Sul tensore d’energia-impulso dell’elettrodinamica di Maxwell-Minkowski[1][2]

H. Ott

Sommario

L’asimmetria delle componenti della corrente d’energia e dell’impulso del tensore di Minkowski deriva da una incompletezza di questo tensore. Dal punto di vista della teoria degli elettroni di Lorentz esso va completato con un tensore aggiuntivo che in parte dipende ancora dalle grandezze di campo di Maxwell. Con questo completamento si ripristina proprio la simmetria delle componenti tensoriali; la relazione fondamentale $\mathfrak{S} = [\mathfrak{E}\mathfrak{H}] = c^2\mathfrak{g}$*, valida finora solo per il vuoto, si estende adesso anche al campo di Maxwell* $\mathfrak{E},\mathfrak{H}$ *nella materia.*

§ 1. Il problema

Nell’elettrodinamica di Maxwell-Minkowski la corretta forma del tensore d’energia-impulso è ancor sempre controversa[3]. Recentemente M. v. Laue[4] ha scoperto nella velocità della radiazione di un’onda elettromagnetica un importante criterio di selezione per i tensori concorrenti e, nella nuova edizione del suo libro[5] "Die Relativitätstheorie" si è deciso in base a questo punto di vista per il tensore (non simmetrico) di Minkowski. Ma l’asimmetria ha di per sè serie conseguenze: in primo luogo la relazione postulata da Planck come universale

$$\mathfrak{S} = [\mathfrak{E}\mathfrak{H}] = c^2\mathfrak{g} \tag{1}$$

---

[1] Annalen der Physik **11**, 33 (1952).

[2] *Tradotto in collaborazione con L. Mihich.*

[3] A. Sommerfeld, Vorl. über Theoret. Physik, Vol. III, Wiesbaden 1948, p. 293.

[4] M. v. Laue, Z. Physik **128**, 389 (1950).

[5] M. v. Laue, Die Relativitätstheorie, Vol. I, Braunschweig 1952.

(in unità pratiche) tra corrente di energia $\mathfrak{S}$ e densità di impulso $\mathfrak{g}$ non si può trasferire dal vuoto alla materia. Con ciò tra l'altro l'ammissibilità del concetto di fotone nei mezzi ottici viene immediatamente colpita.

Nel seguito si mostrerà che la legge della velocità di radiazione non scuote affatto la validità universale della (1), anzi (a dire il vero solo assieme alla teoria di Lorentz) la conferma addirittura.

§ 2. Densità d'impulso e criterio della velocità di radiazione

Questo criterio afferma che la velocità di radiazione di un'onda elettrica deve comportarsi rispetto ad una trasformazione di Lorentz come la velocità di un punto materiale (teorema di Einstein di addizione delle velocità); allora "se un punto materiale si muove all'interno di un raggio con la velocità della radiazione, esso rimane costantemente in luce, e questo fatto è indipendente dal sistema di riferimento" (Laue[2)]). Su ciò non c'è naturalmente nulla da obiettare. Succede tuttavia che per l'applicazione di questo criterio ad un tensore d'energia-impulso è propriamente necessaria solo la quarta riga dello schema delle componenti, cioè solo la forma della corrente di energia $\mathfrak{S}$ e della densità d'energia W. Così si arriva, per esempio nel § 18a di Laue[3)], senza impiego di alcun tensore di energia-impulso, fino all'equazione (18,10) compresa. Di queste equazioni la (18,9) afferma ora che un certo vettore $\nu\lambda\mathfrak{s}$ definito dalla (18,8) soddisfa il teorema di addizione di Einstein. E per questo vettore deriva inoltre dalla (18,10) l'espressione (in unità pratiche al posto delle unità c.g.s. di Laue):

$$[\mathfrak{E}\mathfrak{H}] = \nu\lambda[\mathfrak{E}\ [\mathfrak{s}\mathfrak{D}]] = \nu\lambda(\mathfrak{E}\mathfrak{D})\mathfrak{s} \tag{2}$$

ossia

$$\nu\lambda\mathfrak{s} = \frac{[\mathfrak{E}\mathfrak{H}]}{(\mathfrak{E}\mathfrak{D})}\ . \tag{3}$$

In nessuno dei passi di questa dimostrazione si deve ricorrere alla forma di un qualche tensore d'energia-impulso; infatti le quantità $[\mathfrak{E}\mathfrak{H}]$ e $(\mathfrak{E}\mathfrak{D})$ appaiono nella (3) in modo puramente formale, e il loro vero significato fisico come corrente d'energia e densità d'energia rimane ancora indeterminato.

