Il principio di Hamilton per corpi materiali nella teoria della relatività generale[1,2]

G. NORDSTRÖM.

Il principio di Hamilton è già stato usato spesso nella teoria della relatività generale per ricavare le leggi della teoria o per riassumerle.[3] I comportamenti dei corpi materiali in senso stretto (eccettuato il campo elettromagnetico nel vuoto che secondo Einstein fa pure parte della materia) sono stati per lo più considerati inoltre finora solo per quanto era necessario per la derivazione delle leggi della gravitazione. In contrasto con questo esiste una comunicazione dell'autore nelle Amst. Versl. che pone in primo piano i fenomeni materiali, se pur solo quelli meccanici[4]. Lo scopo del presente lavoro è completare questa comunicazione. Nella prima parte del lavoro saranno trattati i fenomeni meccanici e particolarmente quelli elastici, nella seconda parte i fenomeni elettromagnetici nei corpi ponderabili.

---

[1]Soc. Scient. Fenn., Comm. Phys.-Math. I.33 (1923).

[2]*Tradotto in collaborazione con L. Mihich.*

[3]H. A. LORENTZ, Amst. Versl. **23**, 1073, (1915); **24**, 1389, 1759 (1916); **25**, 468, 1380, (1916). D. HILBERT, Gött. Nachr. math.-phys. Kl. **1915**, 395, A. EINSTEIN, Berl. Ber. **1916**, 1115. H. WEYL, Ann. d. Phys. **54**, 117, (1917). F. Klein, Gött. Nachr. math.-phys. Kl. **1917**, 469. TH. de DONDER, La Gravifique einsteinienne (Paris 1921). *Vedi anche* W. PAULI jr., Encykl. d. math. Wiss. V **19**, 55 e 57. *Questo articolo dell'enciclopedia fornisce una buona informazione su tutti gli argomenti della teoria della relatività qui considerati, e riferimenti bibliografici completi.*

[4]G. NORDSTRÖM, Amst. Versl. **25**, 836, (1916).

Prima parte. Meccanica dei continui.

§ 1. *Le quantità di deformazione.*

Per la trattazione dei fenomeni nei corpi materiali dobbiamo per evidenti ragioni introdurre come strumento essenziale la meccanica dei continui. Per la teoria della relatività speciale la meccanica dei continui è stata trattata in modo esauriente dal sig. HERGLOTZ[5], ed io ho mostrato in breve nella comunicazione citata come la trattazione vada estesa alla teoria della relatività generale. Qui innanzitutto tratterò il medesimo problema in modo un po' diverso e più completo.

Indichiamo con HERGLOTZ le coordinate spaziali ortogonali che i diversi punti del corpo materiale considerato avrebbero, se essi si trovassero nello stato normale (e a riposo), con ξ_a, ξ_b, ξ_c[6]. Si introduca un sistema di coordinate completamente arbitrario, e il punto ξ_a, ξ_b, ξ_c della materia può assumere al tempo t le coordinate spaziali x^1, x^2, x^3. Introduciamo poi un tempo locale arbitrario ξ_d:

$$\xi_d = \xi_d(\xi_a, \xi_b, \xi_c, t), \quad \frac{\partial \xi_d}{\partial t} > 0; \tag{1}$$

allora le quattro equazioni

$$x^\alpha = x^\alpha(\xi_a, \xi_b, \xi_c, \xi_d) \qquad \alpha = 1,2,3,4 \tag{2}$$

(dove si è posto $t = x^4$) descrivono completamente il moto del corpo. Seguendo più oltre la rappresentazione di HERGLOTZ, introduciamo le 16 quantità

---

[5] G. HERGLOTZ, Über die Mechanik des deformierbaren Körpers vom Standpunkt der Relativitätstheorie, Ann. d. Phys. **36**, 493, (1911). *Vedi anche* M. BORN, Phys. Zeitschr. **12**, 569, (1911).

[6] HERGLOTZ *indica queste quantità con* ξ_1, ξ_2, ξ_3. *Il motivo per cui noi ci discostiamo in parte dalla sua notazione, risulterà chiaro in seguito.*

$$a^{\alpha} = \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial \xi_a}\,,\quad b^{\alpha} = \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial \xi_b}\,,\quad c^{\alpha} = \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial \xi_c}\,,\quad d^{\alpha} = \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial \xi_d} \tag{3}$$

(le quantità a_{ij} di HERGLOTZ). Ci domandiamo come si comportino queste quantità per trasformazione di coordinate. Introduciamo un sistema di coordinate primato:

$$x^{\alpha'} = x^{\alpha'}(x^1, x^2, x^3, x^4),$$

allora si ha

$$dx^{\alpha'} = \sum_{\beta} \frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^{\beta}} dx^{\beta},$$

$$a^{\alpha'} = \frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial \xi_a} = \sum_{\beta} \frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^{\beta}} a^{\beta}, \tag{4}$$

e analogamente per $b^{\alpha}, c^{\alpha}, d^{\alpha}$. Le quantità $a^{\alpha}, b^{\alpha}, c^{\alpha}, d^{\alpha}$ si trasformano quindi come i dx^{α}, cioè come le componenti di un vettore controvariante. Questa semplice proprietà di trasformazione delle quantità considerate dipende dal fatto che pensiamo fissate una volta per tutte le quantità ξ per i diversi punti della materia, e quindi queste quantità non cambiano per trasformazioni di coordinate.

Le componenti della velocità usuale, tridimensionale $\left(\frac{dx^{\alpha}}{dt}\right)$ sono

$$u = \frac{d^1}{d^4},\quad v = \frac{d^2}{d^4},\quad w = \frac{d^3}{d^4}. \tag{5}$$

Le componenti della tetravelocità $\left(\frac{dx^{\alpha}}{ds}\right)$ sono quindi, come si può vedere facilmente,

$$U^{\alpha} = \frac{d^{\alpha}}{\sqrt{\sum_{\mu\nu} g_{\mu\nu} d^{\mu} d^{\nu}}}. \tag{6}$$

La differenza principale tra un vero vettore controvariante come U e vettori come a, b, c risulta evidente. Entrambi si trasformano nello stesso modo relativamente alle coordinate x^1, x^2, x^3, x^4, ma il primo è indipendente da come sono fissate le quantità $\xi_a, \xi_b, \xi_c, \xi_d$, mentre gli altri no. In mancanza di un'espressione migliore, anche nel seguito parleremo di vettori o rispettivamente tensori "veri" e "spurî". I primi sono quantità indipendenti da come ξ è fissato.

Per il seguito abbiamo bisogno anche di quei quattro vettori $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}, \bar{d}$, che sono la proiezione dei vettori a, b, c, d ortogonale rispetto al vettore velocità U. Per le loro componenti si ha:

$$\bar{a}^{\alpha} = a^{\alpha} - U^{\alpha}\sum_{\mu\nu} g_{\mu\nu} a^{\mu} U^{\nu} \tag{7}$$

ovvero per la (6)

$$\bar{a}^{\alpha} = a^{\alpha} - d^{\alpha} \frac{\sum g_{\mu\nu} a^{\mu} d^{\nu}}{\sum g_{\mu\nu} d^{\mu} d^{\nu}} \tag{8}$$

e analogamente per $\bar{b},\bar{c},\bar{d}$[7]. Si vede immediatamente che tutte le componenti del vettore $\bar{d}$ sono nulle:

$$\bar{d}^{\alpha} = 0. \tag{9}$$

Formiamo ora anche i prodotti scalari dei vettori soprasegnati tra di loro, cioè le quantità $\sum g_{\mu\nu}\bar{a}^{\mu}\bar{b}^{\nu}$ etc., e poniamo

$$\begin{cases} 1+2e_{aa} = -\sum g_{\mu\nu}\bar{a}^{\mu}\bar{a}^{\nu}, \\ 2e_{bc} = -\sum g_{\mu\nu}\bar{b}^{\mu}\bar{c}^{\nu}, \\ \ldots\ldots \end{cases} \tag{10}$$

Sostituendo l'espressione (8) si ottiene

$$\begin{cases} 1+2e_{aa} = -\sum g_{\mu\nu} a^{\mu} a^{\nu} + \dfrac{(\sum g_{\mu\nu} a^{\mu} \mathrm{d}^{\nu})^2}{\sum g_{\mu\nu} d^{\mu} \mathrm{d}^{\nu}}, \\ 2e_{bc} = -\sum g_{\mu\nu} b^{\mu} c^{\nu} + \dfrac{\sum g_{\mu\nu} b^{\mu} \mathrm{d}^{\nu} \cdot \sum g_{\mu\nu} c^{\mu} \mathrm{d}^{\nu}}{\sum g_{\mu\nu} d^{\mu} \mathrm{d}^{\nu}} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases} \tag{11}$$

Valgono le relazioni

$$e_{ad} = e_{bd} = e_{cd} = e_{dd} = 0. \tag{12}$$

Le sei quantità e diverse da zero sono le *deformazioni a riposo* usate da HERGLOTZ . Esse indicano come la forma a riposo di un elemento di volume materiale si discosti dalla forma normale. Le quantità e si comportano per trasformazioni di coordinate come scalari, purché si riferiscano a un sistema ξ_a,ξ_b,ξ_c fissato; vanno quindi designate come scalari spurî.

---

[7] *Qui e nel seguito non è necessario indicare su quali indici si deve sommare, poiché si usa la regola generale secondo la quale la sommatoria è fatta su tutti i termini sotto il simbolo di somma che contengono due indici greci ripetuti.*

Che le quantità *e* introdotte mediante le equazioni (10) diano la deformazione elastica lo si vede se si tratta il caso nel quale si abbia quiete, e le componenti $g_{\mu\nu}$ del tensore fondamentale abbiano i valori della teoria della relatività speciale (i *valori normali*). Allora

$$d^1 = d^2 = d^3 = 0 \tag{13a}$$

$$\begin{cases} g_{11} = g_{22} = g_{33} = -1,\ g_{44} = +1, \\ \qquad g_{\mu\nu} = 0 \quad \text{per } \mu \neq \nu, \end{cases} \tag{13b}$$

e le equazioni (11) danno

$$\begin{cases} 1+2e_{aa} = (a^1)^2 + (a^2)^2 + (a^3)^2, \\ \quad 2e_{bc} = b^1c^1 + b^2c^2 + b^3c^3 \\ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{cases} \tag{13c}$$

che sono identiche alle equazioni (16) di HERGLOTZ[8].

Per chiarire ulteriormente il significato delle quantità *e*, trattiamo il caso di una deformazione infinitamente piccola omogenea nello stato a riposo. Poniamo in accordo con la (3)

$$\begin{cases} x^1 = \xi_a + \delta\xi_a = a^1\xi_a + b^1\xi_b + c^1\xi_c \\ x^2 = \xi_b + \delta\xi_b = a^2\xi_a + b^2\xi_b + c^2\xi_c \\ x^3 = \xi_c + \delta\xi_c = a^3\xi_a + b^3\xi_b + c^3\xi_c \end{cases} \tag{13d}$$

e abbiamo quindi

$$\begin{cases} \delta\xi_a = (a^1 - 1)\xi_a + b^1\xi_b + c^1\xi_c \\ \delta\xi_b = a^2\xi_a + (b^2 - 1)\xi_b + c^2\xi_c \\ \delta\xi_c = a^3\xi_a + b^3\xi_b + (c^3 - 1)\xi_c \end{cases} \tag{13e}$$

Per piccole deformazioni le quantità

$$(a^1 - 1),\ b^1,\ c^1;\ a^2,\ (b^2 - 1),\ c^2;\ a^3,\ b^3,\ (c^3 - 1)$$

sono quantità piccole del prim'ordine. Se trascuriamo le quantità degli ordini secondo e superiori, le (13c) e (13e) ci danno

---

[8] *Vedi anche* C.H. MÜLLER *e* A. TIMPE. Encykl. d. math. Wiss. IV **23**, 6, *equazioni* (36). E. HELLINGER, Encykl. d. math. Wiss. IV **30**, 9, *equazioni* (1).

$$\begin{cases} 1 + 2e_{aa} = 1 + 2(a^1 - 1) = 1 + 2\dfrac{\partial\delta\xi_a}{\partial\xi_a} \\ 2e_{bc} = c^2 + b^2 = \dfrac{\partial\delta\xi_b}{\partial\xi_c} + \dfrac{\partial\delta\xi_c}{\partial\xi_b} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases} \tag{13f}$$

Le ultime espressioni mostrano che le quantità e rappresentano la deformazione rispetto allo stato normale se la deformazione è infinitamente piccola. Per deformazione finita le quantità e costituiscono la generalizzazione naturale del concetto di quantità di deformazione ora introdotto per deformazioni infinitamente piccole. - Si può intuire il significato delle quantità e anche mediante lo studio dell'ellissoide di deformazione.

§ 2. *Il potenziale cinetico.*

Dopo questi preliminari possiamo occuparci della funzione di stato che compare nel principio di HAMILTON. Assumiamo che esista un potenziale cinetico

$$H = \iiiint \Phi \; d\xi_a d\xi_b d\xi_c d\xi_d, \tag{14}$$

la cui variazione si annulli sotto condizioni delle quali parleremo ulteriormente in seguito. H deve essere una quantità scalare (quindi anche Φ è uno scalare, sebbene spurio), e per il caso della quiete e di valori normali (13b) dei $g_{\mu\nu}$ H deve assumere la forma

$$\iiiint \Omega \; d\xi_a d\xi_b d\xi_c dt$$

di un consueto potenziale cinetico, dove Ω è una funzione delle quantità di deformazione e e dell'entropia ε per unità di volume normale, funzione che può inoltre dipendere esplicitamente da ξ_a, ξ_b, ξ_c:

$$\Omega = \Omega(\varepsilon, e_{aa}, \ldots. \xi_a, \xi_b, \xi_c) \tag{15}$$

(vedi HERGLOTZ l.c. § 5).Come funzione di noti scalari Ω è evidentemente anch'essa uno scalare (spurio).

