La teoria quantistica della radiazione elettromagnetica nei dielettrici[1 2]

di K. Nagy

Istituto di Fisica dell'Università Roland-Eötvös, Budapest

(presentato da K.F. Novobátzky. - ricevuto il 10-1-1955)

Il presente lavoro si occupa della teoria quantistica della radiazione elettromagnetica nei dielettrici. Nella prima parte si determinano gli autovalori dell'energia e dell'impulso del campo elettromagnetico in un sistema di coordinate nel quale il dielettrico si sposta con la velocità v lungo l'asse x. Le espressioni classiche delle densità d'energia e d'impulso del campo assumono la forma degli elementi corrispondenti del tensore d'energia-impulso simmetrico di Abraham. Per descrivere le proprietà dinamiche della radiazione non bisogna assumere il tensore d'energia e impulso del campo, ma il cosidetto tensore d'energia e impulso della radiazione, che tiene conto della costante interazione di dielettrico e campo. Nella seconda parte del lavoro si determinano gli autovalori dell'energia e dell'impulso della radiazione elettromagnetica ugualmente in un sistema di coordinate in moto. Con la quantizzazione dell'energia e dell'impulso della radiazione vien data anche la dipendenza degli operatori dal tempo. Poi segue una descrizione delle proprietà di trasformazione dell'energia e dell'impulso del fotone. L'energia del fotone nei dielettrici in moto non vale in generale $h\nu$. La sua energia e la sua massa a riposo hanno valori diversi da zero, finiti, positivi.

§ 1. Introduzione

Secondo l'elettrodinamica quantistica l'energia e l'impulso della radiazione elettromagnetica nel vuoto sono dei multipli interi dei quanti $\hbar\omega_k$, rispettivamente $\hbar\mathfrak{k}$. ($\mathfrak{k}$ indica qui il vetto-

---

[1]Acta Physica Hungarica **5**, 95 (1955).

[2]*Presentata come dissertazione d'esame il 22 giugno 1954.*

re numero d'onda dell'onda parziale *k*-esima, ed ω_k la sua frequenza). Poiché sono presenti quanti sia d'energia che d'impulso che si possono trasformare come tetravettori in modo analogo all'energia ed all'impulso di corpuscoli, si può assegnare a questi quanti un sicuro carattere di particella. Un tale quanto di luce si chiamerà fotone. La consueta immagine di corpuscolo non si può però trasferire completamente al fotone. Infatti il fotone non è localizzato in una qualche posizione dello spazio. Un'espressione come "posizione del fotone" non ha senso fisico [1].

La situazione diventa sostanzialmente più complicata quando la radiazione attraversa un qualche mezzo trasparente. La radiazione infatti polarizza continuamente le molecole e gli atomi che formano il dielettrico, esercita una forza sul mezzo e in condizioni a ciò idonee trasferisce ad esso anche energia ed impulso. Le cariche all'interno delle molecole, poste in moto dal campo, assorbono continuamente radiazione e anche emettono radiazione esse stesse. Appare pertanto discutibile che si possa parlare in tali condizioni di quanti come di strutture più o meno stabili.

Della teoria della radiazione elettromagnetica nei dielettrici si sono occupati per primi *J.M. Jauch* e *K.M. Watson* [2] nell'anno 1948. Nel loro lavoro prendono l'espressione classica della densità d'energia del campo dal tensore d'energia-impulso canonico. *K.F.Novobátzky* [3] dimostra che gli elementi della quarta colonna del tensore d'energia-impulso canonico si differenziano dai corrispondenti elementi del tensore d'energia e impulso di Minkowski per una divergenza spaziale, che si annulla per un'integrazione estesa a tutto lo spazio. Per questo motivo i due tensori producono il medesimo risultato per l'energia e l'impulso del campo. *Jauch* e *Watson* quantizzano quindi il campo elettro-magnetico fondandosi essenzialmente sul tensore d'energia e impulso di Minkowski. I loro risultati producono svariate conseguenze singolari. Infatti: l'energia del fotone, in ogni caso in cui il dielettrico si sposti più velocemente di *c/n*, cioè con una velocità maggiore della velocità di fase della luce nel dielettrico, è negativa. Dai loro risultati si arriva ad un valore immaginario per la massa a riposo del fotone. Inoltre: nel sistema di coordinate che si muove con il fotone l'impulso del fotone ha un valore diverso da zero, mentre la sua energia vale zero. In base a questi risultati non si possono attribuire affatto al fotone proprietà di particella. Nell'ultima edizione del suo noto libro *Laue* [4] osserva in proposito che la "rappresentazione dei quanti di luce" si limita puramente al vuoto. Ma ora uno s'immagini quanto segue: una radiazione incidente dal vuoto attraversa una lastra di vetro e poi ritorna nel vuoto. Si assume in generale che l'energia del raggio di luce prima dell'ingresso nella lastra di vetro e dopo l'uscita da questa sia composta di quanti d'una certa grandezza. È difficile ora immaginarsi che questi quanti non siano presenti durante il processo di attraversamento della lastra di vetro trasparente, che assorbe energia solo in modo insignificante.

Lo scopo della presente dissertazione è ora di dimostrare che la radiazione che attraversa mezzi trasparenti presenta una struttura a quanti, e che questi fotoni hanno un carattere di particella, sebbene essi, a seguito della continua interazione tra il campo elettromagnetico ed il mezzo polarizzato, si differenzino fino a un certo punto dai fotoni della radiazione elettromagnetica che attraversa il vuoto.

§ 2. Le equazioni fondamentali dell'elettrodinamica dei dielettrici in moto

Le equazioni che descrivono il campo di radiazione cosidetto puro - quindi senza cariche nè correnti - sono:

$$\frac{\partial G_{ik}}{\partial x_k} = 0 \,, \qquad (1a)$$

$$\frac{\partial F_{ik}}{\partial x_m} + \frac{\partial F_{km}}{\partial x_i} + \frac{\partial F_{mi}}{\partial x_k} = 0 \,, \qquad (1b)$$

dove F_{ik} e G_{ik} sono due tensori antisimmetrici, che stanno nella seguente relazione con le intensità del campo:

$$F_{ik} = \begin{pmatrix} 0 & B_z & -B_y & -iE_x \\ -B_z & 0 & B_x & -iE_y \\ B_y & -B_x & 0 & -iE_z \\ iE_x & iE_y & iE_z & 0 \end{pmatrix} ; \; G_{ik} = \begin{pmatrix} 0 & H_z & -H_y & -iD_x \\ -H_z & 0 & H_x & -iD_y \\ H_y & -H_x & 0 & -iD_z \\ iD_x & iD_y & iD_z & 0 \end{pmatrix} . \qquad (2)$$

L'equazione (1b) è soddisfatta quando F_{ik} è il rotore di un tetra-vettore φ_i:

$$F_{ik} = \frac{\partial\varphi_k}{\partial x_i} - \frac{\partial\varphi_i}{\partial x_k} . \qquad (3)$$

φ_i indica qui il tetrapotenziale. Alle equazioni precedenti appartengono ancora le equazioni materiali, la cui forma covariante per dielettrici isotropi [3] si scrive come segue:

$$G_{ik} = \frac{1}{\mu} \{ F_{ik} + \kappa(u_i F_k - u_k F_i)\} . \qquad (4)$$

Qui $\kappa = \varepsilon\mu - 1$, $u_i = (1/c)(dx_i/d\tau)$ è la tetravelocità del dielettrico, ed F_i è il tetravettore costruito con il tensore F_{ik} e con la tetravelocità u_i, quindi:

$$F_i = F_{ir} u_r . \qquad (5)$$

È facile vedere che queste equazioni in un sistema di coordinate solidale col dielettrico ($u_1 = u_2 = u_3 = 0$; $u_4 = i$) danno le note equazioni materiali $\mathfrak{D} = \varepsilon\mathfrak{E}$ e $\mathfrak{B} = \mu\mathfrak{H}$.

Nel seguito assume un grande significato il fatto che le suddette equazioni di campo si possono derivare dal principio variazionale. La densità di Lagrange [3] si scrive:

$$\mathcal{L} = (1/2\mu)\left\{ \frac{1}{2} F_{ik} F_{ik} - \kappa F_r F_r \right\} . \qquad (6)$$

Dalla conoscenza della funzione di Lagrange si ottiene il tensore d'energia-impulso che contiene le proprietà dinamiche del campo mediante variazione rispetto al tensore metrico:

$$T_{ik} = 2 \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial g^{ik}} - g_{ik}\mathcal{L} . \qquad (7)$$

Questo principio variazionale porta univocamente al tensore d'energia e impulso di Abraham [3]:

$$T_{ik} = F_{ir}G_{kr} - \frac{\delta_{ik}}{4} F_{rs}G_{rs} - \frac{\kappa}{\mu} (F_{is}F_{s} - F_{s}F_{s}u_{i})u_{k} \ . \tag{8}$$

Nell’elettrodinamica dei corpi in movimento è disponibile anche un altro tensore d’energia e impulso che origina da *Minkowski*. Il tensore di Minkowski non è simmetrico, non permette quindi di soddisfare la relazione di Planck

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{S}/c^2 \tag{9}$$

che esprime l’inerzia dell’energia. Qui $\mathfrak{g}$ indica la densità d’impulso e $\mathfrak{S}$ la densità della corrente d’energia. Poiché la legge dell’inerzia dell’energia si deve ritenere valida per tutti i tipi di energia, quindi anche per l’energia elettromagnetica, solo il tensore di Abraham può essere riconosciuto come tensore d’energia e impulso del campo.

