze sugli elettroni e sulla materia in generale si riferiscono solo a moti quasi stazionari, e non c'è alcuno scopo nell'appesantire lo studio mantenendo grandezze che presumibilmente non hanno alcuna influenza sul risultato, faremo nel seguito l'ipotesi semplificatrice che  $q$  ed  $s$  non intervengano affatto in  $H$ .

**13. Ipotesi.** *La funzione hamiltoniana  $H$  dipende solo dai due invarianti  $\sigma$  e  $p$ .*

Abbiamo allora per le intensità le seguenti espressioni assai semplici:

$$\mathbf{e} = 2 \cdot \frac{\partial H}{\partial p} \cdot \delta , \quad \mathbf{b} = 2 \cdot \frac{\partial H}{\partial p} \cdot \mathbf{h} , \quad \varphi = - \frac{\partial H}{\partial \sigma} \frac{\rho}{\sigma} , \quad \mathbf{f} = - \frac{\partial H}{\partial \sigma} \frac{\mathbf{v}}{\sigma} . \quad (26)$$

*Ognuno dei vettori intensità  $\mathbf{e}, \mathbf{b}, \mathbf{f}$  ha la stessa direzione del*

vettore quantità corrispondente  $\delta, \mathfrak{h}, \mathfrak{v}$ , e inoltre valgono le due proporzioni:

$$\mathfrak{f} : \mathfrak{v} = \varphi : \rho , \quad \mathfrak{b} : \mathfrak{h} = \mathfrak{e} : \delta .$$

Da qui segue immediatamente la legge: la matrice d'universo (16) è simmetrica rispetto alla diagonale.

Come  $H$ , anche  $\Phi$  naturalmente dipende ora solo da due variabili, e introdurremo perciò le due grandezze seguenti:

$$\chi = (\varphi^2 - \mathfrak{f}^2)^{1/2}, \quad \eta = (\mathfrak{e}^2 - \mathfrak{b}^2)^{1/2} . \quad (27)$$

Poniamo

$$\frac{\mathfrak{v}}{\rho} = \frac{\mathfrak{f}}{\varphi} = \mathfrak{q} ,$$

allora possiamo anche scrivere:

$$\chi = \varphi \cdot (1 - \mathfrak{q}^2)^{1/2} . \quad (27a)$$

Si osservi infine che si può trovare un significato interessante per la grandezza:

$$\text{Div}(\mathfrak{f}, i\varphi) = \text{div}\mathfrak{f} + \frac{\partial\varphi}{\partial t} .$$

Porrò per abbreviazione:

$$- \frac{1}{\sigma} \cdot \frac{\partial H}{\partial \sigma} = \psi .$$

Allora:

$$\varphi = \psi \cdot \rho , \quad \mathfrak{f} = \psi \cdot \mathfrak{v} ,$$

quindi:

$$\text{div}\mathfrak{f} + \frac{\partial\varphi}{\partial t} = \psi \cdot \left( \text{div}\mathfrak{v} + \frac{\partial\rho}{\partial t} \right) + (\mathfrak{v} \cdot \nabla\psi) + \rho \cdot \frac{\partial\psi}{\partial t} .$$

Ora si ha:

$$\text{div}\mathfrak{v} + \frac{\partial\rho}{\partial t} = 0$$

e inoltre possiamo porre:  $\mathfrak{v} = \rho \cdot \mathfrak{q}$ , dove possiamo interpretare  $\mathfrak{q}$  come la velocità con la quale la carica si sposta proprio nel posto considerato. Risulta allora:

$$(\mathfrak{v} \cdot \nabla\psi) + \rho \cdot \frac{\partial\psi}{\partial t} = \rho \cdot \left( \frac{\partial\psi}{\partial t} + \frac{\partial\psi}{\partial x} \cdot \mathfrak{q}_x + \frac{\partial\psi}{\partial y} \cdot \mathfrak{q}_y + \frac{\partial\psi}{\partial z} \cdot \mathfrak{q}_z \right) .$$

Immaginiamoci ora che i singoli elementi di volume dotati di carica siano identificabili in modo analogo a come siamo abituati con elementi di volume materiali, e interpretiamo  $\psi$  come una proprietà dell'elemento di carica in moto; allora la variazione

temporale di  $\psi$  è:

$$\frac{D\psi}{Dt} = \frac{\partial\psi}{\partial t} + \frac{\partial\psi}{\partial x} \cdot q_x + \frac{\partial\psi}{\partial y} \cdot q_y + \frac{\partial\psi}{\partial z} \cdot q_z .$$

Arriviamo così all'equazione:

$$\operatorname{div} \mathbf{f} + \frac{\partial\varphi}{\partial t} = \rho \cdot \frac{D\psi}{Dt} . \quad (28)$$

Quest'ultima equazione è di particolare interesse quando si tenga presente una teoria della gravitazione recentemente proposta da Abraham<sup>9</sup>. In una regione dove il campo elettrico è nullo le grandezze contrassegnate con  $\mathbf{f}_x, \mathbf{f}_y, \mathbf{f}_z, i\varphi$  seguono le stesse equazioni seguite dalle grandezze che Abraham chiama  $\tilde{\mathfrak{f}}_x, \tilde{\mathfrak{f}}_y, \tilde{\mathfrak{f}}_z, \tilde{\mathfrak{f}}_u$ , con la sola differenza, che Abraham pone:

$$\operatorname{Div} \tilde{\mathfrak{f}} = -4\pi\gamma \cdot \nu ,$$

dove  $\gamma$  indica la costante di gravitazione,  $\nu$  la densità di massa, mentre per il mio vettore vale l'equazione su riportata:

$$\operatorname{Div}(\mathbf{f}, i\varphi) = \rho \cdot \frac{D\psi}{Dt} .$$

Quindi dalle mie ipotesi si arriverebbe alla teoria della gravitazione di Abraham, se si assumesse che laddove esiste della massa materiale abbia luogo una crescita costante della grandezza  $\psi$  col tempo. La corrente  $\mathbf{f}$  che di conseguenza scaturirebbe dalla particella materiale sarebbe il campo gravitazionale. Ma poiché una tale assunzione è fisicamente assurda, è escluso che si possa pervenire dalle mie ipotesi ad una teoria della gravitazione in un modo così semplice. Come ciò presumibilmente debba accadere, l'ho delineato nell'Introduzione (p. 512 e 513).

Nel capitolo seguente dovrò esaminare se l'esistenza di elettroni indivisibili sia compatibile con le mie ipotesi.

Greifswald, Physikalisches Institut, 6 gennaio 1912.

-----  
(ricevuto il 9 gennaio 1912)

-----  
<sup>9</sup>M. Abraham, Physik. Zeitschr. **13**. p.1. 1912.