Le equazioni fondamentali per i processi elettromagnetici nei corpi in movimento[1]

Hermann Minkowski

Presentato nella seduta del 21 dicembre 1907.

Sommario. Introduzione: teoria di Lorentz; teorema, postulato, principio della relatività.- §1. Notazioni.

Parte prima: Trattazione del caso limite dell'etere. - §2. Le equazioni fondamentali per l'etere. - §3. Il teorema della relatività di Lorentz. - §4. Trasformazioni di Lorentz speciali. - §5. Vettori dello spazio-tempo di I e di II specie. - §6. Concetto di tempo.

Parte seconda: I processi elettromagnetici. - §7. Le equazioni fondamentali per i corpi in quiete. - §8. Le equazioni fondamentali per i corpi in moto. - §9. Le equazioni fondamentali nella teoria di Lorentz. - §10. Le equazioni fondamentali secondo E. Cohn. - §11. Rappresentazione tipica delle equazioni fondamentali. - §12. L'operatore differenziale lor. - §13. Il prodotto dei vettori di campo fF. - §14. Le forze ponderomotrici.

Appendice: Meccanica e postulato di relatività. - Linee dello spazio-tempo, tempo proprio, aggiustamento del principio di Hamilton, legge dell'energia ed equazioni del moto, gravitazione.

Sulle equazioni fondamentali dell'elettrodinamica per i corpi in moto al momento presente regnano ancora delle divergenze di opinione. Le ipotesi di Hertz[2] (1890) devono essere abbandonate, poiché si è dimostrato che esse sono in contrasto con diversi risultati sperimentali.

Nel 1895 H.A. Lorentz[3] ha pubblicato la sua teoria dei fenomeni ottici ed elettrici nei corpi in moto che, fondandosi su una rappresentazione atomistica dell'elettricità, con il suo grande successo sembra giustificare le ardite ipotesi dalle quali essa è sorretta e permeata. La teoria di Lorentz[4] parte da certe equazioni originarie, che devono valere in ogni punto dell'"etere" e da lì perviene mediante la formazione di valori medi su regioni "infinitamente piccole dal punto di vista fisico", che già contengano moltissimi elettroni, alle equazioni per i processi nei corpi ponderabili.

In particolare la teoria di Lorentz dà conto dell'inesistenza di un moto relativo della terra rispetto all'etere luminoso; essa porta questo fatto in relazione con una covarianza di quelle equazioni originarie rispetto a certe trasformazioni simultanee dei parametri spaziali e temporali, che hanno ricevuto da Poincaré[5] il nome di trasformazioni di Lorentz. Per quelle equazioni originarie la covarianza per trasformazioni di Lorentz è un fatto puramente matematico, che chiamerò il teorema

[1]Die Grundgleichungen für die elektromagnetischen Vorgänge in bewegten Körpern, Nachrichten von der Kgl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Jahrgang 1908, 53-111.

[2]"Ueber die Grundgleichungen der Elektrodynamik für bewegte Körper". Wiedemanns Ann. p. 369. 1890 (anche in: "Ges. Werke", vol. I, p. 256. Leipzig 1892).

[3]"Versuch einer Theorie der elektrischen und optischen Erscheinungen in bewegten Körpern", Leiden 1895.

[4]vedi Encyklopädie der math. Wissenschaften, vol. V 2, art. 14. "Weiterbildung der Maxwellschen Theorie. Elektronentheorie."

[5]Rend. Circ. Matem. Palermo, t. XXI (1906), p. 129.

della relatività; questo teorema si fonda essenzialmente sulla forma dell'equazione differenziale per la propagazione di onde con la velocità della luce.

Ora ci si può aspettare, senza fare ancora professione di fede in certe ipotesi sulla relazione tra elettricità e materia, che quel teorema matematicamente evidente estenda le sue conseguenze così in là, che per esso anche le leggi finora sconosciute relative ai mezzi ponderabili assumano in qualche modo una covarianza rispetto alle trasformazioni di Lorentz. Si esprime così più un atto di fiducia che un giudizio compiuto, e chiamerò questo atto di fiducia il postulato della relatività. La situazione è all'incirca come quando si postula la conservazione dell'energia in casi per i quali le forme di energia che intervengono non siano ancora note.

Se si arrivasse a sostenere l'attesa covarianza come una determinata connessione tra quantità direttamente osservabili per i corpi in moto, si potrebbe poi chiamare questa determinata connessione il principio della relatività.

Queste distinzioni mi paiono utili a caratterizzare lo stato attuale dell'elettrodinamica dei corpi in movimento.

H.A. Lorentz ha trovato il teorema di relatività e creato il postulato di relatività come un'ipotesi per la quale gli elettroni e la materia in conseguenza del moto sperimentano contrazioni secondo determinate leggi.

A. Einstein[6] ha finora espresso nel modo più netto il fatto che questo postulato non è un'ipotesi artificiosa, ma piuttosto un'interpretazione di tipo nuovo del concetto di tempo che si impone attraverso i fenomeni.

Tuttavia il principio della relatività nel senso da me riconosciuto non è stato finora formulato per l'elettrodinamica dei corpi in moto. *Con la formulazione di questo principio nella presente dissertazione ottengo le equazioni fondamentali per corpi in moto in una forma che è determinata mediante questo principio in modo completamente univoco. Si dimostrerà inoltre che nessuna delle forme finora proposte per queste equazioni si conforma esattamente a questo principio.*

Ci si aspetterebbe prima di tutto che le equazioni fondamentali assunte da Lorentz per corpi in moto soddisfacessero il postulato di relatività. Risulta tuttavia che ciò non accade per le equazioni generali che Lorentz assume per corpi arbitrari, anche magnetizzati, ma che ciò accade in modo approssimato (qualora si tralasci il quadrato delle velocità della materia rispetto al quadrato della velocità della luce) per quelle equazioni che Lorentz ha dedotto poi per corpi non magnetizzati; egli perviene tuttavia a questo adeguamento successivo al postulato di relatività solo per il fatto che la condizione di assenza di magnetizzazione è per suo conto imposta in un modo che non si conforma al postulato di relatività, ossia mediante una compensazione casuale di due infrazioni del postulato di relatività. Questa constatazione tuttavia non significa alcuna obiezione contro le ipotesi di teoria molecolare di Lorentz, ma soltanto si rende chiaro che l'ipotesi della contrazione degli elettroni a causa del moto dovrebbe essere introdotta nella teoria di Lorentz in un punto precedente a quello da Lorentz adottato.

In un'appendice mi addentro poi sulla posizione della meccanica classica rispetto al postulato di relatività. Un aggiustamento di facile realizzazione della meccanica al postulato di relatività darebbe per i fenomeni osservabili differenze a malapena percettibili, ma porterebbe ad una conseguenza assai sorprendente: *con l'imposizione preventiva del postulato di relatività ci si procura lo strumento sufficiente a dedurre poi tutte le leggi della meccanica solo dalla legge della conservazione*

[6] Ann. d. Phys. **17**, p. 891, 1905.

dell'energia (e da asserzioni sulle forme dell'energia).

§1. Notazioni.

Sia dato un sistema di riferimento $x,\ y,\ z,\ t$ di coordinate rettilinee nello spazio e nel tempo. L'unità di tempo sia scelta in rapporto tale con l'unità di lunghezza che la velocità della luce sia 1 nello spazio vuoto.

Sebbene di per sè avrei preferito non alterare le notazioni utilizzate da Lorentz, mi pare tuttavia importante far risaltare fin dall'inizio certe uniformità mediante un'altra scelta dei simboli. Indicherò il vettore

della forza elettrica con $\mathfrak{E}$, dell'induzione magnetica con $\mathfrak{M}$, dell'induzione elettrica con $\mathfrak{e}$, della forza magnetica con $\mathfrak{m}$, di modo che appariranno $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{e}$, $\mathfrak{m}$ al posto degli $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{H}$ di Lorentz.

Farò uso inoltre di quantità complesse in un modo che finora non era consueto nelle ricerche fisiche, cioè opererò invece che con t con l'espressione it, dove i indica l'unità immaginaria $\sqrt{-1}$. Saranno d'altra parte messi in evidenza i fatti veramente importanti, poiché utilizzerò una notazione con indici, ossia spesso porrò

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4 \ \text{ al posto di } x,\ y,\ z,\ it$$

e farò quindi un uso generale degli indici 1, 2, 3, 4. Ma si avrà poi a che fare, come espressamente sottolineo, sempre soltanto con un più chiaro insieme di relazioni puramente reali, ed il passaggio a equazioni reali si otterrà sempre immediatamente, pur di interpretare i simboli con un indice 4 sempre come di valore immaginario, e quelli senza indice 4 o con due indici 4 sempre come di valore reale.

Un singolo sistema di valori $x,\ y,\ z,\ t$ ovvero $x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4$ si chiamerà un punto dello spazio-tempo.

Inoltre $\mathfrak{w}$ indicherà il vettore velocità della materia, ε la costante dielettrica, μ la permeabilità magnetica, σ la conducibilità della materia, tutte intese come funzioni di $x,\ y,\ z,\ t$ (ovvero $x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4$); ρ indicherà la densità spaziale elettrica, $\mathfrak{s}$ un vettore "corrente elettrica", sulla definizione del quale verremo in seguito (nei §7 e 8).

Parte prima: Trattazione del caso limite dell'etere.

§2. Le equazioni fondamentali per l'etere.

La teoria di Lorentz riconduce le leggi dell'elettrodinamica dei corpi ponderabili mediante rappresentazioni atomistiche dell'elettricità a leggi più semplici; a queste leggi più semplici ci riconduciamo qui parimenti richiedendo che esse debbano rappresentare il caso limite $\varepsilon = 1$, $\mu = 1$, $\sigma = 0$ delle leggi per i corpi ponderabili. In questo caso limite ideale $\varepsilon = 1$, $\mu = 1$, $\sigma = 0$ dev'essere $\mathfrak{E} = \mathfrak{e}$, $\mathfrak{M} = \mathfrak{m}$, ed in ogni punto $x,\ y,\ z,\ t$ dello spazio-tempo devono valere le equazioni:

$$\text{(I)} \qquad \operatorname{rot}\mathfrak{m} - \frac{\partial \mathfrak{e}}{\partial t} = \rho\mathfrak{w},$$

$$\text{(II)} \qquad \operatorname{div}\mathfrak{e} = \rho,$$

$$\text{(III)} \qquad \operatorname{rot} \mathfrak{e} + \frac{\partial \mathfrak{m}}{\partial t} = 0,$$

$$\text{(IV)} \qquad \operatorname{div} \mathfrak{m} = 0.$$

Scriverò ora x_1, x_2, x_3, x_4 al posto di x, y, z, it ($i = \sqrt{-1}$); inoltre

$$\rho_1,\ \rho_2,\ \rho_3,\ \rho_4 \text{ al posto di } \rho\mathfrak{w}_x,\ \rho\mathfrak{w}_y,\ \rho\mathfrak{w}_z,\ i\rho,$$

cioè delle componenti della corrente di convezione $\rho\mathfrak{w}$ e della densità di elettricità moltiplicata per i; inoltre porrò

$$f_{23},\ f_{31},\ f_{12},\ f_{14},\ f_{24},\ f_{34} \text{ al posto di } \mathfrak{m}_x,\ \mathfrak{m}_y,\ \mathfrak{m}_z,\ -i\mathfrak{e}_x,\ -i\mathfrak{e}_y,\ -i\mathfrak{e}_z,$$

cioè delle componenti di $\mathfrak{m}$ e rispettivamente di $-i\mathfrak{e}$ secondo gli assi, infine ancora in generale con due indici $h,\ k$ presi dalla sequenza 1, 2, 3, 4:

$$f_{kh} = -f_{hk},$$

quindi porrò

$$f_{32} = -f_{23},\ f_{13} = -f_{31},\ f_{21} = -f_{12},$$
$$f_{41} = -f_{14},\ f_{42} = -f_{24},\ f_{43} = -f_{34}.$$

Allora le tre equazioni riassunte nella (I) e l'equazione (II) moltiplicata per i si scrivono:

$$\text{(A)} \qquad \begin{aligned}
&& \frac{\partial f_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial f_{13}}{\partial x_3} + \frac{\partial f_{14}}{\partial x_4} &= \rho_1, \\
\frac{\partial f_{21}}{\partial x_1} && + \frac{\partial f_{23}}{\partial x_3} + \frac{\partial f_{24}}{\partial x_4} &= \rho_2, \\
\frac{\partial f_{31}}{\partial x_1} + \frac{\partial f_{32}}{\partial x_2} && + \frac{\partial f_{34}}{\partial x_4} &= \rho_3, \\
\frac{\partial f_{41}}{\partial x_1} + \frac{\partial f_{42}}{\partial x_2} + \frac{\partial f_{43}}{\partial x_3} && &= \rho_4,
\end{aligned}$$

D'altra parte le tre equazioni riassunte nella (III), moltiplicate per $-i$, e l'equazione (IV), moltiplicata per -1 , si trasformano in

$$\text{(B)} \qquad \begin{aligned}
&& \frac{\partial f_{34}}{\partial x_2} + \frac{\partial f_{42}}{\partial x_3} + \frac{\partial f_{23}}{\partial x_4} &= 0, \\
\frac{\partial f_{43}}{\partial x_1} && + \frac{\partial f_{14}}{\partial x_3} + \frac{\partial f_{31}}{\partial x_4} &= 0, \\
\frac{\partial f_{24}}{\partial x_1} + \frac{\partial f_{41}}{\partial x_2} && + \frac{\partial f_{12}}{\partial x_4} &= 0, \\
\frac{\partial f_{32}}{\partial x_1} + \frac{\partial f_{13}}{\partial x_2} + \frac{\partial f_{21}}{\partial x_3} && &= 0.
\end{aligned}$$

Con questo modo di scrivere si nota immediatamente la completa simmetria sia del primo che del secondo di questi sistemi d'equazioni rispetto alle permutazioni degli indici 1, 2, 3, 4.

§3. Il teorema della relatività di Lorentz.

Il modo di scrivere le equazioni (I) - (IV) con il simbolismo del calcolo vettoriale serve notoriamente a porre in evidenza un'invarianza (o meglio covarianza) del sistema di equazioni (A) come pure del sistema (B) rispetto ad una rotazione del sistema di coordinate attorno all'origine. Eseguiamo per esempio una rotazione attorno all'asse x di un angolo fisso φ mantenendo fissi nello spazio i vettori $\mathfrak{e}$, $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{w}$; introduciamo quindi al posto di $x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4$ nuove variabili $x'_1,\ x'_2,\ x'_3,\ x'_4$ mediante

$$x'_1 = x_1 \cos\varphi + x_2 \sin\varphi,\ x'_2 = -x_1 \sin\varphi + x_2 \cos\varphi,\ x'_3 = x_3,\ x'_4 = x_4,$$

inoltre nuove quantità $\rho'_1,\ \rho'_2,\ \rho'_3,\ \rho'_4$ mediante

$$\rho'{}_1 = \rho_1 \cos\varphi + \rho_2 \sin\varphi,\ \rho'{}_2 = -\rho_1 \sin\varphi + \rho_2 \cos\varphi,\ {\rho'}'_3 = \rho_3,\ \rho'{}_4 = \rho_4,$$

nuove quantità $f'_{12}, \ldots f'_{34}$ mediante

$$f'_{23} = f_{23} \cos\varphi + f_{31} \sin\varphi,\ f'_{31} = -f_{23} \sin\varphi + f_{31} \cos\varphi,\ f'_{12} = f_{12},$$

$$f'_{14} = f_{14} \cos\varphi + f_{24} \sin\varphi,\ f'_{24} = -f_{14} \sin\varphi + f_{24} \cos\varphi,\ f'_{34} = f_{34},$$

$$f'_{kh} = -f'_{hk}\ (h, k = 1, 2, 3, 4),$$

allora dal sistema (A) deriverà necessariamente il sistema esattamente corrispondente (A') tra le nuove quantità primate, da (B) il sistema esattamente corrispondente (B').

Pertanto si può dedurre immediatamente senza alcun calcolo sulla base della simmetria del sistema (A) e del sistema (B) negli indici 1, 2, 3, 4 il teorema della relatività trovato da Lorentz.

Intenderò con $i\psi$ una quantità puramente immaginaria e considererò la sostituzione

$$\begin{gathered} x' = x_1,\ x' = x_2, \\ x'{}_3 = x_3 \cos i\psi + x_4 \sin i\psi,\ x'{}_4 = -x_3 \sin i\psi + x_4 \cos i\psi. \end{gathered} \tag{1}$$

Mediante

$$-i \tan i\psi = \frac{e^{\psi} - e^{-\psi}}{e^{\psi} + e^{-\psi}} = q,\ \psi = \frac{1}{2} \log \operatorname{nat} \frac{1+q}{1-q} \tag{2}$$

sarà

$$\cos i\psi = \frac{1}{\sqrt{1-q^2}},\ \sin i\psi = \frac{iq}{\sqrt{1-q^2}},$$

dove $-1 < q < 1$ e $\sqrt{1-q^2}$ va preso col segno positivo. Scriviamo ancora

$$x'_1 = x',\ x'_2 = y',\ x'_3 = z',\ x'_4 = it'; \tag{3}$$

allora la sostituzione (1) assume la forma

$$x' = x,\ y' = y,\ z' = \frac{z - qt}{\sqrt{1-q^2}},\ t' = \frac{-qz + t}{\sqrt{1-q^2}} \tag{4}$$

con coefficienti puramente reali.

Se ora sostituiamo nelle succitate equazioni per la rotazione attorno all'asse x ovunque 1, 2, 3, 4 con 3, 4, 1, 2 e contemporaneamente φ mediante $i\psi$, e se contemporaneamente a questa sostituzione (1) introduciamo nuove quantità $\rho_1',\ \rho_2',\ \rho_3',\ \rho_4'$ mediante

$$\rho'_1 = \rho_1,\ \rho'_2 = \rho_2,$$

$$\rho'_3 = \rho_3 \cos i\psi + \rho_4 \sin i\psi,\ \rho'_4 = -\rho_3 \sin i\psi + \rho_4 \cos i\psi,$$

nuove quantità $f'_{12}, \ldots f'_{34}$ mediante

$$f'_{41} = f_{41} \cos i\psi + f_{13} \sin i\psi,\ f'_{13} = -f_{41} \sin i\psi + f_{13} \cos i\psi,\ f'_{34} = f_{34},$$

$$f'_{32} = f_{32} \cos i\psi + f_{42} \sin i\psi,\ f'_{42} = -f_{32} \sin i\psi + f_{42} \cos i\psi,\ f'_{12} = f_{12},$$

$$f'_{kh} = -f'_{hk}\ (h, k = 1, 2, 3, 4),$$

parimenti il sistema (A) andrà nel sistema esattamente corrispondente (A'), il sistema (B) nel sistema esattamente corrispondente (B') tra le nuove quantità primate.

Tutte queste equazioni si possono immediatamente riscrivere in forma puramente reale, e l'ultimo risultato si può formulare così:

Si assuma la trasformazione reale (4) e si considerino poi $x',\ y',\ z',\ t'$ come un sistema di riferimento per lo spazio ed il tempo; siano parimenti introdotti

$$\rho' = \rho\left(\frac{-q\mathfrak{w}_z + 1}{\sqrt{1-q^2}}\right),\ \rho'\mathfrak{w}'_{z'} = \rho\left(\frac{\mathfrak{w}_z - q}{\sqrt{1-q^2}}\right),\ \rho'\mathfrak{w}'_{x'} = \rho\mathfrak{w}_x,\ \rho'\mathfrak{w}'_{y'} = \rho\mathfrak{w}_y, \tag{5}$$

inoltre

$$\mathfrak{e}'_{x'} = \frac{\mathfrak{e}_x - q\mathfrak{m}_y}{\sqrt{1-q^2}},\ \mathfrak{m}'_{y'} = \frac{-q\mathfrak{e}_x + \mathfrak{m}_y}{\sqrt{1-q^2}},\ \mathfrak{e}'_{z'} = \mathfrak{e}_z, \tag{6}$$

e

$$\mathfrak{m}'_{x'} = \frac{\mathbf{m}_x + q\mathfrak{e}_y}{\sqrt{1-q^2}},\ \mathfrak{e}'_{y'} = \frac{q\mathfrak{m}_x + \mathfrak{e}_y}{\sqrt{1-q^2}},\ \mathfrak{m}'_{z'} = \mathfrak{m}_z; \tag{7}$$

allora[7] per i vettori $\mathfrak{w}',\ \mathfrak{e}',\ \mathfrak{m}'$ con le componenti $\mathfrak{w}'_{x'},\ \mathfrak{w}'_{y'},\ \mathfrak{w}'_{z'};\ \mathfrak{e}'_{x'},\ \mathfrak{e}'_{y'},\ \mathfrak{e}'_{z'};\ \mathfrak{m}'_{x'},\ \mathfrak{m}'_{y'},\ \mathfrak{m}'_{z'}$ nel nuovo sistema di coordinate $x',\ y',\ z'$ e inoltre per la quantità ρ' valgono esattamente le equazioni (I')-(IV') analoghe alle (I)-(IV), e più precisamente il sistema (I), (II) va in (I'), (II'), il sistema (III), (IV) in (III'), (IV').

Osserviamo che qui $\mathfrak{e}_x - q\mathfrak{m}_y,\ \mathfrak{e}_y + q\mathfrak{m}_x,\ \mathfrak{e}_z$ sono le componenti del vettore $\mathfrak{e} + [\mathfrak{v}\mathfrak{m}]$, quando $\mathfrak{v}$ indica un vettore nella direzione dell'asse z positivo di modulo $|\mathfrak{v}| = q$ e

[7] Le equazioni (5) sono qui in ordine diverso, le equazioni (6) e (7) sono invece nello stesso ordine delle equazioni su citate, che da queste derivano.