Per un dato punto ξ_a, ξ_b, ξ_c della materia si ha secondo la (3)

$$dt = dx^4 = \frac{\partial x^4}{\partial \xi_d} d\xi_d = d^4 d\xi_d .$$

Per ottenere Φ, si deve quindi moltiplicare Ω per quello scalare, il cui valore coincida con il valore di d^4 per lo stato di quiete e per valori normali (13b) di $g_{\mu\nu}$. Questo scalare è evidentemente

$$\left(\sum g_{\mu\nu} d^\mu d^\nu\right)^{1/2},$$

e si ha quindi

$$\Phi = \Omega\left(\sum g_{\mu\nu} d^\mu d^\nu\right)^{1/2}; \tag{16}$$

Ω è, come detto, una funzione dell'entropia ε e delle quantità di deformazione e. Ma le equazioni (11) mostrano che le e si possono esprimere in modo semplice mediante le seguenti quantità A:

$$\begin{cases} A_{aa} = \sum g_{\mu\nu} a^\mu a^\nu , \\ A_{bc} = \sum g_{\mu\nu} b^\mu c^\nu , \\ \ldots\ldots\ldots\ldots . \end{cases} \tag{17}$$

Possiamo quindi interpretare Ω e, poiché per la (16)

$$\Phi = \Omega\sqrt{A_{dd}}, \tag{18}$$

anche Φ come funzione di

$$\varepsilon,\ A_{aa},\ A_{bc},\ \ldots.\ \xi_a,\ \xi_b,\ \xi_c .$$

In conclusione, per la (17), possiamo trattare anche Φ come funzione di

$$\varepsilon,\ g_{\mu\nu},\ a^\alpha,\ b^\alpha,\ c^\alpha,\ d^\alpha,\ \xi_a,\ \xi_b,\ \xi_c,$$

e così faremo in seguito:

$$\Phi = \Phi\ (\varepsilon, g_{\mu\nu}, a^\alpha, b^\alpha, c^\alpha, d^\alpha, \xi_a, \xi_b, \xi_c). \tag{19}$$

Poiché in questa funzione gli argomenti $g_{\mu\nu}, a^\alpha, b^\alpha, c^\alpha, d^\alpha$, compaiono solo nelle combinazioni A delle equazioni (17), si dimostra facilmente la seguente relazione[9]:

---

[9]*Per la dimostrazione si noti che*

$$\frac{\partial \Phi}{\partial a^\alpha} = \frac{\partial \Phi}{\partial A_{aa}} 2\sum g_{\alpha\mu} a^\mu + \frac{\partial \Phi}{\partial A_{ab}} \sum g_{\alpha\mu} b^\mu + + \frac{\partial \Phi}{\partial A_{ba}} \sum g_{\mu\alpha} b^\mu + +,$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial g_{\mu\nu}} = \frac{\partial \Phi}{\partial A_{aa}} a^\mu a^\nu + \frac{\partial \Phi}{\partial A_{ab}} a^\mu b^\nu + + \frac{\partial \Phi}{\partial A_{ba}} b^\mu a^\nu + + \frac{\partial \Phi}{\partial A_{bb}} b^\mu b^\nu + +$$

$$+ \ldots\ldots\ldots$$

$$+ \ldots\ldots\ldots$$

$$a^{\nu}\frac{\partial\Phi}{\partial a^{\alpha}} + b^{\nu}\frac{\partial\Phi}{\partial b^{\alpha}} + c^{\nu}\frac{\partial\Phi}{\partial c^{\alpha}} + d^{\nu}\frac{\partial\Phi}{\partial d^{\alpha}} = \sum g_{\alpha\mu}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial g_{\mu\nu}} + \frac{\partial\Phi}{\partial g_{\nu\mu}}\right). \qquad (20)$$

Poiché $g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}$, l'espressione per Φ può essere scritta in modo tale da essere simmetrica rispetto a $g_{\mu\nu}$ e $g_{\nu\mu}$. Allora i due termini nella parentesi a secondo membro sono uguali tra loro. La relazione (20) avrà significato per noi più avanti.

Il potenziale cinetico H può anche essere espresso tramite un integrale sulle coordinate x^1, x^2, x^3, x^4. Quando si indichi con D il determinante funzionale

$$D = \frac{\partial(x^1x^2x^3x^4)}{\partial(\xi_a\xi_b\xi_c\xi_d)} = \begin{vmatrix} a^1 & a^2 & a^3 & a^4 \\ b^1 & b^2 & b^3 & b^4 \\ c^1 & c^2 & c^3 & c^4 \\ d^1 & d^2 & d^3 & d^4 \end{vmatrix}, \qquad (21)$$

si ha

$$H = \iiiint \mathfrak{F}\, dx^1 dx^2 dx^3 dx^4, \qquad (22)$$

dove[10]

$$\mathfrak{F} = \frac{\Phi}{D}. \qquad (23)$$

Interpretiamo anche $\mathfrak{F}$ come funzione delle quantità $\varepsilon, g_{\mu\nu}, a^{\alpha}, b^{\alpha}, c^{\alpha}, d^{\alpha}, \xi_a, \xi_b, \xi_c$:

$$\mathfrak{F} = \mathfrak{F}(\varepsilon, g_{\mu\nu}, a^{\alpha}, b^{\alpha}, c^{\alpha}, d^{\alpha}, \xi_a, \xi_b, \xi_c). \qquad (24)$$

Poiché H è uno scalare, la funzione di HAMILTON $\mathfrak{F}$ in base alla (22) è una densità scalare. (Adotto qui la terminologia di WEYL[11]; EINSTEIN designava prima quantità di questo tipo come scalari di volume.) $\mathfrak{F}$ è una densità scalare *vera*, indipendente da come le ξ sono fissate.

Herglotz ha un segno meno nel primo termine della (23). *Noi lo evitiamo intendendo per* Ω *e* Φ *le quantità* $-\Omega$ *e* $-\Phi$ *di Herglotz.*

[11] H. WEYL. Raum-Zeit-Materie.

§ 3. *Il principio di HAMILTON*

Quando scriviamo il principio di HAMILTON nella forma

$$\delta\iiiint \mathfrak{H}\, dx^1 dx^2 dx^3 dx^4 = 0,$$

esso si riferisce a fenomeni solo meccanici. Per comprendere anche i fenomeni gravitazionali la formula va generalizzata, e poiché ci mettiamo da un punto di vista puramente fenomenologico, dobbiamo secondo EINSTEIN semplicemente aggiungere a $\mathfrak{H}$ un termine $\mathfrak{G}$, che si riferisce al campo gravitazionale[12]. La densità scalare $\mathfrak{G}$ è una funzione degli argomenti

$$g_{\mu\nu}, \quad \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha}, \quad \frac{\partial^2 g_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha \partial x^\beta};$$

essa è indipendente dalle quantità $\varepsilon, a^\alpha, b^\alpha, c^\alpha, d^\alpha, \xi_a, \xi_b, \xi_c$.

Se interviene un campo elettromagnetico, compare anche un termine additivo relativo ad esso. Ma in questa parte escluderemo i fenomeni elettromagnetici.

Il principio di HAMILTON può ora esser formulato così: *la variazione dell'integrale*

$$\iiiint\Big\{\mathfrak{H}(\varepsilon, g_{\mu\nu}, a^\alpha, b^\alpha, c^\alpha, d^\alpha, \xi_a, \xi_b, \xi_c) + \\ + \mathfrak{G}\Big(g_{\mu\nu}, \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha}, \frac{\partial^2 g_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha \partial x^\beta}\Big)\Big\} dx^1 dx^2 dx^3 dx^4$$

(esteso a un dominio tetradimensionale arbitrario) è uguale a zero per ogni variazione virtuale delle variabili $\varepsilon, g_{\mu\nu}, a^\alpha, b^\alpha, c^\alpha, d^\alpha$ *che soddisfi certe condizioni materiali e che si annulli sul confine del dominio.* Le condizioni materiali riguardano solo le variabili di stato materiali $\varepsilon, a^\alpha, b^\alpha, c^\alpha, d^\alpha$; i $g_{\mu\nu}$ possono invece esser variati in modo completamente indipendente sia l'uno dall'altro che dalle restanti variabili. Per quanto riguarda la variazione di ε, anch'essa va posta uguale a zero ($\delta\varepsilon=0$), quando si consentano solo processi reversibili, adiabatici (quindi non termodinamici).

---

[12] A.EINSTEIN, HAMILTON'sches Prinzip und allgemeine Relativitätstheorie, Berl. Berl. 1115, (1916), in seguito citato come HAM. Pr.

In questa parte porremo questa restrizione. Prima di tutto ci interessa qui il risultato che si ottiene per variazione delle quantità $a^\alpha, b^\alpha, c^\alpha, d^\alpha$, e la variazione più generale di queste quantità si ottiene quando *il punto d'universo* $\xi_a, \xi_b, \xi_c, \xi_d$ *della materia si sposta virtualmente perché le sue coordinate* x^1, x^2, x^3, x^4 *variano di quantità arbitrarie* $\delta x^1, \delta x^2, \delta x^3, \delta x^4$[13]. *In questo caso i* $g_{\mu\nu}$ *mantengono il loro valore come funzioni di* x^1, x^2, x^3, x^4. Perciò per questa variazione $\delta\mathfrak{G}$ sarà nullo, e nell'integrale scritto sopra dovremo considerare solo il primo termine.

$\delta\mathfrak{F}$ indichi la variazione virtuale di $\mathfrak{F}$ in un punto fisso x^1, x^2, x^3, x^4 dell'universo tetradimensionale, $\Delta\mathfrak{F}$ la variazione in un punto d'universo $\xi_a, \xi_b, \xi_c, \xi_d$ della materia; allora

$$\delta\mathfrak{F} = \Delta\mathfrak{F} - \sum \frac{\partial\mathfrak{F}}{\partial x^\alpha}\delta x^\alpha. \tag{25}$$

Inoltre, poiché differenziazione e variazione sono commutabili, per la (3) si ha

$$\delta\mathfrak{F} = \sum\left(\frac{\partial\mathfrak{F}}{\partial a^\alpha}\frac{\partial\delta x^\alpha}{\partial\xi_a} + + +\right) + \sum\frac{\partial\mathfrak{F}}{\partial g_{\mu\nu}}\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha}\delta x^\alpha. \tag{26}$$

I tre termini non scritti nella parentesi (qui e in seguito) si ottengono dal termine presente scambiando *a* con *b*,*c*,*d*.

La variazione di *H* dà quindi

$$\left\{\begin{aligned} &\delta\iiiint \mathfrak{F}dx^1dx^2dx^3dx^4 = \iiiint \delta\mathfrak{F}dx^1dx^2dx^3dx^4 = \\ &\iiiint\left\{\sum\frac{\partial\mathfrak{F}}{\partial a^\alpha}\frac{\partial\delta x^a}{\partial x^\nu}a^\nu + + + + \sum\frac{\partial\mathfrak{F}}{\partial g_{\mu\nu}}\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha}\delta x^\alpha - \right. \\ &\left. - \sum\frac{\partial\mathfrak{F}}{\partial x^\alpha}\delta x^\alpha\right\} dx^1dx^2dx^3dx^4. \end{aligned}\right. \tag{27}$$

Integriamo per parti il primo termine al secondo membro (e quelli non scritti). Il termine si può riscrivere:

$$\sum\frac{\partial}{\partial x^\nu}\left(\sum\frac{\partial\mathfrak{F}}{\partial a^\alpha}a^\nu\delta x^\alpha\right) - \sum\delta x^\alpha\sum\frac{\partial}{\partial x^\nu}\frac{\partial\mathfrak{F}}{\partial a^\alpha}a^\nu,$$

e per integrazione il primo termine per il teorema di Gauss si può

---

[13] *Vedi* H.A. LORENTZ, Amst. Versl. **23**, 1073, (1915).

trasformare in un integrale di superficie, che sarà nullo perché i δx^α si annullano sulla superficie tridimensionale di confine. Otteniamo quindi

$$\delta\iiiint \mathfrak{H} dx^1dx^2dx^3dx^4 = - \iiiint \sum \delta x^\alpha \mathfrak{K}_\alpha dx^1dx^2dx^3dx^4, \tag{28}$$

dove

$$\mathfrak{K}_\alpha = \sum \frac{\partial}{\partial x^\nu}\left(\frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial a^\alpha} a^\nu + + +\right) - \sum \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial g_{\mu\nu}} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha} + \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial x^\alpha}. \tag{29}$$

Se consideriamo fenomeni puramente meccanici (e gravitazionali, ma non elettromagnetici), per il principio di HAMILTON il primo membro della (28) è uguale a zero, e poiché tutti i δx^α sono indipendenti tra loro, dalla (28) risulta

$$\mathfrak{K}_\alpha = 0. \tag{30}$$

La densità vettoriale covariante[14] $\mathfrak{K}_\alpha$ rappresenta la forza ponderomotrice complessiva che agisce sulla materia (= forza elastica + forza gravitazionale + resistenza inerziale della materia) (vedi sotto). Per fenomeni puramente meccanici (gravitazionali compresi) questa forza, come mostra la (30), è uguale a zero.

Vogliamo scrivere l’espressione (29) per $\mathfrak{K}_\alpha$ in un altro modo mediante introduzione del tensore dell’energia e degli sforzi. Poniamo

$$\mathfrak{T}_\alpha^\nu = \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial a^\alpha} a^\nu + + + + \delta_\alpha^\nu \mathfrak{H}, \tag{31}$$

dove δ_α^ν è uguale a 1 oppure 0 a seconda che α e ν siano uguali o no, e si vedrà tra poco che $\mathfrak{T}_\alpha^\nu$ rappresenta il tensore degli sforzi e dell’energia della materia (nella forma di una densità tensoriale mista). Nell’espressione per $\mathfrak{T}_\alpha^\nu$ è possibile introdurre secondo la (23) $\mathfrak{H}=\Phi/D$, e poiché

$$\frac{\partial D}{\partial a^\alpha} a^\nu + + + = \delta_\alpha^\nu D \tag{32}$$

si ottiene

---

[14]*Per brevità parliamo della densità vettoriale $\mathfrak{K}_\alpha$, invece che della densità vettoriale le cui componenti sono $\mathfrak{K}_\alpha$.*

$$\mathfrak{T}_\alpha^\nu = \frac{1}{D}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial a^\alpha} a^\nu + + + \right), \tag{31a}$$

che corrisponde all'espressione (68) di HERGLOTZ. Un'ulteriore espressione per $\mathfrak{T}_\alpha^\nu$ si ottiene dalla relazione (20). Poiché il determinante D non dipende dai $g_{\mu\nu}$, questa relazione assieme alla (23) dà

$$\mathfrak{T}_\alpha^\nu = \sum g_{\alpha\mu}\left(\frac{\partial\mathfrak{F}}{\partial g_{\mu\nu}} + \frac{\partial\mathfrak{F}}{\partial g_{\nu\mu}} \right). \tag{33}$$

Da qui si può vedere che l'espressione

$$\mathfrak{T}^{\mu\nu} = \frac{\partial\mathfrak{F}}{\partial g_{\mu\nu}} + \frac{\partial\mathfrak{F}}{\partial g_{\nu\mu}} \tag{34}$$

rappresenta il tensore dell'energia sotto forma di una densità tensoriale controvariante; infatti è noto che

$$\mathfrak{T}_\alpha^\nu = \sum g_{\alpha\nu}\mathfrak{T}^{\mu\nu} = \sum g^{\mu\nu}\mathfrak{T}_{\alpha\mu}. \tag{35}$$

Dalla (34) si può vedere anche che il tensore $\mathfrak{T}^{\mu\nu}$ è simmetrico rispetto ai due indici μ e ν.

§ 4. *La legge dell'energia-impulso per la materia.*

Quando si sostituiscono le espressioni (31) e (34) nella (29), l'espressione per $\mathfrak{K}_\alpha$ si scrive

$$\mathfrak{K}_\alpha = \sum \frac{\partial\mathfrak{T}_\alpha^\nu}{\partial x^\nu} - \frac{1}{2}\sum\mathfrak{T}^{\mu\nu}\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha}. \tag{36}$$

Per fenomeni puramente meccanici (compresi quelli gravitazionali) tutti i $\mathfrak{K}_\alpha$ sono uguali a zero, e la (36) ci dà un sistema di quattro equazioni che esprimono la legge dell'energia-impulso per la materia[15].

Se i $g_{\mu\nu}$ sono costanti (indipendenti dalle coordinate x^α), l'equazione prende la forma:

---

[15] *Vedi* A. EINSTEIN. Die Grundlage der allgemeinen Relativitäts-theorie, Ann. d. Phys. **49**, 769, 1916, (*nel seguito citato come* "Grundlage"), § 18.

$$\sum \frac{\partial \mathfrak{T}_\alpha^\nu}{\partial x^\nu} = 0,$$

cioè per la materia da sola vale la legge di conservazione dell'impulso e dell'energia nella sua forma consueta. Ma se i $g_{\mu\nu}$ dipendono dalle coordinate, cioè se si ha un campo gravitazionale, la legge di conservazione non è più nella sua forma consueta per la materia da sola; l'ultimo termine nella (36) esprime l'influenza del campo gravitazionale.

Le formule che abbiamo ottenuto contengono le leggi complete dei fenomeni meccanici, ma sotto l'ipotesi che la funzione $\mathfrak{H}$ sia nota nella sua dipendenza dagli argomenti dati nella (24).