Se si tiene conto che i ricordati, singolari risultati di *Jauch* e *Watson* si ottengono prendendo a fondamento il tensore di Minkowski, giustamente si pone la domanda, che cosa s’ha da dire sui fotoni nel dielettrico, se si parte dal tensore di Abraham come base. Esistono fotoni anche nel dielettrico, e se sì, quali sono le loro proprietà?

§ 3. La teoria quantistica del campo elettromagnetico

A) *La quantizzazione dell’energia del campo elettromagnetico*

Si assuma un sistema di riferimento nel quale il dielettrico si sposti con la velocità v lungo l’asse x. In questo sistema di coordinate risulta dalla densità d’energia del campo (8), tenendo conto dell’equazione (2):

$$u = \frac{1}{2} (\mathfrak{E}\mathfrak{D} + \mathfrak{B}\mathfrak{H}) + \frac{\mathfrak{v}}{c(1-\beta^2)} [\mathfrak{E}\times\mathfrak{H} - \mathfrak{D}\times\mathfrak{B}] \ . \tag{10}$$

Qui β indica il rapporto v/c. Sono quantità fondamentali canoniche i potenziali elettromagnetici A_i. Gli impulsi ad essi canonicamente coniugati si esprimono per mezzo della funzione di Lagrange:

$$P_i = \partial L/\partial \dot{A}_i \ . \tag{11}$$

Tenendo conto della forma della funzione di Lagrange data nell'equazione (6) risulta

$$P_i = (i/c)G_{4i} \ ; \tag{12}$$

è chiaro dall'equazione (2) che $P_0 = 0$. Si indicherà con $\mathfrak{P}$ il vettore con le componenti P_1, P_2, P_3. Le quantità canonicamente coniugate ai potenziali sono quindi in relazione con le componenti corrispondenti di $\mathfrak{D}$ ed i potenziali con quelle del vettore $\mathfrak{B}$. Poiché nella teoria dei quanti gli operatori di quantità tra loro canonicamente coniugate sono noti, i vettori $\mathfrak{E}$ ed $\mathfrak{H}$ nella suddetta equazione dell'energia e dell'impulso del campo si dovranno esprimere mediante i vettori $\mathfrak{D}$ e $\mathfrak{B}$. Dall'equazione (4) risulta tenendo conto dell'equazione (2):

$$\mathfrak{E} = \frac{\beta^2-1}{1-\beta^2+\kappa}\left\{-\mu\mathfrak{D} - \frac{\kappa\mu(\mathfrak{D}\mathfrak{v})}{c^2(1+\kappa)(1-\beta^2)}\,\mathfrak{v} + \frac{\kappa}{c(1-\beta^2)}\,(\mathfrak{v}\times\mathfrak{B})\right\} , \tag{13}$$

$$\mathfrak{H} = \frac{1}{\mu}\left\{\mathfrak{B} + \frac{\kappa}{c^2(1-\beta^2+\kappa)}\,[\mathfrak{v}\times(\mathfrak{v}\times\mathfrak{B}) - \mu c(\mathfrak{D}\times\mathfrak{v})]\right\} . \tag{14}$$

Se si sostituiscono queste espressioni nell'equazione (10) si ottiene per la densità d'energia del campo:

$$u = \frac{1}{2}\,(\mathfrak{E}\mathfrak{D} + \mathfrak{B}\mathfrak{H}) + \frac{\mathfrak{v}}{c(1-\beta^2)}\,[\mathfrak{E}\times\mathfrak{H} - \mathfrak{D}\times\mathfrak{B}] =$$

$$= \frac{1}{2(1-\beta^2+\kappa)^2}\left\{\frac{\mu}{1+\kappa}\,[(1-\beta^2+\kappa)^2 + \kappa\beta^2(1+\beta^2+\kappa)]\mathfrak{D}^2 - \right.$$

$$- \frac{\kappa\mu}{c^2(1+\kappa)}\,(1+\beta^2+\kappa)(\mathfrak{D}\mathfrak{v})^2 + 4\kappa\frac{\beta^2}{c}\,(\mathfrak{D},\mathfrak{v}\times\mathfrak{B}) -$$

$$\left. - \frac{\kappa}{\mu c^2}\,(1+\beta^2+\kappa)(\mathfrak{B},\mathfrak{v}\times(\mathfrak{v}\times\mathfrak{B})) + \frac{(1-\beta^2+\kappa)^2}{\mu}\,\mathfrak{B}^2\right\} . \tag{15}$$

L'energia del campo, quando si sostituisca rot$\mathfrak{U}$ al posto di $\mathfrak{B}$ e $-c\mathfrak{P}$ al posto di $\mathfrak{D}$, è:

$$E = \int u dV = \frac{1}{2(1-\beta^2+\kappa)^2} \int\Big\{ \frac{\mu c^2}{1+\kappa} [(1-\beta^2+\kappa)^2 + \kappa\beta^2(1+\beta^2+\kappa)]\mathfrak{P}^2 -$$

$$- \frac{\kappa\mu}{1+\kappa} (1+\beta^2+\kappa)(\mathfrak{P}\mathfrak{v})^2 - 4\kappa\beta^2(\mathfrak{P},\mathfrak{v}\times\mathrm{rot}\mathfrak{U}) -$$

$$- \frac{\kappa}{\mu c^2} (1+\beta^2+\kappa)(\mathrm{rot}\mathfrak{U},\mathfrak{v}\times(\mathfrak{v}\times\mathrm{rot}\mathfrak{U})) +$$

$$+ \frac{(1-\beta^2+\kappa)^2}{\mu} (\mathrm{rot}\mathfrak{U},\mathrm{rot}\mathfrak{U})\Big\} dV \ . \qquad (16)$$

Nella presente dissertazione si cercano i valori possibili dell'energia e dell'impulso del campo. La teoria dei quanti li identifica con gli autovalori degli operatori corrispondenti. Il compito consiste quindi nel determinare gli operatori di queste quantità e poi gli autovalori degli operatori trovati. Gli operatori delle quantità canonicamente coniugate hanno da soddisfare le regole di commutazione di Heisenberg:

$$[P_n(\mathbf{r},t),A_m(\mathbf{r}',t)] = (\hbar/i)\delta_{nm}\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}') \ ,$$

$$[P_n(\mathbf{r},t),P_m(\mathbf{r}',t)] = [A_n(\mathbf{r},t),A_m(\mathbf{r}',t)] = 0 \ , \ (n,m=1,2,3,0). \qquad (17)$$

Qui A_0 indica il potenziale scalare e P_0 l'impulso ad esso canonicamente coniugato. Gli operatori $A_n(\mathbf{r},t)$ e $P_n(\mathbf{r},t)$ sono funzioni del punto e del tempo. Al loro posto si possono introdurre operatori indipendenti dal punto in modo da sviluppare quelli in serie mediante un sistema di funzioni ortogonali. A tal fine si assumerà che tutta la parte del campo elettromagnetico che c'interessa si trovi in un cubo di lato L e che le quantità di campo assumano su facce opposte del cubo lo stesso valore. La dimensione del cubo può essere scelta a piacere, poiché essa non ha alcuna influenza sul nostro risultato. I potenziali elettromagnetici e le quantità ad essi canonicamente coniugate si svilupperanno ora in questo cubo in una serie di Fourier:

$$A_j(\mathbf{r},t) = (L^{-3/2}) \sum_{\mathrm{k}} q_{j\mathrm{k}}\exp(i\mathfrak{k}\mathbf{r})$$

$$P_m(\mathbf{r},t) = (L^{-3/2}) \sum_{\mathrm{k}} p_{m\mathrm{k}}\exp(-i\mathfrak{k}\mathbf{r}) \quad (j,m=1,2,3,0) \ . \qquad (18)$$