$[\mathfrak{vm}]$ il prodotto vettore dei vettori $\mathfrak{v}$ ed $\mathfrak{m}$. Analogamente poi $\mathfrak{m}_x+q\mathfrak{e}_y$, $\mathfrak{m}_y-q\mathfrak{e}_x$, $\mathfrak{m}_z$ sono le componenti del vettore $\mathfrak{m}-[\mathfrak{ve}]$.

Le equazioni (6) e (7), così come stanno appaiate l'una sotto l'altra, si possono riassumere con un altro utilizzo delle quantità immaginarie in

$$\begin{aligned}\mathfrak{e}'_{x'}+i\mathfrak{m}'_{x'} &= (\mathfrak{e}_x+i\mathfrak{m}_x)\cos i\psi+(\mathfrak{e}_y+i\mathfrak{m}_y)\sin i\psi,\\ \mathfrak{e}'_{y'}+i\mathfrak{m}'_{y'} &= -(\mathfrak{e}_x+i\mathfrak{m}_x)\sin i\psi+(\mathfrak{e}_y+i\mathfrak{m}_y)\cos i\psi,\\ \mathfrak{e}'_{z'}+i\mathfrak{m}'_{z'} &= \mathfrak{e}_z+i\mathfrak{m}_z,\end{aligned}$$

e osserviamo ancora che quando φ indica un qualche angolo reale, da queste ultime relazioni si ottengono inoltre le combinazioni

$$\begin{aligned}&(\mathfrak{e}'_{x'}+i\mathfrak{m}'_{x'})\cos\varphi+\left(\mathfrak{e}'_{y'}+i\mathfrak{m}'_{y'}\right)\sin\varphi\\ &=(\mathfrak{e}_x+i\mathfrak{m}_x)\cos(\varphi+i\psi)+(\mathfrak{e}_y+i\mathfrak{m}_y)\sin(\varphi+i\psi)\,,\end{aligned}\tag{8}$$

$$\begin{aligned}&-(\mathfrak{e}'_{x'}+i\mathfrak{m}'_{x'})\sin\varphi+\left(\mathfrak{e}'_{y'}+i\mathfrak{m}'_{y'}\right)\cos\varphi\\ &=-(\mathfrak{e}_x+i\mathfrak{m}_x)\sin(\varphi+i\psi)+(\mathfrak{e}_y+i\mathfrak{m}_y)\cos(\varphi+i\psi)\,.\end{aligned}\tag{9}$$

§4. Trasformazioni di Lorentz speciali.

Il ruolo che la direzione z gioca nella trasformazione 4 può essere facilmente esteso ad una direzione qualsiasi, purché si sottopongano i sistemi di assi $x,\ y,\ z$ e $x',\ y',\ z'$ ad una ed uguale rotazione rispetto a se stessi. Giungiamo così ad una legge più generale.

Sia $\mathfrak{v}$ con le componenti $\mathfrak{v}_x,\ \mathfrak{v}_y,\ \mathfrak{v}_z$ un dato vettore, con un modulo $|\mathfrak{v}|=q$ diverso da zero che sia minore di 1; esso abbia una certa direzione. Intendiamo in generale con $\bar{\mathfrak{v}}$ una direzione qualsiasi ortogonale a $\mathfrak{v}$ e indichiamo inoltre la componente di un vettore $\mathfrak{r}$ lungo la direzione $\mathfrak{v}$ ovvero lungo la direzione $\bar{\mathfrak{v}}$ con $\mathfrak{r}_{\mathfrak{v}}$ ovvero rispettivamente con $\mathfrak{r}_{\bar{\mathfrak{v}}}$.

Al posto di $x,\ y,\ z,\ t$ si introducano ora nuove quantità $x',\ y',\ z',\ t'$ nel modo seguente. Si indichi per brevità con $\mathfrak{r}$ il vettore con le componenti $x,\ y,\ z$ nel primo sistema di riferimento, con $\mathfrak{r}'$ quello con le componenti $x',\ y',\ z'$ nel secondo sistema di riferimento; allora per la direzione di $\mathfrak{v}$ dovrà essere

$$\mathfrak{r}'_{\mathfrak{v}}=\frac{\mathfrak{r}_{\mathfrak{v}}-qt}{\sqrt{1-q^2}},\tag{10}$$

per ogni direzione $\bar{\mathfrak{v}}$ perpendicolare a $\mathfrak{v}$:

$$\mathfrak{r}'_{\bar{\mathfrak{v}}}=\mathfrak{r}_{\bar{\mathfrak{v}}},\tag{11}$$

e inoltre:

$$t'=\frac{-q\mathfrak{r}_{\mathfrak{v}}+t}{\sqrt{1-q^2}}.\tag{12}$$

Le notazioni $\mathfrak{r}'_{\mathfrak{v}}$ e $\mathfrak{r}'_{\overline{\mathfrak{v}}}$ vanno qui intese nel senso che alla direzione $\mathfrak{v}$ e a ogni direzione $\overline{\mathfrak{v}}$ ortogonale a $\mathfrak{v}$ in $x,\ y,\ z$ è sempre associata la direzione con gli stessi coseni direttori in $x',\ y',\ z'$.

Chiamerò trasformazione di Lorentz speciale una trasformazione che sia rappresentata dalle (10), (11), (12) con la condizione $0 < q < 1$, e $\mathfrak{v}$ si dirà il vettore, la direzione di $\mathfrak{v}$ l'asse, il modulo di $\mathfrak{v}$ il momento di questa trasformazione di Lorentz speciale.

Siano inoltre così definiti, in $x',\ y',\ z',\ \rho'$ ed i vettori $\mathfrak{w}',\ \mathfrak{e}',\ \mathfrak{m}'$:

$$\rho' = \frac{\rho\left(-q\mathfrak{w}_{\mathfrak{v}} + 1\right)}{\sqrt{1-q^2}}, \tag{13}$$

$$\rho'\mathfrak{w}'_{\mathfrak{v}} = \frac{\rho\mathfrak{w}_{\mathfrak{v}} - \rho q}{\sqrt{1-q^2}},\ \rho'\mathfrak{w}'_{\overline{\mathfrak{v}}} = \rho\mathfrak{w}_{\overline{\mathfrak{v}}}, \tag{14}$$

inoltre[8] è

$$\begin{aligned} (\mathfrak{e}' + i\mathfrak{m}')_{\overline{\mathfrak{v}}} &= \frac{(\mathfrak{e} + i\mathfrak{m} - i\,[\mathfrak{w},\ \mathfrak{e} + i\mathfrak{m}])_{\overline{\mathfrak{v}}}}{\sqrt{1-q^2}}, \\ (\mathfrak{e}' + i\mathfrak{m}')_{\mathfrak{v}} &= (\mathfrak{e} + i\mathfrak{m} - i\,[\mathfrak{w},\ \mathfrak{e} + i\mathfrak{m}])_{\mathfrak{v}}\,, \end{aligned} \tag{15}$$

e quindi risulta la legge, secondo la quale i sistemi di equazioni (I), (II) e (III), (IV) vanno ciascuno nel sistema esattamente corrispondente con le quantità primate.

La soluzione delle equazioni (10), (11), (12) porta a

$$\mathfrak{r}_{\mathfrak{v}} = \frac{\mathfrak{r}'_{\mathfrak{v}} + qt'}{\sqrt{1-q^2}},\ \mathfrak{r}_{\overline{\mathfrak{v}}} = \mathfrak{r}'_{\overline{\mathfrak{v}}},\ t = \frac{q\mathfrak{r}'_{\mathfrak{v}} + t'}{\sqrt{1-q^2}}. - \tag{16}$$

Esponiamo ora un'osservazione assai importante nel seguito sulla relazione tra i vettori $\mathfrak{w}$ e $\mathfrak{w}'$. Si può far uso della notazione con gli indici 1, 2, 3, 4 già utilizzata più volte, con la quale poniamo $x'_1,\ x'_2,\ x'_3,\ x'_4$ al posto di $x',\ y',\ z',\ it'$ e $\rho'_1,\ \rho'_2,\ \rho'_3,\ \rho'_4$ al posto di $\rho'\mathfrak{w}'_{x'},\ \rho'\mathfrak{w}'_{y'},\ \rho'\mathfrak{w}'_{z'},\ i\rho'$. Come una rotazione attorno all'asse z, anche la trasformazione (4) e più in generale la trasformazione (10), (11), (12) è evidentemente una trasformazione lineare di determinante +1, per la quale

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2,\ \text{cioè}\ x^2 + y^2 + z^2 - t^2 \tag{17}$$

va in

$$x'^2_1 + x'^2_2 + x'^2_3 + x'^2_4,\ \text{cioè}\ x'^2 + y'^2 + z'^2 - t'^2.$$

In base alle espressioni (13), (14) anche

$$-\left(\rho_1^2 + \rho_2^2 + \rho_3^2 + \rho_4^2\right) = \rho^2\left(1 - \mathfrak{w}_x^2 - \mathfrak{w}_y^2 - \mathfrak{w}_z^2\right) = \rho^2\left(1 - \mathfrak{w}^2\right)$$

[8] Le parentesi tonde racchiuderanno solo espressioni che si riferiscono all'indice, e $[\mathfrak{w},\ \mathfrak{e} + i\mathfrak{m}]$ indicherà il prodotto vettore di $\mathfrak{w}$ ed $\mathfrak{e} + i\mathfrak{m}$.

andrà in $\rho'^2\left(1-\mathfrak{w}'^2\right)$, ovvero in altre parole

$$\rho\sqrt{1-\mathfrak{w}^2}, \tag{18}$$

nel quale la radice quadrata va assunta positiva, sarà un invariante per trasformazioni di Lorentz.

Se dividiamo $\rho_1,\ \rho_2,\ \rho_3,\ \rho_4$ per questa quantità, risultano i 4 valori

$$w_1=\frac{\mathfrak{w}_x}{\sqrt{1-\mathfrak{w}^2}},\ w_2=\frac{\mathfrak{w}_y}{\sqrt{1-\mathfrak{w}^2}},\ w_3=\frac{\mathfrak{w}_z}{\sqrt{1-\mathfrak{w}^2}},\ w_4=\frac{i}{\sqrt{1-\mathfrak{w}^2}},$$

tra i quali sussiste la relazione

$$w_1^2+w_2^2+w_3^2+w_4^2=-1. \tag{19}$$

Evidentemente questi 4 valori sono determinati univocamente dal vettore $\mathfrak{w}$, e viceversa da 4 valori $w_1,\ w_2,\ w_3,\ w_4$ dei quali $w_1,\ w_2,\ w_3$ siano reali, $-iw_4$ reale e positivo, e che soddisfino la condizione (19), si ricava a ritroso secondo queste equazioni un vettore $\mathfrak{w}$ di modulo <1.

L' importanza di $w_1,\ w_2,\ w_3,\ w_4$ sta nel fatto che essi sono i rapporti tra dx_1, dx_2, dx_3, dx_4 e

$$\sqrt{-\left(dx_1^2+dx_2^2+dx_3^2+dx_4^2\right)}=dt\sqrt{1-\mathfrak{w}^2} \tag{20}$$

per la materia che si trova nel punto dello spazio-tempo x_1, x_2, x_3, x_4, quando lo stesso punto della materia passa ad uno stato prossimo nel tempo. Ora le equazioni (10), (11), (12), si estendono immediatamente ai differenziali dx, dy, dz, dt e dx', dy', dz', dt', e si avrà in particolare

$$-\left(dx_1^2+dx_2^2+dx_3^2+dx_4^2\right)=-\left({dx'}_1^2+{dx'}_2^2+{dx'}_3^2+{dx'}_4^2\right).$$

In seguito ad esecuzione della trasformazione di Lorentz si deve prendere come velocità della materia nel nuovo sistema di riferimento nello stesso punto dello spazio-tempo x', y', z', t' il vettore $\mathfrak{w}'$ con i rapporti dx'/dt', dy'/dt', dz'/dt' come componenti.

Inoltre è chiaro che il sistema di valori

$$x_1=w_1,\ x_2=w_2,\ x_3=w_3,\ x_4=w_4,$$

in forza della trasformazione di Lorentz (10), (11), (12) va proprio in quel nuovo sistema di valori

$${x'}_1=w_1',\ {x'}_2=w_2',\ {x'}_3=w_3',\ {x'}_4=w_4',$$

che dopo la trasformazione ha per la velocità $\mathfrak{w}'$ proprio il significato che prima della trasformazione aveva per la velocità il primo sistema di valori.

Se in particolare il vettore $\mathfrak{v}$ della trasformazione speciale di Lorentz è uguale al vettore velocità $\mathfrak{w}$ della materia nel punto dello spazio-tempo x_1, x_2, x_3, x_4, discende dalle (10), (11), (12):

$$w'_1 = 0,\ w'_2 = 0,\ w'_3 = 0,\ w' = i_4.$$

In questa situazione il punto in questione dello spazio-tempo acquista a seguito della trasformazione la velocità $\mathfrak{w}' = 0$; esso sarà, per così dire, trasformato alla quiete. Possiamo perciò opportunamente chiamare l'invariante $\rho\sqrt{1-\mathfrak{w}^2}$ la densità a riposo dell'elettricità.

§5. Vettori dello spazio-tempo di I e di II specie.

Unendo il risultato fondamentale relativo alle trasformazioni di Lorentz con il fatto che sia il sistema (A) che il sistema (B) sono in ogni caso covarianti rispetto ad una rotazione del sistema di riferimento spaziale attorno all'origine otteniamo il teorema generale della relatività. Per formularlo in modo facilmente comprensibile può essere conveniente definire una serie di espressioni abbreviate, mentre d'altra parte continuerò ad utilizzare quantità complesse, per porre in evidenza determinate simmetrie.

Una trasformazione lineare omogenea

$$\begin{aligned}
x_1 &= \alpha_{11}x'_1 + \alpha_{12}x'_2 + \alpha_{13}x'_3 + \alpha_{14}x'_4,\\
x_2 &= \alpha_{21}x'_1 + \alpha_{22}x'_2 + \alpha_{23}x'_3 + \alpha_{24}x'_4,\\
x_3 &= \alpha_{31}x'_1 + \alpha_{32}x'_2 + \alpha_{33}x'_3 + \alpha_{34}x'_4,\\
x_4 &= \alpha_{41}x'_1 + \alpha_{42}x'_2 + \alpha_{43}x'_3 + \alpha_{44}x'_4,
\end{aligned} \tag{21}$$

di determinante +1, nella quale tutti i coefficienti nei quali non compaia nessun indice 4 siano reali, mentre $\alpha_{14},\ \alpha_{24},\ \alpha_{34}$ come pure $\alpha_{41},\ \alpha_{42},\ \alpha_{43}$ siano immaginari puri (eventualmente zero), e infine α_{44} sia di nuovo reale e in particolare > 0, e mediante la quale

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 \ \text{ vada in } \ {x'}_1^2 + {x'}_2^2 + {x'}_3^2 + {x'}_4^2,$$

la chiamerò in generale una trasformazione di Lorentz.

Se si pone

$$x'_1 = x',\ x'_2 = y',\ x'_3 = z',\ x'_4 = it',$$

da essa risulta immediatamente una trasformazione lineare omogenea di $x,\ y,\ z,\ t$ in $x',\ y',\ z',\ t'$ con coefficienti puramente reali, per la quale l'espressione

$$-x^2 - y^2 - z^2 + t^2 \text{ va in } -x'^2 - y'^2 - z'^2 + t'^2,$$

e a un qualsiasi siffatto sistema di valori $x,\ y,\ z,\ t$ con t positivo, per il quale quest'espressione sia > 0, corrisponde sempre anche un t' positivo; questo risulta facilmente evidente dalla continuità dell'espressione in $x,\ y,\ z,\ t$.

L'ultima riga verticale del sistema di coefficienti della (21) deve soddisfare la condizione

$$\alpha_{14}^2 + \alpha_{24}^2 + \alpha_{34}^2 + \alpha_{44}^2 = 1. \tag{22}$$

Siano $\alpha_{14} = 0$, $\alpha_{24} = 0$, $\alpha_{34} = 0$, allora $\alpha_{44} = 1$ e la trasformazione di Lorentz si riduce ad una pura rotazione del sistema di coordinate spaziale attorno all'origine.

Siano α_{14}, α_{24}, α_{34} non simultaneamente nulli e si ponga

$$\alpha_{14} : \alpha_{24} : \alpha_{34} : \alpha_{44} = \mathfrak{v}_x : \mathfrak{v}_y : \mathfrak{v}_z : i,$$

allora dalla (22) risulta il valore

$$q = \left(\mathfrak{v}_x^2 + \mathfrak{v}_y^2 + \mathfrak{v}_z^2\right)^{1/2} < 1.$$

D'altra parte, per ogni sistema di valori α_{14}, α_{24}, α_{34}, α_{44} che soddisfi in questo modo la condizione (22) con $\mathfrak{v}_x$, $\mathfrak{v}_y$, $\mathfrak{v}_z$ reali, si può costruire la trasformazione di Lorentz speciale (16) con α_{14}, α_{24}, α_{34}, α_{44} come ultima riga verticale e ogni trasformazione di Lorentz con la suddetta ultima riga verticale dei coefficienti può quindi essere composta da questa trasformazione di Lorentz speciale e da una corrispondente rotazione del sistema di coordinate spaziale attorno all'origine.

La totalità delle trasformazioni di Lorentz costituisce un gruppo.

Per vettore dello spazio-tempo di I specie si intenderà un arbitrario sistema di quattro quantità ρ_1, ρ_2, ρ_3, ρ_4 con la prescrizione che per ogni trasformazione di Lorentz (21) esso venga sostituito da quel sistema ρ'_1, ρ'_2, ρ'_3, ρ'_4 che si ottiene dalla (21) per i valori x'_1, x'_2, x'_3, x'_4, quando per x_1, x_2, x_3, x_4 si assumano i valori ρ_1, ρ_2, ρ_3, ρ_4.

Impieghiamo oltre al vettore dello spazio-tempo di I specie variabile x_1, x_2, x_3, x_4 un secondo siffatto vettore dello spazio-tempo di I specie variabile u_1, u_2, u_3, u_4, e costruiamo l'espressione bilineare

$$\begin{aligned} & f_{23}(x_2u_3 - x_3u_2) + f_{31}(x_3u_1 - x_1u_3) + f_{12}(x_1u_2 - x_2u_1) \\ & + f_{14}(x_1u_4 - x_4u_1) + f_{24}(x_2u_4 - x_4u_2) + f_{34}(x_3u_4 - x_4u_3) \end{aligned} \tag{23}$$

con sei coefficienti $f_{23}, \ldots f_{34}$. Notiamo che da un lato essa si può scrivere con notazione vettoriale a partire dai 4 vettori

$$x_1,\ x_2,\ x_3;\ u_1,\ u_2,\ u_3;\ f_{23},\ f_{31},\ f_{12};\ f_{14},\ f_{24},\ f_{34}$$

e dalle costanti x_4 e u_4 , e dall'altro è simmetrica negli indici 1, 2, 3, 4. Se si sostituiscono simultaneamente x_1, x_2, x_3, x_4 e u_1, u_2, u_3, u_4 secondo la trasformazione di Lorentz (21), la (23) si trasforma in un'espressione

$$\begin{aligned} & f'_{23}(x'_2u'_3 - x'_3u'_2) + f'_{31}(x'_3u'_1 - x'_1u'_3) + f'_{12}(x'_1u'_2 - x'_2u'_1) \\ & + f'_{14}(x'_1u'_4 - x'_4u'_1) + f'_{24}(x'_2u'_4 - x'_4u'_2) + f'_{34}(x'_3u'_4 - x'_4u'_3) \end{aligned} \tag{24}$$

con 6 determinati coefficienti $f'_{23}, \ldots f'_{34}$ che dipendono soltanto dalle 6 quantità $f_{23}, \ldots f_{34}$ e dai 16 coefficienti α_{11}, $\alpha_{12} \ldots \alpha_{44}$.

Definiamo un vettore dello spazio-tempo di II specie come un sistema di sei quantità f_{23}, f_{31}, f_{12}, f_{14}, f_{24}, f_{34}, con la prescrizione che per ogni trasformazione di Lorentz sia sostituito da quel nuovo sistema f'_{23}, f'_{31}, f'_{12}, f'_{14}, f'_{24}, f'_{34}, che si conforma alla relazione discussa prima della forma (23) con la forma (24).

Esprimo d'ora in poi nel modo seguente il teorema generale della relatività riguardante le equazioni (I)-(IV), le "equazioni fondamentali per l'etere".

Si sottopongano x, y, z, it (coordinate spaziali e tempo $\times i$) ad una trasformazione di Lorentz arbitraria, e simultaneamente si trasformino $\rho\mathfrak{w}_x$, $\rho\mathfrak{w}_y$,

$\rho\mathfrak{w}_z$, $i\rho$ (corrente di convezione e densità di carica $\times i$) come vettore dello spazio-tempo di I specie, ed inoltre $\mathfrak{m}_x$, $\mathfrak{m}_y$, $\mathfrak{m}_z$, $-i\mathfrak{e}_x$, $-i\mathfrak{e}_y$, $-i\mathfrak{e}_z$ (forza magnetica ed induzione elettrica $\times -i$) come vettore dello spazio-tempo di II specie; allora il sistema delle equazioni (I), (II) ed il sistema delle equazioni (III), (IV) vanno ciascuno nel sistema delle relazioni che si scrivono in modo corrispondente tra le corrispondenti quantità nuove introdotte.