Si ha bisogno del tensore d'energia-impulso, e precisamente solo dei suoi valori $\mathfrak{S}$ e W, non appena si vuol esprimere la velocità di radiazione (definita mediante la (19,20) di Laue[3])

$$\mathfrak{w} = \frac{\mathfrak{S}}{W} \tag{4}$$

mediante le quantità di campo di Maxwell. Con i valori $\mathfrak{S} = [\mathfrak{E}\mathfrak{H}]$ e $W = (1/2)(\mathfrak{E}\mathfrak{D} + \mathfrak{H}\mathfrak{B})$ del tensore di Minkowski (vedi (32)), per l'onda piana $\mathfrak{w}$ sarà quindi identica al vettore $\nu\lambda\mathfrak{s}$ dell'equazione (3), e soddisfa così la legge di addizione di Einstein.

In quanto detto sopra non si è usata in nessun punto la densità d'impulso del tensore. Perciò il criterio della velocità di radiazione elimina sì quelli tra i tensori concorrenti che nella quarta riga si discostano da quello di Minkowski, ma non determina le componenti restanti, in particolare la densità d'impulso e la simmetria. Ogni altro tensore la quarta riga del quale coincida con quella di Minkowski sarebbe parimenti ammissibile, una affermazione che in verità per il momento può apparire priva di contenuto: infatti non c'è tra i tensori concorrenti della teoria di Maxwell nessuno che abbia in comune la quarta riga con quello di Minkowski. Ma la situazione cambia quando si tratti il problema alla luce delle equazioni di Lorentz, invece che di quelle di Maxwell. Allora sorgono forti dubbi se il formalismo di Maxwell sia in grado di risolvere il problema del tensore in maniera soddisfacente. In ogni modo si mostra che il tensore di Minkowski (come, d'altra parte, ogni altro della teoria di Maxwell) è, dal punto di vista della teoria di Lorentz, incompleto, e dev'essere completato con un tensore aggiuntivo, che dipende essenzialmente dal campo "nascosto" della materia, ma in una certa misura tuttavia ancora dal campo maxwelliano. Resta da vedere se questo tensore aggiuntivo possa essere calcolato per via puramente fenomenologica; si può tuttavia dimostrare ugualmente che la corrente d'energia $\mathfrak{S}$ e la densità di energia W del tensore di Minkowski non sono influenzate da quello, che la densità di impulso si riduce al valore $\mathfrak{g} = (1/c^2)\mathfrak{S}$ (Eq. 38 e 39), e quindi la condizione (1) ora viene estesa dal vuoto anche al campo di Maxwell nella materia.

§ 3. "Spianamento" delle equazioni di Lorentz

A un corpo qualunque, isotropo o anisotropo, sia imposto un certo campo elettromagnetico. Per evitare certe difficoltà nell'applicazione del teorema di Gauss, la densità del corpo al contorno non vada a zero con un salto, ma con continuità. Ci basiamo sulle equazioni di Lorentz (in unità pratiche), nelle quali i campi microscopici di Lorentz rapidamente variabili saranno indicati con lettere minuscole ($\mathfrak{e}$, $\mathfrak{b} = \mu_o \cdot \mathfrak{h}$ etc.). Nella notazione tetradimensionale, con

$$\text{la corrente di convezione } s = \{\rho\mathfrak{v}, ic\rho\} \tag{5}$$

$$\text{e il tensore di campo } f = \{\mathfrak{b}, -(i/c)\mathfrak{e}\} \tag{6}$$

si hanno le equazioni di campo:

$$\mu_0 s = \Delta iv f \tag{7}$$

$$0 = \Delta iv f^*. \tag{8}$$

Raccogliamo la densità di forza $\mathfrak{k} = \rho\mathfrak{e} + [\rho\mathfrak{v}, \mathfrak{b}]$ e la densità di potenza $q = (\rho\mathfrak{v}, \mathfrak{e})$ nella densità di forza tetradimensionale

$$l = \{\mathfrak{k}, (i/c)q\}, \tag{9}$$

che si può rappresentare come prodotto vettore di s e f:

$$l = [sf]. \tag{10}$$

Con le (7,8) e la regola di calcolo

$$[\Delta iv f f] = [\Delta iv f^* f^*] - \Delta iv[[ff]]^6$$

si ottiene dalla (10) il tensore di energia-impulso di Lorentz:

$$l = -\Delta iv\left[\left[f\,\frac{f}{\mu_o}\right]\right]. \tag{11}$$

---

[6] *[[FH]] è ilprodotto tensoriale* $[[FH]]_{ik} = \sum_{s=1}^{4} F_{is}H_{ks} - \frac{1}{2}\,\delta_{ik}(FH)$, *vedi Laue*[3] *pp. 79-81.*

Confrontiamo alle equazioni di Lorentz (7,8) le equazioni di Maxwell. Con

la tetracorrente $S = \{j, ic\rho_{Ma}\}$ (12)

il tensore di campo $F = \{\mathfrak{B}, -\frac{i}{c}\mathfrak{E}\}$ (13)

il tensore di spostamento $H = \{\mathfrak{H}, -ic\mathfrak{D}\}$ (14)

e il tensore di magnetizzazione $M = \{\mathfrak{M}, ic\mathfrak{P}\}$, (15)

che riassume la polarizzazione e la magnetizzazione definite da $\mathfrak{D} = \varepsilon_0\mathfrak{E} + \mathfrak{P}$, $\mathfrak{B} = \mu_0(\mathfrak{H} + \mathfrak{M})$, le equazioni di Maxwell si scrivono:

$$S = \Delta ivH \tag{16}$$

$$0 = \Delta ivF^*. \tag{17}$$

Interviene inoltre l'"equazione d'accoppiamento"

$$F = \mu_0(H + M). \tag{18}$$

Mediante "spianamento" delle equazioni di Lorentz risultano, com'è noto, le equazioni di Maxwell[7]. Questo spianamento (d'ora innanzi indicato con una sopralineatura) poiché come media su un (piccolo) volume spaziotemporale rappresenta un'operazione Lorentz-invariante, si può immediatamente eseguire in notazione tetradimensionale, con la quale tutto guadagna in chiarezza.

Per questo motivo ci si consenta d'esprimere in un paio di righe con notazione tetradimensionale il ben noto procedimento di media delle equazioni di Lorentz:

L'equazione di Lorentz (8) mediata, vale a dire $0 = \Delta iv\overline{f^*}$, è identica alla (17), quando si ponga

$$\bar{f} = F. \tag{19}$$

Questa è la nota relazione $\bar{\mathfrak{e}} = \mathfrak{E}$, e $\bar{\mathfrak{b}} = \mu_o\bar{\mathfrak{h}} = \mathfrak{B}$. Si ottiene poi la media dell'equazione (7) tenendo conto delle (19,18,16):

---

[7] R.Becker, Theorie der Elektrizität, Vol. II, Berlino 1933, p. 110. F.Sauter, Z. Physik **126**, 207 (1949).

$$s = \Delta iv \frac{F}{\mu_0} = \Delta iv(H + M) = S + \Delta ivM. \qquad (20)$$

Questa è la relazione $\overline{\rho\mathfrak{v}} = j + \dot{\mathfrak{P}} + \mathrm{rot}\mathfrak{M}$, e $\bar{\rho}_{Lor} = \rho_{Ma} - \mathrm{div}\mathfrak{P}$.