Qui $\mathfrak{k}$ è il vettore numero d'onda, il cui valore assoluto risulta $|\mathfrak{k}| = k = 2\pi/\lambda$. Le componenti ortogonali di $\mathfrak{k}$ possono valere multipli dell'espressione $2\pi/L$. La somma va estesa sui $\mathfrak{k}$ in direzione e grandezza. q_{jk} e p_{mk} sono operatori che soddisfano le relazioni di commutazione

$$[p_{mr},q_{js}] = (\hbar/i)\delta_{mj}\delta_{rs} \ ,$$

$$[p_{mr},p_{js}] = [q_{mr},q_{js}] = 0 \ . \tag{19}$$

Le quantità p_{1k}, p_{2k}, p_{3k} si devono considerare come le componenti d'un vettore $\mathfrak{p}_k$ e le quantità q_{1k}, q_{2k}, q_{3k} come quelle d'un vettore $\mathfrak{q}_k$. Se si sostituiscono le espressioni (18) nell'equazione (16) si ottiene per l'operatore dell'energia del campo elettromagnetico:

$$\begin{aligned} E = \frac{1}{2(1-\beta^2+\kappa)^2} \sum_k \Bigg\{ & \frac{\mu c^2}{1+\kappa} \left[(1-\beta^2+\kappa)^2 + \kappa\beta^2(1+\beta^2+\kappa)\right](\mathfrak{p}_k\mathfrak{p}_{-k}) - \\ & - \frac{\kappa\mu}{1+\kappa} (1+\beta^2+\kappa)(\mathfrak{p}_k\mathfrak{v})(\mathfrak{p}_{-k}\mathfrak{v}) - 4i\kappa\beta^2(\mathfrak{p}_k,\mathfrak{v}\times(\mathfrak{k}\times\mathfrak{q}_k)) - \\ & - \frac{\kappa}{\mu c^2} (1+\beta^2+\kappa)(\mathfrak{k}\times\mathfrak{q}_k,\mathfrak{v}\times(\mathfrak{v}\times(\mathfrak{k}\times\mathfrak{q}_{-k}))) + \\ & + \frac{(1-\beta^2+\kappa)^2}{\mu} (\mathfrak{k}\times\mathfrak{q}_k)(\mathfrak{k}\times\mathfrak{q}_{-k}) \Bigg\} \ . \end{aligned} \tag{20}$$

Per la quantizzazione si utilizzerà il procedimento indicato da *Novobátzky*[3]. Esso presenta rispetto agli altri procedimenti il vantaggio che non contiene la condizione di Lorentz, che non possiede alcun significato fisico. L'essenza di questo procedimento è la seguente: la quantità P_0 canonicamente coniugata al potenziale scalare A_0 risulta formalmente nulla, tuttavia malgrado ciò non la si considererà come l'operatore nullo, ma si assumerà che il campo elettromagnetico sia descritto da funzioni di stato

[3]*Questo procedimento da* Novobátzky *non è stato pubblicato; egli sia anche qui molto ringraziato per la concessione dei suoi risultati.*

per le quali valgano le equazioni

$$P_0\psi = 0 \tag{21}$$

e

$$(\mathrm{div}\,\mathfrak{P})\psi = 0\ . \tag{22}$$

L'ultima equazione è una conseguenza delle equazioni di campo. Quest'equazione rende possibile introdurre due invece che quattro impulsi canonici e, in conformità con il duplice stato di polarizzazione, di lavorare con due quantità di campo indipendenti.

Se si sviluppa l'equazione (21) in una serie di Fourier, si arriva a:

$$(L^{-3/2}) \sum_{k} \exp(-i\mathfrak{k}\mathfrak{r})p_{0k}\psi = 0\ . \tag{23}$$

Questa è valida per ogni valore di $\mathfrak{r}$ quando

$$p_{0k}\psi = 0 \quad \text{per ogni } k. \tag{24}$$

p_{0k} è l'impulso canonicamente coniugato a q_{0k}. Se si rappresentano secondo il metodo di *Schrödinger* gli operatori canonici con gli operatori q_{jk} *e* $(\hbar/i)\partial/\partial q_{jk}$, si ottiene dall'equazione (24)

$$\partial\psi/\partial q_{0k} = 0 \quad \text{per ogni } k, \tag{25}$$

cioè ψ è indipendente da q_{0k}.

Se si sviluppa ora l'equazione (22) in una serie di Fourier si ottiene:

$$(L^{-3/2}) \sum_{k} \exp(-i\mathfrak{k}\mathfrak{r})\ i(k_1p_{1k} + k_2p_{2k}+ k_3p_{3k})\psi = 0\ . \tag{26}$$

Questa sarà soddisfatta per ogni valore di $\mathfrak{r}$ quando

$$(k_1p_{1k} + k_2p_{2k}+ k_3p_{3k})\psi = 0 \quad \text{per ogni } k. \tag{27}$$

Da qui per sostituzione degli operatori $p_{ik\sim}$ $(\hbar/i)\partial/\partial q_{ik}$ e moltiplicando per $i/\hbar$ si arriva a

$$k_1 \frac{\partial\psi}{\partial q_{1k}} + k_2 \frac{\partial\psi}{\partial q_{2k}} + k_3 \frac{\partial\psi}{\partial q_{3k}} = 0\ . \tag{28}$$

Le funzioni di ψ necessarie per il soddisfacimento di queste condizioni si possono derivare nel modo seguente: si introducano due vettori di modulo unitario che siano ortogonali a $\mathfrak{k}$:

$$\mathfrak{e}_k^a = \frac{\mathfrak{k}\times\mathfrak{v}}{|\mathfrak{k}\times\mathfrak{v}|} \; ; \quad \mathfrak{e}_k^b = \frac{\mathfrak{k}\times(\mathfrak{k}\times\mathfrak{v})}{|\mathfrak{k}\times(\mathfrak{k}\times\mathfrak{v})|} \; . \tag{29}$$

Siano poi:

$$Q_k^a = (\mathfrak{e}_k^a, \mathfrak{q}_k) = e_{1k}^a q_{1k} + e_{2k}^a q_{2k} + e_{3k}^a q_{3k} \; ,$$

$$Q_k^b = (\mathfrak{e}_k^b, \mathfrak{q}_k) = e_{1k}^b q_{1k} + e_{2k}^b q_{2k} + e_{3k}^b q_{3k} \; ,$$

$$Q_k^0 = (\frac{\mathfrak{k}}{|k|}, \mathfrak{q}_k) = \frac{k_1}{|k|} q_{1k} + \frac{k_2}{|k|} q_{2k} + \frac{k_3}{|k|} q_{3k} \; . \tag{30}$$

Si assume inoltre che la funzione di stato che descrive il campo elettromagnetico dipenda da q_{jk} solo mediante Q_k^a e Q_k^b. In questo caso, come si può dimostrare facilmente, le condizioni di cui sopra sono soddisfatte.

Analogamente a come nelle Eq. (30) si introdurranno ora due nuove quantità:

$$P_k^a = (\mathfrak{e}_k^a, \mathfrak{p}_k) = e_{1k}^a p_{1k} + e_{2k}^a p_{2k} + e_{3k}^a p_{3k} \; ,$$

$$P_k^b = (\mathfrak{e}_k^b, \mathfrak{p}_k) = e_{1k}^b p_{1k} + e_{2k}^b p_{2k} + e_{3k}^b p_{3k} \; . \tag{31}$$

Dalle espressioni (30) e (31) si ottengono le seguenti formule inverse:

$$\mathfrak{q}_k = Q_k^a \mathfrak{e}_k^a + Q_k^b \mathfrak{e}_k^b + Q_k^0 \frac{\mathfrak{k}}{|k|} \; ,$$

$$\mathfrak{p}_k = P_k^a \mathfrak{e}_k^a + P_k^b \mathfrak{e}_k^b \; . \tag{32}$$

P_k^a e Q_k^a sono quantità tra loro canonicamente coniugate. Tra di esse sussistono le seguenti relazioni di commutazione:

$$[P_k^a, Q_m^a] = [P_k^b, Q_m^b] = \frac{\hbar}{i} \, \delta_{km} \; . \tag{33}$$

Tutte le restanti coppie d'operatori commutano.