Questi fatti si possono esprimere più brevemente anche a parole: il sistema (I), (II) come il sistema (III), (IV) è covariante per ogni trasformazione di Lorentz, purché si trasformi $\rho\mathfrak{w}$, $i\rho$ come vettore dello spazio-tempo di I specie, $\mathfrak{m}$, $-i\mathfrak{e}$ come vettore dello spazio-tempo di II specie. O in modo ancora più pregnante:

$\rho\mathfrak{w}$, $i\rho$ è un vettore dello spazio-tempo di I specie, $\mathfrak{m}$, $-i\mathfrak{e}$ è un vettore dello spazio-tempo di II specie. -

Aggiungo ancora alcune osservazioni, per chiarire il concetto di vettore dello spazio-tempo di II specie. Gli invarianti per un tale vettore $\mathfrak{m}$, $-i\mathfrak{e}$ sono evidentemente

$$\mathfrak{m}^2 - \mathfrak{e}^2 = f_{23}^2 + f_{31}^2 + f_{12}^2 + f_{14}^2 + f_{24}^2 + f_{34}^2, \tag{25}$$

$$\mathfrak{m}\mathfrak{e} = i\left(f_{23}f_{14} + f_{31}f_{24} + f_{12}f_{34}\right). \tag{26}$$

Un vettore dello spazio-tempo di II specie $\mathfrak{m}$, $-i\mathfrak{e}$ (dove $\mathfrak{m}$ ed $\mathfrak{e}$ sono vettori spaziali reali) può dirsi singolare quando lo scalare quadrato $(\mathfrak{m} - i\mathfrak{e})^2 = 0$, cioè si abbia $\mathfrak{m}^2 - \mathfrak{e}^2 = 0$ e parimenti $\mathfrak{m}\mathfrak{e} = 0$, cioè i vettori $\mathfrak{m}$ ed $\mathfrak{e}$ abbiano ugual modulo e inoltre siano tra loro ortogonali. Quando ciò avviene, queste due proprietà del vettore dello spazio-tempo di II specie permangono per ogni trasformazione di Lorentz.

Se il vettore dello spazio-tempo di II specie $\mathfrak{m}$, $-i\mathfrak{e}$ non è singolare, ruotiamo il sistema di coordinate spaziale in modo che il prodotto vettore $[\mathfrak{m}\mathfrak{e}]$ vada sull'asse z, di modo che sia $\mathfrak{m}_z = 0, \mathfrak{e}_z = 0$. Allora $(\mathfrak{m}_x - i\mathfrak{e}_x)^2 + (\mathfrak{m}_y - i\mathfrak{e}_y)^2 \neq 0$, quindi $(\mathfrak{e}_y + i\mathfrak{m}_y) / (\mathfrak{e}_x + i\mathfrak{m}_x)$ è diverso da $\pm i$ e possiamo determinare un argomento complesso $\varphi + i\psi$ in modo tale che sia

$$\tan(\varphi + i\psi) = \frac{(\mathfrak{e}_y + i\mathfrak{m}_y)}{(\mathfrak{e}_x + i\mathfrak{m}_x)}.$$

Quindi, tenendo conto dell'equazione (9), mediante la trasformazione (1) corrispondente a ψ, e una successiva rotazione attorno all'asse z di un angolo φ, si compirà una trasformazione di Lorentz, per la quale si avrà anche $\mathfrak{m}_y = 0$, $\mathfrak{e}_y = 0$, quindi ora sia $\mathfrak{m}$ che $\mathfrak{e}$ cadranno entrambi lungo la nuova linea x; perciò è fissato a priori mediante gli invarianti $\mathfrak{m}^2 - \mathfrak{e}^2$ e $(\mathfrak{m}\mathfrak{e})$ quale sia la grandezza di questi vettori e se essi abbiano direzione uguale od opposta, ovvero se uno sia nullo.

§6. Concetto di tempo.

Mediante le trasformazioni di Lorentz sono consentite certe modificazioni del parametro temporale. In conseguenza di ciò non è più consentito parlare della simultaneità di due eventi di per sè. L'utilizzo di questo concetto presuppone anzi che la libertà dei 6 parametri, che è disponibile per la determinazione di un sistema di riferimento per lo spazio ed il tempo, sia ristretta a solo 3 parametri. Solo perché siamo abituati a trattare questa restrizione come evidente con grande approssimazione, riteniamo il concetto di simultaneità di due eventi come esistente di per sè[9]. In realtà si ha a che fare con la situazione seguente.

Un sistema di riferimento $x,\ y,\ z,\ t$ per i punti dello spazio-tempo (eventi) sia in qualche modo noto. Si confronti un punto dello spazio $A\,(x_0,\ y_0,\ z_0)$ al tempo $t_0 = 0$ con un altro punto dello spazio $P\,(x,\ y,\ z)$ ad un altro tempo t, e la differenza dei tempi $t - t_0$ (sia $t > t_0$) sia minore della lunghezza AP, cioè del tempo che la luce impiega a propagarsi da A a P, e sia q il quoziente $t - t_0/AP < 1$; allora mediante la trasformazione di Lorentz speciale, che ha AP come asse e q come momento, possiamo introdurre un nuovo parametro temporale t' che (vedi Eq. (12) nel §4) attribuisce ad entrambi i punti dello spazio-tempo $A,\ t_0$ e $P,\ t$ lo stesso valore $t' = 0$; questi due eventi si possono quindi intendere anche come simultanei.

Introduciamo poi ad uno stesso tempo $t_0 = 0$ due punti distinti dello spazio $A,\ B$ oppure tre punti dello spazio $A,\ B,\ C$ che non giacciano su una retta, e confrontiamo con essi un punto dello spazio P fuori dalla retta AB ovvero dal piano ABC ad un altro tempo t, e la differenza dei tempi $t - t_0$ (sia $t > t_0$) sia minore del tempo che la luce impiega a propagarsi dalla retta AB o dal piano ABC fino a P, e sia q il quoziente tra il primo ed il secondo tempo; allora eseguendo la trasformazione di Lorentz speciale, che ha come asse la perpendicolare condotta per P ad AB, ovvero rispettivamente ad ABC, ed ha q come momento, tutti e 3 (rispettivamente 4) gli eventi $A,\ t_0$; $B,\ t_0$; $(C,\ t_0)$ e $P,\ t$ appaiono come simultanei.

Se tuttavia quattro punti dello spazio che non giacciano su un piano vengono considerati ad uno stesso tempo t_0, non è più possibile introdurre mediante una trasformazione di Lorentz una modificazione del parametro temporale senza che il carattere di simultaneità di questi quattro punti dello spazio-tempo vada perduto.

Al matematico, che è abituato a considerazioni su varietà multidimensionali e inoltre alle costruzioni concettuali della cosidetta geometria non euclidea, non può provocare alcuna difficoltà seria l'adattare il concetto di tempo all'impiego delle trasformazioni di Lorentz. Al bisogno di accostarsi all'essenza di queste trasformazioni dal punto di vista fisico viene incontro l'articolo di A. Einstein citato nell'Introduzione.

Parte seconda: I processi elettromagnetici.

§7. Le equazioni fondamentali per i corpi in quiete.

Dopo questa esposizione introduttiva, nella quale abbiamo sviluppato l'apparato matematico alquanto più ristretto per il caso limite ideale $\varepsilon = 1$, $\mu = 1$, $\sigma = 0$, ci rivolgiamo ora alle leggi per i processi elettromagnetici nella materia. Cerchiamo quelle relazioni che - presupponendo opportuni dati al contorno - rendano possibile trovare, ad ogni punto e per ogni tempo, quindi come funzioni di $x,\ y,\ z,\ t$: i vettori della forza elettrica $\mathfrak{E}$, dell'induzione magnetica $\mathfrak{M}$, dell'induzione elettrica $\mathfrak{e}$, della forza magnetica $\mathfrak{m}$, la densità spaziale elettrica ρ, il vettore "corrente elettrica $\mathfrak{s}$" (la relazione della quale con la corrente di conduzione dovrà poi riconoscersi dal modo di apparire della conducibilità), e infine il vettore $\mathfrak{w}$, la velocità della materia.

Le relazioni in questione si dividono in due classi:

[9] All'incirca come quando, confinandoci ad un piccolo intorno di un punto su di una superficie sferica, potremmo per questo incorrere nell'errore di considerare la sfera come una figura geometrica per la quale un diametro è di per sè privilegiato.

in primo luogo quelle equazioni che, quando il vettore $\mathfrak{w}$ in funzione di $x,\ y,\ z,\ t$ è dato, e quindi è conosciuto il moto della materia, portano alla conoscenza di tutte le altre sunnominate grandezze come funzioni di $x,\ y,\ z,\ t$, - chiamerò in particolare questa prima classe le equazioni fondamentali, -

in secondo luogo le espressioni per le forze ponderomotrici, che mediante l'introduzione delle leggi della meccanica portano ulteriori informazioni sul vettore $\mathfrak{w}$ in funzione di $x,\ y,\ z,\ t$.

Per il caso di corpi a riposo, cioè quando $\mathfrak{w}\,(x,\ y,\ z,\ t) = 0$, le teorie di Maxwell (Heaviside, Hertz) e di Lorentz portano alle stesse equazioni fondamentali. Esse sono

1) le equazioni differenziali, che ancora non contengono alcuna costante che si riferisca alla materia:

$$\text{(I)} \qquad \operatorname{rot}\mathfrak{m} - \frac{\partial \mathfrak{e}}{\partial t} = \mathfrak{s},$$

$$\text{(II)} \qquad \operatorname{div}\mathfrak{e} = \rho,$$

$$\text{(III)} \qquad \operatorname{rot}\mathfrak{E} + \frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial t} = 0,$$

$$\text{(IV)} \qquad \operatorname{div}\mathfrak{M} = 0.$$

2) ulteriori relazioni, che caratterizzano l'influenza della materia presente; nel caso più importante, al quale qui ci limitiamo, di corpi isotropi, esse si porranno nella forma

$$\text{(V)} \qquad \mathfrak{e} = \varepsilon\mathfrak{E},\ \mathfrak{M} = \mu\mathfrak{m},\ \mathfrak{s} = \sigma\mathfrak{E},$$

dove ε, la costante dielettrica, μ, la permeabilità magnetica, σ, la conducibilità della materia, sono da pensarsi come funzioni note di $x,\ y,\ z$ e t. $\mathfrak{s}$ va inteso qui come corrente di conduzione.

Con un cambiamento di notazione faccio ora riapparire in queste equazioni una simmetria ancora nascosta. Pongo come nell'esposizione precedente:

$$x_1 = x,\ x_2 = y,\ x_3 = z,\ x_4 = it,$$

e scrivo

$$s_1,\ s_2,\ s_3,\ s_4 \text{ al posto di } \mathfrak{s}_x,\ \mathfrak{s}_y,\ \mathfrak{s}_z,\ i\rho,$$

inoltre

$$f_{23},\ f_{31},\ f_{12},\ f_{14},\ f_{24},\ f_{34} \text{ al posto di } \mathfrak{m}_x,\ \mathfrak{m}_y,\ \mathfrak{m}_z,\ -i\mathfrak{e}_x,\ -i\mathfrak{e}_y,\ -i\mathfrak{e}_z,$$

e ancora

$$F_{23},\ F_{31},\ F_{12},\ F_{14},\ F_{24},\ F_{34} \text{ al posto di } \mathfrak{M}_x,\ \mathfrak{M}_y,\ \mathfrak{M}_z,\ -i\mathfrak{E}_x,\ -i\mathfrak{E}_y,\ -i\mathfrak{E}_z;$$

infine per tutte le altre coppie di indici $h,\ k$ non uguali presi dalla sequenza 1, 2, 3, 4 varrà sempre

$$f_{kh} = -f_{hk},\ F_{kh} = -F_{hk}.$$

(Le lettere $f,\ F$ ricordano la parola "Feld", la s "Strom".)

Le equazioni (I), (II) si riscrivono allora come

$$\text{(A)}\qquad \begin{aligned}
&\phantom{\frac{\partial f_{21}}{\partial x_1}+{}}\frac{\partial f_{12}}{\partial x_2}+\frac{\partial f_{13}}{\partial x_3}+\frac{\partial f_{14}}{\partial x_4}=s_1,\\
&\frac{\partial f_{21}}{\partial x_1}\phantom{+\frac{\partial f_{12}}{\partial x_2}}+\frac{\partial f_{23}}{\partial x_3}+\frac{\partial f_{24}}{\partial x_4}=s_2,\\
&\frac{\partial f_{31}}{\partial x_1}+\frac{\partial f_{32}}{\partial x_2}\phantom{+\frac{\partial f_{13}}{\partial x_3}}+\frac{\partial f_{34}}{\partial x_4}=s_3,\\
&\frac{\partial f_{41}}{\partial x_1}+\frac{\partial f_{42}}{\partial x_2}+\frac{\partial f_{43}}{\partial x_3}\phantom{+\frac{\partial f_{14}}{\partial x_4}}=s_4,
\end{aligned}$$

e le equazioni (III), (IV) si riscrivono come

$$\text{(B)}\qquad \begin{aligned}
&\phantom{\frac{\partial F_{43}}{\partial x_1}+{}}\frac{\partial F_{34}}{\partial x_2}+\frac{\partial F_{42}}{\partial x_3}+\frac{\partial F_{23}}{\partial x_4}=0,\\
&\frac{\partial F_{43}}{\partial x_1}\phantom{+\frac{\partial F_{34}}{\partial x_2}}+\frac{\partial F_{14}}{\partial x_3}+\frac{\partial F_{31}}{\partial x_4}=0,\\
&\frac{\partial F_{24}}{\partial x_1}+\frac{\partial F_{41}}{\partial x_2}\phantom{+\frac{\partial F_{14}}{\partial x_3}}+\frac{\partial F_{12}}{\partial x_4}=0,\\
&\frac{\partial F_{32}}{\partial x_1}+\frac{\partial F_{13}}{\partial x_2}+\frac{\partial F_{21}}{\partial x_3}\phantom{+\frac{\partial F_{12}}{\partial x_4}}=0.
\end{aligned}$$

§8. Le equazioni fondamentali per i corpi in moto.

Ora arriveremo a fissare in modo univoco le equazioni fondamentali per corpi in moto arbitrario esclusivamente mediante i seguenti tre assiomi:

Il primo assioma sarà:

Quando un singolo punto della materia in un certo istante è a riposo, e quindi il vettore $\mathfrak{w}$ è nullo per un sistema $x,\ y,\ z,\ t$, - il circondario può essere pensato in un qualche moto - per il punto dello spazio-tempo $x,\ y,\ z,\ t$ tra ρ, i vettori $\mathfrak{s},\ \mathfrak{e},\ \mathfrak{m},\ \mathfrak{E},\ \mathfrak{M}$ e le loro derivate rispetto ad $x,\ y,\ z,\ t$ hanno luogo esattamente le relazioni (A), (B), (V) che hanno da valere nel caso che tutta la materia sia a riposo.

Il secondo assioma sarà:

Ogni velocità della materia è < 1, minore della velocità di propagazione della luce nello spazio vuoto.

Il terzo assioma sarà:

Le equazioni fondamentali sono di tipo tale che, quando $x,\ y,\ z,\ t$ subiscono una qualche trasformazione di Lorentz e perciò $\mathfrak{m},\ -i\mathfrak{e}$ da un lato, $\mathfrak{M}$, $-i\mathfrak{E}$ dall'altro si trasformano come vettori dello spazio-tempo di II specie, mentre $\mathfrak{s},\ i\rho$ si trasformano come vettori di I specie, le equazioni vanno per questo nelle equazioni scritte nel modo esattamente corrispondente tra le quantità trasformate.

Questo terzo assioma lo esprimo in breve con le parole: $\mathfrak{m}$, $-i\mathfrak{e}$ e $\mathfrak{M}$, $-i\mathfrak{E}$ sono ciascuno un vettore dello spazio-tempo di II specie, $\mathfrak{s}$, $i\rho$ un vettore dello spazio-tempo di I specie,
e chiamo questo assioma il principio della relatività.

Questi tre assiomi ci portano di fatto in maniera univoca dalle summenzionate equazioni fondamentali per corpi a riposo alle equazioni fondamentali per corpi in moto.

Infatti per il secondo assioma in ogni punto dello spazio-tempo il modulo del vettore velocità è $|\mathfrak{w}| < 1$. In conseguenza di ciò possiamo sempre associare a ritroso al vettore $\mathfrak{w}$ univocamente la quaterna di quantità

$$w_1 = \frac{\mathfrak{w}_x}{\sqrt{1-\mathfrak{w}^2}},\ w_2 = \frac{\mathfrak{w}_y}{\sqrt{1-\mathfrak{w}^2}},\ w_3 = \frac{\mathfrak{w}_z}{\sqrt{1-\mathfrak{w}^2}},\ w_4 = \frac{i}{\sqrt{1-\mathfrak{w}^2}},$$

tra le quali sussiste la relazione:

$$w_1^2 + w_2^2 + w_3^2 + w_4^2 = -1. \tag{27}$$

Dalle considerazioni in conclusione del §4 è evidente che questa quaterna si comporta per trasformazioni di Lorentz come un vettore dello spazio-tempo di I specie, e la chiameremo la velocità vettore dello spazio-tempo.

Consideriamo ora un determinato punto $x,\ y,\ z$ della materia ad un determinato tempo t. Se in questo punto dello spazio-tempo è $\mathfrak{w} = 0$, in esso per il primo assioma abbiamo immediatamente le equazioni (A), (B), (V) del §7. Se in esso è $\mathfrak{w} \neq 0$, poiché $|\mathfrak{w}| < 1$, esiste per (16) una trasformazione di Lorentz speciale, il cui vettore $\mathfrak{v}$ è uguale a questo vettore $\mathfrak{w}\,(x,\ y,\ z,\ t)$, e in generale con questa determinata trasformazione passiamo ad un nuovo sistema di riferimento $x',\ y',\ z',\ t'$. Per il punto dello spazio tempo considerato sussistono pertanto, come abbiamo detto nel §4, i nuovi valori

$$w_1' = 0,\ w_2' = 0,\ w_3' = 0,\ w_4' = i, \tag{28}$$

e quindi il nuovo vettore velocità è $\mathfrak{w}' = 0$, il punto dello spazio-tempo sarà, per così dire, trasformato a riposo. Ora con il terzo assioma ricaveremo a partire dalle equazioni fondamentali per il punto dello spazio-tempo $x,\ y,\ z,\ t$ le equazioni fondamentali per il sistema corrispondente $x',\ y',\ z',\ t'$, scritte mediante le quantità trasformate $\mathfrak{w}'$, ρ', $\mathfrak{s}'$, $\mathfrak{e}'$, $\mathfrak{m}'$, $\mathfrak{E}'$, $\mathfrak{M}'$ e le loro derivate rispetto a $x',\ y',\ z',\ t'$. Ma queste ultime equazioni devono, per il primo assioma, poiché adesso $\mathfrak{w}' = 0$, essere proprio:

1) quelle equazioni differenziali (A'), (B') che si ottengono semplicemente da (A) e (B), apponendo ad ogni lettera che compare in esse un apice posto in alto.

2) le equazioni

$$\mathfrak{e}' = \varepsilon\mathfrak{E}',\ \mathfrak{M}' = \mu\mathfrak{m}',\ \mathfrak{s}' = \sigma\mathfrak{E}', \tag{V'}$$

dove $\varepsilon,\ \mu,\ \sigma$ sono la costante dielettrica, la permeabilità magnetica e la conducibilità per il sistema $x',\ y',\ z',\ t'$, quindi anche nel punto considerato dello spazio-tempo $x,\ y,\ z,\ t$ della materia.

Ora ritorniamo mediante la trasformazione di Lorentz inversa alle variabili originarie x, y, z, t, e alle quantità $\mathfrak{w}$, ρ, $\mathfrak{s}$, $\mathfrak{e}$, $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{M}$, e le equazioni che otteniamo allora da quelle su citate, saranno le equazioni fondamentali generali per corpi in moto da noi cercate.

Ora si può vedere dalle considerazioni del §4 e del §5 che sia il sistema di equazioni (A) per conto suo che il sistema di equazioni (B) per conto suo sono covarianti per trasformazioni di Lorentz; cioè le equazioni che raggiungiamo a ritroso da (A'), (B') devono coincidere esattamente con le equazioni (A), (B) così come le assumiamo per corpi a riposo. Abbiamo quindi come primo risultato:

Delle equazioni fondamentali dell'elettrodinamica per corpi in moto le equazioni differenziali che sono espresse in termini di ρ e dei vettori $\mathfrak{s}$, $\mathfrak{e}$, $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{M}$ si scrivono esattamente come per i corpi in quiete. La velocità della materia in queste equazioni ancora non compare. Quindi con espressione vettoriale queste equazioni sono di nuovo

$$\text{(I)} \qquad \operatorname{rot}\mathfrak{m} - \frac{\partial \mathfrak{e}}{\partial t} = \mathfrak{s},$$

$$\text{(II)} \qquad \operatorname{div}\mathfrak{e} = \rho,$$

$$\text{(III)} \qquad \operatorname{rot}\mathfrak{E} + \frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial t} = 0,$$

$$\text{(IV)} \qquad \operatorname{div}\mathfrak{M} = 0.$$

La velocità della materia sarà relegata esclusivamente nelle condizioni aggiuntive che caratterizzano l'influenza della materia in base alle sue costanti particolari ε, μ, σ. Ritrasformiamo ora queste condizioni aggiuntive (V') alle coordinate originarie x, y, z ed al tempo originario t.