Le nostre equazioni fanno anche veder chiaramente la connessione tra le rappresentazioni di HERGLOTZ (l.c) ed EINSTEIN (Ham. Pr.). La nostra espressione (31a) per $\mathfrak{T}_\alpha^\nu$ coincide con l'espressione (68) di HERGLOTZ, e riguardo alla nostra espressione (33) per la stessa quantità si può facilmente verificare che essa coincide con l'espressione (19) di EINSTEIN. Che le due espressioni (31a) e (33) siano tra loro uguali deriva, come sopra mostrato, dalla relazione (20), che quindi costituisce il legame tra le formule di HERGLOTZ ed EINSTEIN.

Le nostre equazioni si discostano un po' esteriormente dalle formule corrispondenti di EINSTEIN. Lo scostamento dipende dal fatto che EINSTEIN nel citato articolo rappresenta il campo gravitazionale con i $g^{\mu\nu}$ controvarianti, mentre noi usiamo i $g_{\mu\nu}$ covarianti. Ogni funzione φ dei $g_{\mu\nu}$ covarianti può essere considerata anche come funzione dei $g^{\mu\nu}$ controvarianti e viceversa. Al riguardo si ha in generale[16]

$$\frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial g_{\alpha\beta}} = - g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta}, \quad \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial g^{\mu\nu}} = - g_{\alpha\mu} g_{\beta\nu}, \tag{37}$$

quindi

$$\frac{\partial \varphi}{\partial g_{\alpha\beta}} = - \sum \frac{\partial \varphi}{\partial g^{\mu\nu}} g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial g^{\mu\nu}} = - \sum \frac{\partial \varphi}{\partial g_{\alpha\beta}} g_{\alpha\mu} g_{\beta\nu}.$$

In base a ciò la (33) si può completare come segue:

---

[16] *Vedi per es.* A. EINSTEIN Grundlage, *equazioni* (31) e (32).

$$\mathfrak{T}^{\nu}_{\alpha} = \sum g_{\alpha\mu}\left(\frac{\partial\mathfrak{J}}{\partial g_{\mu\nu}} + \frac{\partial\mathfrak{J}}{\partial g_{\nu\mu}}\right) = -\sum g^{\mu\nu}\left(\frac{\partial\mathfrak{J}}{\partial g^{\alpha\mu}} + \frac{\partial\mathfrak{J}}{\partial g^{\mu\alpha}}\right). \tag{33a}$$

Poiché inoltre per il tensore dell'energia covariante $\mathfrak{T}_{\alpha\mu}$ si ha:

$$\mathfrak{T}_{\alpha\mu} = -\left(\frac{\partial\mathfrak{J}}{\partial g^{\alpha\mu}} + \frac{\partial\mathfrak{J}}{\partial g^{\mu\alpha}}\right) \tag{38}$$

è sempre facile eseguire la transizione da una rappresentazione all'altra[17]. Se si usano i $g^{\mu\nu}$ controvarianti, invece della (36) si ottiene

$$\mathfrak{K}_{\alpha} = \sum\frac{\partial\mathfrak{T}^{\nu}_{\alpha}}{\partial x^{\nu}} + \frac{1}{2}\sum\mathfrak{T}_{\mu\nu}\frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x^{\alpha}}. \tag{36a}$$

Se in base alla (30) si pone uguale a zero questa espressione, si ottiene l'equazione dell'energia e dell'impulso nella forma nella quale la pone EINSTEIN, ma con un procedimento del tutto diverso dal nostro (vedi sotto) [(57) Grundlage, (22) Ham. Pr.].

Abbiamo ottenuto le leggi per i processi meccanici dal principio di HAMILTON, variando $a^{\alpha}, b^{\alpha}, c^{\alpha}, d^{\alpha}$. Dallo stesso principio si ottengono con la variazione di $g_{\mu\nu}$ le equazioni fondamentali della gravitazione, come ha mostrato EINSTEIN (Ham. Pr.). Da queste equazioni fondamentali è possibile derivare anche l'equazione dell'energia e dell'impulso, come pure le (34) e (38). Queste equazioni derivano quindi in modo duplice dal principio di HAMILTON.

---

[17] *Per ottenere poi una completa coincidenza con le equazioni corrispondenti di Einstein si deve porre* $2\mathfrak{J} = \mathfrak{M}$ *e* $\frac{\partial\mathfrak{M}}{\partial g^{\alpha\mu}} = \frac{\partial\mathfrak{M}}{\partial g^{\mu\alpha}}$.

Seconda parte. I fenomeni elettromagnetici nei corpi ponderabili.

§ 5. *Introduzione.*

Anche per la trattazione dei fenomeni elettromagnetici il principio di HAMILTON ha trovato svariate applicazioni nella teoria della relatività[18]. Tuttavia finora è stato trattato per lo più il campo nel vuoto (e il moto dell'elettricità in esso) (BORN, TRESLING, FOKKER, de DONDER), oppure quando è stato trattato l'interno della materia, lo si è fatto con l'intenzione di stabilire una teoria della materia. Per quanto ne so solo ISHIWARA (l.c.) ha cercato di trattare i processi elettromagnetici nei corpi ponderabili in base al principio di HAMILTON in modo puramente fenomenologico, mentre DÄLLENBACH (l.c.) accanto all'impiego del principio di HAMILTON ha fatto uso di considerazioni della teoria dell'elettrone. Tuttavia i risultati raggiunti da questi due autori non mi soddisfano, e devo porre in discussione la correttezza dei loro metodi.

Le equazioni di campo elettromagnetiche per corpi ponderabili sono state ottenute da MINKOWSKI[19] in modo ineccepibile, e la loro generalizzazione per la teoria della relatività generale si può ottenere facilmente nel modo che EINSTEIN (Grundlage, § 20) ha mostrato per lo spazio vuoto. Dal punto di vista puramente fenomenologico rimane perciò solo da stabilire in modo univoco una espressione per la forza ponderomotrice, problema che finora non è stato risolto. Le espressioni, che MINKOWSKI (l.c.) e ABRAHAM[20] hanno stabilito per questa forza sono tra di loro differenti.

---

[18]M. BORN, Ann.d. Phys. **28**, 571, (1909). J. ISHIWARA, Ann. d. Phys. **42**, 986, (1913). J. TRESLING, Amst. Versl. **25**, 844, (1917). A.D. FOKKER, Amst. Versl. **25**, 1067, (1917). H. WEYL, Raum-Zeit-Materie. W. DÄLLENBACH, Ann. d. Phys., **59**, 28, (1919). TH. de DONDER, Premiers Complements de la Gravifique einsteinienne (Paris 1922).

[19]H. MINKOWSKI, Gött. Nachr., math.-phys. Kl.**1908**, 53.

[20]M. ABRAHAM, Rend. Palermo **28**, (1909).

Successivamente GRAMMEL[21] ha analizzato le diverse possibili espressioni della forza, tuttavia senza usare il principio di HAMILTON. È mia opinione che questo principio possa decidere tra le diverse proposte possibili per la forza, e uno scopo principale di questa sezione è di giungere a questa decisione.

§ 6. *Derivazione delle equazioni di Maxwell.*

Quando si tratta solo il campo elettromagnetico nel vuoto, la parte della funzione di HAMILTON $\mathfrak{H}$ che si riferisce a questo campo è, secondo BORN, TRESLING e FOKKER (l.c.)

$$\mathfrak{H}^{(e)} = \frac{1}{4}\sqrt{-g}\sum g^{\alpha\gamma}g^{\beta\delta}F_{\alpha\beta}F_{\gamma\delta} + \sum \mathfrak{S}^{\alpha}\varphi_{\alpha}, \tag{a}$$

dove φ_{α} è il tetrapotenziale, $\mathfrak{S}^{\alpha}$ la tetradensità di corrente e

$$F_{\mu\nu} = \frac{\partial\varphi_{\mu}}{\partial x^{\nu}} - \frac{\partial\varphi_{\nu}}{\partial x^{\mu}} \tag{39}$$

l'esavettore covariante del campo elettromagnetico, tutti in unità razionali. g è il determinante dei $g_{\mu\nu}$.

Trattando ora il campo nei corpi materiali, supponiamo in un primo tempo che non vi sia dissipazione d'energia, quindi che non intervenga *nessuna corrente di conduzione*. Allora possiamo pensare di generalizzare l'ipotesi precedente per $\mathfrak{H}^{(e)}$, assumendo che $\mathfrak{H}^{(e)}$ dipenda oltre che da $\varphi_{\alpha}, F_{\alpha\beta}, g_{\alpha\beta}$ anche da $a^{\alpha}, b^{\alpha}, c^{\alpha}, d^{\alpha}, \xi_a, \xi_b, \xi_c$, sicché

$$\mathfrak{H}^{(e)} = \mathfrak{H}^{(e)}(\varphi_{\alpha}, F_{\alpha\beta}, g_{\alpha\beta}, a^{\alpha}, b^{\alpha}, c^{\alpha}, d^{\alpha}, \xi_a, \xi_b, \xi_c). \tag{40}$$

$F_{\alpha\beta}$ ha anche qui il significato dato dalla (39)[22]. Non è necessario assumere una dipendenza dall'entropia ε, poiché nei processi reversibili, i soli ora consentiti, si deve porre comunque $\delta\varepsilon = 0$.

Il principio variazionale si scrive ora

---

[21] R. GRAMMEL, Ann. d. Phys. **41**, 570, (1913).

[22] *F_{14}, F_{24}, F_{34} sono le componenti della forza elettrica, F_{23}, F_{31}, F_{12} le componenti dell'induzione magnetica.*

$$\delta\iiiint(\mathfrak{F}^{(m)}+\mathfrak{F}^{(e)}+\mathfrak{G})\ dx^1dx^2dx^3dx^4 = 0, \tag{41}$$

dove $\mathfrak{F}^{(m)}$ ha lo stesso significato di $\mathfrak{F}$ nella parte prima, e $\mathfrak{G}$ è la quantità di cui si parla a pag. 9, cosicché

$$\mathfrak{F}^{(m)} = \mathfrak{F}^{(m)}(a^\alpha, b^\alpha, c^\alpha, d^\alpha, g_{\alpha\beta}, \xi_a, \xi_b, \xi_c),$$

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{G}\left(g_{\alpha\beta}, \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\mu}, \frac{\partial^2 g_{\alpha\beta}}{\partial x^\mu \partial x^\nu}\right).$$

Possono essere eseguiti tre diversi tipi di variazione: variazione di $g_{\alpha\beta}$, variazione di φ_α e variazione di $a^\alpha, b^\alpha, c^\alpha, d^\alpha$. Le componenti di $g_{\alpha\beta}$ e di φ_α vanno variate in maniera completamente indipendente l'una dall'altra, invece la variazione di $a^\alpha, b^\alpha, c^\alpha, d^\alpha$ è da eseguire per spostamento del punto ξ, come è stato mostrato nella prima parte, § 3. Tutte la variazioni devono annullarsi al confine del dominio.

Se ora facciamo variare i φ_α, $\mathfrak{F}^{(m)}$ e $\mathfrak{G}$ restano invariati e il principio variazionale richiede

$$\iiiint \delta\mathfrak{F}^{(e)} dx^1dx^2dx^3dx^4 = 0, \tag{41a}$$

dove

$$\delta\mathfrak{F}^{(e)} = \sum \frac{\partial\mathfrak{F}^{(e)}}{\partial F_{\mu\nu}} \delta F_{\mu\nu} + \sum \frac{\partial\mathfrak{F}^{(e)}}{\partial\varphi_\mu}\delta\varphi_\mu$$

$$= \sum \frac{\partial\mathfrak{F}^{(e)}}{\partial F_{\mu\nu}}\left(\frac{\partial\delta\varphi_\mu}{\partial x^\nu} - \frac{\partial\delta\varphi_\nu}{\partial x^\mu}\right) + \sum \frac{\partial\mathfrak{F}^{(e)}}{\partial\varphi_\mu}\delta\varphi_\mu$$

$$= \sum \frac{\partial\delta\varphi_\mu}{\partial x^\nu}\left(\frac{\partial\mathfrak{F}^{(e)}}{\partial F_{\mu\nu}} - \frac{\partial\mathfrak{F}^{(e)}}{\partial F_{\nu\mu}}\right) + \sum \frac{\partial\mathfrak{F}^{(e)}}{\partial\varphi_\mu}\delta\varphi_\mu.$$

$$\delta\mathfrak{F}^{(e)} = \sum \frac{\partial}{\partial x^\nu}\sum\delta\varphi_\mu\left(\frac{\partial\mathfrak{F}^{(e)}}{\partial F_{\mu\nu}} - \frac{\partial\mathfrak{F}^{(e)}}{\partial F_{\nu\mu}}\right) +$$

$$+ \sum\delta\varphi_\mu\left\{-\sum\frac{\partial}{\partial x^\nu}\left(\frac{\partial\mathfrak{F}^{(e)}}{\partial F_{\mu\nu}} - \frac{\partial\mathfrak{F}^{(e)}}{\partial F_{\nu\mu}}\right) + \frac{\partial\mathfrak{F}^{(e)}}{\partial\varphi_\mu}\right\}.$$

Questa espressione va sostituita nella (41a). Per integrazione sul dominio tetradimensionale è possibile trasformare con il teorema di GAUSS il primo termine in un integrale di superficie, che sarà nullo perché i $\delta\varphi_\mu$ si annullano sul confine. Poiché inoltre i $\delta\varphi_\mu$ sono indipendenti tra loro, dev'essere

$$\sum \frac{\partial}{\partial x^\nu} \left(\frac{\partial \mathfrak{J}^{(e)}}{\partial F_{\mu\nu}} - \frac{\partial \mathfrak{J}^{(e)}}{\partial F_{\nu\mu}} \right) = \frac{\partial \mathfrak{J}^{(e)}}{\partial \varphi_\mu} . \tag{42}$$

Questo è il primo sistema di equazioni di MAXWELL, se

$$\frac{\partial \mathfrak{J}^{(e)}}{\partial F_{\mu\nu}} - \frac{\partial \mathfrak{J}^{(e)}}{\partial F_{\nu\mu}} = \mathfrak{H}^{\mu\nu} \tag{43}$$

è la densità esavettoriale controvatriante della forza magnetica e dell'induzione elettrica e

$$\frac{\partial \mathfrak{J}^{(e)}}{\partial \varphi_\mu} = \mathfrak{S}^\mu \tag{44}$$

è la tetradensità di corrente. Il secondo sistema di equazioni di MAXWELL è soddisfatto in base alla relazione (39).