§ 4. Il tensore d'energia-impulso macroscopico

Poniamoci ora dal punto di vista che le corrette densità macroscopiche di forza e di potenza devono essere calcolate non dalle equazioni di Maxwell, ma dalla densità di forza di Lorentz (11) mediata. Il risultato in certi casi si discosterà da quello solito di Maxwell. È vero che, secondo il § 3, le equazioni di Maxwell risultano da quelle di Lorentz effettuando la media, ma lì si tratta di una forma lineare nei campi, eseguendo la media della quale le oscillazioni medie s'annullano. Nel caso delle forme quadratiche, come per la densità di forza, non ci si deve senz'altro aspettare una siffatta corrispondenza tra la forma maxwelliana e la forma lorentziana mediata. Le due differiranno per le medie dei quadrati delle oscillazioni, e nel seguito dovremo occuparci di quanto queste ultime giochino un ruolo, ovvero possano essere trascurate.

Come detto, scorgiamo la corretta densità macroscopica di forza L nell'espressione (11) mediata:

$$L = \bar{l} = - \Delta iv \overline{\left[\left[f \frac{f}{\mu_o}\right]\right]}, \qquad (21)$$

al posto della quale con l'abbreviazione

$$\frac{1}{\mu_0} \overline{[[ff]]} = \Theta \qquad (22)$$

possiamo scrivere semplicemente:

$$L = - \Delta iv\Theta. \qquad (23)$$

Il tensore Θ è il tensore d'energia-impulso mediato del campo totale, comprensivo del campo interno "nascosto" della materia; esso è sempre simmetrico. Θ andrebbe ancora completato con un tensore "meccanico" (cioè non elettrodinamico), che è necessario per la stabilità del corpo, ma che qui sopprimeremo.

La media di [[ff]] richiesta nella (22) non si può eseguire così facilmente come nel caso delle equazioni di campo lineari, poiché si ha adesso a che fare con una forma bilineare delle componenti del tensore, che non possono essere mediate indipendentemente l'una dall'altra. Per la trattazione ulteriore introduciamo l'oscillazione ξ del campo attorno al suo valore macroscopico $\bar{f}$: $\xi = f - \bar{f}$, ovvero con la (19):

$$f = F + \xi. \tag{24}$$

Se sostituiamo questa nella (22), poiché $\bar{\xi} = 0$, risulta:

$$\Theta = \frac{1}{\mu_0}[[FF]] + \frac{1}{\mu_0}\overline{[[\xi\xi]]} = T_0 + \tau_0. \tag{25}$$

In questa espressione Θ si spezza in un tensore "maxwelliano" $T^0 = (1/\mu_0)[[FF]]$, che dipende solo dai campi di Maxwell, e in un "tensore delle oscillazioni" $\tau^0 = (1/\mu_0)\overline{[[\xi\xi]]}$, nel quale le quantità di Maxwell non intervengono più esplicitamente. Ma τ^0 dipende ancora implicitamente da queste, come si dimostra subito e come appare immediatamente chiaro: infatti il campo macroscopico, che è impresso sul corpo dalle condizioni sperimentali non si sovrappone affatto in maniera semplicemente additiva al campo microscopico ξ_0 originariamente presente nella materia, ma lo modifica. Da ciò origina proprio il fenomeno della polarizzazione e della magnetizzazione.

Che in effetti il tensore T^0 di per se stesso (senza τ^0) non possa valere come rappresentante del campo di Maxwell (nè allo stesso modo il tensore tridimensionale degli sforzi in esso contenuto, nel quale in verità si inciampa talvolta nelle trattazioni elementari degli sforzi di Maxwell[8], vedi in proposito l'equazione (26)), l'insegna uno sguardo alla quarta riga dello schema delle componenti

$$\{T^0_{41}, T^0_{42}, T^0_{43}\} = \frac{i}{c}\mathfrak{S}^0 = \frac{i}{c}\left[\mathfrak{E}\,\frac{\mathfrak{B}}{\mu_0}\right],\ T^0_{44} = -W^0 = -\frac{1}{2}\left(\varepsilon_0 E^2 + \frac{B^2}{\mu_0}\right),$$

che non solo contraddice il criterio della velocità di radiazione (vedi (3) e (4)), ma in certi casi addirittura il principio dell'energia. Quest'ultimo fatto risulta immediatamente dalla discussione della densità di potenza risultante da T^0, alla quale ora ci dedicheremo, e che ci darà inoltre un suggerimento su come il tensore totale Θ sarebbe da suddividere più convenientemente in un tensore "macroscopico" ed in uno "microscopico".