Secondo le formule (15) del §4 nella direzione del vettore $\mathfrak{w}$ la componente di $\mathfrak{e}'$ è la stessa di quella di $\mathfrak{e}+[\mathfrak{w}\mathfrak{m}]$, quella di $\mathfrak{m}'$ la stessa di quella di $\mathfrak{m}-[\mathfrak{w}\mathfrak{e}]$, per ogni direzione $\overline{\mathfrak{w}}$ perpendicolare alla precedente invece la componente di $\mathfrak{e}'$ e rispettivamente di $\mathfrak{m}'$ è uguale alla componente corrispondente di $\mathfrak{e}+[\mathfrak{w}\mathfrak{m}]$, rispettivamente di $\mathfrak{m}-[\mathfrak{w}\mathfrak{e}]$, ciascuna moltiplicata ora per $1/\sqrt{1-\mathfrak{w}^2}$. D'altra parte $\mathfrak{E}'$ ed $\mathfrak{M}'$ saranno qui con $\mathfrak{E}+[\mathfrak{w}\mathfrak{M}]$ e con $\mathfrak{M}-[\mathfrak{w}\mathfrak{E}]$ in relazione del tutto analoga a quella di $\mathfrak{e}'$ e di $\mathfrak{m}'$ con $\mathfrak{e}+[\mathfrak{w}\mathfrak{m}]$ e con $\mathfrak{m}-[\mathfrak{w}\mathfrak{e}]$. Così la relazione $\mathfrak{e}'=\varepsilon\mathfrak{E}'$, quando nei vettori si trattano prima le componenti lungo la direzione $\mathfrak{w}$, poi quelle lungo due direzioni $\overline{\mathfrak{w}}$ perpendicolari a $\mathfrak{w}$ e tra loro, e si moltiplicano per $\sqrt{1-\mathfrak{w}^2}$ le equazioni che risultano nel secondo caso, porta a

$$\text{(C)} \qquad \mathfrak{e}+[\mathfrak{w}\mathfrak{m}] = \varepsilon\left(\mathfrak{E}+[\mathfrak{w}\mathfrak{M}]\right).$$

La relazione $\mathfrak{M}'=\mu\mathfrak{m}'$ andrà a finire analogamente in

$$\text{(D)} \qquad \mathfrak{M}-[\mathfrak{w}\mathfrak{E}] = \mu\left(\mathfrak{m}-[\mathfrak{w}\mathfrak{e}]\right).$$

Inoltre segue dalle equazioni di trasformazione (12), (10), (11) del §4, nelle quali q, $\mathfrak{r}_{\mathfrak{v}}$, $\mathfrak{r}_{\overline{\mathfrak{v}}}$, t, $\mathfrak{r}'_{\mathfrak{v}}$, $\mathfrak{r}'_{\overline{\mathfrak{v}}}$, t' vanno sostituiti da $|\mathfrak{w}|$, $\mathfrak{s}_{\mathfrak{w}}$,$\mathfrak{s}_{\overline{\mathfrak{w}}}$, ρ,$\mathfrak{s}'_{\mathfrak{w}}$, $\mathfrak{s}'_{\overline{\mathfrak{w}}}$, ρ'

$$\rho' = \frac{-|\mathfrak{w}|\mathfrak{s}_{\mathfrak{w}}+\rho}{\sqrt{1-\mathfrak{w}^2}},\quad \mathfrak{s}'_{\mathfrak{w}} = \frac{\mathfrak{s}_{\mathfrak{w}}-|\mathfrak{w}|\rho}{\sqrt{1-\mathfrak{w}^2}},\quad \mathfrak{s}'_{\overline{\mathfrak{w}}} = \mathfrak{s}_{\overline{\mathfrak{w}}},$$

di modo che da $\mathfrak{s}' = \sigma\mathfrak{E}'$ ora risulta

$$\text{(E)} \qquad \begin{aligned} \frac{\mathfrak{s}_{\mathfrak{w}} - |\mathfrak{w}|\rho}{\sqrt{1-\mathfrak{w}^2}} &= \sigma\left(\mathfrak{E} + [\mathfrak{w}\mathfrak{M}]\right)_{\mathfrak{w}}, \\ \mathfrak{s}_{\overline{\mathfrak{w}}} &= \frac{\sigma\left(\mathfrak{E} + [\mathfrak{w}\mathfrak{M}]\right)_{\overline{\mathfrak{w}}}}{\sqrt{1-\mathfrak{w}^2}}. \end{aligned}$$

Per il modo con il quale la conducibilità σ appare qui, sarà conveniente indicare come corrente di conduzione il vettore $\mathfrak{s} - \rho\mathfrak{w}$ con le componenti $\mathfrak{s}_{\mathfrak{w}} - \rho|\mathfrak{w}|$ nella direzione $\mathfrak{w}$ e $\mathfrak{s}_{\overline{\mathfrak{w}}}$ nelle direzioni $\overline{\mathfrak{w}}$ perpendicolari a $\mathfrak{w}$, il quale si annulla per $\sigma = 0$.

Osserviamo che per $\varepsilon = 1$, $\mu = 1$ le equazioni $\mathfrak{e}' = \mathfrak{E}'$, $\mathfrak{m}' = \mathfrak{M}'$, tramite la trasformazione di Lorentz inversa, che qui sarà quella speciale con $-\mathfrak{w}$ come vettore, per la (15) portano immediatamente ad $\mathfrak{e} = \mathfrak{E}$, $\mathfrak{m} = \mathfrak{M}$, e che per $\sigma = 0$ l'equazione $\mathfrak{s}' = 0$ porta a $\mathfrak{s} = \rho\mathfrak{w}$, sicché le "equazioni fondamentali per l'etere" trattate nel §2 si danno come caso limite delle equazioni qui ottenute per $\varepsilon = 1$, $\mu = 1$, $\sigma = 0$.

§9. Le equazioni fondamentali nella teoria di Lorentz.

Vediamo ora fino a che punto le equazioni fondamentali che Lorentz assume soddisfano il postulato di relatività, come si dovrà chiamare il principio di relatività formulato nel §8. Nell'articolo "Teoria degli elettroni" (Encykl. der math. Wiss., vol. V 2, art. 14) Lorentz dà per corpi qualsiansi, anche magnetizzati (vedi ivi p. 209 tenendo conto dell'equazione XXX' dello stesso e della formula (14) a p.78 dello stesso fascicolo):

$$\text{(III''}_a\text{)} \qquad \operatorname{rot}\left(\mathfrak{H} - [\mathfrak{w}\mathfrak{E}]\right) = \mathfrak{J} + \frac{\partial \mathfrak{D}}{\partial t} + \mathfrak{w}\operatorname{div}\mathfrak{D} - \operatorname{rot}[\mathfrak{w}\mathfrak{D}],$$

$$\text{(I'')} \qquad \operatorname{div}\mathfrak{D} = \rho,$$

$$\text{(IV'')} \qquad \operatorname{rot}\mathfrak{E} = -\frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial t},$$

$$\text{(V'')} \qquad \operatorname{div}\mathfrak{B} = 0.$$

Poi Lorentz pone per corpi in moto non magnetizzati (p.223, n. 3) $\mu = 1$, $\mathfrak{B} = \mathfrak{H}$ e assume inoltre l'intervento della costante dielettrica ε e della conducibilità σ secondo le

$$\mathfrak{D} - \mathfrak{E} = (\varepsilon - 1)\left(\mathfrak{E} + [\mathfrak{w}\mathfrak{B}]\right), \quad \text{(Eq. XXXIV''', p. 227)}$$
$$\mathfrak{J} = \sigma\left(\mathfrak{E} + [\mathfrak{w}\mathfrak{B}]\right), \quad \text{(Eq. XXXIII'', p. 223)}\ .$$

I simboli di Lorentz $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{H}$ sono qui sostituiti con $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{e}$, $\mathfrak{m}$, mentre $\mathfrak{J}$ per Lorentz si designerà come corrente di conduzione.

Le ultime tre delle equazioni differenziali citate coincidono direttamente con le equazioni (II), (III), (IV) di qui, ma la prima equazione, se identifichiamo $\mathfrak{J}$ con la corrente $\mathfrak{s} - \mathfrak{w}\rho$ che si annulla per $\sigma = 0$, diventa

$$\text{rot}\,(\mathfrak{H} - [\mathfrak{w}\mathfrak{E}]) = \mathfrak{s} + \frac{\partial \mathfrak{D}}{\partial t} - \text{rot}\,[\mathfrak{w}\mathfrak{D}]\,, \tag{29}$$

e risulta differire dalla (I) di qui. Perciò le equazioni differenziali generali di Lorentz per corpi arbitrariamente magnetizzati non si conformano al principio di relatività.

D'altra parte la forma della condizione di assenza di magnetizzazione che corrisponde al principio di relatività andrebbe presa dalla (D) del §8 con $\mu = 1$ non, come secondo Lorentz, come $\mathfrak{B} = \mathfrak{H}$, ma come

$$\mathfrak{B} - [\mathfrak{w}\mathfrak{E}] = \mathfrak{H} - [\mathfrak{w}\mathfrak{D}] \quad (\text{qui } \ \mathfrak{M} - [\mathfrak{w}\mathfrak{E}] = \mathfrak{m} - [\mathfrak{w}\mathfrak{e}]\,). \tag{30}$$

Ma ora l'ultima equazione differenziale scritta (29) va a finire per $\mathfrak{H} = \mathfrak{B}$ (a prescindere dalla diversità dei simboli) nella stessa equazione nella quale la (I) di qui si trasformerebbe ponendo $\mathfrak{m} - [\mathfrak{w}\mathfrak{e}] = \mathfrak{M} - [\mathfrak{w}\mathfrak{E}]$. Così accade, mediante una compensazione di due infrazioni del principio di relatività, che per corpi non magnetizzati in moto le equazioni differenziali di Lorentz si adeguino alla fine al principio di relatività.

Se inoltre per corpi non magnetizzati si facesse qui uso della (30) e si ponesse di conseguenza $\mathfrak{H} = \mathfrak{B} + [\mathfrak{w},\ \mathfrak{D} - \mathfrak{E}]$, allora in seguito alla (C) del §8 si dovrebbe assumere

$$(\varepsilon - 1)\,(\mathfrak{E} + [\mathfrak{w}\mathfrak{B}]) = \mathfrak{D} - \mathfrak{E} + [\mathfrak{w}\,[\mathfrak{w},\ \mathfrak{D} - \mathfrak{E}]]\,,$$

cioè per la direzione di $\mathfrak{w}$:

$$(\varepsilon - 1)\,(\mathfrak{E} + [\mathfrak{w}\mathfrak{B}])_{\mathfrak{w}} = (\mathfrak{D} - \mathfrak{E})_{\mathfrak{w}}\,,$$

e per ogni direzione $\overline{\mathfrak{w}}$ perpendicolare a $\mathfrak{w}$:

$$(\varepsilon - 1)\,(\mathfrak{E} + [\mathfrak{w}\mathfrak{B}])_{\overline{\mathfrak{w}}} = \left(1 - \mathfrak{w}^2\right)(\mathfrak{D} - \mathfrak{E})_{\overline{\mathfrak{w}}}\,,$$

ossia in accordo con la suddetta assunzione di Lorentz solo a meno di errori dell'ordine di $\mathfrak{w}^2$ rispetto a 1.

Solo con lo stesso grado di approssimazione anche il suddetto postulato di Lorentz per $\mathfrak{J}$ soddisfa alle relazioni imposte dal principio di relatività (vedi (E) nel §8), che le componenti $\mathfrak{J}_{\mathfrak{w}}$ e rispettivamente $\mathfrak{J}_{\overline{\mathfrak{w}}}$ siano uguali alle corrispondenti componenti di $\sigma\,(\mathfrak{E} + [\mathfrak{w}\mathfrak{B}])$, moltiplicate rispettivamente per $\sqrt{1 - \mathfrak{w}^2}$ ovvero per $1/\sqrt{1 - \mathfrak{w}^2}$.

§10. Le equazioni fondamentali secondo E. Cohn.

E. Cohn[10] assume le seguenti equazioni fondamentali:

$$\begin{aligned} \text{rot}\,(M + [\mathfrak{w}\mathfrak{E}]) &= \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t} + \mathfrak{w}\,\text{div}\,\mathfrak{E} + \mathfrak{J}, \\ -\,\text{rot}\,(E - [\mathfrak{w}\mathfrak{M}]) &= \frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial t} + \mathfrak{w}\,\text{div}\,\mathfrak{M}, \end{aligned} \tag{31}$$

[10] Gött. Nachr. 1901, p. 74 (anche Ann. d. Phys. **7**, (4), 1902, p. 29).

$$\mathfrak{I} = \sigma E,\ \mathfrak{E} = \varepsilon E - [\mathfrak{w}M]\,,\ \mathfrak{M} = \mu M + [\mathfrak{w}E]\,, \tag{32}$$

dove $E,\ M$ sono assunti come intensità di campo elettrica e magnetica (forza), $\mathfrak{E},\ \mathfrak{M}$ come polarizzazione elettrica e magnetica (induzione). Le equazioni ammettono ora la presenza del magnetismo vero; lo tralasceremo, e si porrà $\operatorname{div}\mathfrak{M} = 0$.

Un'obiezione contro queste equazioni è che con esse per $\varepsilon = 1,\ \mu = 1$ i vettori forza e induzione non coincidono. Se tuttavia assumiamo nelle equazioni non E ed M, ma $E - [\mathfrak{w}\mathfrak{M}]$ e $M + [\mathfrak{w}\mathfrak{E}]$ come forza elettrica e magnetica, e tenendo conto di ciò, sostituiamo ad $\mathfrak{E},\ \mathfrak{M},\ E,\ M$, $\operatorname{div}\mathfrak{E}$ i simboli $\mathfrak{e},\ \mathfrak{M},\ \mathfrak{E} + [\mathfrak{w}\mathfrak{M}],\ \mathfrak{m} - [\mathfrak{w}\mathfrak{e}],\ \rho$, le equazioni differenziali vanno immediatamente nelle nostre equazioni e parimenti le condizioni (32) si tramutano in

$$\begin{aligned} \mathfrak{I} &= \sigma\,(\mathfrak{E} + [\mathfrak{w}\mathfrak{M}])\,, \\ \mathfrak{e} + [\mathfrak{w},\ \mathfrak{m} - [\mathfrak{w}\mathfrak{e}]] &= \varepsilon\,(\mathfrak{E} + [\mathfrak{w}\mathfrak{M}])\,, \\ \mathfrak{M} - [\mathfrak{w},\ \mathfrak{E} + [\mathfrak{w}\mathfrak{M}]] &= \mu\,(\mathfrak{m} - [\mathfrak{w}\mathfrak{e}])\,; \end{aligned}$$

in tal modo queste equazioni di Cohn sarebbero a meno di errori dell'ordine di $\mathfrak{w}^2$ rispetto ad 1 proprio quelle prescritte dal principio di relatività.

Va osservato ancora che le equazioni assunte da Hertz (nella notazione di Cohn) si scrivono come le (31) con le condizioni aggiuntive diverse

$$\mathfrak{E} = \varepsilon E,\ \mathfrak{M} = \mu M,\ \mathfrak{I} = \sigma E, \tag{33}$$

e questo sistema di equazioni anche per qualsiasi cambiamento della relazione dei simboli con le quantità osservabili non si conformerebbe al principio di relatività a meno di errori dell'ordine di $\mathfrak{w}^2$ rispetto ad 1.

§11. Rappresentazione tipica delle equazioni fondamentali.

Nella determinazione delle equazioni fondamentali ci ha guidato l'idea di conseguire una covarianza rispetto al gruppo delle trasformazioni di Lorentz. Ora abbiamo da trattare le azioni ponderomotrici e lo scambio d'energia nel campo elettromagnetico, e non vi può essere a priori alcun dubbio che la soluzione di questi problemi sarà in ogni caso connessa con le strutture più semplici, associate alle equazioni fondamentali, che ancora mostrino covarianza rispetto alle trasformazioni di Lorentz. Per indicare queste strutture, prima di tutto porterò le equazioni fondamentali in una forma tipica, che pone in evidenza la loro covarianza rispetto al gruppo di Lorentz. Per questo mi avvalgo di un metodo di calcolo che si propone un operare abbreviato con i vettori dello spazio-tempo di I e di II specie, e le cui regole e simboli, per quanto a noi sarà utile, riassumo qui per prima cosa.

1^0 . Un sistema di quantità

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1q} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{p1} & \cdots & a_{pq} \end{vmatrix},$$

ordinato in p righe orizzontali, q verticali, si chiama matrice[11] $p \times q$, e si indica con un solo simbolo, qui A.

[11]Si potrebbe anche pensare di avvalersi al posto del calcolo matriciale di Cayley del calcolo dei quaternioni di Hamilton, tuttavia quest'ultimo mi pare per i nostri scopi limitato e pesante.

Se si moltiplicano tutte le quantità a_{hk} per lo stesso fattore c, la matrice risultante delle quantità ca_{hk} si indicherà con cA.

Se i ruoli delle righe orizzontali e verticali in A vengono scambiati, si ottiene una matrice $q \times p$, che si chiama la trasposta di A e che si indicherà con $\overline{A}$:

$$\overline{A} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{p1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{1q} & \cdots & a_{pq} \end{vmatrix}.$$

Se si ha una seconda matrice con i numeri p e q uguali a quelli di A,

$$B = \begin{vmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1q} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{p1} & \cdots & b_{pq} \end{vmatrix},$$

$A + B$ indicherà la matrice sempre $p \times q$ costituita dai binomi corrispondenti $a_{hk} + b_{hk}$.

2^0 . Se si hanno due matrici

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1q} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{p1} & \cdots & a_{pq} \end{vmatrix}, \; B = \begin{vmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{q1} & \cdots & b_{qr} \end{vmatrix},$$

dove il numero delle righe orizzontali della seconda è uguale al numero delle righe verticali della prima, si intenderà per AB, prodotto di A e B, la matrice

$$C = \begin{vmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{p1} & \cdots & c_{pr} \end{vmatrix},$$

gli elementi della quale sono costruiti per combinazione delle righe orizzontali di A e delle righe verticali di B secondo la regola

$$c_{hk} = a_{h1}b_{1k} + a_{h2}b_{2k} + \cdots + a_{hq}b_{qk} \quad \begin{pmatrix} h = 1, \; 2, \cdots p \\ k = 1, \; 2, \cdots r \end{pmatrix}.$$

Per un tale prodotto vale la legge associativa $(AB)S = A(BS)$; con S si intende qui una terza matrice con un numero di righe orizzontali uguale al numero di righe verticali di B (e quindi anche di AB).

Per la matrice trasposta rispetto a $C = AB$ vale $\overline{C} = \overline{BA}$.

3^0 . Si considereranno qui solo matrici con al più 4 righe orizzontali e al più 4 righe verticali.

Come matrice unità indicata in breve nelle equazioni matriciali con 1 si intenderà la matrice 4×4 con i seguenti elementi

$$\begin{vmatrix} e_{11}, & e_{12}, & e_{13}, & e_{14} \\ e_{21}, & e_{22}, & e_{23}, & e_{24} \\ e_{31}, & e_{32}, & e_{33}, & e_{34} \\ e_{41}, & e_{42}, & e_{43}, & e_{44} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1, & 0, & 0, & 0 \\ 0, & 1, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 1, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & 1 \end{vmatrix}. \tag{34}$$

Per un multiplo $c.1$ della matrice unità (nel senso fissato in 1^0 per una matrice cA) si porrà nelle equazioni matriciali semplicemente c.