§ 7. *L'espressione per la funzione di Hamilton.*

Per estendere ora alla materia l'espressione (a) di $\mathfrak{J}^{(e)}$, facciamo l'ipotesi generale

$$\mathfrak{J}^{(e)} = \frac{1}{2} \sum \mathfrak{K}^{\alpha\beta\gamma\delta} F_{\alpha\beta} F_{\gamma\delta} + \sum \mathfrak{S}^\alpha \varphi_\alpha , \tag{45}$$

dove $\mathfrak{K}^{\alpha\beta\gamma\delta}$ e $\mathfrak{S}^\alpha$ possono dipendere da

$$g_{\alpha\beta}, a^\alpha, b^\alpha, c^\alpha, d^\alpha, \xi_a, \xi_b, \xi_c .$$

Otteniamo

$$\frac{\partial \mathfrak{J}^{(e)}}{\partial F_{\mu\nu}} = \frac{1}{2}\left(\sum \mathfrak{K}^{\mu\nu\gamma\delta} F_{\gamma\delta} + \sum \mathfrak{K}^{\alpha\beta\mu\nu} F_{\alpha\beta} \right) = \frac{1}{2} \sum \left(\mathfrak{K}^{\mu\nu\alpha\beta} + \mathfrak{K}^{\alpha\beta\mu\nu} \right) F_{\alpha\beta} ,$$

$$\frac{\partial \mathfrak{J}^{(e)}}{\partial F_{\nu\mu}} = \frac{1}{2} \sum \left(\mathfrak{K}^{\nu\mu\alpha\beta} + \mathfrak{K}^{\alpha\beta\nu\mu} \right) F_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \sum \left(\mathfrak{K}^{\nu\mu\beta\alpha} + \mathfrak{K}^{\beta\alpha\nu\mu} \right) F_{\beta\alpha} .$$

Poiché $F_{\beta\alpha} = - F_{\alpha\beta}$, dalle ultime equazioni e dalla (43) otteniamo

$$\mathfrak{H}^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \sum \left(\mathfrak{K}^{\mu\nu\alpha\beta} + \mathfrak{K}^{\alpha\beta\mu\nu} + \mathfrak{K}^{\nu\mu\beta\alpha} + \mathfrak{K}^{\beta\alpha\nu\mu} \right) F_{\alpha\beta} . \tag{46}$$

Per corpi isotropi assumiamo che, nel caso della quiete e per valori normali (13b) dei $g_{\mu\nu}$, tra le componenti dei due esavettori

$H_{\alpha\beta}$ e $F_{\alpha\beta}$ del campo elettromagnetico $(\mathfrak{H}^{\mu\nu}=(-g)^{1/2}\sum g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta}H_{\alpha\beta})$ valgano le seguenti relazioni:

$H_{14}= \varepsilon F_{14}$, $H_{24}= \varepsilon F_{24}$, $H_{34}= \varepsilon F_{34}$, $\mu H_{23}= F_{23}$, $\mu H_{31}= F_{31}$, $\mu H_{12}= F_{12}$,

dove ε è la costante dielettrica e μ la permeabilità magnetica. Allora la relazione tra gli esavettori covarianti $H_{\alpha\beta}$ e $F_{\alpha\beta}$ si può scrivere:

$$\mu H_{\alpha\beta} = F_{\alpha\beta} + (\varepsilon\mu -1)(F_{\alpha}U_{\beta} - F_{\beta}U_{\alpha}), \tag{47}$$

dove

$$U_{\alpha} = \sum g_{\alpha\mu}U^{\mu}, \tag{48}$$

$$F_{\alpha} = \sum F_{\alpha\mu}U^{\mu}. \tag{49}$$

La correttezza della formula (47) deriva dal fatto che in primo luogo ha covarianza generale e in secondo luogo, nel caso della quiete e per valori normali (13b) dei $g_{\mu\nu}$ dà i valori particolari prima scritti[23].

Se si sostituiscono le espressioni per F_{α}, F_{β}, l'equazione (47) si scrive:

$$\mu H_{\alpha\beta} = F_{\alpha\beta} + (\varepsilon\mu -1)\sum(F_{\alpha\gamma}U^{\gamma}U_{\beta} - F_{\beta\gamma}U^{\gamma}U_{\alpha}).$$

Moltiplicando per $(-g)^{1/2}g^{\alpha\mu}g^{\beta\nu}$ si ottiene

$$\mu\mathfrak{H}^{\mu\nu} = \mu(-g)^{1/2}g^{\alpha\mu}g^{\beta\nu}H_{\alpha\beta} =$$

$$= (-g)^{1/2}\left(\sum F_{\alpha\beta}g^{\alpha\mu}g^{\beta\nu} + (\varepsilon\mu -1)\left\{\sum F_{\alpha\gamma}U^{\gamma}U^{\nu}g^{\alpha\mu} - \sum F_{\beta\gamma}U^{\gamma}U^{\mu}g^{\beta\nu}\right\}\right),$$

---

[23] *L'equazione (47) è identica al sistema delle due equazioni seguenti, che si possono derivare facilmente da essa:*

$$\begin{cases} \sum H_{\alpha\nu}U^{\nu} = \varepsilon\sum F_{\alpha\nu}U^{\nu}, \\ F_{\alpha\beta}U_{\gamma} + F_{\beta\gamma}U_{\alpha} + F_{\gamma\alpha}U_{\beta} = \mu(H_{\alpha\beta}U_{\gamma} + H_{\beta\gamma}U_{\alpha} + H_{\gamma\alpha}U_{\beta}). \end{cases} \tag{47a}$$

Vedi per es. H. WEYL, Raum-Zeit-Materie, 4ª ed., p. 174. Equazioni (43) e (46).

$$\mu\mathfrak{H}^{\mu\nu} = (-g)^{1/2}\sum\left\{g^{\alpha\mu}g^{\beta\nu} + (\varepsilon\mu -1)\left(g^{\alpha\mu}U^{\beta}U^{\nu} + U^{\alpha}U^{\mu}g^{\beta\nu}\right)\right\}F_{\alpha\beta}, \tag{50}$$

e un confronto con la (46) mostra che, per il caso ora trattato di un corpo isotropo si ha:

$$\mathfrak{K}^{\alpha\beta\mu\nu} = (-g)^{1/2}\left(\frac{1}{2}Ag^{\alpha\mu}g^{\beta\nu} + Bg^{\alpha\mu}U^{\beta}U^{\nu}\right), \tag{51}$$

dove

$$A = \frac{1}{\mu}, \qquad B = \frac{\varepsilon\mu - 1}{\mu}. \tag{52}$$

Le grandezze A e B possono essere costanti della materia, vale a dire funzioni solo di ξ_a, ξ_b, ξ_c, oppure possono dipendere anche da $a^{\alpha}, b^{\alpha}, c^{\alpha}, d^{\alpha}$ e dai $g_{\mu\nu}$. Poiché le equazioni che si fondano sulla (47) presuppongono l'isotropia, è logico assumere che ε e μ (e quindi anche A e B) dipendano solo dal rapporto tra volume normale e volume a riposo della materia (la compressione). Questo rapporto sarà dato dallo scalare spurio

$$K = \frac{(\sum g_{\mu\nu}d^{\mu}d^{\nu})^{1/2}}{(-g)^{1/2}D}, \tag{53}$$

(vedi HERGLOTZ, l.c. § 1). La dipendenza da K deve essere logicamente tale che per $K = 0$ (rarefazione infinita della materia) sia $\varepsilon = 1$, $\mu = 1$.- Tuttavia è più semplice la prima ipotesi, che A e B siano costanti della materia.

Si sostituiscano nella (51) le espressioni per U^{β}, U^{ν} date dalla (6); $\mathfrak{K}^{\alpha\beta\mu\nu}$ sarà una funzione delle variabili

$$a^{\alpha}, b^{\alpha}, c^{\alpha}, d^{\alpha}, g_{\alpha\beta}, \xi_a, \xi_b, \xi_c.$$

Per la prima parte al secondo membro della (45), che indicheremo con $\mathfrak{F}'$, otteniamo

$$\mathfrak{F}' = \frac{1}{2}(-g)^{1/2}\sum\left(\frac{1}{2}Ag^{\mu\gamma}g^{\beta\delta} + Bg^{\alpha\gamma}\frac{d^{\beta}d^{\delta}}{\sum g_{\sigma\tau}d^{\sigma}d^{\tau}}\right)F_{\alpha\beta}F_{\gamma\delta}. \tag{54}$$

Per corpi anisotropi le equazioni (47), (50), (51), (54) non possono valere. Per tali corpi l'espressione (51) per $\mathfrak{K}^{\alpha\beta\mu\nu}$ va sostituita con un'altra più complicata, che però deve dipendere dalle stesse variabili.

Abbiamo studiato finora nella sua dipendenza dalle variabili di cui occorre fare la variazione solo la prima parte $\mathfrak{H}'$ di $\mathfrak{H}^{(e)}$. Occorre studiare ancora la seconda parte $\mathfrak{H}''=\sum\mathfrak{S}^{\alpha}\varphi_{\alpha}$. Poiché non può intervenire alcuna corrente di conduzione, $\mathfrak{S}^{\alpha}$ è una pura corrente di convezione, e la *quantità di elettricità per unità di volume normale*, che indichiamo con ρ_0, è una funzione solo di ξ_a,ξ_b,ξ_c:

$$\rho_0 = \rho_0(\xi_a,\ \xi_b,\ \xi_c).$$

La densità scalare vera

$$\mathfrak{S} = (-g)^{1/2}\rho_0 K = \frac{\rho_0\sqrt{\ \sum g_{\mu\nu}d^{\mu}d^{\nu}}}{D} \tag{55}$$

si chiama *densità a riposo dell'elettricità*. Se si moltiplica questa quantità per la tetravelocità $U^{\alpha}=d^{\alpha}/(\sum g_{\mu\nu}d^{\mu}d^{\nu})^{1/2}$, si ottiene la densità di corrente di convezione. Si ha anche

$$\mathfrak{S}^{\alpha} = \frac{\rho_0}{D}d^{\alpha}. \tag{56}$$

Per $\mathfrak{H}''$ otteniamo

$$\mathfrak{H}'' = \frac{\rho_0}{D}\sum d^{\alpha}\varphi_{\alpha}. \tag{57}$$

e infine per $\mathfrak{H}^{(e)}= \mathfrak{H}' + \mathfrak{H}''$

$$\mathfrak{H}^{(e)}=\frac{\sqrt{-g}}{2}\sum\left(\frac{1}{2}Ag^{\alpha\gamma}g^{\beta\delta}+ Bg^{\alpha\gamma}\frac{d^{\beta}d^{\delta}}{\sum g_{\sigma\tau}d^{\sigma}d^{\tau}}\right)F_{\alpha\beta}F_{\gamma\delta} + \frac{\rho_0}{D}\sum d^{\alpha}\varphi_{\alpha}. \tag{58}$$

Come la (54) anche questa espressione presuppone l'isotropia della materia.

§ 8. *Variazione per spostamento dei punti d'universo materiali.*

Useremo ora il principio variazionale e variaremo $a^{\alpha},b^{\alpha},c^{\alpha},d^{\alpha}$. Adesso i $g_{\mu\nu}$ e i φ_{α} mantengono il loro valore come funzioni di x^1,x^2,x^3,x^4. La differenza dalla trattazione nel § 3 della prima parte è che ora $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}^{(m)}+ \mathfrak{H}^{(e)}$dipende anche da $F_{\alpha\beta}$ e φ_{α}, sicché invece della (26) si ha:

$$\Delta\mathfrak{H}=\sum\left(\frac{\partial\mathfrak{H}}{\partial a^{\alpha}}\frac{\partial\delta x^{\alpha}}{\partial\xi_a} + + +\right) +\sum\left\{\frac{\partial\mathfrak{H}}{\partial g_{\mu\nu}}\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\alpha}} +\sum\frac{\partial\mathfrak{H}}{\partial F_{\mu\nu}}\frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x^{\alpha}} +\sum\frac{\partial\mathfrak{H}}{\partial\varphi_{\mu}}\frac{\partial\varphi_{\mu}}{\partial x^{\alpha}}\right\}\delta x^{\alpha}.$$

In base a questa invece delle equazioni (28), (29), (30) della prima parte otteniamo le equazioni:

$$\begin{cases} \delta\iiiint \mathfrak{J}^{(m)} dx^1 dx^2 dx^3 dx^4 = -\iiiint \sum \delta x^\alpha \mathfrak{K}_\alpha^{(m)} dx^1 dx^2 dx^3 dx^4, \\ \delta\iiiint \mathfrak{J}^{(e)} dx^1 dx^2 dx^3 dx^4 = -\iiiint \sum \delta x^\alpha \mathfrak{K}_\alpha^{(e)} dx^1 dx^2 dx^3 dx^4, \end{cases} \tag{59}$$

$$\begin{cases} \mathfrak{K}_\alpha^{(m)} + \mathfrak{K}_\alpha^{(e)} = \mathfrak{K}_\alpha = \\ = \sum \frac{\partial}{\partial x^\nu}\left(\frac{\partial \mathfrak{J}}{\partial a^\alpha} a^\nu + + + \right) - \sum \frac{\partial \mathfrak{J}}{\partial g_{\mu\nu}} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha} - \\ - \sum \frac{\partial \mathfrak{J}}{\partial F_{\mu\nu}} \frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha} - \sum \frac{\partial \mathfrak{J}}{\partial \varphi_\mu} \frac{\partial \varphi_\mu}{\partial x^\alpha} + \frac{\partial \mathfrak{J}}{\partial x^\alpha} = 0. \end{cases} \tag{60}$$

Si ha qui

$$\sum \frac{\partial \mathfrak{J}}{\partial F_{\mu\nu}} \frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha} = \sum \frac{\partial \mathfrak{J}}{\partial F_{\mu\nu}} \left(\frac{\partial^2 \varphi_\mu}{\partial x^\nu \partial x^\alpha} - \frac{\partial^2 \varphi_\nu}{\partial x^\mu \partial x^\alpha} \right) = \sum \left(\frac{\partial \mathfrak{J}}{\partial F_{\mu\nu}} - \frac{\partial \mathfrak{J}}{\partial F_{\nu\mu}} \right) \times$$

$$\times \frac{\partial^2 \varphi_\mu}{\partial x^\nu \partial x^\alpha} = \sum \frac{\partial}{\partial x^\nu} \left\{ \left(\frac{\partial \mathfrak{J}}{\partial F_{\mu\nu}} - \frac{\partial \mathfrak{J}}{\partial F_{\nu\mu}} \right) \frac{\partial \varphi_\mu}{\partial x^\alpha} \right\} - \sum \frac{\partial \varphi_\mu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial}{\partial x^\nu} \left(\frac{\partial \mathfrak{J}}{\partial F_{\mu\nu}} - \frac{\partial \mathfrak{J}}{\partial F_{\nu\mu}} \right).$$

Eseguiamo la trasformazione che consiste nel sottrarre da questa la seguente espressione, che è zero:

$$\sum \frac{\partial}{\partial x^\nu} \left\{ \left(\frac{\partial \mathfrak{J}}{\partial F_{\mu\nu}} - \frac{\partial \mathfrak{J}}{\partial F_{\nu\mu}} \right) \frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial x^\mu} \right\} + \sum \frac{\partial}{\partial x^\nu} \left\{ \varphi_\alpha \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left(\frac{\partial \mathfrak{J}}{\partial F_{\mu\nu}} - \frac{\partial \mathfrak{J}}{\partial F_{\nu\mu}} \right) \right\} =$$

$$= \sum \frac{\partial^2}{\partial x^\mu \partial x^\nu} \left\{ \left(\frac{\partial \mathfrak{J}}{\partial F_{\mu\nu}} - \frac{\partial \mathfrak{J}}{\partial F_{\nu\mu}} \right) \varphi_\alpha \right\} = 0.$$

Otteniamo così, tenendo conto della (39) e riordinando un po'

$$\sum \frac{\partial \mathfrak{J}}{\partial F_{\mu\nu}} \frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha} = \sum \frac{\partial}{\partial x^\nu} \left\{ \left(\frac{\partial \mathfrak{J}}{\partial F_{\mu\nu}} - \frac{\partial \mathfrak{J}}{\partial F_{\nu\mu}} \right) F_{\mu\alpha} \right\} +$$

$$+ \sum \frac{\partial}{\partial x^\nu} \left\{ \varphi_\alpha \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left(\frac{\partial \mathfrak{J}}{\partial F_{\nu\mu}} - \frac{\partial \mathfrak{J}}{\partial F_{\mu\nu}} \right) \right\} - \sum \frac{\partial \varphi_\mu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial}{\partial x^\nu} \left(\frac{\partial \mathfrak{J}}{\partial F_{\mu\nu}} - \frac{\partial \mathfrak{J}}{\partial F_{\nu\mu}} \right).$$