---

[8] *Rassegna dei tensori concorrenti in* E.Madelung, Die mathem. Hilfsmittel des Physikers, Berlin 1936, pp. 259 e 277.

§ 5. Scomposizione più appropriata del tensore totale Θ

Per esprimere la densità di forza (23) con i campi di Maxwell introduciamo la (25) e utilizziamo la regola di calcolo

$$- \Delta iv[[FF]] = [\Delta iv F, F]$$

(poiché $\Delta iv F^* = 0$). Tenendo presente le (18,16) essa si può scrivere ulteriormente:

$$L = \left[\Delta iv \frac{F}{\mu_0} F\right] - \Delta iv \boldsymbol{\tau}^0 = [\Delta iv(H + M), F] - \Delta iv \boldsymbol{\tau}^0$$

$$= [SF] + [\Delta iv M, F] - \Delta iv \boldsymbol{\tau}^0.$$

Usando le espressioni (12,15,13), risulta quindi per la densità di forza spaziale L_r:

$$L_r = -\Delta iv_r \Theta = \{\rho_{Ma}\mathfrak{E} + [j\mathfrak{B}] - \mathrm{div}\mathfrak{P}\cdot\mathfrak{E} + [\dot{\mathfrak{P}} + \mathrm{rot}\mathfrak{M}, \mathfrak{B}]\} - \Delta iv_r \boldsymbol{\tau}^0 \quad (26)$$

e per la componente temporale $L_4 = i/c \times$ densità di potenza:

$$L_4 = -\Delta iv_4 \Theta = \frac{i}{c}\{(j\mathfrak{E}) + (\dot{\mathfrak{P}} + \mathrm{rot}\mathfrak{M}, \mathfrak{E})\} - \Delta iv_4 \boldsymbol{\tau}^0. \quad (27)$$

In queste il contributo del tensore T^0 è raggruppato nelle parentesi graffe. Il suo contributo alla densità di forza spaziale (26), nella quale la forza sulla carica vera e sulla corrente di conduzione è ancora completata da una forza che agisce sulla carica libera e sulla corrente di polarizzazione-magnetizzazione, può forse non prestarsi immediatamente alla critica. Nulla ci può tuttavia distrarre dal fatto che questa forma della densità di forza di Maxwell, che a dire il vero s'incontra talvolta anche in trattazioni elementari[6)], senza il termine aggiuntivo $- \Delta iv_r \boldsymbol{\tau}^0$ è inammissibile. Ciò segue infatti immediatamente dalla densità di potenza (27), nella quale compare ora in modo conseguente accanto alla potenza della corrente di conduzione j anche quella della corrente di polarizzazione-magnetizzazione, e questa forma della potenza senza il termine $-\Delta iv_4 \boldsymbol{\tau}^0$ contraddice proprio l'esperienza nel caso dei mezzi dielettrici più semplici. Limitiamoci infatti al caso di materiali con costante dielettrica e permeabilità indipendenti dalla temperatura senza perdite dielettriche e magnetiche[9]; allora si ha secondo l'esperienza come unica potenza efficace del campo solo quella dovuta alla corrente di conduzione j, che viene persa dal campo sotto forma di calore, e nessuna potenza corrispondente alla corrente di polarizzazione-magnetizzazione. Ma ciò è in contraddizione con il termine $(\dot{\mathfrak{P}} + \mathrm{rot}\mathfrak{M}, \mathfrak{E})$ nella (27), che in generale è diverso da zero[10]. La contraddizione deve essere eliminata con il tensore aggiuntivo $\boldsymbol{\tau}^0$, quindi mediante la condizione

$$\frac{i}{c}(\dot{\mathfrak{P}} + \mathrm{rot}\mathfrak{M}, \mathfrak{E}) - \Delta iv_4 \boldsymbol{\tau}^0 = 0, \tag{28}$$

che rende conto del fatto che la potenza della corrente di polarizzazione-magnetizzazione non si trasforma in calore, ma viene lì per lì subito ripresa dal corpo come energia elettrica. La suddivisione (28) nelle due potenze che si compensano è certamente innaturale: essa deriva dalla scomposizione (25) nei due tensori T^0 e $\boldsymbol{\tau}^0$, che evidentemente non è appropriata.