Per una matrice A 4×4, $\det A$ indicherà il determinante dei 4×4 elementi della matrice. Se $\det A \neq 0$, si ottiene da A una determinata matrice reciproca, che si indica con A^{-1}, tale che sia $A^{-1}A = 1$. -

Una matrice

$$f = \begin{vmatrix} 0, & f_{12}, & f_{13}, & f_{14} \\ f_{21}, & 0, & f_{23}, & f_{24} \\ f_{31}, & f_{32}, & 0, & f_{34} \\ f_{41}, & f_{42}, & f_{43}, & 0 \end{vmatrix},$$

nella quale gli elementi soddisfino le relazioni $f_{kh} = -f_{hk}$, si chiama una matrice alternante. Queste relazioni dicono che la matrice trasposta è $\overline{f} = -f$. Inoltre si indicherà con f^* e come la matrice duale di f la matrice anch'essa alternante

$$f^* = \begin{vmatrix} 0, & f_{34}, & f_{42}, & f_{23} \\ f_{43}, & 0, & f_{14}, & f_{31} \\ f_{24}, & f_{41}, & 0, & f_{12} \\ f_{32}, & f_{13}, & f_{21}, & 0 \end{vmatrix}. \tag{35}$$

Sarà quindi

$$f^* f = f_{32}f_{14} + f_{13}f_{24} + f_{21}f_{34}, \tag{36}$$

che indicherà una matrice 4×4 nella quale tutti gli elementi al di fuori della diagonale principale da sinistra in alto a destra in basso sono nulli e tutti gli elementi su questa diagonale coincidono e sono uguali all'espressione riportata a secondo membro in termini dei coefficienti di f. Il determinante di f risulta allora essere il quadrato di questa espressione, e interpreteremo il simbolo $\mathrm{Det}^{1/2} f$ come l'abbreviazione

$$\mathrm{Det}^{1/2} f = f_{32}f_{14} + f_{13}f_{24} + f_{21}f_{34}. \tag{37}$$

4^0 . Una trasformazione lineare

$$x_h = \alpha_{h1}x'_1 + \alpha_{h2}x'_2 + \alpha_{h3}x'_3 + \alpha_{h4}x'_4 \quad (h = 1,\ 2,\ 3,\ 4) \tag{38}$$

si potrà anche indicare semplicemente mediante la matrice 4×4 dei coefficienti

$$\mathbf{A} = \begin{vmatrix} \alpha_{11}, & \alpha_{12}, & \alpha_{13}, & \alpha_{14} \\ \alpha_{21}, & \alpha_{22}, & \alpha_{23}, & \alpha_{24} \\ \alpha_{31}, & \alpha_{32}, & \alpha_{33}, & \alpha_{34} \\ \alpha_{41}, & \alpha_{42}, & \alpha_{43}, & \alpha_{44} \end{vmatrix}$$

come trasformazione $\mathbf{A}$. Mediante la trasformazione $\mathbf{A}$ l'espressione

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2$$

diventa la forma quadratica

$$\sum a_{hk}x'_h x'_k \quad (h,\ k = 1,\ 2,\ 3,\ 4)$$

dove sarà

$$a_{hk} = \alpha_{1h}\alpha_{1k} + \alpha_{2h}\alpha_{2k} + \alpha_{3h}\alpha_{3k} + \alpha_{4h}\alpha_{4k},$$

cioè la matrice 4×4 (simmetrica) dei coefficienti a_{hk} di questa forma sarà il prodotto $\overline{\mathbf{A}}\mathbf{A}$ della matrice trasposta di $\mathbf{A}$ per $\mathbf{A}$. Se mediante la trasformazione si otterrà la nuova espressione

$$x'^2_1 + x'^2_2 + x'^2_3 + x'^2_4,$$

dovrà essere

$$\overline{\mathbf{A}}\mathbf{A} = 1, \tag{39}$$

cioè la matrice 1. $\mathbf{A}$ deve pertanto soddisfare a questa relazione quando la trasformazione (38) sarà una trasformazione di Lorentz. Per il determinante di $\mathbf{A}$ segue dalla (39): $(\det \mathbf{A})^2 = 1$, $\det \mathbf{A} = \pm 1$. La condizione (39) dà luogo parimenti a

$$\mathbf{A}^{-1} = \overline{\mathbf{A}}, \tag{40}$$

cioè la matrice inversa di $\mathbf{A}$ deve coincidere con la trasposta.

Perché $\mathbf{A}$ sia una trasformazione di Lorentz abbiamo ancora da imporre che sia $\det \mathbf{A} = +1$, che ognuna delle quantità $\alpha_{14},\ \alpha_{24},\ \alpha_{34}, \alpha_{41},\ \alpha_{42},\ \alpha_{43}$ sia immaginaria pura (ovvero nulla), che gli altri coefficienti in $\mathbf{A}$ siano reali e infine ancora che sia $\alpha_{44} > 0$.

5^0 . Un vettore dello spazio-tempo di I specie $s_1,\ s_2,\ s_3,\ s_4$ sarà rappresentato mediante la matrice 1×4 delle sue quattro componenti:

$$s = |s_1,\ s_2,\ s_3,\ s_4|, \tag{41}$$

e a seguito di una trasformazione di Lorentz dovrà essere sostituito da $s\mathbf{A}$.

Un vettore dello spazio-tempo di II specie con le componenti $f_{23},\ f_{31},\ f_{12},\ f_{14},\ f_{24},\ f_{34}$ dovrà essere rappresentato con la matrice alternante

$$f = \begin{vmatrix} 0, & f_{12}, & f_{13}, & f_{14} \\ f_{21}, & 0, & f_{23}, & f_{24} \\ f_{31}, & f_{32}, & 0, & f_{34} \\ f_{41}, & f_{42}, & f_{43}, & 0 \end{vmatrix},$$

e a seguito di una trasformazione di Lorentz (vedi la regola fissata nel §5 mediante le (23) e (24)) $\mathbf{A}$ va sostituito con $\overline{\mathbf{A}}f\mathbf{A} = \mathbf{A}^{-1}f\mathbf{A}$. Riguardo all'espressione (37) vale l'identità $\mathrm{Det}^{1/2}(\overline{\mathbf{A}}f\mathbf{A}) = \mathrm{Det}\,\mathbf{A}\,\mathrm{Det}^{1/2}\,f$. Pertanto $\mathrm{Det}^{1/2}\,f$ sarà un invariante per trasformazioni di Lorentz (vedi Eq.(26) nel §5).

Per la matrice duale f^* segue allora tenendo conto della (36):

$$\left(\mathbf{A}^{-1}f^*\mathbf{A}\right)\left(\mathbf{A}^{-1}f\mathbf{A}\right) = \mathbf{A}^{-1}f^*f\mathbf{A} = \mathrm{Det}^{1/2}\,f.\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathrm{Det}^{1/2}\,f,$$

dalla quale si vede che assieme al vettore dello spazio-tempo di II specie f anche la corrispondente matrice duale f^* si trasforma come un vettore dello spazio-tempo di II specie, e perciò f^* con le componenti $f_{14},\ f_{24},\ f_{34},\ f_{23},\ f_{31},\ f_{12}$ si dirà il vettore dello spazio-tempo duale di f.

6^0 . Siano w ed s due vettori dello spazio-tempo di I specie, allora con $w\overline{s}$ (oppure anche con $s\overline{w}$) si intende l'espressione

$$w_1 s_1 + w_2 s_2 + w_3 s_3 + w_4 s_4 \tag{43}$$

costruita con le componenti corrispondenti. Quest'espressione è invariante per una trasformazione di Lorentz $\mathbf{A}$, poiché $(w\mathbf{A})\left(\overline{\mathbf{A}\overline{s}}\right) = w\overline{s}$. - Se $w\overline{s} = 0$, w ed s si diranno normali tra loro.

Due vettori dello spazio tempo di I specie w, s danno inoltre origine alla struttura della matrice 2×4

$$\begin{vmatrix} w_1, & w_2, & w_3, & w_4 \\ s_1, & s_2, & s_3, & s_4 \end{vmatrix}.$$

Si dimostra poi immediatamente che il sistema delle sei quantità

$$\begin{gathered} w_2 s_3 - w_3 s_2,\ w_3 s_1 - w_1 s_3,\ w_1 s_2 - w_2 s_1, \\ w_1 s_4 - w_4 s_1,\ w_2 s_4 - w_4 s_2,\ w_3 s_4 - w_4 s_3, \end{gathered} \tag{44}$$

si comporta per le trasformazioni di Lorentz come un vettore dello spazio-tempo di II specie. Si indicherà il vettore di II specie con queste componenti (44) con $[w, s]$. Si deduce facilmente che $\mathrm{Det}^{1/2}\,[w, s] = 0$. Il vettore duale di $[w, s]$ si scriverà $[w, s]^*$.

Se w è un vettore dello spazio-tempo di I specie, f un vettore dello spazio-tempo di II specie, wf indica sempre una matrice 1×4. Per una trasformazione di Lorentz $\mathbf{A}$, w va in $w' = w\mathbf{A}$, f in $f' = \mathbf{A}^{-1} f \mathbf{A}$; sarà perciò $w'f' = w\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} f\mathbf{A} = (wf)\,\mathbf{A}$, ossia wf si trasforma ancora come un vettore dello spazio-tempo di I specie.

Quando w è un vettore di I specie ed f è un vettore di II specie, si verifica facilmente l'importante identità:

$$[w, wf] + [w, wf^*]^* = (w\overline{w})\, f. \tag{45}$$

La somma dei due vettori dello spazio-tempo di II specie a primo membro va intesa nel senso della somma di due matrici alternanti.

Infatti per $w_1 = 0$, $w_2 = 0$, $w_3 = 0$, $w_4 = i$ sarà

$$\begin{gathered} wf = |if_{41},\ if_{42},\ if_{43},\ 0|;\ wf^* = |if_{32},\ if_{13},\ if_{21},\ 0|; \\ [w, wf] = 0,\ 0,\ 0,\ f_{41},\ f_{42},\ f_{43};\ [w, wf^*] = 0,\ 0,\ 0,\ f_{32},\ f_{13},\ f_{21}, \end{gathered}$$

e l'osservazione che in questo caso particolare risulta la relazione (45) è già sufficiente perché la stessa valga in generale, poiché questa relazione ha carattere covariante per il gruppo di Lorentz e inoltre è omogenea in $w_1,\ w_2,\ w_3,\ w_4$.

Dopo questi preliminari occupiamoci ora delle equazioni (C), (D), (E), mediante le quali vengono introdotte le costanti $\varepsilon,\ \mu,\ \sigma$.

Al posto del vettore spaziale $\mathfrak{w}$, velocità della materia, introduciamo come già nel §8 il vettore dello spazio-tempo di I specie w con le 4 componenti

$$w_1 = \frac{\mathfrak{w}_x}{\sqrt{1-\mathfrak{w}^2}},\ w_2 = \frac{\mathfrak{w}_y}{\sqrt{1-\mathfrak{w}^2}},\ w_3 = \frac{\mathfrak{w}_z}{\sqrt{1-\mathfrak{w}^2}},\ w_4 = \frac{i}{\sqrt{1-\mathfrak{w}^2}},$$

per il quale si ha

$$w\overline{w} = w_1^2 + w_2^2 + w_3^2 + w_4^2 = -1 \tag{46}$$

e

$$-iw_4 > 0.$$

Con F e f intenderemo ancora i vettori dello spazio-tempo di II specie $\mathfrak{M}$, $-i\mathfrak{E}$ e $\mathfrak{m}$, $-i\mathfrak{e}$ che compaiono nelle equazioni fondamentali.

In $\Phi = -wF$ abbiamo ancora un vettore dello spazio-tempo di I specie; le sue componenti saranno

$$\begin{aligned}
\Phi_1 &= \phantom{w_1F_{21}+{}} w_2F_{12} + w_3F_{13} + w_4F_{14}, \\
\Phi_2 &= w_1F_{21} \phantom{{}+w_2F_{12}} + w_3F_{23} + w_4F_{24}, \\
\Phi_3 &= w_1F_{31} + w_2F_{32} \phantom{{}+w_3F_{13}} + w_4F_{34}, \\
\Phi_4 &= w_1F_{41} + w_2F_{42} + w_3F_{43} \phantom{{}+w_4F_{14}} .
\end{aligned}$$

Le prime tre quantità Φ_1, Φ_2, Φ_3 sono rispettivamente le componenti x, y, z del vettore spaziale

$$\frac{\mathfrak{E} + [\mathfrak{w}\mathfrak{M}]}{\sqrt{1-\mathfrak{w}^2}}, \tag{47}$$

e inoltre è

$$\Phi_4 = \frac{i\,(\mathfrak{w}\mathfrak{E})}{\sqrt{1-\mathfrak{w}^2}}. \tag{48}$$

Poiché la matrice F è alternante, vale evidentemente

$$w\overline{\Phi} = w_1\Phi_1 + w_2\Phi_2 + w_3\Phi_3 + w_4\Phi_4 = 0, \tag{49}$$

il vettore Φ è quindi normale a w; possiamo scrivere questa relazione anche

$$\Phi_4 = i\left(\mathfrak{w}_x\Phi_1 + \mathfrak{w}_y\Phi_2 + \mathfrak{w}_z\Phi_3\right). \tag{50}$$

Chiamerò il vettore dello spazio-tempo di I specie Φ forza elettrica a riposo.

Relazioni analoghe a quelle tra $-wF$, $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{w}$ risultano tra $-wf$, $\mathfrak{e}$, $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{w}$ e in particolare anche $-wf$ sarà normale a w. Si può ora sostituire la relazione (C) con

$$wf = \varepsilon wF, \tag{\{C\}}$$

una formula che dà 4 equazioni per le relative componenti, ma tuttavia in modo tale che la quarta, tenendo conto della (50), è una conseguenza delle prime tre.

Costruiamo inoltre il vettore dello spazio-tempo di I specie $\Psi = iwf^*$, le cui componenti sono

$$\begin{aligned}
\Psi_1 &= -i\left(\phantom{w_1f_{43}+{}} w_2f_{34} + w_3f_{42} + w_4f_{23}\right), \\
\Psi_2 &= -i\left(w_1f_{43} \phantom{{}+w_2f_{34}} + w_3f_{14} + w_4f_{31}\right), \\
\Psi_3 &= -i\left(w_1f_{24} + w_2f_{41} \phantom{{}+w_3f_{42}} + w_4f_{12}\right), \\
\Psi_4 &= -i\left(w_1f_{32} + w_2f_{13} + w_3f_{21} \phantom{{}+w_4f_{23}}\right).
\end{aligned}$$

Di queste le prime tre Ψ_1, Ψ_2, Ψ_3 sono rispettivamente le componenti x, y, z del vettore spaziale

$$\frac{\mathfrak{m} - [\mathfrak{w}\mathfrak{e}]}{\sqrt{1 - \mathfrak{w}^2}}, \tag{51}$$

e inoltre è

$$\Psi_4 = \frac{i\,(\mathfrak{w}\mathfrak{m})}{\sqrt{1 - \mathfrak{w}^2}}; \tag{52}$$

tra loro sussiste la relazione

$$w\overline{\Psi} = w_1\Psi_1 + w_2\Psi_2 + w_3\Psi_3 + w_4\Psi_4 = 0, \tag{53}$$

che possiamo scrivere anche

$$\Psi_4 = i\,(\mathfrak{w}_x\Psi_1 + \mathfrak{w}_y\Psi_2 + \mathfrak{w}_z\Psi_3)\,; \tag{54}$$

il vettore Ψ è quindi anch'esso normale a w. Chiamerò il vettore dello spazio-tempo di I specie Ψ forza magnetica a riposo.

Relazioni analoghe a quelle tra iwf^*, $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{e}$, $\mathfrak{w}$ si hanno tra iwF^*, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{w}$, e ora si può sostituire la relazione (D) con

$$wF^* = \mu w f^*. \tag{\{D\}}$$

Possiamo utilizzare le equazioni ({C}) e ({D}) per ricondurre i vettori di campo F e f a Φ e Ψ. Abbiamo

$$wF = -\Phi,\ wF^* = -i\mu\Psi,\ wf = -\varepsilon\Phi,\ wf^* = -i\Psi,$$

e l'utilizzo della regola (45), tenendo conto della (46), porta a

$$F = [w, \Phi] + i\mu\,[w, \Psi]^*\,, \tag{55}$$

$$f = \varepsilon\,[w, \Phi] + i\,[w, \Psi]^*\,, \tag{56}$$

ossia

$$F_{12} = (w_1\Phi_2 - w_2\Phi_1) + i\mu\,(w_3\Psi_4 - w_4\Psi_3)\,,\quad \text{ecc.,}$$
$$f_{12} = \varepsilon\,(w_1\Phi_2 - w_2\Phi_1) + i\,(w_3\Psi_4 - w_4\Psi_3)\,,\ \text{ecc..}$$

Consideriamo inoltre il vettore dello spazio-tempo di II specie $[\Phi, \Psi]$ con le 6 componenti

$$\Phi_2\Psi_3 - \Phi_3\Psi_2,\ \Phi_3\Psi_1 - \Phi_1\Psi_3,\ \Phi_1\Psi_2 - \Phi_2\Psi_1,$$
$$\Phi_1\Psi_4 - \Phi_4\Psi_1,\ \Phi_2\Psi_4 - \Phi_4\Psi_2,\ \Phi_3\Psi_4 - \Phi_4\Psi_3.$$

Il vettore dello spazio-tempo di I specie

$$w\,[\Phi, \Psi] = -\left(w\overline{\Psi}\right)\Phi + \left(w\overline{\Phi}\right)\Psi$$

si annulla identicamente per le (49) e (53). Introduciamo ora il vettore dello spazio-tempo di I specie

$$\Omega = iw\,[\Phi, \Psi]^* \tag{57}$$

con le componenti

$$\Omega_1 = -i \begin{vmatrix} w_2, & w_3, & w_4 \\ \Phi_2, & \Phi_3, & \Phi_4 \\ \Psi_2, & \Psi_3, & \Psi_4 \end{vmatrix}, \text{ ecc.,}$$

allora risulta per applicazione della regola (45):

$$[\Phi, \Psi] = i\,[w, \Omega]^*, \tag{58}$$

$$\text{cioè } \Phi_1\Psi_2 - \Phi_2\Psi_1 = iw_3\Omega_4 - w_4\Omega_3, \quad \text{ecc..}$$

Il vettore Ω soddisfa evidentemente la relazione

$$w\overline{\Omega} = w_1\Omega_1 + w_2\Omega_2 + w_3\Omega_3 + w_4\Omega_4 = 0, \tag{59}$$

che possiamo scrivere anche

$$\Omega_4 = i\mathfrak{w}_x\Omega_1 + \mathfrak{w}_y\Omega_2 + \mathfrak{w}_z\Omega_3;$$

quindi anche tale vettore è normale a w. Nel caso che sia $\mathfrak{w} = 0$ si ha $\Phi_4 = 0$, $\Psi_4 = 0$, $\Omega_4 = 0$ e

$$\Omega_1 = \Phi_2\Psi_3 - \Phi_3\Psi_2,\ \Omega_2 = \Phi_3\Psi_1 - \Phi_1\Psi_3,\ \Omega_3 = \Phi_1\Psi_2 - \Phi_2\Psi_1. \tag{60}$$

Chiamerò il vettore dello spazio-tempo di I specie Ω radiazione a riposo.

Per quanto riguarda la relazione (E), che introduce la conducibilità σ, riconosciamo immediatamente che

$$-w\overline{s} = -\left(w_1s_1 + w_2s_2 + w_3s_3 + w_4s_4\right) = \frac{-|\mathfrak{w}|\mathfrak{s}_\mathfrak{w} + \rho}{\sqrt{1 - \mathfrak{w}^2}} = \rho'$$

è la densità a riposo dell'elettricità (vedi §8 e la fine del §4). Quindi

$$s + (w\overline{s})\,w \tag{61}$$

rappresenta un vettore dello spazio-tempo di I specie, che a causa di $w\overline{w} = -1$ è evidentemente anch'esso normale a w, e che chiamerò corrente a riposo. Se assumiamo le prime tre componenti di questo vettore come le componenti lungo x, y, z di un vettore dello spazio, la componente di quest'ultimo lungo la direzione di $\mathfrak{w}$ è

$$\mathfrak{s}_\mathfrak{w} - \frac{|\mathfrak{w}|\rho'}{\sqrt{1 - \mathfrak{w}^2}} = \frac{\mathfrak{s}_\mathfrak{w} - |\mathfrak{w}|\rho}{1 - \mathfrak{w}^2} = \frac{\mathfrak{J}_\mathfrak{w}}{1 - \mathfrak{w}^2},$$

e la componente in qualsiasi direzione $\overline{\mathfrak{w}}$ perpendicolare a $\mathfrak{w}$ sarà

$$\mathfrak{s}_{\overline{\mathfrak{w}}} = \mathfrak{J}_{\overline{\mathfrak{w}}};$$

quindi questo vettore spaziale dipende in modo molto semplice dal vettore spaziale $\mathfrak{J} = \mathfrak{s} - \rho\mathfrak{w}$, che abbiamo indicato nel §8 come corrente di conduzione.

Ora, confrontandola con $\Phi = -wF$, la relazione (E) si può portare nella forma:

$$(\{E\}) \qquad s + (w\bar{s})\, w = -\sigma w F.$$

Anche questa formula riassume 4 equazioni, delle quali tuttavia, poiché si tratta in entrambi i membri di un vettore dello spazio-tempo di I specie normale a w, la quarta è una conseguenza delle prime tre.

Trasformeremo infine le equazioni differenziali (A) e (B) in una forma tipica.

§12. L'operatore differenziale lor.

Una matrice 4×4

$$(62) \qquad \begin{vmatrix} S_{11}, & S_{12}, & S_{13}, & S_{14} \\ S_{21}, & S_{22}, & S_{23}, & S_{24} \\ S_{31}, & S_{32}, & S_{33}, & S_{34} \\ S_{41}, & S_{42}, & S_{43}, & S_{44} \end{vmatrix} = |S_{ik}|$$

con la prescrizione, che essa per una trasformazione di Lorentz $\mathbf{A}$ vada sostituita sempre da $\overline{\mathbf{A}}S\mathbf{A}$, si può chiamare una matrice dello spazio-tempo di II specie. Una matrice siffatta si ha in particolare

nella matrice alternante f che corrisponde a un vettore dello spazio-tempo di II specie,

nel prodotto fF di due siffatte matrici alternanti f, F, che per una trasformazione $\mathbf{A}$ va sostituito da $\left(\mathbf{A}^{-1}f\mathbf{A}\right)\left(\mathbf{A}^{-1}F\mathbf{A}\right) = \mathbf{A}^{-1}fF\mathbf{A}$,

inoltre, quando $w_1,\ w_2,\ w_3,\ w_4$ e $\Omega_1,\ \Omega_2,\ \Omega_3,\ \Omega_4$ sono due vettori dello spazio-tempo di I specie, nella matrice dei 4×4 elementi $S_{hk} = w_h\Omega_k$,

infine in un multiplo L della matrice unità, cioè in una matrice 4×4 nella quale tutti gli elementi sulla diagonale principale abbiano ugual valore L e i restanti elementi siano tutti nulli.

Abbiamo sempre a che fare qui con funzioni dei punti dello spazio-tempo x, y, z, it e possiamo avvalerci con vantaggio di una matrice 1×4, costruita con i simboli di derivazione

$$\left|\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{i\partial t}\right|,$$

o anche scritta come

$$(63) \qquad \left|\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3}, \frac{\partial}{\partial x_4}\right|.$$

Per questa matrice utilizzerò l'abbreviazione lor.