Quando si sostituisce questa espressione, l'equazione (60) si scrive

$$
\left\{
\begin{aligned}
\mathfrak{K}_\alpha = {} & \sum \frac{\partial}{\partial x^\nu}\left(\frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial a^\alpha} a^\nu + + +\right) - \sum \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial g_{\mu\nu}} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha} - \sum \frac{\partial}{\partial x^\nu}\left\{\left(\frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial F_{\mu\nu}} - \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial F_{\nu\mu}}\right) F_{\mu\alpha}\right\} \\
& - \sum \frac{\partial}{\partial x^\nu}\left\{\varphi_\alpha \frac{\partial}{\partial x^\mu}\left(\frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial F_{\nu\mu}} - \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial F_{\mu\nu}}\right)\right\} - \sum \frac{\partial \varphi_\mu}{\partial x^\alpha}\left\{\frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial \varphi_\mu} - \sum \frac{\partial}{\partial x^\nu}\left(\frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial F_{\mu\nu}} - \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial F_{\nu\mu}}\right)\right\} \\
& + \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial x^\alpha} = 0.
\end{aligned}
\right. \tag{61}
$$

Ma per la (42) il penultimo termine a secondo membro è uguale a zero. In base alla stessa equazione combinata con la (44) si può sostituire $\mathfrak{S}^\nu$ nel termine che lo precede, e $\mathfrak{H}^{\mu\nu}$ nel terzo termine in base alla (43). Riaggiustando ancora un po’ i termini l’equazione si scrive

$$
\left\{
\begin{aligned}
\mathfrak{K}_\alpha = {} & \sum \frac{\partial}{\partial x^\nu}\left(\frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial a^\alpha} a^\nu + + +\right) - \sum \frac{\partial}{\partial x^\nu} \sum \mathfrak{H}^{\mu\nu} F_{\mu\alpha} - \sum \frac{\partial}{\partial x^\nu} \mathfrak{S}^\nu \varphi_\alpha + \\
& + \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial x^\alpha} - \sum \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial g_{\mu\nu}} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha} = 0.
\end{aligned}
\right. \tag{62}
$$

Si ha

$$
\mathfrak{H} = \mathfrak{H}^{(m)} + \mathfrak{H}' + \mathfrak{H}'', \tag{63}
$$

e separeremo in primo luogo da tutti i termini nella (62) quelle parti che si riferiscono a $\mathfrak{H}''$. Dall’espressione (57) per $\mathfrak{H}''$ segue per la (32)

$$
\frac{\partial \mathfrak{H}''}{\partial a^\alpha} a^\nu + + + = \frac{\rho_0}{D} \varphi_\alpha d^\nu - \delta^\nu_\alpha \frac{\rho_0}{D} \sum \varphi_\mu d^\mu = \mathfrak{S}^\nu \varphi_\alpha - \delta^\nu_a \mathfrak{H}'', \tag{64}
$$

cosicché

$$
\sum \frac{\partial}{\partial x^\nu}\left(\frac{\partial \mathfrak{H}''}{\partial a^\alpha} a^\nu + + +\right) - \sum \frac{\partial}{\partial x^\nu} \mathfrak{S}^\nu \varphi_\alpha + \frac{\partial \mathfrak{H}''}{\partial x^\alpha} = 0. \tag{65}
$$

Dell’equazione (62) rimane quindi

$$
\left\{
\begin{aligned}
\mathfrak{K}_\alpha = {} & \sum \frac{\partial}{\partial x^\nu}\left\{\frac{\partial (\mathfrak{H}^{(m)} + \mathfrak{H}')}{\partial a^\alpha} a^\nu + + + - \sum \mathfrak{H}^{\mu\nu} F_{\mu\alpha} + \delta^\nu_\alpha (\mathfrak{H}^{(m)} + \mathfrak{H}')\right\} \\
& - \sum \frac{\partial (\mathfrak{H}^{(m)} + \mathfrak{H}')}{\partial g_{\mu\nu}} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha} = 0.
\end{aligned}
\right. \tag{66}
$$

Nell’ultimo termine abbiamo scritto $\mathfrak{H}^{(m)} + \mathfrak{H}'$ al posto di $\mathfrak{H}$, perché $\mathfrak{H}''$ non dipende affatto dai $g_{\mu\nu}$. $\mathfrak{H}''$ non interviene più nell’equazione. Tuttavia la (66) non si otterrebbe dalla (62) semplicemente tralasciando $\mathfrak{H}''$, come si può vedere facilmente.

§ 9. *Il tensore elettromagnetico dell'energia e degli sforzi.*

Nella prima parte si è mostrato che le due espressioni

$$\mathfrak{T}_{\alpha}^{\nu}(m) = \frac{\partial \mathfrak{H}^{(m)}}{\partial a^{\alpha}} a^{\nu} + + + + \delta_{\alpha}^{\nu} \mathfrak{H}^{(m)} \quad \text{e} \quad \mathfrak{T}^{\mu\nu}_{(m)} = \frac{\partial \mathfrak{H}^{(m)}}{\partial g_{\mu\nu}} + \frac{\partial \mathfrak{H}^{(m)}}{\partial g_{\nu\mu}}$$

rappresentano il tensore elastico dell'energia e degli sforzi nella forma di una densità tensoriale rispettivamente mista e controvariante. In base alla (66) possiamo supporre che le due espressioni

$$\frac{\partial \mathfrak{H}'}{\partial a^{\alpha}} a^{\nu} + + + - \sum \mathfrak{H}^{\mu\nu} F_{\mu\alpha} + \delta_{\alpha}^{\nu} \mathfrak{H}' \quad \text{e} \quad \frac{\partial \mathfrak{H}'}{\partial g_{\mu\nu}} + \frac{\partial \mathfrak{H}'}{\partial g_{\nu\mu}} \tag{67}$$

rappresentino nello stesso modo il tensore elettromagnetico dell'energia e degli sforzi. Per mostrare che in effetti succede così, calcoliamo le due espressioni e mostriamo che rappresentano lo stesso tensore. Per il calcolo di

$$\frac{\partial \mathfrak{H}'}{\partial a^{\alpha}} a^{\nu} + + +$$

notiamo che $\mathfrak{H}'$, quando A e B sono costanti della materia, non dipende affatto da $a^{\alpha}, b^{\alpha}, c^{\alpha}$, ma solo da d^{α}. Derivando la (54) otteniamo allora

$$\frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial d^{\mu}} = \frac{1}{2} \frac{\sqrt{-g}\, B}{\sum g_{\sigma\tau} d^{\sigma} d^{\tau}} \sum g^{\alpha\gamma} \left(d^{\delta} F_{\alpha\mu} F_{\gamma\delta} + d^{\beta} F_{\alpha\beta} F_{\gamma\mu} \right)$$

$$- \frac{1}{2} \frac{\sqrt{-g}\, B}{(\sum g_{\sigma\tau} d^{\sigma} d^{\tau})^2} \sum g^{\alpha\gamma} d^{\beta} d^{\delta} F_{\alpha\mu} F_{\gamma\delta} \cdot \sum \left(g_{\mu\tau} d^{\tau} + g_{\sigma\mu} d^{\sigma} \right),$$

$$\frac{\partial \mathfrak{H}'}{\partial d^{\mu}} = \frac{\sqrt{-g}\, B}{\sum g_{\sigma\tau} d^{\sigma} d^{\tau}} \sum g^{\alpha\gamma} d^{\beta} F_{\alpha\beta} F_{\gamma\mu} - \tag{68}$$

$$- \frac{\sqrt{-g}\, B}{(\sum g_{\sigma\tau} d^{\sigma} d^{\tau})^2} \sum g^{\alpha\gamma} d^{\beta} d^{\delta} F_{\alpha\beta} F_{\gamma\delta} \cdot \sum g_{\sigma\mu} d^{\sigma}.$$

Moltiplicando per d^{ν} risulta, tenendo ancora conto della (6) e della (48),

$$\frac{\partial \mathfrak{F}'}{\partial d^{\mu}} d^{\nu} = \sqrt{-g}\, B \sum g^{\alpha\gamma} U^{\beta} U^{\nu} F_{\alpha\beta} F_{\gamma\mu} - \sqrt{-g}\, B U_{\mu} U^{\nu} \sum g^{\alpha\gamma} U^{\beta} U^{\delta} F_{\alpha\beta} F_{\gamma\delta}. \quad (69)$$

Introduciamo un vettore covariante (vero) W_{μ}, ponendo[24]

$$W_{\mu} = B \sum g^{\alpha\gamma} U^{\beta} F_{\alpha\beta} F_{\gamma\mu} - B U_{\mu} \sum g^{\alpha\gamma} U^{\beta} U^{\delta} F_{\alpha\beta} F_{\gamma\delta}, \quad (70)$$

e abbiamo allora

$$\frac{\partial \mathfrak{F}'}{\partial a^{\mu}} a^{\nu} + + + = \frac{\partial \mathfrak{F}'}{\partial d^{\mu}} d^{\nu} = \sqrt{-g}\, W_{\mu} U^{\nu}. \quad (71)$$

Se invece A e B sono funzioni di K (vedi p. 20), al secondo membro della (71) si aggiunge

$$\frac{\partial \mathfrak{F}'}{\partial K} \left(\frac{\partial K}{\partial a^{\mu}} a^{\nu} + + + \right),$$

che per la (53) e la (32) è uguale a:

$$\frac{\partial \mathfrak{F}'}{\partial K} \left\{ \frac{1}{2} \frac{\sum (g_{\mu\tau} d^{\tau} + g_{\sigma\mu} d^{\sigma}) d^{\nu}}{\sqrt{\sum g_{\sigma\tau} d^{\sigma} d^{\tau}}\, \sqrt{-g}\, D} - \delta^{\nu}_{\mu} K \right\}$$

e per la (6) e la (48) è uguale a

$$\frac{\partial \mathfrak{F}'}{\partial K} K \left(U_{\mu} U^{\nu} - \delta^{\nu}_{\mu} \right).$$

Nel caso generale si ottiene invece della (71)

$$\frac{\partial \mathfrak{F}'}{\partial a^{\mu}} a^{\nu} + + + = \sqrt{-g}\, W_{\mu} U^{\nu} + \frac{\partial \mathfrak{F}'}{\partial K} K \left(U_{\mu} U^{\nu} - \delta^{\nu}_{\mu} \right). \quad (72)$$

Se sostituiamo ad $\mathfrak{F}'$ l'espressione

$$\mathfrak{F}' = \frac{1}{4} \sum \mathfrak{H}^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta}, \quad (73)$$

che risulta facilmente confrontando la (50) e la (54), per la prima delle espressioni (67) otteniamo

---

[24] *Se si pone* $W_{\mu} = (\varepsilon\mu - 1)\Omega_{\mu}$, Ω_{μ} *è la radiazione a riposo già introdotta da Minkowski.* [H. Minkowski, l. c. Eq. (57)]. *Vedi anche* W. Pauli, l. c., 35, Eq. (304).

$$\mathfrak{T}_{\mu}^{\nu}(e)=-\sum\mathfrak{H}^{\alpha\nu}F_{\alpha\mu}+\frac{1}{4}\delta_{\mu}^{\nu}\sum\mathfrak{H}^{\alpha\beta}F_{\alpha\beta}+\sqrt{-g}\,W_{\mu}U^{\nu}+\frac{\partial\mathfrak{F}'}{\partial K}K\left(U_{\mu}U^{\nu}-\delta_{\mu}^{\nu}\right). \quad (74)$$

Per lo spazio vuoto si ha $B = 0$, $W_{\mu} = 0$, $K = 0$, e l'espressione (74) per $\mathfrak{T}_{\mu}^{\nu}(e)$ diventa la solita espressione per il tensore tetra-dimensionale degli sforzi di MAXWELL.

Il termine che contiene K nella (74) dà in ogni punto una pressione normale (elettro- e magnetostrizione) del valore

$$p = \frac{\partial\mathfrak{F}'}{\partial K}K. \quad (75)$$

Nel caso della quiete e di valori normali (13b) dei $g_{\mu\nu}$ troviamo cioè per il tensore considerato il seguente schema:

$$\begin{matrix} -p & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}$$

Calcoleremo ora la seconda delle espressioni (67). Quando si deriva la (54) rispetto ai $g_{\lambda\nu}$ vanno usate la prima equazione (37) e la relazione seguente[25]:

$$\frac{\partial\sqrt{-g}}{\partial g_{\lambda\nu}} = \frac{1}{2}\sqrt{-g}\,g^{\lambda\nu}. \quad (76)$$

Se si ammette per il momento che A e B siano costanti della materia otteniamo

$$\left\{\begin{aligned} 2\frac{\partial\mathfrak{F}'}{\partial g_{\lambda\nu}} &= \sqrt{-g}\sum\Big\{-\frac{1}{2}A\left(g^{\alpha\lambda}g^{\gamma\nu}g^{\beta\delta}+g^{\alpha\gamma}g^{\beta\lambda}g^{\delta\nu}\right)-B\frac{g^{\alpha\lambda}g^{\gamma\nu}d^{\beta}d^{\delta}}{\sum g_{\sigma\tau}d^{\sigma}d^{\tau}} \\ &\quad - B\frac{g^{\alpha\gamma}d^{\beta}d^{\delta}}{(\sum g_{\sigma\tau}d^{\sigma}d^{\tau})^{2}}\,d^{\lambda}d^{\nu}\Big\}F_{\alpha\beta}F_{\gamma\delta}+\mathfrak{F}'g^{\lambda\nu}. \end{aligned}\right. \quad (77)$$

Se invece A e B sono funzioni di K, al secondo membro si aggiunge ancora:

$$2\frac{\partial\mathfrak{F}'}{\partial K}\frac{\partial K}{\partial g_{\lambda\nu}}.$$

Nella (77) i due termini che contengono A sono uguali tra loro. Se

---

[25] *Vedi per esempio* A. EINSTEIN, Grundlage, Eq. (28)*, da cui si può dedurre facilmente la nostra* eq. (76).

si calcola $\partial K/\partial g_{\lambda\nu}$ e si introduce il vettore velocità U^{α} si ottiene

$$(78)\quad \begin{cases} 2\dfrac{\partial \mathfrak{F}'}{\partial g_{\lambda\nu}} = -\sqrt{-g}\sum\left(Ag^{\alpha\lambda}g^{\gamma\nu}g^{\beta\delta} + Bg^{\alpha\lambda}g^{\gamma\nu}U^{\beta}U^{\delta}\right)F_{\alpha\beta}F_{\gamma\delta} \\ \qquad -\sqrt{-g}\ BU^{\lambda}U^{\nu}\sum g^{\alpha\gamma}U^{\beta}U^{\delta}F_{\alpha\beta}F_{\gamma\delta} + \mathfrak{F}'g^{\lambda\nu} \\ \qquad + \dfrac{\partial \mathfrak{F}'}{\partial K}K(U^{\lambda}U^{\nu} - g^{\lambda\nu}). \end{cases}$$

Confronteremo tra loro le espressioni (74) e (78). Se moltiplichiamo la prima espressione per $g^{\mu\lambda}$ e sostituiamo nella stessa $\mathfrak{H}^{\alpha\nu}$ dato dalla (50) e W_{μ} dato dalla (70), il confronto con la (78) mostra che

$$\sum g^{\mu\lambda}\mathfrak{T}_{\mu}^{\nu}(e) = 2\frac{\partial \mathfrak{F}'}{\partial g_{\lambda\nu}} = 2\frac{\partial \mathfrak{F}'}{\partial g_{\nu\lambda}}. \tag{79}$$

Abbiamo quindi

$$\mathfrak{T}^{\lambda\nu}(e) = 2\frac{\partial \mathfrak{F}'}{\partial g_{\lambda\nu}} = \left(\frac{\partial \mathfrak{F}'}{\partial g_{\lambda\nu}} + \frac{\partial \mathfrak{F}'}{\partial g_{\nu\lambda}}\right) \tag{80}$$

e l'equazione (66)) si scrive infine

$$\sum\frac{\partial}{\partial x^{\nu}}\left(\mathfrak{T}_{\alpha}^{\nu}(m) + \mathfrak{T}_{\alpha}^{\nu}(e)\right) - \frac{1}{2}\sum\left(\mathfrak{T}^{\mu\nu}(m) + \mathfrak{T}^{\mu\nu}(e)\right)\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\alpha}} = 0. \tag{81}$$

Questo sistema di quattro equazioni esprime evidentemente la legge dell'energia-impulso per i fenomeni materiali (inclusi quelli elettromagnetici) (vedi § 4), se $\mathfrak{T}_{\alpha}^{\nu}(e)$ è il tensore dell'energia e degli sforzi per il campo elettromagnetico. Per lo spazio vuoto questo tensore, come già è stato notato a pag. 26, coincide con il caso ben noto del tensore tetradimensionale degli sforzi di MAXWELL.