Ma si giunge facilmente ad una scomposizione più conveniente a partire dalla condizione (28). Questa con notazione tetradimensionale si scrive

$$- \Delta iv_4 [[FM]] - \Delta iv_4 \boldsymbol{\tau}^0 = 0 \tag{28a}$$

e afferma che il tensore

$$\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\tau}^0 + [[FM]] \tag{29}$$

è privo di potenza: $\Delta iv_4 \boldsymbol{\tau} = 0$. Ciò (e anche un'occhiata alla componente T^0_{44}) suggerisce che a $\boldsymbol{\tau}^0$ sia inerente ancora una parte importante del campo di Maxwell, cioè la parte di "polarizzazione"

---

[9]*L'ultima affermazione significa: $\mathfrak{D}$ e $\mathfrak{B}$ funzioni lineari (reali) di $\mathfrak{E}$ e $\mathfrak{H}$ con coefficienti costanti nel tempo.*

[10]*Come semplice illustrazione di ciò si consideri un filo metallico cilindrico di suscettività magnetica χ, percorso da una corrente uniforme j. Qui si ha $\dot{\mathfrak{P}} = 0$, ma $(\mathfrak{E}\mathrm{rot}\mathfrak{M}) = \chi(\mathfrak{E}\mathrm{rot}\mathfrak{H}) = \chi(j\mathfrak{E})$ è diverso da zero e rappresenterebbe una potenza distribuita uniformemente sull'intera sezione; parimenti si avrebbe sulla superficie del filo una potenza superficiale (negativa), poiché ivi $\mathfrak{M}$ presenta un rotore superficiale.*

$[[FM]]$ con segno negativo, che è opportuno estrarre. Otteniamo proprio questo passando al tensore τ di cui sopra, che consideriamo come rappresentante migliore del campo microscopico "nascosto", e che di conseguenza introdurremo nella scomposizione (25). Risulta allora:

$$\Theta = T^0 - [[FM]] + \tau = T + \tau \tag{30}$$

e il tensore che qui interviene (vedi (18))

$$T = T^0 - [[FM]] = \left[\left[F\frac{F}{\mu_0}\right]\right] - [[FM]] = [[FH]] \tag{31}$$

al quale siamo condotti in modo abbastanza cogente, non è nient'altro che il tensore di Minkowski, con lo schema delle componenti di facile comprensione:

$$\begin{array}{c|c} \mathfrak{T} & ic\mathfrak{g} = ic[\mathfrak{D}\mathfrak{B}] \\ \hline \frac{i}{c}\mathfrak{S} = \frac{i}{c}[\mathfrak{E}\mathfrak{H}] & -W = -\frac{1}{2}(\mathfrak{E}\mathfrak{D} + \mathfrak{H}\mathfrak{B}) \end{array} . \tag{32}$$

Riteniamo più appropriata la scomposizione (30) nei tensori T e τ proprio perché la potenza totale sarà data ora solo da T:

$$L_4 = -\Delta iv_4(T + \tau) = -\Delta iv_4 T = \frac{i}{c}(j\mathfrak{E}).$$

§ 6. Le componenti di τ

Arriviamo subito alla meta prefissata se ci limitiamo ancora a mezzi con coefficienti ε_{ik} e μ_{ik} indipendenti dalla temperatura senza perdite dielettriche e magnetiche. Dalla termodinamica[11] sappiamo infatti che nel sistema a riposo la densità d'energia macroscopica di tali mezzi nel campo di Maxwell, data da $-\Theta_{44}$, si suddivide in una parte elettromagnetica della forma

$$U_1 = \frac{1}{2}(\mathfrak{E}\mathfrak{D} + \mathfrak{H}\mathfrak{B}), \tag{33}$$

che si può quindi esprimere completamente con le quantità di Maxwell, e in una parte dipendente dalla temperatura ϑ

$$U_2 = f(\vartheta), \tag{34}$$

[11] R. Becker, Theorie der elektrizität, Vol. I, Berlino 1944, p.229.