In base a quanto sopra si può sostenere, tenendo conto dell'equazione (27), che l'operatore dell'energia E in tutti i casi nei quali venga adoperato per le funzioni di stato che descrivono il campo elettromagnetico, può essere sostituito dall'operatore seguente:

$$E = \frac{1}{2(1-\beta^2+\kappa)^2} \sum_k \left\{ \frac{\mu c^2}{1+\kappa} [(1-\beta^2+\kappa)^2 + \kappa\beta^2(1+\beta^2+\kappa)](\mathfrak{p}_k \mathfrak{p}_{-k}) - \right.$$

$$- \frac{\kappa\mu}{1+\kappa} (1+\beta^2+\kappa)(\mathfrak{p}_k \mathfrak{v})(\mathfrak{p}_{-k}\mathfrak{v}) + 4i\kappa\beta^2 (\mathfrak{p}_k \mathfrak{q}_k)(\mathfrak{v}\mathfrak{k}) + \tag{34}$$

$$\left. \frac{\kappa}{\mu c^2} (1+\beta^2+\kappa)(\mathfrak{v}\times(\mathfrak{k}\times\mathfrak{q}_k), \mathfrak{v}\times(\mathfrak{k}\times\mathfrak{q}_{-k})) + \frac{(1-\beta^2+\kappa)^2}{\mu} (\mathfrak{k}\times\mathfrak{q}_k)(\mathfrak{k}\times\mathfrak{q}_{-k}) \right\} .$$

Tenendo conto dell'equazione (32) risulta:

$$(\mathfrak{p}_k \mathfrak{v}) = -P^b_k v|\sin a_k| \ ,$$

dove a_k indica l'angolo compreso tra $\mathfrak{k}$ e $\mathfrak{v}$.

$$(\mathfrak{p}_{-k} \mathfrak{v}) = -P^b_{-k} v|\sin a_k| \ ,$$

$$(\mathfrak{k}\times\mathfrak{q}_k, \mathfrak{k}\times\mathfrak{q}_{-k}) = - k^2(Q^a_k Q^a_{-k} - Q^b_k Q^b_{-k}) \ ,$$

$$(\mathfrak{v}\times(\mathfrak{k}\times\mathfrak{q}_k), \mathfrak{v}\times(\mathfrak{k}\times\mathfrak{q}_{-k})) = - k^2 v^2 (Q^a_k Q^a_{-k} \cos^2 a_k - Q^b_k Q^b_{-k}) \ ,$$

$$(\mathfrak{p}_k \mathfrak{q}_k) = P^a_k Q^a_k + P^b_k Q^b_k \ . \tag{35}$$

Se si sostituiscono queste equazioni nell'espressione (34) dell'operatore energia del campo si ottiene:

$$E = \frac{1}{2(1-\beta^2+\kappa)^2} \sum_k \left\{ - \frac{\mu c^2}{1+\kappa} [(1-\beta^2+\kappa)^2 + \kappa\beta^2(1+\beta^2+\kappa)] P^a_k P^a_{-k} + \right.$$

$$+ \frac{\mu c^2}{1+\kappa} [(1-\beta^2+\kappa)^2 + \kappa\beta^2(1+\beta^2+\kappa)\cos^2 a_k] P^b_k P^b_{-k} -$$

$$- \frac{k^2}{\mu} [(1-\beta^2+\kappa)^2 + \kappa\beta^2(1+\beta^2+\kappa)\cos^2 a_k] Q^a_k Q^a_{-k} +$$

$$+ \frac{k^2}{\mu} [(1-\beta^2+\kappa)^2 + \kappa\beta^2(1+\beta^2+\kappa)] Q^b_k Q^b_{-k} +$$

$$\left. + 4\kappa\beta^2 ikv \cos a_k (P^a_k Q^a_k + P^b_k Q^b_k) \right\} . \tag{36}$$

Si devono ora determinare gli autovalori di quest'espressione. A questo scopo al posto degli operatori P_k e Q_k si introdurranno nuovi operatori per mezzo dei quali E può essere diagonalizzata.

$$Q_k^a = (\hbar c/2k)^{1/2}\delta_k(A_k - A^*_{-k}); \; P_k^a = (\hbar k/2c)^{1/2}(i/\delta_k)(A^*_k + A_{-k}),$$

$$Q_k^b = (\hbar c/2k)^{1/2}\gamma_k(B_k + B^*_{-k}); \; P_k^b = (\hbar k/2c)^{1/2}(i/\gamma_k)(B^*_k - B_{-k}). \quad (37)$$

A^*_k indica l'aggiunto dell'operatore A_k e B^*_k quello dell'operatore B_k. δ_k e γ_k sono delle costanti da determinarsi in seguito. Gli operatori A_k e B_k soddisfano le seguenti relazioni di commutazione:

$$[A_k, A^*_m] = [B_k, B^*_m] = \delta_{km} \; . \quad (38)$$

Tutti gli altri commutatori sono uguali a zero. Ponendo

$$\delta_k = \left\{ \frac{\mu^2[(1-\beta^2+\kappa)^2 + \kappa\beta^2(1+\beta^2+\kappa)]}{(1+\kappa)[(1-\beta^2+\kappa)^2 + \kappa\beta^2(1+\beta^2+\kappa)\cos^2 a_k]} \right\}^{1/4}, \quad (39)$$

$$\gamma_k = \left\{ \frac{\mu^2[(1-\beta^2+\kappa)^2 + \kappa\beta^2(1+\beta^2+\kappa)\cos a_k]}{(1+\kappa)[(1-\beta^2+\kappa)^2 + \kappa\beta^2(1+\beta^2+\kappa)]} \right\}^{1/4}, \quad (40)$$

l'operatore dell'energia del campo si può scrivere nella forma seguente:

$$E = \sum_k \varepsilon_k(A^*_k A_k + B^*_k B_k + 1) \; , \quad (41a)$$

dove

$$\varepsilon_k = \frac{\hbar kc}{(1-\beta^2+\kappa)^2(1+\kappa)^{1/2}} \left\{ -2\kappa(1+\kappa)^{1/2}\beta^3\cos a_k + \right. \quad (42)$$

$$\left. + \left([(1-\beta^2+\kappa)^2 + \kappa\beta^2(1+\beta^2+\kappa)][(1-\beta^2+\kappa)^2 + \kappa\beta^2(1+\beta^2+\kappa)\cos^2 a_k]\right)^{1/2} \right\} .$$

Con la notazione $A^*_k A_k = N_k^a$ e $B^*_k B_k = N_k^b$ si arriva a

$$E = \sum_k \varepsilon_k(N_k^a + N_k^b + 1) \; . \quad (41b)$$

Gli autovalori degli operatori N_k^a e N_k^b sono numeri interi non negativi [5]. Gli operatori A_k, B_k, A^*_k, B^*_k sono gli operatori di assorbimento e rispettivamente d'emissione dei quanti.

L'energia del campo si compone quindi di quanti d'energia del valore ε_k.

B) *La quantizzazione dell'impulso del campo elettromagnetico*

La densità d'impulso del campo elettromagnetico nei dielettrici è:

$$\mathfrak{g} = \frac{1}{2}\,(\mathfrak{E}\times\mathfrak{H}) + \frac{\mathfrak{v}}{c^3(1-\beta^2)}\,[\mathfrak{v}(\mathfrak{E}\times\mathfrak{H}) - \mathfrak{v}(\mathfrak{D}\times\mathfrak{B})]\ . \tag{43}$$

L'impulso del campo è uguale all'integrale spaziale esteso a tutto il campo. Tenendo conto delle relazioni (12), (13), (14) e di $\mathfrak{B} = \mathrm{rot}\mathfrak{U}$ lo si può scrivere nella forma seguente:

$$\begin{aligned}\mathfrak{G} = \int\mathfrak{g}dV = -\frac{1}{\mu c^4(1-\beta^2+\kappa)^2}\int\Big\{\ &\mu c^4(1-\beta^2+\kappa)(1-\beta^2)(\mathfrak{P}\times\mathrm{rot}\mathfrak{U}) + \\ &+ \kappa c^2(1-\beta^2+\kappa)(\mathfrak{v}\times\mathrm{rot}\mathfrak{U})\times\mathrm{rot}\mathfrak{U} + \\ &+ 2\kappa\mu c^2\mathfrak{v}(\mathfrak{P},\mathfrak{v}\times\mathrm{rot}\mathfrak{U}) + \kappa\mathfrak{v}(\mathrm{rot}\mathfrak{U},\mathfrak{v}\times(\mathfrak{v}\times\mathrm{rot}\mathfrak{U})) + \\ &+ \kappa\mu^2c^4(1-\beta^2)(\mathfrak{P}\times(\mathfrak{P}\times\mathfrak{v})) + \frac{\kappa^2\mu^2c^2(\mathfrak{P}\mathfrak{v})}{1+\kappa}\,(\mathfrak{v}\times(\mathfrak{P}\times\mathfrak{v})) + \\ &+ \kappa\mu^2c^2\mathfrak{v}(\mathfrak{P}\mathfrak{v})^2 - \kappa\mu^2c^2v^2\mathfrak{v}\mathfrak{P}^2\Big\}\ dV\ .\end{aligned} \tag{44}$$