Le equazioni (79) e (80) mostrano anche che le nostre considerazioni danno un *tensore dell'energia e degli sforzi simmetrico per il campo elettromagnetico nei corpi materiali.* Se ci si limita alla teoria della relatività speciale il tensore da noi trovato coincide con quello introdotto da ABRAHAM in questa teoria (vedi sotto § 13).

§ 10. *Estensione della validità del principio variazionale.*

Prima di studiare ulteriormente il tensore dell'energia e degli sforzi e la forza ponderomotrice che ne deriva, estenderemo il principio variazionale che sta alla base di tutte le nostre considerazioni. Allo scopo calcoliamo ancora in particolare la variazione

$$\delta\iiiint \mathfrak{J}'' dx^1 dx^2 dx^3 dx^4 .$$

$\mathfrak{J}''$ è una funzione solo di $\varphi_\alpha, a^\alpha, b^\alpha, c^\alpha, d^\alpha$ e delle coordinate normali ξ. Se variamo *insieme* φ_α e $a^\alpha, b^\alpha, c^\alpha, d^\alpha$, eseguendo un'integrazione per parti otteniamo

$$\left\{\begin{aligned}&\delta\iiiint \mathfrak{J}'' dx^1 dx^2 dx^3 dx^4 = \iiiint\Big\{\sum \frac{\partial \mathfrak{J}''}{\partial \varphi_\nu}\delta\varphi_\nu + \\ &+\left[-\sum \frac{\partial}{\partial x^\nu}\left(\frac{\partial \mathfrak{J}''}{\partial a^\alpha} a^\nu + + +\right) + \sum \frac{\partial \mathfrak{J}''}{\partial \varphi_\nu}\frac{\partial \varphi_\nu}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial \mathfrak{J}''}{\partial x^\alpha}\right]\delta x^\alpha\Big\} dx^1 dx^2 dx^3 dx^4 .\end{aligned}\right. \tag{82}$$

La variazione qui eseguita è la più generale ammissibile. L'espressione (57) per $\mathfrak{J}''$ mostra che

$$\frac{\partial \mathfrak{J}''}{\partial \varphi_\nu} = \mathfrak{S}^\nu$$

quando si pone

$$\frac{\rho_0}{D} d^\nu = \mathfrak{S}^\nu .$$

Inoltre, come è stato mostrato a pag. 23, vale anche l'equazione (65). Sostituendo $\mathfrak{S}^\nu$ e tenendo conto dell'ultima equazione menzionata, dalla (82) otteniamo

$$\begin{aligned}&\delta\iiiint \mathfrak{J}'' dx^1 dx^2 dx^3 dx^4 = \\ &= \iiiint\Big\{\sum \mathfrak{S}^\nu\left[\delta\varphi_\nu - \sum\left(\frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial x^\nu} - \frac{\partial \varphi_\nu}{\partial x^\alpha}\right)\delta x^\alpha\right] - \sum \frac{\partial \mathfrak{S}^\nu}{\partial x^\nu}\cdot\sum \varphi_\alpha \delta x^\alpha\Big\} dx^1 dx^2 dx^3 dx^4 .\end{aligned}$$

Con la stessa generalità di prima il principio variazionale (41) si può quindi scrivere:

$$\left\{\begin{aligned}&0 = \delta\iiiint (\mathfrak{J}^{(m)} + \mathfrak{J}' + \mathfrak{S}) dx^1 dx^2 dx^3 dx^4 + \\ &+\iiiint\Big\{\sum \mathfrak{S}^\nu\left[\delta\varphi_\nu - \sum\left(\frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial x^\nu} - \frac{\partial \varphi_\nu}{\partial x^\alpha}\right)\delta x^\alpha\right] - \sum \frac{\partial \mathfrak{S}^\nu}{\partial x^\nu}\cdot\sum \varphi_\alpha \delta x^\alpha\Big\} dx^1 dx^2 dx^3 dx^4\end{aligned}\right. \tag{83}$$

e qui i $g_{\mu\nu}$, i φ_α e gli $a^\alpha, b^\alpha, c^\alpha, d^\alpha$ vanno variati esattamente come è stato mostrato prima. Anche i risultati così ottenuti sono naturalmente proprio quelli di prima. Variando i φ_α si ottengono le equazioni di MAXWELL, e da esse discende

$$\sum \frac{\partial \mathfrak{S}^\nu}{\partial x^\nu} = 0. \tag{84}$$

L'ultimo termine nella parentesi graffa della (83) può quindi essere tralasciato.

Ma l'equazione (83) ammette un'interpretazione più estesa. Se intervengono correnti di conduzione, è noto che le equazioni di MAXWELL valgono in forma esattamente invariata, purché *con* $\mathfrak{S}^\alpha$ si intenda la *tetradensità di corrente complessiva* (corrente di conduzione + corrente di convezione). Inoltre è corretto assumere che nell'espressione per la forza ponderomotrice nel campo elettromagnetico intervenga solo la tetradensità di corrente *complessiva*. *Ciò supposto, il principio di Hamilton vale evidentemente nella forma*

$$\left\{ \begin{aligned} &\delta \iiiint (\mathfrak{H}^{(m)} + \mathfrak{H}' + \mathfrak{S}) dx^1 dx^2 dx^3 dx^4 + \\ &+ \iiiint \sum \mathfrak{S}^\nu (\delta\varphi_\nu - \sum F_{\alpha\nu} \partial x^\alpha) dx^1 dx^2 dx^3 dx^4 = 0 \end{aligned} \right. \tag{85}$$

anche quando intervengono correnti di conduzione. $\mathfrak{S}^\nu$ *denota quindi la tetradensità di corrente complessiva*. $F_{\mu\nu}$ ha il significato (39) e la variazioni vanno eseguite nel modo indicato a pag. 17.

Per il tensore dell'energia e degli sforzi il principio variazionale (85) dà le espressioni (74) e (80). Inoltre da questo principio si devono ottenere tutte le leggi per il campo elastico e per il campo elettromagnetico, *con l'eccezione della legge di Ohm*. Per completezza questa legge va quindi annotata a parte. Essa si scrive[26]

$$\mathfrak{S}^\alpha - U^\alpha \sum \mathfrak{S}^\beta U^\gamma g_{\beta\gamma} = -\sigma\sqrt{-g} \sum \left(F_{\beta\gamma} U^\gamma + E_\beta \right) g^{\alpha\beta}. \tag{86}$$

Qui σ è la conducibilità del corpo ed E_β è un tetravettore

---

[26] H. MINKOWSKI, l.c. Eq. {*E*}; MINKOWSKI *tratta tuttavia solo il caso in cui* E_β=0.

covariante perpendicolare a U^{β}, che rappresenta la forza elettromotrice ("impressa"). E_{β} soddisfa quindi la condizione

$$\sum E_{\beta} U^{\beta} = 0. \tag{87}$$

Contro la formulazione (85) del principio variazionale si può fare un'obiezione che formalmente è corretta. Se intervengono correnti di conduzione, si ha anche dissipazione di energia, e allora il sistema considerato non soddisfa più alle condizioni che fanno sì che l'entropia ε per unità di volume normale sia conservata (vedi pag. 10). Ma allora non è corretto porre $\delta\varepsilon = 0$ nella variazione.

Questa obiezione non riguarda però il contenuto effettivo dell'equazione (85), come vediamo facilmente, se pensiamo a come siamo pervenuti a questa equazione. Noi l'abbiamo dapprima stabilita solo per il caso in cui *non* fosse presente *alcuna* corrente di conduzione, e allora è certamente permesso lasciare invariata l'entropia ($\delta\varepsilon = 0$). Ma la forma dell'equazione (85) mostra che essa dà i risultati giusti (equazioni di MAXWELL, forza ponderomotrice, equazioni gravitazionali) anche quando intervengano le correnti di conduzione, purché anche in questo caso si ponga $\delta\varepsilon = 0$. Se invece si varia anche ε, l'equazione va cambiata, come vedremo nel prossimo paragrafo.

§ 11. *La legge dell'energia e la variazione dell'entropia.*

Per poter valutare come si debba variare l'entropia, dobbiamo tener presente la legge dell'energia per la materia e in particolare la produzione di calore di JOULE.

Se poniamo [(vedi (59) e (81)]:

$$\begin{cases} \mathfrak{K}_{\alpha}^{(e)} = \sum \dfrac{\partial}{\partial x^{\nu}} \left(\mathfrak{T}_{\alpha}^{\nu}(e)\right) - \dfrac{1}{2} \sum \mathfrak{T}^{\mu\nu}(e) \dfrac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\alpha}} , \\ \mathfrak{K}_{\alpha}^{(m)} = \sum \dfrac{\partial}{\partial x^{\nu}} \left(\mathfrak{T}_{\alpha}^{\nu}(m)\right) - \dfrac{1}{2} \sum \mathfrak{T}^{\mu\nu}(m) \dfrac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\alpha}} , \end{cases} \tag{88}$$

$\mathfrak{K}_{\alpha}^{(e)}$ e $\mathfrak{K}_{\alpha}^{(m)}$ sono densità vettoriali covarianti, e $\mathfrak{K}_{\alpha}^{(e)}$ rappresenta la forza elettromotrice del campo elettromagnetico, $\mathfrak{K}_{\alpha}^{(m)}$ la forza inerziale (assieme alla forza elastica) della materia. ($\mathfrak{K}^{(m)}_{\alpha}$ è la quantità $\mathfrak{K}_{\alpha}$ della parte prima). Per la (81) si ha

$$\mathfrak{K}^{(m)}_{\alpha} + \mathfrak{K}^{(e)}_{\alpha} = 0, \tag{89}$$

e questo vale, com'è evidente, anche quando è presente un campo gravitazionale.

L'ultima equazione dà anche

$$\sum \mathfrak{K}^{(m)}_{\alpha} U^{\alpha} + \sum \mathfrak{K}^{(e)}_{\alpha} U^{\alpha} = 0. \tag{90}$$

Se si sostituiscono le espressioni prima trovate di $\mathfrak{T}^{\nu}_{\alpha}(e)$ e $\mathfrak{T}^{\mu\nu}(e)$ nella prima delle equazioni (88), $\mathfrak{K}^{(e)}_{\alpha}$ sarà espresso mediante le quantità di campo e le loro derivate, e si ottiene quindi anche per $\sum \mathfrak{K}^{(e)}_{\alpha} U^{\alpha}$ un'espressione mediante le quantità di campo. In seguito troveremo una via più semplice per il calcolo di quest'espressione. Ora anticiperemo tuttavia il risultato; si scrive:

$$\sum \mathfrak{K}^{(e)}_{\alpha} U^{\alpha} = \sum \mathfrak{S}^{\beta} F_{\alpha\beta} U^{\alpha}. \tag{91}$$

Per ogni punto della materia si ha (vedi pag. 3)

$$U^{\alpha} = \frac{dx^{\alpha}}{ds}.$$

Se moltiplichiamo l'equazione (91) per $\frac{ds}{dt}$, dove $t=x^4$ e quindi

$$\frac{ds}{dt} = \frac{\sqrt{\sum g_{\mu\nu} d^{\mu} d^{\nu}}}{d^4} = \frac{1}{U^4}, \tag{92}$$

otteniamo

$$\mathfrak{K}^{(e)}_{1} \frac{dx^1}{dt} + \mathfrak{K}^{(e)}_{2} \frac{dx^2}{dt} + \mathfrak{K}^{(e)}_{3} \frac{dx^3}{dt} + \mathfrak{K}^{(e)}_{4} = \sum \mathfrak{S}^{\beta} F_{\alpha\beta} \frac{dx^{\alpha}}{dt}. \tag{93}$$

Ora la legge di JOULE[27] afferma che la quantità di calore Q sviluppato per unità di tempo e di volume vale:

$$Q = \sum \mathfrak{S}^{\beta} \left(F_{\beta\alpha} \frac{dx^{\alpha}}{dt} + E_{\beta} \frac{ds}{dt} \right). \tag{94}$$

Dalla (93) segue quindi

---

[27]M. ABRAHAM, l.c. § 12; Phys. Zeitschr. **10**, 737, (1909), eq. 14; *vedi anche per esempio* M. v. LAUE, Das Relativitätsprinzip *oppure* W. PAULI jr., l.c., 35.

$$\mathfrak{K}_4^{(e)} = -\left(\mathfrak{K}_1^{(e)}\frac{dx^1}{dt} + \mathfrak{K}_2^{(e)}\frac{dx^2}{dt} + \mathfrak{K}_3^{(e)}\frac{dx^3}{dt}\right) - Q + \sum \mathfrak{S}^\beta E_\beta \frac{ds}{dt}\,. \qquad (95)$$

Combinata con

$$\mathfrak{K}_4^{(e)} = \sum \frac{\partial \mathfrak{T}_4^{\nu}(e)}{\partial x^\nu} - \frac{1}{2}\sum \mathfrak{T}^{\mu\nu}_{(e)} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial t}$$

l'equazione (95) esprime la legge dell'energia per il campo elettromagnetico. L'ultimo termine dà l'apporto di energia dovuto al lavoro della forza elettromotrice. Poiché per la (89) $\mathfrak{K}_4^{(e)}=-\mathfrak{K}_4^{(m)}$, l'equazione può anche essere combinata anche con l'equazione dell'energia per il campo elastico.

Lo sviluppo di calore può ora esser messo in relazione anche con l'entropia ε per unità di volume normale. Per il calore apportato per unità di tempo e di volume vale infatti in generale [vedi HERGLOTZ, l.c. eq. (72)]

$$Q = \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial \varepsilon}\frac{\partial \varepsilon}{\partial \xi_d}\frac{1}{d^4} = \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial \varepsilon}\frac{d\varepsilon}{dt}\,. \qquad (96)$$

Se ora escludiamo anche la conduzione di calore e supponiamo che il calore di JOULE sia l'unico apporto di calore, Q ha nella (94) e nella (96) lo stesso significato, e le due espressioni per questa quantità possono essere poste uguali tra loro. Se moltiplichiamo poi per dt/ds e teniamo conto della (92), otteniamo

$$\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial \varepsilon}\frac{\partial \varepsilon}{\partial \xi_d}\frac{1}{\sqrt{\sum g_{\mu\nu} d^\mu d^\nu}} = \sum \mathfrak{S}^\beta\left(F_{\beta\alpha}U^\alpha + E_\beta\right), \qquad (97)$$

ovvero

$$\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial \varepsilon}\frac{d\varepsilon}{ds} = \sum \mathfrak{S}^\beta\left(F_{\beta\alpha}U^\alpha + E_\beta\right). \qquad (98)$$

Entrambi i membri delle equazioni (97) e (98) sono densità scalari vere. Invece Q non è una densità scalare.