Quando S come nella (62) indica una matrice dello spazio-tempo di II specie, con estensione coerente della regola per la costruzione del prodotto di matrici, per $\operatorname{lor} S$ si intenderà la matrice 1×4

$$|K_1,\ K_2,\ K_3,\ K_4|$$

dell'espressione

$$K_k = \frac{\partial S_{1k}}{\partial x_1} + \frac{\partial S_{2k}}{\partial x_2} + \frac{\partial S_{3k}}{\partial x_3} + \frac{\partial S_{4k}}{\partial x_4} \ (k = 1,\ 2,\ 3,\ 4). \tag{64}$$

Se si introduce mediante una trasformazione di Lorentz $\mathbf{A}$ un nuovo sistema di riferimento $x'_1,\ x'_2,\ x'_3,\ x'_4$ per i punti dello spazio-tempo, conformemente si dovrà utilizzare l'operatore

$$\mathrm{lor}' = \left| \frac{\partial}{\partial x'_1},\ \frac{\partial}{\partial x'_2},\ \frac{\partial}{\partial x'_3},\ \frac{\partial}{\partial x'_4} \right|.$$

Poiché inoltre S va in $S' = \overline{\mathbf{A}}S\mathbf{A} = |S'_{hk}|$, si intenderà con $\mathrm{lor}'S'$ la matrice 1×4 dell'espressione

$$K'_k = \frac{\partial S'_{1k}}{\partial x'_1} + \frac{\partial S'_{2k}}{\partial x'_2} + \frac{\partial S'_{3k}}{\partial x'_3} + \frac{\partial S'_{4k}}{\partial x'_4} \ (k = 1,\ 2,\ 3,\ 4).$$

Ora per la derivazione di una funzione qualsiasi di un punto dello spazio-tempo vale la regola

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x'_k} &= \frac{\partial}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial x'_k} + \frac{\partial}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial x'_k} + \frac{\partial}{\partial x_3}\frac{\partial x_3}{\partial x'_k} + \frac{\partial}{\partial x_4}\frac{\partial x_4}{\partial x'_k} \\ &= \frac{\partial}{\partial x_1}\alpha_{1k} + \frac{\partial}{\partial x_2}\alpha_{2k} + \frac{\partial}{\partial x_3}\alpha_{3k} + \frac{\partial}{\partial x_4}\alpha_{4k}, \end{aligned}$$

che si esprime simbolicamente in modo facilmente comprensibile come

$$\mathrm{lor}' = \mathrm{lor}(\mathbf{A}$$

e tenendo conto di questa segue parimenti

$$\mathrm{lor}'S' = \mathrm{lor}\left(\mathbf{A}\left(\mathbf{A}^{-1}S\mathbf{A}\right)\right) = (\mathrm{lor}\, S)\mathbf{A}, \tag{65}$$

cioè quando S rappresenta una matrice dello spazio-tempo di II specie, $\mathrm{lor}\, S$ si trasforma come un vettore dello spazio-tempo di I specie.

Se in particolare L è un multiplo della matrice unità, si intenderà come $\mathrm{lor}\, L$ la matrice di elementi

$$\left| \frac{\partial L}{\partial x_1},\ \frac{\partial L}{\partial x_2},\ \frac{\partial L}{\partial x_3},\ \frac{\partial L}{\partial x_4} \right|. \tag{66}$$

Se $s = |s_1,\ s_2,\ s_3,\ s_4|$ rappresenta un vettore dello spazio-tempo di I specie, bisogna intendere

$$\mathrm{lor}\, \overline{s} = \frac{\partial s_1}{\partial x_1} + \frac{\partial s_2}{\partial x_2} + \frac{\partial s_3}{\partial x_3} + \frac{\partial s_4}{\partial x_4}. \tag{67}$$

Se in seguito ad una trasformazione di Lorentz $\mathbf{A}$ appaiono i simboli lor', s' al posto di lor, s, risulta

$$\mathrm{lor}'\bar{s}' = (\mathrm{lor}\,\mathbf{A})(\overline{\mathbf{A}}\bar{s}) = \mathrm{lor}\,\bar{s},$$

cioè $\mathrm{lor}\,\bar{s}$ è un invariante per trasformazioni di Lorentz.

In tutte queste relazioni l'operatore lor stesso gioca il ruolo di un vettore dello spazio-tempo di I specie.

Se f rappresenta un vettore dello spazio-tempo di II specie, si ha ora da intendere $-\,\mathrm{lor}\,f$ come il vettore dello spazio-tempo di I specie con le componenti

$$\begin{array}{llll} & \dfrac{\partial f_{12}}{\partial x_2} + \dfrac{\partial f_{13}}{\partial x_3} + \dfrac{\partial f_{14}}{\partial x_4}, \\ \dfrac{\partial f_{21}}{\partial x_1} & \quad\;\; + \dfrac{\partial f_{23}}{\partial x_3} + \dfrac{\partial f_{24}}{\partial x_4}, \\ \dfrac{\partial f_{31}}{\partial x_1} + \dfrac{\partial f_{32}}{\partial x_2} & \quad\;\; + \dfrac{\partial f_{34}}{\partial x_4}, \\ \dfrac{\partial f_{41}}{\partial x_1} + \dfrac{\partial f_{42}}{\partial x_2} + \dfrac{\partial f_{43}}{\partial x_3} & \quad . \end{array}$$

Perciò il sistema di equazioni differenziali (A) si può riassumere nella forma breve

$$(\{A\}) \qquad \mathrm{lor}\,f = -s.$$

In modo del tutto analogo il sistema di equazioni differenziali (B) si scriverà

$$(\{B\}) \qquad \mathrm{lor}\,F^* = 0.$$

Le espressioni $\mathrm{lor}\,\overline{(\mathrm{lor}\,f)}$ e $\mathrm{lor}\,\overline{(\mathrm{lor}\,F^*)}$ costruite tenendo conto della definizione (67) di $\mathrm{lor}\,\bar{s}$ si annullano evidentemente in modo identico, poiché f ed F^* sono matrici alternanti. Quindi per la corrente s segue dalla ({A}) la relazione

$$(68) \qquad \frac{\partial s_1}{\partial x_1} + \frac{\partial s_2}{\partial x_2} + \frac{\partial s_3}{\partial x_3} + \frac{\partial s_4}{\partial x_4} = 0,$$

mentre la relazione

$$(69) \qquad \mathrm{lor}\,\overline{(\mathrm{lor}\,F^*)} = 0$$

ha il significato che le quattro equazioni date dalla ({B}) rappresentano solo tre condizioni indipendenti per il comportamento dei vettori di campo.

Riassumo ora i risultati:

Si indichino con w il vettore dello spazio-tempo di I specie $\frac{\mathfrak{w}}{\sqrt{1-\mathfrak{w}^2}}, \frac{i}{\sqrt{1-\mathfrak{w}^2}}$ ($\mathfrak{w}$ velocità della materia), con F il vettore dello spazio-tempo di II specie $\mathfrak{M}$, $-i\mathfrak{E}$ ($\mathfrak{M}$ induzione magnetica, $\mathfrak{E}$ forza elettrica), con f il vettore dello spazio-tempo di II specie $\mathfrak{m}$, $-i\mathfrak{e}$ ($\mathfrak{m}$ forza magnetica, $\mathfrak{e}$ induzione elettrica), con s il vettore dello spazio-tempo di I specie $\mathfrak{s}$, $i\rho$ (ρ densità elettrica spaziale, $\mathfrak{s} - \rho\mathfrak{w}$ corrente di conduzione), con ε la costante dielettrica, con μ la permeabilità magnetica, con σ la conducibilità; allora (con i simboli del calcolo matriciale spiegati nel §10 e nel §11) le equazioni fondamentali per i processi elettromagnetici nei corpi in moto si scrivono

$$(\{A\}) \qquad \mathrm{lor}\,f = -s,$$

$$(\{B\})\qquad \operatorname{lor} F^{*} = 0,$$

$$(\{C\})\qquad wf = \varepsilon wF,$$

$$(\{D\})\qquad wF^{*} = \mu wf^{*},$$

$$(\{E\})\qquad s + (w\overline{s})\, w = -\sigma wF.$$

Poiché $w\overline{w} = -1$, i vettori dello spazio-tempo di I specie wF, wf, wF^{*}, wf^{*}, $s + (w\overline{s})\, w$ sono tutti normali a w e infine vale per il sistema di equazioni ({B}) la relazione

$$\operatorname{lor} \overline{(\operatorname{lor} F^{*})} = 0.$$

In considerazione della circostanza da ultimo ricordata, si ha qui a disposizione esattamente il numero richiesto di equazioni indipendenti per descrivere completamente i processi a partire da opportuni dati al contorno, purché sia noto il movimento della materia, quindi il vettore $\mathfrak{w}$ in funzione di x, y, z, t.

§13. Il prodotto dei vettori di campo fF.

Studiamo infine le leggi che portano a determinare il vettore w in funzione di x, y, z, t. Nelle ricerche relative a queste appaiono in primo piano quelle espressioni che si presentano costruendo il prodotto delle due matrici alternanti

$$f = \begin{vmatrix} 0, & f_{12}, & f_{13}, & f_{14} \\ f_{21}, & 0, & f_{23}, & f_{24} \\ f_{31}, & f_{32}, & 0, & f_{34} \\ f_{41}, & f_{42}, & f_{43}, & 0 \end{vmatrix}, \quad F = \begin{vmatrix} 0, & F_{12}, & F_{13}, & F_{14} \\ F_{21}, & 0, & F_{23}, & F_{24} \\ F_{31}, & F_{32}, & 0, & F_{34} \\ F_{41}, & F_{42}, & F_{43}, & 0 \end{vmatrix}.$$

Scrivo

$$(70)\qquad fF = \begin{vmatrix} S_{11} - L, & S_{12}, & S_{13}, & S_{14} \\ S_{21}, & S_{22} - L, & S_{23}, & S_{24} \\ S_{31}, & S_{32}, & S_{33} - L, & S_{34} \\ S_{41}, & S_{42}, & S_{43}, & S_{44} - L \end{vmatrix}$$

di modo che sarà

$$(71)\qquad S_{11} + S_{22} + S_{33} + S_{44} = 0.$$

L significa l'espressione simmetrica negli indici 1, 2, 3, 4

$$(72)\qquad L = \frac{1}{2}\left(f_{23}F_{23} + f_{31}F_{31} + f_{12}F_{12} + f_{14}F_{14} + f_{24}F_{24} + f_{34}F_{34}\right),$$

e sarà

$$(73)\qquad \begin{aligned} S_{11} &= \frac{1}{2}\left(f_{23}F_{23} + f_{34}F_{34} + f_{42}F_{42} - f_{12}F_{12} - f_{13}F_{13} - f_{14}F_{14}\right), \\ S_{12} &= f_{13}F_{32} + f_{14}F_{42}, \text{ ecc..} \end{aligned}$$

Per rendere esplicite le condizioni di realtà, scriverò ora

$$
(74) \qquad S = \begin{vmatrix} S_{11}, & S_{12}, & S_{13}, & S_{14} \\ S_{21}, & S_{22}, & S_{23}, & S_{24} \\ S_{31}, & S_{32}, & S_{33}, & S_{34} \\ S_{41}, & S_{42}, & S_{43}, & S_{44} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} X_x, & Y_x, & Z_x, & -iT_x \\ X_y, & Y_y, & Z_y, & -iT_y \\ X_z, & Y_z, & Z_z, & -iT_z \\ -iX_t, & -iY_t, & -iZ_t, & T_t \end{vmatrix},
$$

dove poi

$$
X_x = \frac{1}{2}\left(\mathfrak{m}_x \mathfrak{M}_x - \mathfrak{m}_y \mathfrak{M}_y - \mathfrak{m}_z \mathfrak{M}_z + \mathfrak{e}_x \mathfrak{E}_x - \mathfrak{e}_y \mathfrak{E}_y - \mathfrak{e}_z \mathfrak{E}_z\right),
$$

$$
X_y = \mathfrak{m}_x \mathfrak{M}_y + \mathfrak{e}_y \mathfrak{E}_x, \; Y_x = \mathfrak{m}_y \mathfrak{M}_x + \mathfrak{e}_x \mathfrak{E}_y, \text{ ecc.},
$$

$$
(75) \qquad X_t = \mathfrak{e}_y \mathfrak{M}_z - \mathfrak{e}_z \mathfrak{M}_y,
$$

$$
T_x = \mathfrak{m}_z \mathfrak{E}_y - \mathfrak{m}_y \mathfrak{E}_z, \text{ ecc.},
$$

$$
T_t = \frac{1}{2}\left(\mathfrak{m}_x \mathfrak{M}_x + \mathfrak{m}_y \mathfrak{M}_y + \mathfrak{m}_z \mathfrak{M}_z + \mathfrak{e}_x \mathfrak{E}_x + \mathfrak{e}_y \mathfrak{E}_y + \mathfrak{e}_z \mathfrak{E}_z\right),
$$

ed anche

$$
(76) \qquad L = \frac{1}{2}\left(\mathfrak{m}_x \mathfrak{M}_x + \mathfrak{m}_y \mathfrak{M}_y + \mathfrak{m}_z \mathfrak{M}_z - \mathfrak{e}_x \mathfrak{E}_x - \mathfrak{e}_y \mathfrak{E}_y - \mathfrak{e}_z \mathfrak{E}_z\right),
$$

sono tutti reali. Nella teoria per corpi a riposo le espressioni X_x, X_y, X_z, Y_x, Y_y, Y_z, Z_x, Z_y, Z_z intervengono con il nome di "sforzi di Maxwell", le quantità T_x, T_y, T_z come "vettore di Poynting", T_t come "densità d'energia elettromagnetica per l'unità di volume" ed L si indica come "funzione di Lagrange".

D'altra parte troviamo immediatamente, componendo nell'ordine inverso le matrici duali di f ed F

$$
(77) \qquad F^* f^* = \begin{vmatrix} -S_{11} - L, & -S_{12}, & -S_{13}, & -S_{14} \\ -S_{21}, & -S_{22} - L, & -S_{23}, & -S_{24} \\ -S_{31}, & -S_{32}, & -S_{33} - L, & -S_{34} \\ -S_{41}, & -S_{42}, & -S_{43}, & -S_{44} - L \end{vmatrix}
$$

e possiamo quindi porre

$$
(78) \qquad fF = S - L, \; F^* f^* = -S - L,
$$

nelle quali intendiamo per L il multiplo $L.1$ della matrice unità, cioè della matrice degli elementi

$$
|Le_{hk}| \left(\begin{matrix} e_{hh} = 1, & e_{hk} = 0, & h \neq k \\ & h, k = 1, \; 2, \; 3, \; 4 & \end{matrix} \right).
$$

Ricaviamo inoltre, poiché $SL = LS$,

$$
F^* f^* f F = (-S - L)(S - L) = -SS + L^2,
$$

e troviamo, poiché si ha $f^*f = \mathrm{Det}^{1/2}\, f$, $F^*F = \mathrm{Det}^{1/2}\, F$, l'interessante relazione:

$$SS = L^2 - \mathrm{Det}^{1/2} f\, \mathrm{Det}^{1/2}\, F, \tag{79}$$

cioè il prodotto della matrice S per se stessa è un multiplo della matrice unità, una matrice nella quale fuori dalla diagonale principale tutti gli elementi sono nulli e sulla diagonale tutti gli elementi sono uguali, ed hanno come valore comune la quantità qui riportata al secondo membro. Si ottengono quindi in generale le relazioni

$$S_{h1}S_{1k} + S_{h2}S_{2k} + S_{h3}S_{3k} + S_{h4}S_{4k} = 0 \tag{80}$$

per indici h e k disuguali estratti dalla sequenza 1, 2, 3, 4, e

$$S_{h1}S_{1h} + S_{h2}S_{2h} + S_{h3}S_{3h} + S_{h4}S_{4h} = L^2 - \mathrm{Det}^{1/2} f\, \mathrm{Det}^{1/2}\, F \tag{81}$$

per $h = 1,\ 2,\ 3,\ 4$.

Se ora invece di F e di f nelle espressioni (72), (73) introduciamo per mezzo delle (55), (56), (57) la forza elettrica a riposo Φ, la forza magnetica a riposo Ψ, la radiazione a riposo Ω, arriviamo alle espressioni:

$$L = -\frac{1}{2}\varepsilon\Phi\overline{\Phi} + \frac{1}{2}\mu\Psi\overline{\Psi}, \tag{82}$$

$$\begin{aligned} S_{hk} = {} & -\frac{1}{2}\varepsilon\Phi\overline{\Phi}e_{hk} + \frac{1}{2}\mu\Psi\overline{\Psi}e_{hk} \\ & +\varepsilon\left(\Phi_h\Phi_k - \Phi\overline{\Phi}w_hw_k\right) + \mu\left(\Psi_h\Psi_k - \Psi\overline{\Psi}w_hw_k\right) \\ & -\Omega_hw_k - \varepsilon\mu w_h\Omega_k \ (h,\ k = 1,\ 2,\ 3,\ 4) \end{aligned} \tag{83}$$

nelle quali si deve porre

$$\Phi\overline{\Phi} = \Phi_1^2 + \Phi_2^2 + \Phi_3^2 + \Phi_4^2,\ \ \Psi\overline{\Psi} = \Psi_1^2 + \Psi_2^2 + \Psi_3^2 + \Psi_4^2,$$

$$e_{hh} = 1,\ e_{hk} = 0,\ (h \neq k).$$

Il secondo membro della (82), come pure L, è sempre un invariante per le trasformazioni di Lorentz e i 4×4 elementi al secondo membro della (83), come S_{hk}, rappresentano una matrice dello spazio-tempo di II specie. Tenendo conto di ciò basta, per poter affermare le relazioni (82), (83) in generale, verificarle per il caso $w_1 = 0,\ w_2 = 0,\ w_3 = 0,\ w_4 = i$. Per questo caso $\mathfrak{w} = 0$ e le (83) e (82) si riconducono immediatamente mediante le (47), (51), (60) da un lato, ed $\mathfrak{e} = \varepsilon\mathfrak{E}$, $\mathfrak{M} = \mu\mathfrak{m}$ dall'altro, alle equazioni (75) e (76).

L' espressione al secondo membro nella (81), che è

$$= \left(\frac{1}{2}\left(\mathfrak{m}\mathfrak{M} - \mathfrak{e}\mathfrak{E}\right)\right)^2 + \left(\mathfrak{e}\mathfrak{m}\right)\left(\mathfrak{E}\mathfrak{M}\right),$$

risulta ≥ 0 mediante $(\mathfrak{e}\mathfrak{m}) = \varepsilon\Phi\overline{\Psi}$, $(\mathfrak{E}\mathfrak{M}) = \mu\Phi\overline{\Psi}$; la sua radice quadrata, presa ≥ 0, può tenendo conto della (79) essere indicata con $\mathrm{Det}^{1/4}\, S$.

Per $\overline{S}$, la matrice trasposta di S, risulta dalla (78), poiché $\overline{f} = -f,\ \overline{F} = -F$,

$$Ff = \overline{S} - L,\ f^*F^* = -\overline{S} - L. \tag{84}$$

Pertanto

$$S - \overline{S} = |S_{hk} - S_{kh}|$$

è una matrice alternante e significa parimenti un vettore dello spazio-tempo di II specie. Dall'espressione (83) otteniamo immediatamente

$$S - \overline{S} = -\left(\varepsilon\mu - 1\right)\left[w, \Omega\right], \tag{85}$$

dalla quale (vedi (57), (58)) si ricava ora

$$w\left(S - \overline{S}\right)^* = 0, \tag{86}$$

$$w\left(S - \overline{S}\right) = \left(\varepsilon\mu - 1\right)\Omega. \tag{87}$$

Quando in un punto dello spazio-tempo la materia è a riposo, si ha $\mathfrak{w} = 0$, e la (86) significa il sussistere delle equazioni

$$Z_y = Y_z,\ X_z = Z_x,\ Y_x = X_y;$$

inoltre per la (83) si ha

$$T_x = \Omega_1,\ T_y = \Omega_2,\ T_z = \Omega_3,$$

$$X_t = \varepsilon\mu\Omega_1,\ Y_t = \varepsilon\mu\Omega_2,\ Z_t = \varepsilon\mu\Omega_3.$$

Ora mediante un'opportuna rotazione del sistema di coordinate spaziali $x,\ y,\ z$ attorno all'origine è possibile far sì che sia

$$Z_y = Y_z = 0,\ X_z = Z_x = 0,\ Y_x = X_y = 0.$$

Per la (71) si ha

$$X_x + Y_y + Z_z + T_t = 0 \tag{88}$$

e secondo l'espressione nella (83) si ha sempre $T_t > 0$. Nel caso particolare, quando anche Ω si annulla, segue poi dalla (81)

$$X_x^2 = Y_y^2 = Z_z^2 = T_t^2 = (\mathrm{Det}^{1/4} S)^2,$$

e T_t ed una delle tre quantità $X_x,\ Y_y,\ Z_z$ sono uguali a $+\,\mathrm{Det}^{1/4}\, S$, le altre due a $-\,\mathrm{Det}^{1/4}\, S$. Se Ω non si annulla immaginiamo che sia $\Omega_3 \neq 0$, allora per la (80) si ha in particolare

$$T_zX_t = 0,\ T_zY_t = 0,\ Z_zT_z + T_zT_t = 0$$

e si trova perciò $\Omega_1 = 0,\ \Omega_2 = 0,\ Z_z = -T_t$. Dalla (81) e tenendo conto della (88) risulta quindi

$$X_x = -Y_y = \pm \operatorname{Det}^{1/2} S,$$

$$-Z_z = T_t = \sqrt{\operatorname{Det}^{1/2} S + \varepsilon\mu\Omega_3^2} > \operatorname{Det}^{1/4} S. -$$

Di significato del tutto particolare sarà infine il vettore dello spazio-tempo di I specie

$$K = \operatorname{lor} S, \tag{89}$$

per il quale dimostreremo ora un'importante trasformazione.