Se si sostituisce la formula (18), che esprime il potenziale elettromagnetico sviluppato in una serie di Fourier, si ottiene eseguendo i possibili raccoglimenti:

$$\begin{aligned}\mathfrak{G} = -\frac{1}{\mu c^4(1-\beta^2+\kappa)^2}\sum_k\Big\{\ &i\mu c^4(1-\beta^2+\kappa)(1-\beta^2)(\mathfrak{p}_k\times(\mathfrak{k}\times\mathfrak{q}_k)) + \\ &+ \kappa c^2(1-\beta^2+\kappa)(\mathfrak{v}\times(\mathfrak{k}\times\mathfrak{q}_k))\times(\mathfrak{k}\times\mathfrak{q}_{-k}) + \\ &+ 2i\kappa\mu c^2\mathfrak{v}(\mathfrak{p}_k,\mathfrak{v}\times(\mathfrak{k}\times\mathfrak{q}_k)) + \kappa\mathfrak{v}(\mathfrak{k}\times\mathfrak{q}_k,\mathfrak{v}\times(\mathfrak{v}\times(\mathfrak{k}\times\mathfrak{q}_{-k}))) + \\ &+ \frac{\kappa\mu^2c^4}{1+\kappa}\,(1-\beta^2+\kappa)(\mathfrak{p}_k\mathfrak{v})\mathfrak{p}_{-k} - \kappa\mu^2c^4\mathfrak{v}(\mathfrak{p}_k,\mathfrak{p}_{-k}) + \\ &+ \frac{\kappa\mu^2c^2}{1+\kappa}\,(\mathfrak{p}_k\mathfrak{v})(\mathfrak{p}_{-k}\mathfrak{v})\mathfrak{v}\Big\}\ .\end{aligned} \tag{45}$$

Nuovamente si introducano gli operatori P_k e Q_k in base alle relazioni (32). L'operatore dell'impulso del campo si scrive ora:

$$\mathfrak{G} = - \frac{1}{\mu c^4(1-\beta^2+\kappa)^2} \sum_k \Big\{ \kappa\mu^2 c^4 \mathfrak{v}\, P^a_k P^a_{-k} - \tag{46}$$

$$- \frac{\kappa\mu^2 c^4}{1+\kappa} \cos a_k \left[\frac{\mathfrak{k}}{|k|} v(1-\beta^2+\kappa) - \mathfrak{v}\beta^2 \cos a_k \right] P^b_k P^b_{-k} +$$

$$+ \kappa k^2 c^2 \cos a_k \left[\frac{\mathfrak{k}}{|k|} v(1-\beta^2+\kappa) + \mathfrak{v}\beta^2 \cos a_k \right] Q^a_k Q^a_{-k} - \mathfrak{v} k^2 \kappa c^2 (1+\kappa) Q^b_k Q^b_{-k} +$$

$$+ i\mu c^2 [c^2(1-\beta^2+\kappa)(1-\beta^2)\mathfrak{k} - 2\kappa\mathfrak{v} k v \cos a_k](P^a_k Q^a_k + P^b_k Q^b_k)] +$$

$$+ \frac{\kappa\mu^2 c^4}{1+\kappa}(1-\beta^2+\kappa) v \mathfrak{e}^a_k |\sin a_k| P^b_k P^a_{-k} - \kappa c^2 (1-\beta^2+\kappa) k^2 v \mathfrak{e}^a_k |\sin a_k| Q^b_k Q^a_{-k} \Big\} .$$

A differenza dell'operatore dell'energia del campo questo operatore non si può diagonalizzare mediante gli operatori A_k, B_k, A^*_k, B^*_k che compaiono nell'equazione (37). Gli operatori dell'energia del campo e dell'impulso del campo non possono quindi essere trasformati simultaneamente ad un sistema d'assi principali. Neppure le componenti ortogonali dell'impulso del campo possiedono autostati simultanei. (Conoscendo l'operatore di Hamilton si può anche determinare la dipendenza dell'energia del campo e dell'impulso del campo dal tempo. Come si mostrerà in seguito, a causa dell'interazione col mezzo l'energia e l'impulso del campo non sono costanti nel tempo). Ci si aspetterebbe che gli operatori energia e impulso della radiazione elettromagnetica si potessero diagonalizzare simultaneamente e che l'energia e l'impulso della radiazione fossero costanti nel tempo, cioè non abbandonassero i loro autostati. Come si è prima mostrato, l'energia e l'impulso calcolati a partire dal tensore d'energia e impulso di Abraham non mostrano queste proprietà. Contro il tensore di Abraham si può inoltre ancora obbiettare che la velocità della radiazione calcolata con esso

$$\mathfrak{v}^* = \mathfrak{S}/u \tag{47}$$

non si può identificare con la velocità di particella [6]. Questa obiezione non si può rivolgere al tensore di Minkowski, tuttavia esso, per le ragioni già ricordate, non si può adoperare per descrivere la radiazione elettromagnetica.

I fatti summenzionati relativi all'operatore dell'energia e dell'impulso del campo elettromagnetico rafforzano l'opinione che le proprietà dinamiche della radiazione nei dielettrici non siano descritte dal tensore dell'energia-impulso del campo, ma da un cosidetto tensore d'energia-impulso della radiazione [7] che tiene conto dell'interazione tra il campo elettromagnetico ed il dielettrico. Detto più precisamente: il tensore simmetrico di Abraham T_{ik} che descrive il campo elettromagnetico non ha divergenza nulla neanche in assenza di correnti e di cariche. La sua divergenza col segno cambiato dà la densità della forza esercitata sul dielettrico. Quindi l'interazione tra campo di forza e dielettrico arriva ad esprimensi anche in forma di forza macro- scopica. Il tensore d'energia-impulso $\Theta_{ik}= T_{ik}+ t_{ik}$ del sistema composto dal campo e dal dielettrico è naturalmente a divergenza nulla, poiché il campo ed il dielettrico insieme formano un sistema chiuso. (Qui t_{ik} indica il tensore d'energia-impulso del mezzo). Quando non è presente nessun campo elettromagnetico anche il tensore t^{0}_{ik} del mezzo è a divergenza nulla. Se invece è presente un campo, il tensore d'energia-impulso del dielettrico cambia in seguito all'interazione come segue: $t_{ik}= t^{0}_{ik}+ t^{P}_{ik}$. Nel caso di un dielettrico a riposo il campo non cede al mezzo nè energia nè impulso, ma provoca in esso solo degli sforzi, che compensano la forza esercitata dal campo. Ma se il dielettrico si muove, allora la forza esercitata dal campo sul dielettrico può anche compiere lavoro, cioè il campo ed il dielettrico possono scambiare tra di loro energia ed impulso. In questo caso t^{P}_{4k} non vale più zero. L'energia della radiazione si divide cioè in questo caso tra il campo e il dielettrico. Di conseguenza le proprietà dinamiche della radiazione saranno descritte dal tensore $S_{ik}= T_{ik}+ t^{P}_{ik}$. Questo tensore è a divergenza nulla [8]. L'espres- sione esplicita di S_{ik} per il caso di un mezzo a riposo e di onde piane è stata proposta da *Marx* e *Györgyi* [7]. *Beck* ha determinato il tensore di radiazione a partire dal tensore di Minkowski [9].

§ 4. La teoria quantistica della radiazione elettromagnetica. Fotoni

A) *La quantizzazione dell'energia della radiazione*

Per l'espressione classica della densità d'energia e d'impulso, che serve come fondamento nella quantizzazione della radiazione, si utilizzino qui gli elementi del tensore dell'energia-impulso della radiazione

$$S_{ik} = T_{ik} + t^{P}_{ik} \ . \tag{48}$$

La forma della componente del tensore t^{P}_{44}, espressa mediante le intensità del campo in quel sistema di coordinate nel quale il dielettrico si muove con velocità v lungo l'asse x, si scrive [8]:

$$t^{P}_{44} = \frac{\kappa\beta^2}{(1+\kappa)(1-\beta^2)^2}\left\{ \frac{1+\beta^2}{2}\,(\mathfrak{D}\mathfrak{E} + \mathfrak{B}\mathfrak{H}) - \frac{\mathfrak{v}}{c}\,[\mathfrak{E}\times\mathfrak{H} + \mathfrak{D}\times\mathfrak{B}] - (D_x E_x + B_x H_x)\right\} . \tag{49}$$