Poiché $\sum U_\alpha U^\alpha = \sum U_\alpha \frac{dx^\alpha}{ds} = 1$, l'equazione (98) si può anche scrivere:

$$\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial \varepsilon}\frac{d\varepsilon}{ds} = \sum \mathfrak{S}^\beta\left(F_{\beta\alpha} + E_\beta U_\alpha\right)\frac{dx^\alpha}{ds}\,. \qquad (98a)$$

Questa equazione mostra che dobbiamo imporre alle variazioni dell'entropia ε e delle coordinate x^α la condizione

$$\frac{\partial\mathfrak{F}}{\partial\varepsilon}\,\delta\varepsilon - \sum\mathfrak{S}^{\nu}\left(F_{\nu\alpha} + E_{\nu}U_{\alpha}\right)\delta x^{\alpha} = 0. \tag{99}$$

Se integriamo l'equazione che esprime questa condizione su un dominio tetradimensionale, otteniamo

$$\iiiint \frac{\partial\mathfrak{F}}{\partial\varepsilon}\,\delta\varepsilon dx^1dx^2dx^3dx^4 - \iiiint\sum\mathfrak{S}^{\nu}\left(F_{\nu\alpha} + E_{\nu}U_{\alpha}\right)\delta x^{\alpha}dx^1dx^2dx^3dx^4 = 0$$

Il primo termine qui esprime quella parte di

$$\delta\iiiint\mathfrak{F}dx^1dx^2dx^3dx^4$$

che si riferisce alla variazione di ε e della quale non abbiamo tenuto conto nella derivazione della (85), perché allora avevamo posto $\delta\varepsilon=0$. Se ora teniamo conto anche della variazione di ε, la (85) combinata con l'ultima equazione dà

$$\left\{\begin{aligned} &\delta\iiiint(\mathfrak{F}^{(m)} + \mathfrak{F}' + \mathfrak{S})dx^1dx^2dx^3dx^4 + \\ &+ \iiiint\sum\mathfrak{S}^{\nu}\left(\delta\varphi_{\nu} - E_{\nu}U_{\alpha}\delta x^{\alpha}\right)dx^1dx^2dx^3dx^4 = 0. \end{aligned}\right. \tag{100}$$

È da notare che non solo $\mathfrak{F}^{(m)}$ ma anche $\mathfrak{F}'$ può dipendere da ε, poiché costante dielettrica e permeabilità magnetica possono dipendere dallo stato termico.

Il risultato delle nostre considerazioni riassunto in breve è il seguente: *nella forma* (100) *il principio variazionale vale se la variazione di* ε *viene eseguita in conformità alla condizione* (99)*. Se invece si pone* $\delta\varepsilon = 0$ *e però si considerano i* δx^{α} *indipendenti tra loro, si devono usare le forme precedenti del principio.* Di queste la (85) dà allora le corrette equazioni di campo e la corretta forza ponderomotrice, *anche se intervengono correnti di conduzione*.

§ 12*. Calcolo della forza ponderomotrice.*

Ci resta da calcolare la forza ponderomotrice nel campo elettromagnetico e da dimostrare la relazione (91) ancora non provata. All'uopo valuteremo in particolare la variazione

$$\delta\iiiint \mathfrak{I}'\, dx^1 dx^2 dx^3 dx^4$$

per uno spostamento dei punti ξ. Variamo quindi $a^\alpha, b^\alpha, c^\alpha, d^\alpha$, come è stato mostrato nei §§ 3 e 8, e dalla (54) otteniamo subito

$$\delta\mathfrak{I}' = \frac{1}{2}\sqrt{-g}\sum\left\{\frac{1}{2}g^{\alpha\gamma}g^{\beta\delta}\delta A + g^{\alpha\gamma}\frac{d^\beta d^\delta}{\sum g_{\sigma\tau}d^\sigma d^\tau}\delta B + \right.$$

$$\left. + Bg^{\alpha\gamma}\,\delta\frac{d^\beta d^\delta}{\sum g_{\sigma\tau}d^\sigma d^\tau}\right\}F_{\alpha\beta}F_{\gamma\delta}\ . \tag{101}$$

Per semplicità trattiamo solo il caso in cui *A e B* siano *costanti della materia* (quindi indipendenti dallo stato di deformazione e dallo stato termico)[28]. Allora si ha anche

$$\frac{\partial\mathfrak{I}'}{\partial\varepsilon} = 0, \tag{102}$$

e non occorre far variare l'entropia ε. Inoltre si ha

$$\delta A = -\sum\frac{\partial A}{\partial x^\mu}\delta x^\mu, \qquad \delta B = -\sum\frac{\partial B}{\partial x^\mu}\delta x^\mu. \tag{103}$$

In generale si ha [vedi eq. (25)]

$$\delta\frac{d^\beta d^\delta}{\sum g_{\sigma\tau}d^\sigma d^\tau} = \Delta\frac{d^\beta d^\delta}{\sum g_{\sigma\tau}d^\sigma d^\tau} - \sum\delta x^\mu\frac{\partial}{\partial x^\mu}\frac{d^\beta d^\delta}{\sum g_{\sigma\tau}d^\sigma d^\tau}, \tag{104}$$

dove il simbolo Δ come nel § 3 indica la variazione virtuale in un punto trascinato. La variazione si può eseguire anche altrimenti in modo analogo a pag. 10, e per la (3) otteniamo

$$\Delta\frac{d^\beta d^\delta}{\sum g_{\sigma\tau}d^\sigma d^\tau} = \sum\frac{\partial}{\partial d^\mu}\left(\frac{d^\beta d^\delta}{\sum g_{\sigma\tau}d^\sigma d^\tau}\right)\frac{\partial\delta x^\mu}{\partial\xi_{\mathrm{d}}} + \sum\frac{\partial}{\partial g_{\sigma\tau}}\left(\frac{d^\beta d^\delta}{\sum g_{\sigma\tau}d^\sigma d^\tau}\right)\frac{\partial g_{\sigma\tau}}{\partial x^\mu}\delta x^\mu$$

$$\Delta\frac{d^\beta d^\delta}{\sum g_{\sigma\tau}d^\sigma d^\tau} = \sum\frac{\partial}{\partial d^\mu}\left(\frac{d^\beta d^\delta}{\sum g_{\sigma\tau}d^\sigma d^\tau}\right)\frac{\partial\delta x^\mu}{\partial x^\nu}d^\nu - \sum\frac{d^\beta d^\delta d^\sigma d^\tau}{(\sum g_{\sigma\tau}d^\sigma d^\tau)^2}\frac{\partial g_{\sigma\tau}}{\partial x^\mu}\delta x^\mu. \tag{105}$$

Abbiamo da sostituire questa espressione nella (104), e l'espressione così ottenuta nell'ultimo termine in parentesi della

---

[28] *Eliminare questa restrizione non comporterebbe alcuna difficoltà.*

(101). Inoltre teniamo presente che

$$\frac{1}{2}\sqrt{-g}\,B\sum g^{\alpha\gamma}F_{\alpha\beta}F_{\gamma\delta}\frac{\partial}{\partial d^{\mu}}\,\frac{d^{\beta}d^{\delta}}{\sum g_{\sigma\tau}d^{\sigma}d^{\tau}} = \frac{\partial\mathfrak{F}'}{\partial d^{\mu}}$$

secondo l'ipotesi fatta sopra per A e B, e otteniamo quindi

$$\begin{cases} \partial\mathfrak{F}' = -\dfrac{1}{2}\sqrt{-g}\sum\left(\dfrac{1}{2}g^{\alpha\gamma}g^{\beta\delta}\,\dfrac{\partial A}{\partial x^{\mu}} + g^{\alpha\gamma}\dfrac{d^{\beta}d^{\delta}}{\sum g_{\sigma\tau}d^{\sigma}d^{\tau}}\,\dfrac{\partial B}{\partial x^{\mu}}\right)F_{\alpha\beta}F_{\gamma\delta}\delta x^{\mu} \\ + \dfrac{\partial\mathfrak{F}'}{\partial d^{\mu}}\,\dfrac{\partial\delta x^{\mu}}{\partial x^{\nu}}d^{\nu} - \dfrac{1}{2}\sqrt{-g}\,B\sum g^{\alpha\gamma}F_{\alpha\beta}F_{\gamma\delta}\Bigg[\dfrac{d^{\beta}d^{\delta}d^{\sigma}d^{\tau}}{(\sum g_{\sigma\tau}d^{\sigma}d^{\tau})^{2}}\,\dfrac{\partial g_{\sigma\tau}}{\partial x^{\mu}} + \\ \qquad\qquad + \dfrac{\partial}{\partial x^{\mu}}\dfrac{d^{\beta}d^{\delta}}{\sum g_{\sigma\tau}d^{\sigma}d^{\tau}}\Bigg]\delta x^{\mu}. \end{cases} \tag{106}$$

Moltiplichiamo ora per $dx^1dx^2dx^3dx^4$ e integriamo su un dominio tetradimensionale. Se inoltre il termine con $\partial\delta x^{\mu}/\partial x^{\nu}$ viene integrato per parti otteniamo

$$\begin{cases} \delta\iiiint\mathfrak{F}'\,dx^1dx^2dx^3dx^4 = \iiiint\sum\delta x^{\mu}\Bigg\{-\dfrac{1}{2}\sqrt{-g}\left(\quad\right)F_{\alpha\beta}F_{\gamma\delta} - \\ -\dfrac{\partial}{\partial x^{\nu}}\left(\dfrac{\partial\mathfrak{F}'}{\partial d^{\mu}}d^{\nu}\right) - \dfrac{1}{2}\sqrt{-g}\,B\sum g^{\alpha\gamma}F_{\alpha\beta}F_{\gamma\delta}\Big[\quad\Big]\Bigg\}\,dx^1dx^2dx^3dx^4. \end{cases} \tag{107}$$

Le espressioni non scritte nella parentesi tonda e in quella quadra sono esattamente le stesse di quelle nelle parentesi uguali dell'equazione precedente. Sostituiremo ora ovunque per mezzo della (6) il vettore velocità tetradimensionale. Per l'ultimo termine nella parentesi quadra otteniamo allora

$$\frac{\partial}{\partial x^{\mu}}\frac{d^{\beta}d^{\delta}}{\sum g_{\sigma\tau}d^{\sigma}d^{\tau}} = \frac{\partial}{\partial x^{\mu}}\,U^{\beta}U^{\delta}$$

e si trova

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2}\sqrt{-g}\,B\sum g^{\alpha\gamma}F_{\alpha\beta}F_{\gamma\delta}\dfrac{\partial}{\partial x^{\mu}}\dfrac{d^{\beta}d^{\delta}}{\sum g_{\sigma\tau}d^{\sigma}d^{\tau}} = \sqrt{-g}\,B\sum g^{\alpha\gamma}F_{\alpha\beta}F_{\gamma\nu}U^{\beta}\,\dfrac{\partial U^{\nu}}{\partial x^{\mu}} \\ \qquad\qquad = \sqrt{-g}\sum V_{\nu}\,\dfrac{\partial U^{\nu}}{\partial x^{\mu}}. \end{cases} \tag{108}$$

dove si è posto

$$V_{\nu} = B\sum g^{\alpha\gamma}F_{\alpha\beta}F_{\gamma\nu}U^{\beta}.$$

V_ν è evidentemente un vettore covariante vero. Eseguiamo ancora la proiezione ortogonale di V_ν sul vettore velocità, poniamo cioè

$$W_\nu = V_\nu - U_\nu \sum V_\delta U^\delta; \tag{110}$$

W_ν, come si verifica facilmente, è il vettore già definito dall'equazione (70). Poiché $\sum U_\nu U^\nu = 1$, si ha

$$\sum W_\nu U^\nu = 0. \tag{111}$$

Consideriamo ora il primo termine nella parentesi quadra delle (106) e (107) e troviamo subito

$$\frac{d^\beta d^\delta d^\sigma d^\tau}{(\sum g_{\sigma\tau} d^\sigma d^\tau)^2} \frac{\partial g_{\sigma\tau}}{\partial x^\mu} = U^\beta U^\delta U^\sigma U^\tau \frac{\partial g_{\sigma\tau}}{\partial x^\mu}.$$

Poiché $\sum U^\sigma U^\tau g_{\sigma\tau} = \sum U_\tau U^\tau = 1$, per derivazione si ottiene

$$\sum \frac{\partial U^\sigma}{\partial x^\mu} U^\tau g_{\sigma\tau} + \sum U^\sigma \frac{\partial U^\tau}{\partial x^\mu} g_{\sigma\tau} + \sum U^\sigma U^\tau \frac{\partial g_{\sigma\tau}}{\partial x^\mu} = 0,$$

$$\sum U^\sigma U^\tau \frac{\partial g_{\sigma\tau}}{\partial x^\mu} = -2\sum U_\nu \frac{\partial U^\nu}{\partial x^\mu}. \tag{112}$$

Sostituendo queste espressioni troviamo, tenendo conto ancora della (109)

$$\frac{1}{2}\sqrt{-g}\,B\sum g^{\alpha\gamma} F_{\alpha\beta} F_{\gamma\delta} \frac{d^\beta d^\delta d^\sigma d^\tau}{(\sum g_{\sigma\tau} d^\sigma d^\tau)^2} \frac{\partial g_{\sigma\tau}}{\partial x^\mu} = -\sqrt{-g}\sum V_\delta U^\delta \sum U_\nu \frac{\partial U^\nu}{\partial x^\mu}. \tag{113}$$

Sommiamo le equazioni (113) e (108) e sostituiamo il vettore W_ν secondo la (110). Otteniamo così

$$\frac{1}{2}\sqrt{-g}\,B\sum g^{\alpha\gamma} F_{\alpha\beta} F_{\gamma\delta}\Big[\quad\Big] = \sqrt{-g}\sum W_\nu \frac{\partial U^\nu}{\partial x^\mu} = -\sqrt{-g}\sum U^\nu \frac{\partial W_\nu}{\partial x^\mu}. \tag{114}$$

L'ultima espressione s'ottiene dalla precedente tenendo conto della (111). Così abbiamo portato il termine con la parentesi quadra nelle (106) e (107) alla forma desiderata.