Per la (78) è $S = L + fF$ e risulta immediatamente

$$\operatorname{lor} S = \operatorname{lor} L + \operatorname{lor} fF.$$

Il simbolo lor significa un processo di derivazione che in $\operatorname{lor} fF$ riguarda da un lato f, dall'altro F. Di conseguenza $\operatorname{lor} fF$ si spezza additivamente in una prima ed in una seconda parte. La prima parte sarà evidentemente il prodotto delle matrici $(\operatorname{lor} f)F$, nel quale $\operatorname{lor} f$ si considera per conto suo come una matrice 1×4. La seconda parte è quella parte di $\operatorname{lor} fF$ nella quale le derivazioni riguardano solo le componenti di F. Ora ricaviamo dalla (78)

$$fF = -F^* f^* - 2L;$$

di conseguenza questa seconda parte di $\operatorname{lor} fF$ sarà $-(\operatorname{lor} F^*)f^*$ più la parte di $-2 \operatorname{lor} L$ nella quale le derivazioni riguardano solo le componenti di F. Risulta pertanto

$$\operatorname{lor} S = (\operatorname{lor} f)F - (\operatorname{lor} F^*)f^* + N, \tag{90}$$

dove N indica il vettore con le componenti

$$\begin{aligned} N_h = &\frac{1}{2}\left(\frac{\partial f_{23}}{\partial x_h}F_{23} + \frac{\partial f_{31}}{\partial x_h}F_{31} + \frac{\partial f_{12}}{\partial x_h}F_{12} + \frac{\partial f_{14}}{\partial x_h}F_{14} + \frac{\partial f_{24}}{\partial x_h}F_{24} + \frac{\partial f_{34}}{\partial x_h}F_{34}\right) \\ &-\frac{1}{2}\left(f_{23}\frac{\partial F_{23}}{\partial x_h} + f_{31}\frac{\partial F_{31}}{\partial x_h} + f_{12}\frac{\partial F_{12}}{\partial x_h} + f_{14}\frac{\partial F_{14}}{\partial x_h} + f_{24}\frac{\partial F_{24}}{\partial x_h} + f_{34}\frac{\partial F_{34}}{\partial x_h}\right) \end{aligned}$$

$$(h = 1,\ 2,\ 3,\ 4).$$

Utilizzando le equazioni fondamentali ({A}) e ({B}) la (90) si trasforma nella relazione fondamentale

$$\operatorname{lor} S = -sF + N. \tag{91}$$

Nel caso particolare $\varepsilon = 1$, $\mu = 1$, quando $f = F$, N si annulla identicamente.

In generale arriviamo, in base alle (55), (56) e tenendo conto dell'espressione (82) di L e della (57), alle seguenti espressioni per le componenti di N:

(92)

$$\begin{aligned} N_h = &-\frac{1}{2}\Phi\overline{\Phi}\frac{\partial \varepsilon}{\partial x_h} - \frac{1}{2}\Psi\overline{\Psi}\frac{\partial \mu}{\partial x_h} \\ &+ (\varepsilon\mu - 1)\left(\Omega_1\frac{\partial w_1}{\partial x_h} + \Omega_2\frac{\partial w_2}{\partial x_h} + \Omega_3\frac{\partial w_3}{\partial x_h} + \Omega_4\frac{\partial w_4}{\partial x_h}\right) \quad \text{per } h = 1,\ 2,\ 3,\ 4. \end{aligned}$$

Se ora facciamo uso della (59) e indichiamo con $\mathfrak{W}$ il vettore spaziale che ha $\Omega_1,\ \Omega_2,\ \Omega_3$ come componenti $x,\ y,\ z$, l'ultimo, terzo addendo della (92) si può portare anche nella forma

$$\frac{\varepsilon\mu - 1}{\sqrt{1-\mathfrak{w}^2}}\left(\mathfrak{W}\frac{\partial \mathfrak{w}}{\partial x_h}\right), \tag{93}$$

dove la parentesi indica il prodotto scalare dei due vettori in essa presenti.

§14. Le forze ponderomotrici.

Rappresentiamo ora la relazione $K = \operatorname{lor} S = -sF + N$ esplicitamente; essa dà le equazioni

$$K_1 = \frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z} - \frac{\partial X_t}{\partial t} = \rho\mathfrak{E}_x + \mathfrak{s}_y\mathfrak{M}_z - \mathfrak{s}_z\mathfrak{M}_y \tag{94}$$

$$-\frac{1}{2}\Phi\overline{\Phi}\frac{\partial\varepsilon}{\partial x} - \frac{1}{2}\Psi\overline{\Psi}\frac{\partial\mu}{\partial x} + \frac{\varepsilon\mu - 1}{\sqrt{1-\mathfrak{w}^2}}\left(\mathfrak{W}\frac{\partial \mathfrak{w}}{\partial x}\right),$$

$$K_2 = \frac{\partial Y_x}{\partial x} + \frac{\partial Y_y}{\partial y} + \frac{\partial Y_z}{\partial z} - \frac{\partial Y_t}{\partial t} = \rho\mathfrak{E}_y + \mathfrak{s}_z\mathfrak{M}_x - \mathfrak{s}_x\mathfrak{M}_z \tag{95}$$

$$-\frac{1}{2}\Phi\overline{\Phi}\frac{\partial\varepsilon}{\partial y} - \frac{1}{2}\Psi\overline{\Psi}\frac{\partial\mu}{\partial y} + \frac{\varepsilon\mu - 1}{\sqrt{1-\mathfrak{w}^2}}\left(\mathfrak{W}\frac{\partial \mathfrak{w}}{\partial y}\right),$$

$$K_3 = \frac{\partial Z_x}{\partial x} + \frac{\partial Z_y}{\partial y} + \frac{\partial Z_z}{\partial z} - \frac{\partial Z_t}{\partial t} = \rho\mathfrak{E}_z + \mathfrak{s}_x\mathfrak{M}_y - \mathfrak{s}_y\mathfrak{M}_x \tag{96}$$

$$-\frac{1}{2}\Phi\overline{\Phi}\frac{\partial\varepsilon}{\partial z} - \frac{1}{2}\Psi\overline{\Psi}\frac{\partial\mu}{\partial z} + \frac{\varepsilon\mu - 1}{\sqrt{1-\mathfrak{w}^2}}\left(\mathfrak{W}\frac{\partial \mathfrak{w}}{\partial z}\right),$$

$$\frac{1}{i}K_4 = -\frac{\partial T_x}{\partial x} - \frac{\partial T_y}{\partial y} - \frac{\partial T_z}{\partial z} - \frac{\partial T_t}{\partial t} = \mathfrak{s}_x\mathfrak{E}_x + \mathfrak{s}_y\mathfrak{E}_y + \mathfrak{s}_z\mathfrak{E}_z \tag{97}$$

$$+\frac{1}{2}\Phi\overline{\Phi}\frac{\partial\varepsilon}{\partial t} + \frac{1}{2}\Psi\overline{\Psi}\frac{\partial\mu}{\partial t} - \frac{\varepsilon\mu - 1}{\sqrt{1-\mathfrak{w}^2}}\left(\mathfrak{W}\frac{\partial \mathfrak{w}}{\partial t}\right).$$

È ora mia opinione che nei processi elettromagnetici la forza ponderomotrice che agisce sulla materia in un punto dello spazio-tempo $x,\ y,\ z,\ t$, calcolata per l'unità di volume, abbia come componenti $x,\ y,\ z$ le prime tre componenti del vettore dello spazio-tempo

$$K + \left(w\overline{K}\right)w \tag{98}$$

normale al vettore dello spazio-tempo w, e che inoltre la legge dell'energia trovi la sua espressione nella quarta relazione di cui sopra.

Un articolo successivo sarà riservato a giustificare questa opinione in modo esauriente; qui darò solo un certo sostegno a questa opinione mediante alcune considerazioni sulla meccanica.

Nel caso limite $\varepsilon = 1,\ \mu = 1,\ \sigma = 0$ si ha $N = 0,\ \mathfrak{s} = \rho\mathfrak{w}$; sarà quindi $w\overline{K} = 0$, e questi risultati coincidono con quelli consueti nella teoria degli elettroni.

Appendice. Meccanica e postulato di relatività.

Sarebbe assai insoddisfacente se la nuova concezione del tempo, che si è riconosciuta grazie alla libertà delle trasformazioni di Lorentz, si potesse far valere solo in un campo limitato della fisica.

Ora molti autori affermano che la meccanica classica è in contrasto con il postulato di relatività, che qui è scelto a fondamento per l'elettrodinamica.

Per esprimere un giudizio in proposito, consideriamo una trasformazione di Lorentz speciale, rappresentata dalle equazioni (10), (11), (12), con un vettore $\mathfrak{v}$ diverso da zero diretto in qualche modo e con un modulo q che sia < 1. Penseremo per un momento ancora di non aver preso nessuna decisione riguardo al rapporto tra l'unità di lunghezza e l'unità di tempo, e di conseguenza in quelle equazioni al posto di $t,\ t',\ q$ scriveremo $ct,\ ct',\ q/c$, dove c rappresenta una certa costante positiva e dev'essere $q < c$. Le suddette equazioni si trasformano perciò in

$$\mathfrak{r}'_{\bar{\mathfrak{v}}} = \mathfrak{r}_{\bar{\mathfrak{v}}},\ \mathfrak{r}'_{\mathfrak{v}} = \frac{c\,(\mathfrak{r}_{\mathfrak{v}} - qt)}{\sqrt{c^2 - q^2}},\ t' = \frac{-q\mathfrak{r}_{\mathfrak{v}} + c^2 t}{c\sqrt{c^2 - q^2}};$$

ricordiamo che il vettore $\mathfrak{r}$ indica il vettore spaziale $x,\ y,\ z$, ed $\mathfrak{r}'$ il vettore spaziale $x',\ y',\ z'$.

Se in queste equazioni passiamo al limite per $c = \infty$ mentre teniamo fisso $\mathfrak{v}$, da esse risulta

$$\mathfrak{r}'_{\bar{\mathfrak{v}}} = \mathfrak{r}_{\bar{\mathfrak{v}}},\ \mathfrak{r}'_{\mathfrak{v}} = \mathfrak{r}_{\mathfrak{v}} - qt,\ t' = t.$$

Queste nuove equazioni indicheranno ora un passaggio dal sistema di coordinate spaziali $x,\ y,\ z$ ad un altro sistema di coordinate spaziali $x',\ y',\ z'$ con assi paralleli, l'origine del quale proceda rispetto al primo in linea retta con velocità costante, mentre il parametro temporale resterà del tutto immodificato.

Sulla base di questa osservazione si può dire:

La meccanica classica postula una covarianza delle leggi fisiche per il gruppo delle trasformazioni lineari omogenee dell'espressione

$$(1) \qquad -x^2 - y^2 - z^2 + c^2t^2$$

in sè, con la determinazione $c = \infty$.

Ora sarebbe addirittura sconvolgente trovare in una parte della fisica una covarianza delle leggi per le trasformazioni dell'espressione (1) in sè per un determinato c finito, e in un'altra parte invece per $c = \infty$. Che la meccanica di Newton possieda questa covarianza solo per $c = \infty$ e che non si possa immaginare per il caso con c velocità della luce, non richiede alcuna spiegazione. Ma non dovrebbe ora essere ammissibile il tentativo di considerare quella covarianza tradizionale per $c = \infty$ solo come un'approssimazione, ricavata direttamente dall'esperienza, di una covarianza più precisa delle leggi di natura per un certo c finito?

Vorrei sostenere che mediante una riformulazione della meccanica, nella quale in luogo del postulato newtoniano di relatività con $c = \infty$ ne appaia uno con un c finito, perfino la struttura assiomatica della meccanica pare conseguire un notevole perfezionamento.

Il rapporto tra l'unità di tempo e l'unità di lunghezza sia normalizzato in modo tale che il postulato di relatività intervenga con $c = 1$.

Poiché voglio ora considerare delle figure geometriche sulla varietà delle quattro variabili $x,\ y,\ z,\ t$, può essere conveniente per una più facile comprensione di quanto segue tralasciare completamente y e z, e interpretare x e t come coordinate parallele oblique in un piano.

Un'origine dello spazio-tempo $O\,(x,\ y,\ z,\ t = 0,\ 0,\ 0,\ 0)$ sarà mantenuta fissa dalla trasformazione di Lorentz. La figura

$$-x^2 - y^2 - z^2 + t^2 = 1,\ t > 0, \tag{2}$$

una falda d'iperboloide, contiene il punto dello spazio-tempo $A(x,\ y,\ z,\ t = 0,\ 0,\ 0,\ 1)$ e tutti i punti dello spazio-tempo A', che in seguito alle trasformazioni di Lorentz appaiono come $(x',\ y',\ z',\ t' = 0,\ 0,\ 0,\ 1)$ nelle unità di misura $x',\ y',\ z',\ t'$ via via introdotte.

La direzione di un raggio vettore OA' da O ad un punto A' della (2) e le direzioni delle tangenti alla (2) in A' si diranno mutuamente normali.

Seguiamo un punto determinato della materia nella sua traiettoria a tutti i tempi t. Chiamo una linea dello spazio-tempo la totalità dei punti dello spazio-tempo $x,\ y,\ z,\ t$ che corrispondono al punto materiale a tempi t diversi.

Il problema di determinare il moto della materia è da intendere così: si deve determinare per ogni punto dello spazio-tempo la direzione della linea dello spazio-tempo che passa di lì.

Trasformare a riposo un punto dello spazio-tempo $P\,(x,\ y,\ z,\ t)$ vuol dire introdurre mediante una trasformazione di Lorentz un sistema di riferimento $x',\ y',\ z',\ t'$ in modo tale che l'asse t' giaccia nella direzione OA' che la linea dello spazio-tempo che passa per P ivi mostra. Lo spazio t' =cost., che comprenda P, lo chiameremo allora lo spazio normale in P alla linea dello spazio-tempo. All'incremento dt del tempo t di P corrisponde l'incremento[12]

$$d\tau = \sqrt{dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2} = dt\sqrt{1 - \mathfrak{w}^2} = \frac{dx_4}{w_4} \tag{3}$$

del parametro t' ora introdotto. Il valore dell'integrale

$$\int d\tau = \int \sqrt{-dx_1^2 - dx_2^2 - dx_3^2 - dx_4^2},$$

calcolato lungo la linea dello spazio-tempo da un qualche punto di partenza fisso P^0 fino ad un punto d'arrivo variabile P, si chiama il tempo proprio del punto della materia che si trova nel punto P dello spazio-tempo. (Questa è una generalizzazione del concetto di tempo locale proposto da Lorentz per moti uniformi.)

[12]Riutilizziamo la notazione con gli indici e i simboli $\mathfrak{w}$, w nel senso prima fissato (vedi §3 e §4).

Consideriamo un corpo R^0 esteso spazialmente ad un determinato tempo t^0; allora la regione individuata da tutte le linee dello spazio-tempo condotte per i punti dello spazio-tempo R^0, t^0 si chiamerà un filo dello spazio-tempo.

Se abbiamo un'espressione analitica $\Theta\,(x,\ y,\ z,\ t)$ tale che $\Theta\,(x,\ y,\ z,\ t) = 0$ intersechi ogni linea dello spazio-tempo del filo in un punto, e che sia

$$-\left(\frac{\partial\Theta}{\partial x}\right)^2 - \left(\frac{\partial\Theta}{\partial y}\right)^2 - \left(\frac{\partial\Theta}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial\Theta}{\partial t}\right)^2 > 0,\ \frac{\partial\Theta}{\partial t} > 0,$$

chiameremo la totalità Q dei punti d'intersezione una sezione del filo. In ogni punto $P\,(x,\ y,\ z,\ t)$ di una siffatta sezione possiamo introdurre mediante una trasformazione di Lorentz un sistema di riferimento $x',\ y',\ z',\ t'$ in modo che si abbia inoltre

$$\frac{\partial\Theta}{\partial x'} = 0,\ \frac{\partial\Theta}{\partial y'} = 0,\ \frac{\partial\Theta}{\partial z'} = 0,\ \frac{\partial\Theta}{\partial t'} > 0.$$

La direzione del corrispondente asse t' univocamente determinato si chiama la normale superiore della sezione Q nel punto P e la quantità $dJ = \int\int\int dx'dy'dz'$ per un intorno di P sulla sezione si dice un elemento di volume della sezione. In questo senso si indicheranno $R^0,\ t^0$ stessi come la sezione $t = t^0$ del filo normale all'asse t e il volume del corpo R^0 come il volume di questa sezione.

Se facciamo convergere lo spazio R^0 in un punto arriviamo al concetto di filo dello spazio-tempo infinitamente sottile. In uno di questi pensiamo sempre che una linea dello spazio-tempo sia in qualche modo designata come linea principale e intendiamo per tempo proprio del filo il tempo proprio fissato su questa linea principale, e per sezioni normali del filo le sue sezioni con spazi che nei punti della linea principale siano ad essa normali.

Formuliamo ora il principio di conservazione della massa.

Ad ogni spazio R ad un tempo t corrisponde una quantità positiva, la massa in R al tempo t. Se R converge ad un punto $x,\ y,\ z,\ t$, il quoziente di questa massa per il volume di R si approssima ad un valore limite $\mu\,(x,\ y,\ z,\ t)$, la densità di massa nel punto dello spazio-tempo $x,\ y,\ z,\ t$.

Il principio di conservazione della massa afferma: per un filo dello spazio-tempo infinitamente sottile il prodotto μdJ della densità di massa μ in un punto $x,\ y,\ z,\ t$ del filo (cioè della linea principale del filo) per il volume dJ della sezione normale all'asse t condotta per il punto rimane sempre costante lungo l'intero filo.

Ora si dovrà valutare come volume dJ_n della sezione normale del filo condotta per $x,\ y,\ z,\ t$

$$dJ_n = \frac{1}{\sqrt{1-\mathfrak{w}^2}}dJ = -iw_4 dJ = \frac{dt}{d\tau}dJ, \tag{4}$$

e si potrà definire

$$\nu = \frac{\mu}{-iw_4} = \mu\sqrt{1-\mathfrak{w}^2} = \mu\frac{d\tau}{dt} \tag{5}$$

come densità di massa a riposo nella posizione $x,\ y,\ z,\ t$. Quindi il principio di conservazione della massa si potrà formulare anche così:

Per un filo dello spazio-tempo infinitamente sottile il prodotto della densità di massa a riposo e del volume della sezione normale in un punto del filo è sempre costante lungo l'intero filo.

In un filo qualsiasi dello spazio-tempo si prenda una prima sezione Q^0 e pure una seconda sezione Q^1, che abbia in comune con Q^0 i punti sul contorno del filo, e solo quelli, e le linee dello spazio-tempo all'interno del filo abbiano su Q^1 dei valori di t più grandi che su Q^0. La regione di estensione finita, compresa tra Q^0 e Q^1, si chiamerà una falce dello spazio-tempo, Q^0 il bordo inferiore, Q^1 il bordo superiore della falce.

Se pensiamo di suddividere il filo in molti fili dello spazio-tempo sottilissimi, allora ad ogni ingresso di un filo sottile attraverso il bordo inferiore della falce corrisponde un'uscita attraverso il superiore, e per entrambi il prodotto νdJ_n determinato nel senso delle (4) e (5) ha sempre lo stesso valore. Pertanto è nulla la differenza dei due integrali $\int \nu dJ_n$, il primo esteso al bordo superiore, il secondo al bordo inferiore della falce. Questa differenza, secondo un noto teorema del calcolo integrale, risulta uguale all'integrale

$$\int\int\int\int \mathrm{lor} \nu \overline{w} dxdydzdt,$$

esteso all'intera regione della falce, dove (vedi la (67) nel §12)

$$\mathrm{lor}\, \nu \overline{w} = \frac{\partial \nu w_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \nu w_2}{\partial x_2} + \frac{\partial \nu w_3}{\partial x_3} + \frac{\partial \nu w_4}{\partial x_4}.$$

Se la falce si contrae in un punto $x,\ y,\ z,\ t$ dello spazio-tempo, si trova da qui l'equazione differenziale

$$\mathrm{lor}\, \nu \overline{w} = 0, \tag{6}$$

cioè la condizione di continuità

$$\frac{\partial \mu \mathfrak{w}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mu \mathfrak{w}_y}{\partial y} + \frac{\partial \mu \mathfrak{w}_z}{\partial z} + \frac{\partial \mu}{\partial t} = 0.$$

Costruiamo inoltre l'integrale

$$N = \int\int\int\int \nu dxdydzdt, \tag{7}$$

esteso all'intera regione di una falce dello spazio-tempo. Suddividiamo la falce in fili dello spazio-tempo sottili e ancora ciascuno di questi fili secondo elementi piccoli $d\tau$ del suo tempo proprio, che tuttavia siano ancora grandi rispetto alla dimensione lineare della sezione normale; poniamo $\nu dJ_n = dm$ per la massa di un filo siffatto e scriviamo τ^0 e τ^1 per il tempo proprio del filo al bordo inferiore e rispettivamente superiore della falce; allora l'integrale (7) si può anche intendere come

$$\int\int \nu dJ_n d\tau = \int \left(\tau^1 - \tau^0\right) dm$$

su tutti i fili della falce.