Con il procedimento descritto nel § 3 risulta:

$$\begin{aligned} E = -\int t^{P}_{44}dV = \frac{\kappa\beta^2}{2(1+\kappa)(1-\beta^2)(1-\beta^2+\kappa)^2}\sum_{k}\Bigg\{ &- \mu c^2(1-\beta^2)(1+\beta^2+\kappa)P^{a}_{k}P^{a}_{-k} - \\ &- \frac{\mu c^2}{1+\kappa}\left[(1-\beta^2+\kappa)^2 + \cos^2 a_k\left(\kappa\beta^2(1+\beta^2+\kappa) - 2(1+\kappa)(1-\beta^2+\kappa)\right)\right]P^{b}_{k}P^{b}_{-k} \\ &+ \frac{k^2}{\mu}\left[(1-\beta^2+\kappa)^2 + \cos^2 a_k\left(\kappa\beta^2(1+\beta^2+\kappa) - 2(1+\kappa)(1-\beta^2+\kappa)\right)\right]Q^{a}_{k}Q^{a}_{-k} + \\ &+ \frac{k^2}{\mu}(1-\beta^2)(1+\kappa)(1+\beta^2+\kappa)]Q^{b}_{k}Q^{b}_{-k} + \\ &+ 4(1-\beta^2)(1+\kappa)i(\mathfrak{v}\mathfrak{k})(P^{a}_{k}Q^{a}_{k} + P^{b}_{k}Q^{b}_{k})\Bigg\} . \end{aligned} \tag{50}$$

In quanto segue si cercheranno gli autovalori dell'operatore dell'energia totale della radiazione elettromagnetica

$$E^{S} = E^{e} + E^{P} = -\int (T_{44} + t^{P}_{44})dV \ . \tag{51}$$

Ci si asterrà qui dalla determinazione separata degli autovalori dell'operatore E^{P}. [Nell'equazione (51) E^{e} indica l'espressione dell'operatore dell'energia del campo data nella relazione (36)]. Eseguendo i possibili raccoglimenti s'ottiene:

$$E^{s} = \frac{1}{2}\sum_{k}\left\{-\frac{\mu c^{2}}{1+\kappa}P^{a}_{k}P^{a}_{-k} + \frac{\mu c^{2}}{1+\kappa}\left(1+\frac{\kappa\beta^{2}\sin^{2}a_{k}}{(1+\kappa)(1-\beta^{2})}\right)P^{b}_{k}P^{b}_{-k} - \right.$$

$$\left. - \frac{k^{2}}{\mu}\left(1+\frac{\kappa\beta^{2}\sin^{2}a_{k}}{(1+\kappa)(1-\beta^{2})}\right)Q^{a}_{k}Q^{a}_{-k} + \frac{k^{2}}{\mu}Q^{b}_{k}Q^{b}_{-k}\right\} . \tag{52}$$

I possibili valori dell'energia complessiva della radiazione sono uguali agli autovalori di quest'operatore. Il compito è ora di determinarli. A questo scopo si introdurranno analogamente alle equazioni (37) al posto degli operatori P_{k} e Q_{k} gli operatori dell'emissione e dell'assorbimento che diagonalizzano E^{s}.

$$Q^{a}_{k} = (\hbar c/2k)^{1/2}\xi_{k}(a_{k} - a^{*}_{-k});\ P^{a}_{k} = (\hbar k/2c)^{1/2}(i/\xi_{k})(a^{*}_{k} + a_{-k}),$$

$$Q^{b}_{k} = (\hbar c/2k)^{1/2}\eta_{k}(b_{k} + b^{*}_{-k});\ P^{b}_{k} = (\hbar k/2c)^{1/2}(i/\eta_{k})(b^{*}_{k} - b_{-k}). \tag{53}$$

ξ_{k} ed η_{k} sono costanti. Le relazioni di commutazione che valgono per gli operatori a_{k} e b_{k} si scrivono:

$$[a_{k}, a^{*}_{m}] = [b_{k}, b^{*}_{m}] = \delta_{km} , \tag{54}$$

mentre le restanti coppie d'operatori commutano tra loro. Ponendo

$$\xi_{k} = \left\{\frac{\mu^{2}[(1-\beta^{2})}{(1+\kappa)(1-\beta^{2}) + \kappa\beta^{2}\sin^{2}a_{k}}\right\}^{1/4} ,$$

$$\eta_{k} = \left\{\frac{\mu^{2}[(1+\kappa)(1-\beta^{2}) + \kappa\beta^{2}\sin^{2}a_{k}]}{(1+\kappa)(1-\beta^{2})}\right\}^{1/4} , \tag{55}$$

si ottiene l'operatore dell'energia della radiazione

$$E^{s} = \sum_{k}\varepsilon^{s}_{k}(a^{*}_{k}a_{k} + b^{*}_{k}b_{k} + 1) , \tag{56}$$

dove

$$\varepsilon^{s}_{k} = \frac{\hbar kc}{(1+\kappa)(1-\beta^2)^{1/2}} \left[(1+\kappa)(1-\beta^2) + \kappa\beta^2\sin^2 a_k \right]^{1/2} . \qquad (57)$$

Gli autovalori degli operatori $a^*_k a_k = n^a_k$ e $b^*_k b_k = n^b_k$ sono i numeri interi non negativi 0,1,2,3,... L'energia complessiva della radiazione elettromagnetica è quindi la somma dei quanti d'energia ε^s_k.

B) *La quantizzazione dell'impulso della radiazione*

Le componenti dell'impulso della radiazione sono:

$$G^s_r = (1/ic)\int S_{r4}dV = (1/ic)\int(T_{r4} + t^P_{r4})dV . \quad (r=1,2,3) \qquad (58)$$

Si consideri in primo luogo la componente x dell'impulso:

$$G^s_x = G^e_x + G^P_x . \qquad (59)$$

Si ha qui

$$G^e_x = (1/ic)\int T_{14}dV ; \qquad G^P_x = (1/ic)\int t^P_{14}dV . \qquad (60)$$

La forma del tensore t^P_{14} espressa mediante le intensità del campo si scrive [8]:

$$t^P_{14} = - \frac{i\kappa\beta}{(1+\kappa)(1-\beta^2)^2} \left\{ \frac{1+\beta^2}{2} (\mathfrak{D}\mathfrak{E} + \mathfrak{B}\mathfrak{H}) - \frac{\mathfrak{v}}{c} [\mathfrak{E}\times\mathfrak{H} + \mathfrak{D}\times\mathfrak{B}] - \right.$$

$$\left. - (D_x E_x + B_x H_x) \right\} . \qquad (61)$$

Con il procedimento descritto nel § 3 si ottiene per l'operatore della componente x dell'impulso della radiazione:

$$G^s_x = G^e_x + G^P_x = \frac{\kappa V}{2c^2(1-\beta^2+\kappa)} \sum_k \left\{ - \frac{\mu c^2}{1+\kappa} P^a_k P^a_{-k} + \right.$$

$$+ \frac{\mu c^2}{1+\kappa} \left(1 + \frac{\kappa\beta^2\sin^2 a_k}{(1+\kappa)(1-\beta^2)} \right) P^b_k P^b_{-k} - \frac{k^2}{\mu} \left(1 + \frac{\kappa\beta^2\sin^2 a_k}{(1+\kappa)(1-\beta^2)} \right) Q^a_k Q^a_{-k} +$$

$$\left. + \frac{k^2}{\mu} Q^b_k Q^b_{-k} - \frac{2i\kappa(1-\beta^2)c^2\cos a_k}{\kappa V} \cdot (P^a_k Q^a_k + P^b_k Q^b_k) \right\} . \qquad (62)$$

Si esprima questa con gli operatori a_k, b_k introdotti nelle equazioni (53); si ottiene allora

$$G^s_x = \sum_k g_{kx}(a^*_k a_k + b^*_k b_k + 1) \; , \tag{63}$$

dove

$$g_{kx} = \frac{\kappa v \hbar k}{c(1-\beta^2+\kappa)} \left\{ \frac{[(1+\kappa)(1-\beta^2) + \kappa\beta^2 \sin^2 a_k]^{1/2}}{(1+\kappa)(1-\beta^2)^{1/2}} + \right.$$

$$\left. + \frac{c(1-\beta^2)\cos a_k}{\kappa v} \right\} . \tag{64}$$

In base a considerazioni analoghe si ottengono anche gli operatori delle componenti y e z:

$$G^s_y = \sum_k g_{ky}(a^*_k a_k + b^*_k b_k + 1) \; , \tag{65}$$

$$G^s_z = \sum_k g_{kz}(a^*_k a_k + b^*_k b_k + 1) \; , \tag{66}$$

dove

$$g_{ky} = \frac{\hbar k}{1+\kappa} \cos\beta_k \; ; \quad g_{kz} = \frac{\hbar k}{1+\kappa} \cos\gamma_k \; . \tag{67}$$

Le espressioni (63), (65) e (66) si possono riassumere in una equazione vettoriale come segue:

$$\mathfrak{G}^s = \sum_k \mathfrak{g}_k (n^a_k + n^b_k + 1) \; . \tag{68}$$

Qui $\mathfrak{g}_k$ indica il vettore con le componenti g_{kx}, g_{ky} e g_{kz}.