Trattiamo ora il termine di mezzo a secondo membro nella (107). Poiché nel nostro caso $\mathfrak{F}'$ dipende solo da d^μ ma non da a^μ, b^μ, c^μ, per l'equazione (71) si ha

$$\frac{\partial \mathfrak{F}'}{\partial d^\mu} d^\nu = \sqrt{-g}\, W_\mu U^\nu.$$

Questa equazione e la (114) danno insieme

$$\left\{\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x^{\nu}}\left(\frac{\partial \mathfrak{J}'}{\partial d^{\mu}} d^{\nu}\right) + \frac{1}{2}\sqrt{-g}\, B \sum g^{\alpha\gamma} F_{\alpha\beta} F_{\gamma\delta} \left[\quad\right] \\ & = \sum \frac{\partial}{\partial x^{\nu}}\left(\sqrt{-g}\, W_{\mu} U^{\nu}\right) - \sqrt{-g} \sum U^{\nu} \frac{\partial W_{\nu}}{\partial x^{\mu}} \\ & = \sqrt{-g} \sum U^{\nu}\left(\frac{\partial W_{\mu}}{\partial x^{\nu}} - \frac{\partial W_{\nu}}{\partial x^{\mu}}\right) + W_{\mu} \sum \frac{\partial}{\partial x^{\nu}} \sqrt{-g}\, U^{\nu}. \end{aligned}\right. \tag{115}$$

Sostituiamo l'ultima espressione nella (107) e otteniamo

$$\delta\iiiint \mathfrak{J}' dx^1 dx^2 dx^3 dx^4 = - \iiiint \sum \delta x^{\mu} \mathfrak{K}'_{\mu} dx^1 dx^2 dx^3 dx^4, \tag{116}$$

dove

$$\left\{\begin{aligned} \mathfrak{K}'_{\mu} = & \frac{1}{2}\sqrt{-g} \sum \left(\frac{1}{2} g^{\alpha\gamma} g^{\beta\delta} \frac{\partial A}{\partial x^{\mu}} + g^{\alpha\gamma} U^{\beta} U^{\delta} \frac{\partial B}{\partial x^{\mu}}\right) F_{\alpha\beta} F_{\gamma\delta} \\ & + \sqrt{-g} \sum U^{\nu}\left(\frac{\partial W_{\mu}}{\partial x^{\nu}} - \frac{\partial W_{\nu}}{\partial x^{\mu}}\right) + W_{\mu} \sum \frac{\partial}{\partial x^{\nu}} \sqrt{-g}\, U^{\nu}. \end{aligned}\right. \tag{117}$$

Il principio variazionale (85) ci dà ora immediatamente la forza ponderomotrice del campo elettromagnetico. Poiché non variamo i φ_{ν} e i $g_{\mu\nu}$, otteniamo

$$\delta\iiiint \mathfrak{J}^{(m)} dx^1 dx^2 dx^3 dx^4 - \iiiint \sum \delta x^{\mu}\left(\sum \mathfrak{S}^{\nu} F_{\mu\nu} + \mathfrak{K}'_{\mu}\right) dx^1 dx^2 dx^3 dx^4 = 0,$$

e un confronto con la (59) mostra che

$$\mathfrak{K}^{(e)}_{\mu} = \sum \mathfrak{S}^{\nu} F_{\mu\nu} + \mathfrak{K}'_{\mu} \tag{118}$$

rappresenta la forza ponderomotrice del campo elettromagnetico. Riscriveremo l'espressione per $\mathfrak{K}^{(e)}_{\mu}$ in un modo un po' diverso, esprimendo A e B nel primo termine a secondo membro nella (117) tramite ε e μ. Per la (52) si ha

$$A = \frac{1}{\mu}, \qquad B = \varepsilon - \frac{1}{\mu},$$

e otteniamo

$$\sum \left(\frac{1}{2} g^{\alpha\gamma} g^{\beta\delta} \frac{\partial A}{\partial x^{\mu}} + g^{\alpha\gamma} U^{\beta} U^{\delta} \frac{\partial B}{\partial x^{\mu}}\right) F_{\alpha\beta} F_{\gamma\delta} = -\Phi \frac{\partial \varepsilon}{\partial x^{\mu}} - \Psi \frac{\partial \mu}{\partial x^{\mu}}, \tag{119}$$

dove

$$\Phi = - \sum g^{\alpha\gamma} U^{\beta} U^{\delta} F_{\alpha\beta} F_{\gamma\delta}, \tag{120}$$

$$\Psi = \frac{1}{\mu^2}\sum\left(\frac{1}{2}g^{\alpha\gamma}g^{\beta\delta} - g^{\alpha\gamma}U^{\beta}U^{\delta}\right)F_{\alpha\beta}F_{\gamma\delta}. \tag{121}$$

Le quantità Φ e Ψ sono, com'è evidente, scalari veri[29], e nel caso della quiete e di valori normali di $g_{\mu\nu}$ si ha

$$\Phi = F_{14}^2 + F_{24}^2 + F_{34}^2. \tag{120a}$$

$$\Psi = \frac{1}{\mu^2}\left(F_{12}^2 + F_{23}^2 + F_{31}^2\right) = H_{12}^2 + H_{23}^2 + H_{31}^2. \tag{121a}$$

L'espressione per la forza ponderomotrice del campo elettromagnetico si scrive ora infine:

$$\left\{\begin{aligned} \mathfrak{K}_{\mu}^{(e)} &= \sum\mathfrak{S}^{\nu}F_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\sqrt{-g}\left(\Phi\frac{\partial\varepsilon}{\partial x^{\mu}} + \Psi\frac{\partial\mu}{\partial x^{\mu}}\right) + \\ &+ \sqrt{-g}\sum U^{\nu}\left(\frac{\partial W_{\mu}}{\partial x^{\nu}} - \frac{\partial W_{\nu}}{\partial x^{\mu}}\right) + W_{\mu}\sum\frac{\partial}{\partial x^{\nu}}\sqrt{-g}\,U^{\nu}. \end{aligned}\right. \tag{122}$$

Questa è la forma più intuitiva nella quale si possa scrivere l'espressione per $\mathfrak{K}_{\mu}^{(e)}$. La forza ponderomotrice è qui suddivisa in parti, delle quali ciascuna per sè rappresenta una densità vettoriale[30].

Utilizzeremo l'espressione trovata per calcolare $\sum\mathfrak{K}_{\mu}^{(e)}U^{\mu}$, il cui valore ci è già stato necessario per le considerazioni del

---

[29]*Per le quantità Φ e Ψ si derivano ancora facilmente le seguenti espressioni:*

$$\Phi = -\sum g^{\alpha\gamma}F_{\alpha}F_{\gamma} = -\sum F_{\alpha}F^{\alpha}, \tag{120b}$$

$$\Psi = \frac{1}{6}\sum\left(H_{\alpha\beta}U_{\gamma} + H_{\beta\gamma}U_{\alpha} + H_{\gamma\alpha}U_{\beta}\right)\left(H^{\alpha\beta}U^{\gamma} + H^{\beta\gamma}U^{\alpha} + H^{\gamma\alpha}U^{\beta}\right), \tag{121b}$$

*dove F_{α}, $H_{\alpha\beta}$ sono le grandezze considerate a pag.*19. *F_{α} è la* forza elettrica a riposo *introdotta da MINKOWSKI. Nella teoria della relatività speciale $H_{\alpha\beta}U_{\gamma}+H_{\beta\gamma}U_{\alpha}+H_{\gamma\alpha}U_{\beta}$ rappresenta la componente lungo l'asse δ ($\alpha,\beta,\gamma,\delta$ tutti diversi tra loro) di un tetra-vettore, che MINKOWSKI denomina* forza magnetica a riposo.

[30]*Per verificare questo, vedi per esempio* H. WEYL, l.c. parte 4, p. 95, eq. (21) e (22), p. 99 eq. (30).

§ 11. Poiché ε e μ sono costanti della materia, si ha

$$\sum \frac{\partial \varepsilon}{\partial x^{\mu}} U^{\nu} = 0, \quad \sum \frac{\partial \mu}{\partial x^{\mu}} U^{\nu} = 0. \tag{123}$$

Inoltre si ha

$$\sum U^{\mu} U^{\nu} \left(\frac{\partial W_{\mu}}{\partial x^{\nu}} - \frac{\partial W_{\nu}}{\partial x^{\mu}} \right) = 0,$$

e per la (111) anche l'ultimo termine al secondo membro nella (122) dà come risultato zero per moltiplicazione per U^{μ} e somma sull'indice μ. Troviamo quindi

$$\sum \mathfrak{K}^{(e)}_{\mu} U^{\mu} = \sum U^{\mu} \mathfrak{S}^{\nu} F_{\mu\nu}, \tag{91}$$

come già accennato a pag. 31. Il presente calcolo di $\sum \mathfrak{K}^{(e)}_{\mu} U^{\mu}$ si riferisce solo al caso in cui ε e μ siano costanti della materia; è però facile mostrare che la relazione (91) rimane valida anche quando ε e μ dipendono dallo stato di compressione della materia.

§ 13. *Confronto con l'espressione della forza di Abraham.*

La nostra espressione per la forza ponderomotrice risulta, come abbiamo già mostrato nel § 9, in conformità con la prima delle equazioni (88), da un tensore dell'energia e degli sforzi $\mathfrak{T}^{\mu\nu}$(e) *simmetrico* [equazione (80)]. Quindi la nostra espressione per $\mathfrak{K}^{(e)}_{\mu}$ non può coincidere con l'espressione della forza ottenuta da MINKOWSKI, che si basa su un tensore dell'energia e degli sforzi non simmetrico. [vedi H. MINKOWSKI, l.c. equazioni da (73) a (75)]. Invece la nostra espressione della forza coincide con quella introdotta da Abraham. Per verificare ciò spogliamo l'espressione (122) dalla sua veste tetradimensionale e la scriviamo con i simboli della consueta analisi vettoriale tridimensionale[31].

Introduciamo la velocità tridimensionale $\mathfrak{w}$ della materia. Si ha (vedi pag. 3)

---

[31]*Per quanto riguarda le regole del calcolo si veda* R. GANS, Einführung in die Vektoranalysis.

$$U^{\mu} = \mathfrak{w}^{\mu} U^4. \qquad \mu = 1,2,3 \tag{124}$$

Inoltre raggruppiamo le componenti spaziali di W_{μ} in un vettore tridimensionale W. Abbiamo allora in base alla (111)

$$- W_4 = \mathfrak{w}W, \tag{125}$$

dove $\mathfrak{w}W$ esprime il prodotto scalare dei due vettori tridimensionali. U^4 e $(-g)^{1/2}$ si comportano come scalari tridimensionali nello spazio pensato euclideo.

Della forza ponderomotrice $\mathfrak{K}_{\mu}^{(e)}$ ci interessa ora in particolare la parte $\mathfrak{K}'_{\mu}$, le cui tre componenti spaziali riassumiamo in un vettore tridimensionale. Scritta con la notazione vettoriale tridimensionale l'espressione (117) risulta allora

$$\left\{\begin{aligned} \mathfrak{K}' = & -\frac{1}{2}\sqrt{-g}\left(\Phi\ grad\ \varepsilon + \Psi\ grad\ \mu\right) \\ & - \sqrt{-g}\,[\mathfrak{w}\ rotW] + \sqrt{-g}\,U^4\frac{\partial W}{\partial t} + \sqrt{-g}\,U^4 grad(\mathfrak{w}W) \\ & + W\ div\left(\sqrt{-g}\,U^4\mathfrak{w}\right) + W\frac{\partial}{\partial t}\sqrt{-g}\,U^4. \end{aligned}\right. \tag{126}$$

Per una nota regola di calcolo dell'analisi vettoriale si ha

$$grad(\mathfrak{w}W) = [\mathfrak{w}\ rotW] + [W\ rot\mathfrak{w}] + (\mathfrak{w}\ grad)W + (W\ grad)\mathfrak{w}.$$

Sostituiamo questa espressione nella (126). Teniamo inoltre conto che

$$\sqrt{-g}\,U^4(\mathfrak{w}\ grad)\ W = (\mathfrak{w}\ grad)\sqrt{-g}\,U^4 W - W\,(\mathfrak{w}\ grad\sqrt{-g}\,U^4),$$

$$W\ div\left(\sqrt{-g}\,U^4\mathfrak{w}\right) = W\sqrt{-g}\,U^4 div\mathfrak{w} + W\left(\mathfrak{w}\ grad\sqrt{-g}\,U^4\right),$$

e otteniamo

$$\begin{aligned} \mathfrak{K}' = \frac{1}{2}\sqrt{-g}\left(\Phi grad\varepsilon + \Psi grad\mu\right) + \frac{\partial}{\partial t}\sqrt{-g}\,U^4 W + (\mathfrak{w}grad)\sqrt{-g}\,U^4 W \\ + \sqrt{-g}\,U^4(Wgrad)\mathfrak{w} + \sqrt{-g}\,U^4 W div\mathfrak{w} + \sqrt{-g}\,U^4[Wrot\mathfrak{w}]. \end{aligned}$$

Questa espressione si semplifica se sostituiamo il vettore tridimensionale

$$\mathfrak{W} = \sqrt{-g}\,U^4 W. \tag{127}$$

Per ottenere ora la forza ponderomotrice totale $\mathfrak{K}^{(e)}$, dobbiamo ancora tener conto del primo termine al secondo membro della (122). La densità spaziale di elettricità è

$$\mathfrak{S}^4 = \rho, \tag{128}$$

e le componenti spaziali $\mathfrak{S}^\nu$ rappresentano la corrente elettrica tridimensionale $\mathfrak{S}$ (= corrente di conduzione + corrente di convezione). Poniamo $\mathfrak{S}=\rho\mathfrak{w}+\mathfrak{J}$, dove $\mathfrak{J}$ è la corrente di conduzione. Siano inoltre F_{14}, F_{24}, F_{34} le componenti della forza elettrica $\mathfrak{E}$, F_{23}, F_{31}, F_{12} le componenti dell'induzione magnetica $\mathfrak{B}$ (vedi la nota a pag 16). Le componenti spaziali $\sum \mathfrak{S}^\nu F_{\mu\nu}$ danno quindi il vettore tridimensionale

$$\rho\mathfrak{E} + [\mathfrak{S}\mathfrak{B}].$$

Se per semplicità si pone ancora

$$\frac{1}{2}\sqrt{-g}\,\Phi = \zeta, \qquad \frac{1}{2}\sqrt{-g}\,\Psi = \eta, \tag{129}$$

l'espressione della forza ponderomotrice si scrive

$$\left\{\begin{aligned} \mathfrak{K}^{(e)} &= \rho\mathfrak{E} + [\mathfrak{S}\mathfrak{B}] - \zeta\, grad\, \varepsilon - \eta\, grad\, \mu + \frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial t} \\ &\quad + (\mathfrak{w}\, grad)\mathfrak{B} + (\mathfrak{B}\, grad)\mathfrak{w} + \mathfrak{B}\, div\, \mathfrak{w} + [\mathfrak{B}\, rot\, \mathfrak{w}]. \end{aligned}\right. \tag{130}$$

Questa espressione per la forza ponderomotrice coincide ora completamente con quella ottenuta da ABRAHAM nella teoria della relatività speciale [M. ABRAHAM, l.c. Eq. (60)]. È notevole il fatto che l'espressione di ABRAHAM, come la nostra stessa derivazione mostra, valga del tutto invariata anche nella teoria della relatività generale, purché $\mathfrak{B}$, ζ, η siano definiti con le equazioni (127), (129). Anche il sistema di coordinate utilizzato può essere completamente arbitrario.

Le diverse possibili proposte per la forza, che la teoria della relatività (speciale) permette, sono state studiate da GRAMMEL (l.c.). GRAMMEL presuppone che il tensore dell'energia e degli sforzi, *nel caso della quiete*, debba essere simmetrico, e trova quindi tre diverse possibili proposte per questo tensore e per la forza ponderomotrice nel campo elettromagnetico. Dei tre possibili tensori proposti uno solo è simmetrico anche nel caso del moto, e questo tensore è proprio quello di ABRAHAM, quindi quello richiesto anche da noi. Il tensore dell’energia e degli sforzi di MINKOWSKI è non simmetrico anche nel caso della quiete, quindi non può soddisfare i requisiti che GRAMMEL impone. Se si richiede solo la compatibilità con il principio di relatività, si ottengono in ogni caso quattro possibili proposte per il tensore dell’energia e degli sforzi e per la forza ponderomotrice. (Ogni proposta nella teoria della relatività speciale si può trasferire in quella generale.) Il principio di HAMILTON può ora decidere tra le diverse possibilità. Quando però ISHIWARA (l.c) e DÄLLENBACH (l.c) pensano che questo principio porti al tensore di MINKOWSKI, non posso esser d’accordo con loro. Al contrario ritengo d’aver mostrato che il principio di HAMILTON, correttamente applicato, porta a un tensore dell’energia e degli sforzi simmetrico e all’espressione di ABRAHAM per la forza ponderomotrice.

Helsingfors, Novembre 1922.