Ora considero le linee dello spazio-tempo all'interno di una falce dello spazio-tempo come curve sostanziali costituite da punti sostanziali e me le immagino sottoposte nel modo seguente ad una variazione continua di posizione all'interno della falce. Le intere curve saranno deformate in qualche modo mantenendo fermi gli estremi sui bordi inferiore e superiore della falce e i singoli punti sostanziali di esse saranno spostati in modo tale da procedere sempre normalmente alle curve. L'intero processo si rappresenterà analiticamente mediante un parametro ϑ, e al valore $\vartheta = 0$ corrisponderanno le curve con l'andamento delle linee dello spazio-tempo all'interno della falce che ha luogo realmente. Un siffatto processo si chiamerà una deformazione virtuale nella falce.

Supponiamo che il punto della falce a $x,\ y,\ z,\ t$ per $\vartheta = 0$ vada, per il valore ϑ del parametro, in $x + \delta x$, $y + \delta y$, $z + \delta z$, $t + \delta t$; queste ultime quantità saranno allora funzione di $x,\ y,\ z,\ t,\ \vartheta$. Consideriamo di nuovo un filo dello spazio-tempo infinitamente sottile nel punto $x,\ y,\ z,\ t$, con una sezione normale di volume dJ_n, e sia $dJ_n + \delta dJ_n$ il volume della sezione normale al punto corrispondente del filo variato; terremo conto del principio di conservazione dalla massa, e attribuiremo a questa punto variato una densità di massa a riposo $\nu + \delta\nu$ secondo la

$$(8) \qquad (\nu + \delta\nu)\,(dJ_n + \delta dJ_n) = \nu dJ_n = dm;$$

con ν intendiamo la densità a riposo reale in $x,\ y,\ z,\ t$. A seguito di questo vincolo l'integrale (7), esteso sulla regione della falce, varierà per la deformazione virtuale come una certa funzione $N + \delta N$ di ϑ, e chiameremo questa funzione $N + \delta N$ l'azione della massa per la deformazione virtuale.

Introduciamo la scrittura con gli indici; sarà:

$$(9) \qquad d\,(x_h + \delta x_h) = dx_h + \sum_k \frac{\partial \delta x_h}{\partial x_k} dx_k + \frac{\partial \delta x_h}{\partial \vartheta} d\vartheta \quad \begin{pmatrix} k = 1,\ 2,\ 3,\ 4 \\ h = 1,\ 2,\ 3,\ 4 \end{pmatrix}.$$

Ora è chiaro, in base alle osservazioni fatte prima, che il valore di $N + \delta N$ per il valore ϑ del parametro sarà:

$$(10) \qquad N + \delta N = \int\int\int\int \nu \frac{d\,(\tau + \delta\tau)}{d\tau} dxdydzdt,$$

esteso alla falce, dove $d\,(\tau + \delta\tau)$ indica quella quantità che si ottiene da

$$\sqrt{-\,(dx_1 + d\delta x_1)^2 - (dx_2 + d\delta x_2)^2 - (dx_3 + d\delta x_3)^2 - (dx_4 + d\delta x_4)^2}$$

per mezzo della (9) e di

$$dx_1 = w_1 d\tau,\ dx_2 = w_2 d\tau,\ dx_3 = w_3 d\tau,\ dx_4 = w_4 d\tau,\ d\vartheta = 0;$$

risulta quindi

$$(11) \qquad \frac{d\,(\tau + \delta\tau)}{d\tau} = \sqrt{-\sum_h \left(w_h + \sum_k \frac{\partial \delta x_h}{\partial x_k} w_k\right)^2} \quad \begin{pmatrix} k = 1,\ 2,\ 3,\ 4 \\ h = 1,\ 2,\ 3,\ 4 \end{pmatrix}.$$

Sottoporremo ora ad una trasformazione il valore della derivata

$$\left(\frac{d\,(N+\delta N)}{d\vartheta}\right)_{(\vartheta=0)}. \tag{12}$$

Poiché ogni δx_h come funzione degli argomenti $x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ \vartheta$ si annulla in generale per $\vartheta = 0$, così pure in generale si ha $\partial \delta x_h / \partial x_k = 0$ per $\vartheta = 0$. Poniamo ora

$$\left(\frac{\partial \delta x_h}{\partial \vartheta}\right)_{(\vartheta=0)} = \xi_h \ (h = 1,\ 2,\ 3,\ 4), \tag{13}$$

allora in base alle (10) e (11) risulta per l'espressione (12):

$$-\int\int\int\int \nu \sum_h w_h \left(\frac{\partial \xi_h}{\partial x_1} w_1 + \frac{\partial \xi_h}{\partial x_2} w_2 + \frac{\partial \xi_h}{\partial x_3} w_3 + \frac{\partial \xi_h}{\partial x_4} w_4\right) dxdydzdt.$$

Per il sistema $x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4$ al bordo della falce $\delta x_1,\ \delta x_2,\ \delta x_3,\ \delta x_4$ si annulleranno per ogni valore ϑ e quindi anche $\xi_1,\ \xi_2,\ \xi_3,\ \xi_4$ saranno ovunque nulli. Allora mediante integrazione per parti l'ultimo integrale si trasforma in

$$\int\int\int\int \sum_h \xi_h \left(\frac{\partial \nu w_h w_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \nu w_h w_2}{\partial x_2} + \frac{\partial \nu w_h w_3}{\partial x_3} + \frac{\partial \nu w_h w_4}{\partial x_4}\right) dxdydzdt.$$

L' espressione tra parentesi è

$$= w_h \sum_k \frac{\partial \nu w_k}{\partial x_k} + \nu \sum_k w_k \frac{\partial w_h}{\partial x_k}.$$

La prima somma qui si annulla in seguito alla condizione di continuità (6), la seconda si può rappresentare come

$$\frac{\partial w_h}{\partial x_1}\frac{dx_1}{d\tau} + \frac{\partial w_h}{\partial x_2}\frac{dx_2}{d\tau} + \frac{\partial w_h}{\partial x_3}\frac{dx_3}{d\tau} + \frac{\partial w_h}{\partial x_4}\frac{dx_4}{d\tau} = \frac{dw_h}{d\tau} = \frac{d}{d\tau}\left(\frac{dx_h}{d\tau}\right),$$

dove con $d/d\tau$ si intende la derivata nella direzione della linea dello spazio-tempo di un punto materiale. Per la derivata (12) risulta perciò infine l'espressione

$$\int\int\int\int \nu \left(\frac{dw_1}{d\tau}\xi_1 + \frac{dw_2}{d\tau}\xi_2 + \frac{dw_3}{d\tau}\xi_3 + \frac{dw_4}{d\tau}\xi_4\right) dxdydzdt. \tag{14}$$

Per una deformazione virtuale nella falce abbiamo imposto la prescrizione che il punto sostanziale considerato si debba spostare normalmente alla curva da esso descritta; ciò significa per $\vartheta = 0$ che gli ξ_h devono soddisfare la condizione

$$w_1\xi_1 + w_2\xi_2 + w_3\xi_3 + w_4\xi_4 = 0. \tag{15}$$

Pensiamo agli sforzi di Maxwell nell'elettrodinamica dei corpi a riposo e consideriamo d'altra parte i nostri risultati dei §§12 e 13; risulta naturale allora un certo aggiustamento al postulato di relatività del principio di Hamilton per mezzi elastici deformati con continuità.

In ogni punto dello spazio-tempo sia nota (come nel §13) una matrice dello spazio-tempo di II specie

$$S = \begin{vmatrix} S_{11}, & S_{12}, & S_{13}, & S_{14} \\ S_{21}, & S_{22}, & S_{23}, & S_{24} \\ S_{31}, & S_{32}, & S_{33}, & S_{34} \\ S_{41}, & S_{42}, & S_{43}, & S_{44} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} X_x, & Y_x, & Z_x, & -iT_x \\ X_y, & Y_y, & Z_y, & -iT_y \\ X_z, & Y_z, & Z_z, & -iT_z \\ -iX_t, & -iY_t, & -iZ_t, & T_t \end{vmatrix}, \tag{16}$$

dove $X_x,\ Y_x,\ \ldots Z_z,\ T_x,\ \ldots X_t,\ \ldots T_t$ siano quantità reali. Per una deformazione virtuale in una falce dello spazio-tempo con i simboli prima introdotti il valore dell'integrale

$$W + \delta W = \int\int\int\int \left(\sum_{h,\ k} S_{hk} \frac{\partial\,(x_k + \delta x_k)}{\partial x_h} \right) dxdydzdt, \tag{17}$$

esteso alla regione della falce, si può chiamare l'azione degli sforzi per una deformazione virtuale.

La somma che qui interviene, scritta esplicitamente e con quantità reali, è

$$\begin{gathered} X_x + Y_y + Z_z + T_t \\ +X_x \frac{\partial \delta x}{\partial x} + X_y \frac{\partial \delta x}{\partial y} + \cdots + Z_z \frac{\partial \delta z}{\partial z} \\ -X_t \frac{\partial \delta x}{\partial t} - \cdots + T_x \frac{\partial \delta t}{\partial x} + \cdots + T_t \frac{\partial \delta t}{\partial t}. \end{gathered}$$

Postuleremo ora il seguente principio di minimo per la meccanica:

Una falce dello spazio-tempo sia limitata; allora per ogni deformazione virtuale nella falce la somma dell'azione della massa e dell'azione degli sforzi dev'essere sempre un estremo per l'andamento delle linee dello spazio-tempo nella falce che ha luogo realmente.

Il senso di questa affermazione è che per ogni deformazione virtuale, con i simboli spiegati precedentemente, dev'essere

$$\left(\frac{d\,(\delta N + \delta W)}{d\vartheta} \right)_{\vartheta=0} = 0. \tag{18}$$

Con i metodi del calcolo delle variazioni da questo principio di minimo derivano, tenendo conto della condizione (15) e per mezzo della forma (14), le quattro equazioni differenziali seguenti

$$\nu \frac{dw_h}{d\tau} = K_h + \kappa w_h \ (h = 1,\ 2,\ 3,\ 4), \tag{19}$$

dove

$$K_h = \frac{\partial S_{1h}}{\partial x_1} + \frac{\partial S_{2h}}{\partial x_2} + \frac{\partial S_{3h}}{\partial x_3} + \frac{\partial S_{4h}}{\partial x_4} \tag{20}$$

sono le componenti del vettore dello spazio-tempo di I specie $K = \operatorname{lor} S$, e κ è un fattore, la determinazione del quale deve discendere da $w\overline{w} = -1$. Mediante moltiplicazione della (19) per w_h e successiva somma su $h = 1,\ 2,\ 3,\ 4$ si trova $\kappa = K\overline{w}$ ed evidentemente $K + (K\overline{w})\, w$ sarà un vettore dello spazio-tempo di I specie normale a w. Se scriviamo le componenti di questo vettore come

$$X,\ Y,\ Z,\ iT;$$

otteniamo le seguenti leggi per il moto della materia:

$$\begin{aligned} \nu\frac{d}{d\tau}\frac{dx}{d\tau} &= X,\\ \nu\frac{d}{d\tau}\frac{dy}{d\tau} &= Y,\\ \nu\frac{d}{d\tau}\frac{dz}{d\tau} &= Z,\\ \nu\frac{d}{d\tau}\frac{dt}{d\tau} &= T. \end{aligned} \tag{21}$$

Valgono inoltre

$$\left(\frac{dx}{d\tau}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\tau}\right)^2 + \left(\frac{dz}{d\tau}\right)^2 = \left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 - 1,$$

e

$$X\frac{dx}{d\tau} + Y\frac{dy}{d\tau} + Z\frac{dz}{d\tau} = T\frac{dt}{d\tau},$$

e in base a questa circostanza si può considerare la quarta delle equazioni (21) come una conseguenza delle prime tre.

Dalle (21) deduciamo inoltre le leggi per il moto di un punto materiale, vale a dire per l'andamento di un filo dello spazio-tempo infinitamente sottile.

Si indichi con $x,\ y,\ z,\ t$ un punto della linea principale scelta in qualche modo nel filo. Scriviamo le equazioni (21) per i punti della sezione normale del filo condotta per $x,\ y,\ z,\ t$ e le integriamo, moltiplicate per l'elemento di volume della sezione, sull'intero spazio della sezione normale. Siano $R_x,\ R_y,\ R_z,\ R_t$ gli integrali dei secondi membri di queste, e sia m la massa costante del filo; risulta allora

$$\begin{aligned} m\frac{d}{d\tau}\frac{dx}{d\tau} &= R_x,\\ m\frac{d}{d\tau}\frac{dy}{d\tau} &= R_y,\\ m\frac{d}{d\tau}\frac{dz}{d\tau} &= R_z,\\ m\frac{d}{d\tau}\frac{dt}{d\tau} &= R_t. \end{aligned} \tag{22}$$

Il vettore R con le componenti $R_x,\ R_y,\ R_z,\ iR_t$ è ancora un vettore dello spazio-tempo di I specie, che è normale al vettore dello spazio-tempo di I specie w, velocità del punto materiale, con le componenti

$$\frac{dx}{d\tau},\ \frac{dy}{d\tau},\ \frac{dz}{d\tau},\ i\frac{dt}{d\tau}.$$

Chiameremo questo vettore R la forza motrice del punto materiale. Se tuttavia si integrano le equazioni invece che sulla sezione normale del filo sulla sezione del filo normale all'asse t, condotta per $x,\ y,\ z,\ t$, allora (vedi (4)) valgono le equazioni (22) moltiplicate ancora per $d\tau/dt$, e in particolare come ultima equazione

$$m\frac{d}{dt}\left(\frac{dt}{d\tau}\right)=\mathfrak{w}_x R_x\frac{d\tau}{dt}+\mathfrak{w}_y R_y\frac{d\tau}{dt}+\mathfrak{w}_z R_z\frac{d\tau}{dt}.$$

Si avrà ora da interpretare il secondo membro come lavoro compiuto sul punto materiale nell'unità di tempo. Nell'equazione stessa si vedrà quindi la legge dell'energia per il moto del punto materiale, e l'espressione

$$m\left(\frac{dt}{d\tau}-1\right)=m\left(\frac{1}{\sqrt{1-\mathfrak{w}^2}}-1\right)=m\left(\frac{1}{2}|\mathfrak{w}|^2+\frac{3}{8}|\mathfrak{w}|^4+\dots\right)$$

si considererà l'energia cinetica del punto materiale. Poiché è sempre $dt > d\tau$, si potrebbe designare il quoziente $(dt-d\tau)/d\tau$ come l'anticipo del tempo rispetto al tempo proprio del punto materiale e quindi esprimersi così: l'energia cinetica di un punto materiale è il prodotto della sua massa per l'anticipo del tempo rispetto al suo tempo proprio.

La quaterna delle equazioni (22) mostra inoltre la simmetria completa in x, y, z, it richiesta dal postulato di relatività, laddove alla quarta equazione, come già è capitato nell'elettrodinamica, allo stesso modo va attribuita un'importanza fisica più elevata. Sulla base della prescrizione di questa simmetria si può costruire la terna delle prime tre equazioni immediatamente sul modello della quarta equazione, e tenendo conto di questa circostanza è corretto affermare: se si pone il postulato di relatività al vertice della meccanica, le leggi complete del moto derivano dalla sola legge dell'energia.

Non posso tralasciare ora di rendere plausibile il fatto che non ci si debba aspettare dai fenomeni della gravitazione una contraddizione rispetto all'assunzione del postulato di relatività[13].

Sia $B^*(x^*,\ y^*,\ z^*,\ t^*)$ un punto fisso dello spazio-tempo, allora l'insieme di tutti quei punti dello spazio-tempo $B(x,\ y,\ z,\ t)$ per i quali è

$$(x-x^*)^2+(y-y^*)^2+(z-z^*)^2=(t-t^*)^2,\ t-t^*\geq 0, \tag{23}$$

si chiamerà la struttura di radiazione del punto dello spazio-tempo B^*.

Una linea dello spazio-tempo assunta a piacere sarà intersecata da questa struttura sempre in un solo punto B dello spazio-tempo, come risulta da un lato per la convessità della struttura, dall'altro per la circostanza che tutte le direzioni delle linee dello spazio-tempo sono solo direzioni da B^* verso il lato concavo della struttura. B^* si chiama quindi un punto di luce di B.

Se nella relazione (23) si pensa fisso il punto $B(x,\ y,\ z,\ t)$, variabile il punto $B^*(x^*,\ y^*,\ z^*,\ t^*)$, la suddetta relazione rappresenta l'insieme di tutti i punti B^* dello spazio-tempo che sono punti di luce di B, e si dimostra analogamente che su un'arbitraria linea dello spazio-tempo esiste sempre un solo punto B^* che è un punto di luce di B.

[13]In modo del tutto diverso da come procedo qui, H. Poincaré (Rend. Circ. Matem. Palermo, t. XXI (1906), p. 129) ha cercato di adattare la legge d'attrazione newtoniana al postulato di relatività.

Ora un punto materiale F di massa m può sperimentare una forza motrice per la presenza di un altro punto materiale F^* di massa m^* secondo la legge seguente. Rappresentiamoci i fili dello spazio-tempo di F ed F^* con linee principali in essi. Sia BC un elemento infinitamente piccolo della linea principale di F, e inoltre B^* il punto di luce di B, C^* il punto di luce di C sulla linea principale di F^*, e poi OA' il raggio vettore dell'iperboloide fondamentale (2) parallelo a B^*C^*, infine D^* il punto d'intersezione della retta B^*C^* con lo spazio per B ad essa normale. La forza motrice sul punto materiale F nel punto dello spazio-tempo B sia ora quel vettore dello spazio-tempo di I specie normale a BC, che si compone additivamente con il vettore

$$mm^* \left(\frac{OA'}{B^*D^*} \right)^3 BD^* \tag{24}$$

nella direzione BD^* e inoltre con un opportuno vettore nella direzione B^*C^*. Si deve intendere con OA'/B^*D^* il rapporto dei due vettori paralleli considerati.

È chiaro che questa determinazione ha carattere covariante rispetto al gruppo di Lorentz.

Studiamo ora come il filo dello spazio-tempo di F si comporti nel caso che il punto materiale F^* esegua un moto di traslazione uniforme, cioè che la linea principale del filo di F^* sia una retta. Comprendiamo in essa l'origine O dello spazio-tempo, e possiamo con una trasformazione di Lorentz introdurre questa retta come asse t. Ora $x,\ y,\ z,\ t$ indichi il punto B, e sia τ^* il tempo proprio del punto B^*, calcolato da O. La nostra scelta porta adesso alle equazioni

$$\frac{d^2x}{d\tau^2} = -\frac{m^*x}{(t-\tau^*)^3},\ \frac{d^2y}{d\tau^2} = -\frac{m^*y}{(t-\tau^*)^3},\ \frac{d^2z}{d\tau^2} = -\frac{m^*z}{(t-\tau^*)^3}, \tag{25}$$

e

$$\frac{d^2t}{d\tau^2} = -\frac{m^*}{(t-\tau^*)^2}\frac{d\,(t-\tau^*)}{dt}, \tag{26}$$

dove è

$$x^2+y^2+z^2 = (t-\tau^*)^2\,, \tag{27}$$

e

$$\left(\frac{dx}{d\tau}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\tau}\right)^2 + \left(\frac{dz}{d\tau}\right)^2 = \left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 - 1. \tag{28}$$

Le tre equazioni (25) si scrivono, tenendo conto della (27), esattamente come le equazioni per il moto di un punto materiale attratto da un centro fisso secondo la legge di Newton, solo che invece del tempo t appare il tempo proprio τ del punto materiale. La quarta equazione (26) dà poi il legame tra tempo proprio e tempo per il punto materiale.

La traiettoria del punto dello spazio $x,\ y,\ z$ per i diversi τ sarà un'ellisse con semiasse maggiore a, eccentricità e, e per essa E indicherà l'anomalia eccentrica,

T l'incremento in tempo proprio per un giro completo sull'orbita, e infine si porrà $nT = 2\pi$, di modo che con opportuna origine per τ vale l'equazione di Keplero

$$n\tau = E - e\sin E. \tag{29}$$

Se ora cambiamo l'unità di tempo e indichiamo la velocità della luce con c, risulta dalla (28):

$$\left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 - 1 = \frac{m^*}{ac^2}\frac{1 + e\cos E}{1 - e\cos E}. \tag{30}$$

Tralasciando c^{-4} rispetto ad 1 risulta quindi

$$ndt = nd\tau\left(1 + \frac{1}{2}\frac{m^*}{ac^2}\frac{1 + e\cos E}{1 - e\cos E}\right),$$

dalla quale, utilizzando la (29), risulta

$$nt + \text{cost.} = \left(1 + \frac{1}{2}\frac{m^*}{ac^2}\right)n\tau + \frac{m^*}{ac^2}\sin E. \tag{31}$$

Il fattore m^*/ac^2 è il quadrato del rapporto tra una certa velocità media di F sulla sua orbita e la velocità della luce. Se si sostituisse ad m^* la massa del sole, ad a il semiasse maggiore dell'orbita terrestre, questo fattore varrebbe 10^{-8}.

Una legge di attrazione delle masse secondo la formulazione ora discussa, e legata al postulato di relatività, significherebbe parimenti una propagazione della gravitazione con la velocità della luce. Tenendo conto della piccolezza del termine periodico nella (31) non sarà possibile ottenere dalle osservazioni astronomiche una conclusione contro una legge siffatta e contro la meccanica modificata proposta, a favore della legge di attrazione di Newton con la meccanica newtoniana.