Riassumendo i risultati della quantizzazione della radiazione elettromagnetica si può affermare che l’impulso della radiazione è composto da quanti d’impulso $\mathfrak{g}_k$ in modo analogo a come l’energia è composta da quanti d’energia. Questi quanti si possono considerare come i fotoni del dielettrico. ε^s_k è l’energia del fotone e $\mathfrak{g}_k$ il suo impulso.

§ 5. L'operatore di Hamilton. La dipendenza temporale degli operatori dell'energia e dell'impulso della radiazione

Alla fine del § 3 si è notato che l'energia e l'impulso del campo elettromagnetico non sono costanti nel tempo, mentre l'energia e l'impulso della radiazione possiedono questa proprietà. Nel seguito si studierà brevemente questo problema.

Nella rappresentazione di Heisenberg la variazione temporale di un operatore dipendente dal tempo è determinata dall'equazione

$$\frac{d\Omega}{dt} = \frac{i}{\hbar}[H,\Omega] \,, \tag{69}$$

dove H indica l'operatore di Hamilton del sistema. Si vede facilmente che esso si può esprimere con gli operatori introdotti nei paragrafi precedenti, e si può scrivere nel modo seguente:

$$H = \frac{(1+\kappa)(1-\beta^2)}{2(1-\beta^2+\kappa)} \sum_k \Bigg\{ -\frac{\mu c^2}{1+\kappa} P_k^a P_{-k}^a + \frac{\mu c^2}{1+\kappa}\left(1+\frac{\kappa\beta^2\sin^2 a_k}{(1+\kappa)(1-\beta^2)}\right) P_k^b P_{-k}^b - \frac{k^2}{\mu}\left(1+\frac{\kappa\beta^2\sin^2 a_k}{(1+\kappa)(1-\beta^2)}\right) Q_k^a Q_{-k}^a + \frac{k^2}{\mu} Q_k^b Q_{-k}^b - \frac{2\kappa i}{(1+\kappa)(1-\beta^2)}(\mathfrak{v}\mathfrak{k})(P_k^a Q_k^a + P_k^b Q_k^b) \Bigg\} \,. \tag{70}$$

Con gli operatori a_k e b_k delle equazioni (53) anche l'operatore di Hamilton si può diagonalizzare come segue:

$$H = \sum_k \lambda_k (n_k^a + n_k^b + 1) \,. \tag{71}$$

Qui si ha $n_k^a = a_k^* a_k$ e $n_k^b = b_k^* b_k$, i cui autovalori sono i numeri interi 0,1,2,3,... e

$$\lambda_k = \frac{1}{(1-\beta^2+\kappa)} \left\{ \hbar c k \left[(1+\kappa)(1-\beta^2)^2 + \kappa\beta^2(1-\beta^2)\sin^2 a_k \right]^{1/2} + \kappa\hbar k v \cos a_k \right\} . \tag{72}$$

Conoscendo l'operatore di Hamilton si può determinare anche la dipendenza temporale dei nostri operatori in base all'equazione (69). Poiché tutti gli operatori possono essere espressi mediante gli operatori a_k e b_k, si deve cercare in primo luogo la dipendenza temporale di questi:

$$\dot{a}_k = \frac{i}{\hbar}\,[H,a_k]\ . \tag{73}$$

Tenendo conto delle relazioni di commutazione (54) si ottiene:

$$\dot{a}_k = -\frac{i}{\hbar}\,\lambda_k a_k\ . \tag{74}$$

La soluzione di questa è:

$$a_k = a_k^0 \exp(-i\lambda_k t/\hbar)\ , \tag{75}$$

dove a_k^0 è indipendente dal tempo. In modo analogo s'ottiene:

$$b_k = b_k^0 \exp(-i\lambda_k t/\hbar)\ . \tag{76}$$

La parte trasversale del potenziale vettore in base alle formule (75) e (76) dipende dal tempo nel modo seguente:

$$\mathfrak{U}_t(\mathbf{r},t) = L^{-3/2}\sum_k (\hbar c/2k)^{1/2}\Big\{(\mathfrak{e}_k^a \xi_k a_k^0 + \mathfrak{e}_k^b \eta_k b_k^0)\exp[-i(\lambda_k t/\hbar - \mathfrak{k}\mathbf{r})] +$$

$$+ (\mathfrak{e}_k^a \xi_k a_k^{0*} + \mathfrak{e}_k^b \eta_k b_k^{0*})\exp[i(\lambda_k t/\hbar - \mathfrak{k}\mathbf{r})]\Big\}\ . \tag{77}$$

Da qui è evidente che $\mathfrak{U}_t$ è la sovrapposizione delle onde piane che procedono nella direzione $\pm\,\mathfrak{k}$, e che la frequenza dell'onda parziale corrispondente al vettore numero d'onda con il valore assoluto k è

$$\omega_k = \lambda_k/\hbar\ . \tag{78}$$

Gli autovalori dell'operatore di Hamilton sono quindi uguali ai multipli interi di $\hbar\omega_k$. Questo è evidente anche dalla relazione (72) utilizzando la formula di trasformazione della frequenza. Si ha quindi:

$$a_k = a_k^0 \exp(-i\omega_k t)\ , \tag{79a}$$

$$b_k = b_k^0 \exp(-i\omega_k t)\ . \tag{79b}$$

Se si sostituiscono queste espressioni nelle equazioni degli operatori dell'energia e dell'impulso della radiazione è immediatamente evidente che queste non contengono il tempo:

$$E^s = \sum_k \varepsilon^s_k (a^{0*}_k a^0_k + b^{0*}_k b^0_k + 1) \ , \tag{80}$$

$$\mathfrak{G}^s = \sum_k \mathfrak{g}_k (a^{0*}_k a^0_k + b^{0*}_k b^0_k + 1) \ . \tag{81}$$

Si consideri adesso la variazione temporale dell'energia e dell'impulso del campo elettromagnetico. Sostituendo gli operatori a_k e b_k che derivano dall'equazione (53) al posto di P_k e Q_k nelle espressioni dell'operatore dell'energia (36) e dell'operatore dell'impulso (46) i termini del tipo $a_k a_{-k}$ con gli anzidetti valori di ξ_k e di η_k non si eliminano. Ciò ha per conseguenza che esse contengono il tempo tramite questi termini. L'energia e l'impulso del campo elettromagnetico non sono quindi costanti nel tempo. Questa è la diretta conseguenza del fatto che il campo è in interazione con il dielettrico.

§ 6. La trasformazione dell'energia e dell'impulso della radiazione

Il tensore dell'energia-impulso S_{ik} che descrive le proprietà dinamiche della radiazione è a divergenza nulla, come già prima è stato mostrato. Si può dimostrare [1] che le quantità costruite con esso

$$G^s_r = (1/ic)\int S_{r4} dV \quad (r=1,2,3) \tag{82}$$

e

$$(i/c)E^s = (1/ic)\int S_{44} dV \tag{83}$$

si possono trasformare come tetravettori quando si passi da un sistema di riferimento ad un altro per mezzo di una trasformazione di Lorentz. In base a questo risultato si possono ottenere l'energia e l'impulso del fotone in un sistema di coordinate nel quale il dielettrico si sposti con la velocità v lungo l'asse x anche per mezzo di una semplice trasformazione dai valori dell'impulso e dell'energia nel sistema di coordinate solidale con un dielettrico. Nel sistema di coordinate solidale al dielettrico l'energia del fotone è:

$$\varepsilon = \hbar kc/n \ , \tag{84}$$

dove k è il valore assoluto del vettore numero d'onda ed n è l'indice di rifrazione del mezzo. Nel sistema di coordinate solidale al dielettrico si ha $k = \omega n/c$, dove ω indica la frequenza. Tenendo conto di questa relazione risulta

$$\varepsilon = \hbar\omega \ . \tag{85}$$

L'impulso del fotone in questo sistema di riferimento si scrive:

$$\mathfrak{g} = \frac{\hbar\mathfrak{k}}{n^2} = \frac{\varepsilon}{cn}\,\frac{\mathfrak{k}}{|k|} \ . \tag{86}$$

L'energia e l'impulso del fotone in un sistema di coordinate rispetto al quale il dielettrico si muova sono:

$$\varepsilon' = \hbar\omega\,\frac{1+(\beta/n)\cos\alpha}{(1-\beta^2)^{1/2}} = \hbar\omega'\,\frac{1+(\beta/n)\cos\alpha}{1+\beta n\cos\alpha}\ ,$$

$$g'_x = \frac{\hbar\omega}{cn}\,\frac{\cos\alpha+\beta n}{(1-\beta^2)^{1/2}}\ , \qquad g'_y = \frac{\hbar\omega}{cn}\cos\beta\ , \qquad g'_z = \frac{\hbar\omega}{cn}\cos\gamma\ . \tag{87}$$

Tenendo conto della trasformazione del vettore numero d'onda e della frequenza si può senz'altro dimostrare che le espressioni (57), (64) e (67) sono identiche alle espressioni (87) ottenute per trasformazione.

È evidente che l'energia del fotone nel dielettrico non è in generale uguale ad $\hbar\omega$. Solo nel caso di un fotone che si muova perpendicolarmente alla direzione nella quale il dielettrico si sposta ovvero nel caso di un dielettrico in quiete essa coincide con $\hbar\omega$. Questa è una conseguenza del fatto che in questi casi l'interazione tra campo e dielettrico non si manifesta nello scambio di energia ed impulso, ma piuttosto che nel dielettrico compaiono solo sforzi.

Dalle espressioni precedenti risulta anche che l'impulso del fotone è

$$|\mathfrak{g}'| = \frac{\hbar\omega'}{c^2}\,\frac{1+(\beta/n)\cos\alpha}{1+\beta n\cos\alpha}\,V = \frac{\varepsilon'}{c^2}\,V\ . \tag{88}$$

La velocità V nel caso di un dielettrico che si muova non coincide con la velocità di fase dell'onda; essa si può calcolare dal valore c/n per l'onda nel dielettrico in quiete in base al teorema di Einstein di addizione delle velocità.

In base ai nostri risultati si può anche rispondere alla domanda, quanto valgano l'energia e l'impulso del fotone in quel sistema di coordinate che si sposti assieme al fotone che si muove nella direzione dell'asse *x*, cioè con la velocità *c/n* rispetto al dielettrico. Utilizzando le espressioni (87) si può vedere facilmente che nel sistema di coordinate che si muove assieme al fotone l'energia del fotone ha un valore diverso da zero, e il suo impulso è nullo. Il fotone possiede quindi nel dielettrico una energia a riposo diversa da zero. In un sistema di riferimento rispetto al quale il fotone si sposta con la velocità *V*, la sua energia è:

$$\varepsilon = \frac{\varepsilon_0}{(1-V^2/c^2)^{1/2}}\ , \tag{89}$$

dove ε_0 indica l'energia a riposo. Da qui risulta per la massa del fotone l'espressione

$$m = \frac{m_0}{(1-V^2/c^2)^{1/2}}\ . \tag{90}$$

In corrispondenza all'energia a riposo non nulla anche la massa a riposo del fotone che si sposta nel dielettrico non è nulla. Per la massa del fotone vale la stessa formula che vale per un corpuscolo. Una differenza essenziale rispetto al caso del vuoto consiste tuttavia nel fatto che l'energia e riposo e la massa a riposo del fotone hanno valori non nulli positivi. Ciò è da ricondurre al fatto che l'energia del fotone è solo in parte di natura elettromagnetica, mentre una parte è presente in forma di oscillazioni meccaniche nel dielettrico, cioè in forma di energia cinetica molecolare. Un fenomeno analogo compare anche nel vuoto, precisamente nel caso di un'onda elettromagnetica che si propaghi tra piastre conduttrici [10]. La velocità di propagazione dell'energia è qui minore di *c* e il fotone assume una massa a riposo finita positiva.

§ 7. Riepilogo

Si riconosce come tensore d'energia e impulso del campo elettromagnetico nei dielettrici il tensore simmetrico di Abraham, poiché da un lato solo un tensore simmetrico è in grado di soddisfare la relazione di Planck $\mathfrak{g} = \mathfrak{S}/c^2$ di validità generale, e poiché d'altro canto il principio variazionale produce in modo univoco questo tensore. Gli operatori energia del campo e impulso del campo calcolabili da esso in modo noto non possiedono alcun autostato simultaneo, inoltre nessuno di essi commuta con l'operatore di Hamilton, cioè l'energia e l'impulso del campo non sono costanti nel tempo. In analogia con il caso del vuoto ci si aspetterebbe che gli operatori dell'energia e dell'impulso della radiazione elettromagnetica fossero diagonalizzabili simultaneamente e che entrambi fossero costanti nel tempo, poiché solo in questo caso si può parlare di fotoni. Ma il tensore d'energia-impulso di Abraham non corrisponde a questa aspettativa, ed anche la velocità della radiazione ricavata da esso non si trasforma per una trasformazione di Lorentz come la velocità di un corpuscolo.

La velocità della radiazione calcolata dal tensore d'energia-impulso di Minkowski si trasforma proprio come la velocità d'un corpuscolo, tuttavia questo tensore a causa della sua natura asimmetrica non può essere considerato come il tensore d'energia-impulso della radiazione. Ciò è confermato anche dai risultati singolari che si ottengono in base alla quantizzazione dell'energia e dell'impulso del campo calcolabili da esso. Infatti: per la massa a riposo del fotone si ottiene un valore immaginario, la sua energia è zero in un sistema di coordinate che si muova assieme con il fotone, mentre il suo impulso è diverso da zero. In un sistema di riferimento nel quale il fotone si sposti con una velocità maggiore della velocità di fase c/n l'energia del fotone è negativa. In base a questi risultati il fotone non avrebbe affatto alcuna proprietà di particella.

Questi risultati della teoria dei quanti confermano l'opinione che le proprietà dinamiche della radiazione elettromagnetica nei dielettrici non sono descritte dal tensore d'energia e impulso del campo, ma dal cosidetto tensore d'energia e impulso della radiazione, che tien conto dell'interazione tra campo e dielettrico. La divergenza del tensore di Abraham infatti non si annulla neanche in assenza di cariche e di correnti, e con ciò si esprime il fatto che il campo esercita una forza sul dielettrico. Questa interazione provoca nel caso di un dielettrico in quiete solo sforzi che compensano questa forza, mentre quando il dielettrico si muove l'interazione si manifesta anche nella cessione di energia e impulso. In conseguenza di questo fatto l'energia e l'impulso complessivi della radiazione non sono di natura puramente elettromagnetica, ma sono presenti in parte anche in forma di energia cinetica e di impulso molecolari.

La trattazione della radiazione secondo la teoria dei quanti s'è svolta qui sulla base del tensore d'energia-impulso della radiazione deducibile dal tensore simmetrico di Abraham, per il quale si son trovati gli autovalori dell'energia e dell'impulso. In base ai risultati ottenuti si può affermare che anche nei dielettrici l'energia e l'impulso della radiazione si compongono di quanti di buona definizione. Questi quanti sono i fotoni presenti all'interno del dielettrico, che dispongono della seguente proprietà di particella: l'impulso e l'energia moltiplicata per i/c formano un tetravettore. In tal modo dai valori dell'energia $\hbar\omega$ e dell'impulso $\hbar\omega/cn$ in un sistema di coordinate solidale con il dielettrico si possono determinare mediante una trasformazione di Lorentz l'energia e rispettivamente l'impulso del fotone che si hanno in ogni sistema di coordinate in moto. L'energia del fotone, in un sistema di coordinate che si muova rispetto al dielettrico, è sempre positiva. Il fotone presenta nel dielettrico una massa a riposo ed un'energia a riposo finite e positive. La massa di moto sta con la massa a riposo nella stessa relazione che si ha per un corpuscolo.

Come riepilogo dei risultati pare giustificato affermare che anche nei dielettrici si può parlare di fotoni e che questi dispongono di proprietà di particella di buona definizione. Una differenza fondamentale rispetto ai fotoni del vuoto consiste nel fatto che questi possiedono un'energia ed una massa a riposo che sono diverse da zero. I risultati qui ottenuti coincidono con i ben noti risultati del vuoto nel caso di $n = 1$.

Si esprimono a questo punto al Professor *K.F. Novobátzky* e al docente *G. Marx* i migliori ringraziamenti per il loro costante interesse e per i loro preziosi consigli.

Riferimenti

1. *W. Heitler*, The Quantum Theory of Radiation, II ed. pp. 17, 64. Oxford Univ. Press, London, 1949.
2. *J.M. Jauch* e *K.M. Watson*, Phys. Rev. **74**, 950, 1948.
3. *K.F. Novobátzky*, Hung. Acta Phys. **1**, No. 5, 1949.
4. *M. v. Laue*, Die Relativitätstheorie, Vol. I, p. 107, Vieweg, Braunschweig, 1953.
5. *G. Ludwig*, ZS. f. Phys. **130**, 468, 1951.
6. *M. v. Laue*, ZS. f. Phys. **128**, 387, 1950.
7. *G. Marx* e *G. Györgyi*, Acta Phys. Hung. **3**, 213, 1954.
8. *G. Marx* e *K. Nagy*, Acta Phys. Hung. **4**, 297, 1955.
9. *F. Beck*, ZS. f. Phys. **134**, 136, 1953.
10. *J. Németh*, A Termèszettudományi Kar Évkönyve (Jahrbuch der Naturwissenschaftlichen Fakultät. Nur ungar.) 51, 1952-53.