nella quale i campi di Maxwell non intervengono più. Si ha quindi[12]

$$-\Theta_{44} = U_1 + U_2 = U_1 + f(\vartheta). \tag{35}$$

Poiché U_1 coincide con la componente $-T_{44}$ (vedi ((32)), al posto della (35) possiamo anche scrivere:

$$\Theta_{44} = T_{44} - f(\vartheta).$$

Il confronto con la (30), ossia $\Theta = T + \tau$, mostra che

$$\tau_{44} = -f(\vartheta) \tag{36}$$

ed è quindi indipendente dal campo di Maxwell, ed evidentemente rappresenta la parte elettromagnetica dell'energia interna presente originariamente nella sostanza; in altri termini: $-\tau_{44}/c^2$ è la parte elettromagnetica della densità di massa del nostro mezzo.

Se ora la sostanza è attraversata da un'onda piana di Maxwell, secondo il risultato termodinamico (35) avanza assieme al campo solo la parte U_1 dell'energia interna (35) che dipende dai campi macroscopici $\mathfrak{E}$ ed $\mathfrak{H}$, e non la parte U_2 dipendente dalla temperatura[13] e, se $\mathfrak{w}$ indica la velocità di radiazione dell'onda, dà luogo alla corrente d'energia $\mathfrak{S} = U_1\mathfrak{w} = (\mathfrak{E}\mathfrak{D})\mathfrak{w}$. Poiché per la legge della velocità di radiazione $\mathfrak{w}$ dev'essere identica al vettore $\nu\lambda\mathfrak{s}$ dell'equazione (3), $\mathfrak{S}$ ha necessariamente la forma:

$$\mathfrak{S} = (\mathfrak{E}\mathfrak{D})\mathfrak{w} = (\mathfrak{E}\mathfrak{D})\nu\lambda\mathfrak{s} = [\mathfrak{E}\mathfrak{H}]. \tag{37}$$

Questa corrente d'energia deve essere contenuta nella componente $\Theta_{4\alpha}$ ($\alpha = 1,2,3$) del tensore totale, che si scompone perciò in

$$\Theta_{4\alpha} = \frac{i}{c}\left([\mathfrak{E}\mathfrak{H}]_\alpha + \varphi_\alpha\right),$$

dove φ_α è una corrente d'energia che non dipende più da $\mathfrak{E}$ e da $\mathfrak{H}$. Ma poiché $(i/c)[\mathfrak{E}\mathfrak{H}]_\alpha$ per la (32) è proprio la componente $T_{4\alpha}$ del tensore di Minkowski, l'ultima equazione si può anche scrivere:

---

[12] *A rigore solo una parte di $U_2 = f(\vartheta)$ è contenuta in $-\Theta_{44}$, l'altra parte di U_2 riguarda il trascurato tensore di energia-impulso "meccanico", che è tuttavia irrilevante nel seguito.*

[13] *Poiché per ipotesi $\partial\varepsilon/\partial\vartheta = \partial\mu/\partial\vartheta = 0$, la temperatura rimane costante al variare del campo, vedi § 8.*

$$\Theta_{4\alpha} = T_{4\alpha} + \frac{i}{c}\varphi_\alpha$$

e il confronto con la (30) dà: la componente

$$\boldsymbol{\tau}_{4\alpha} = \frac{i}{c}\varphi_\alpha$$

è indipendente dal campo di Maxwell (non va scambiata con $\boldsymbol{\tau}_{\alpha 4}$, perché $\boldsymbol{\tau}$ è non simmetrico!). Scriviamo ancora una volta il risultato:

$$\Theta_{4\alpha} = \frac{i}{c}[\mathfrak{E}\mathfrak{H}]_\alpha + \boldsymbol{\tau}_{4\alpha} \quad \left(= \frac{i}{c} \times \text{ corrente d'energia}\right); \tag{38}$$

si ottiene così per la simmetria di Θ:

$$\Theta_{\alpha 4} = \Theta_{4\alpha} = \frac{i}{c}[\mathfrak{E}\mathfrak{H}]_\alpha + \boldsymbol{\tau}_{4\alpha}(\,= ic \times \text{ densità d'impulso}) \tag{39}$$

naturalmente con componenti $\boldsymbol{\tau}_{4\alpha}$ sempre indipendenti dal campo.

Le due equazioni (38,39) contengono l'importante risultato: *la corrente d'energia causata dal campo di Maxwell è completamente descritta dal vettore di Poynting* $\mathfrak{S} = [\mathfrak{E}\mathfrak{H}]$*, mentre la densità di impulso ad essa associata è descritta dal vettore* $\mathfrak{g} = 1/c^2[\mathfrak{E}\mathfrak{H}]$. *Abbiamo così giustificato la relazione (1) anche per il campo di Maxwell nella materia.*

Le $\boldsymbol{\tau}_{4\alpha}$ ($\alpha = 1,2,3$) esprimono la corrente d'energia ($\times\ i/c$), ovvero la densità d'impulso ($\times\ ic$) che il campo interno della materia ha originariamente. Probabilmente nel sistema a riposo esse sono nulle nella maggior parte dei casi, cosa che però non si riesce a confermare tanto facilmente in modo puramente fenomenologico. Tuttavia si può dimostrare facilmente che il loro integrale spaziale esteso a tutto il corpo si annulla. Poiché infatti $\boldsymbol{\tau}_{44}$ non dipende dal campo di Maxwell e quindi $\partial\boldsymbol{\tau}_{44}/\partial t = 0$, l'equazione (28a), ossia $-\Delta iv_4\boldsymbol{\tau} = 0$, si riduce all'affermazione che il vettore tridimensionale con componenti $\boldsymbol{\tau}_{41}$, $\boldsymbol{\tau}_{42}$, $\boldsymbol{\tau}_{43}$ è ovunque privo di sorgenti. Poiché esso si annulla al di fuori del corpo (lì assieme a ξ e ad M sarà anche $\boldsymbol{\tau} = 0$), è nullo per un noto teorema l'integrale di volume su ogni componente. Quindi deve anche succedere che il campo nascosto del corpo non può avere nel sistema a riposo alcun impulso totale[14].

---

[14] *Sarebbero tuttavia concepibili una corrente d'energia interna*

Non tutte le componenti di τ sono tuttavia indipendenti dal campo di Maxwell, come già mostra un'occhiata a

$$\tau_{14} = \tau_{41} + T_{41} - T_{14} = \tau_{41} + (i/c)\{[\mathfrak{E}\mathfrak{H}]_1 - c^2[\mathfrak{D}\mathfrak{B}]_1\}.$$

Resterà imprecisato se questa dipendenza si possa trovare per tutti i $\tau_{\alpha\beta}$ per via puramente fenomenologica senza addentrarsi nella struttura atomica della materia. Sia come sia, questo è in ogni caso chiaro: che *il tensore di Minkowski di per sè solo non può valere come rappresentante del campo di Maxwell.*

§ 7. Densità di forza e forza risultante

Con il risultato (39) le componenti L_α ($\alpha = 1,2,3$) della densità di forza spaziale, tenendo conto che $\tau_{4\alpha}$ è indipendente dal tempo, si scrivono ora:

$$L_\alpha = -\sum_{s=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_s}\Theta_{\alpha s} - \frac{\partial}{\partial x_4}\Theta_{\alpha 4} = -\sum_{s=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_s}\Theta_{\alpha s} - \frac{\partial}{\partial t}\frac{\mathfrak{G}_\alpha}{c^2}$$

o riassunte in forma vettoriale

$$L_r = -\,\mathfrak{div}\ p - \frac{\partial}{\partial t}\frac{\mathfrak{G}}{c^2}\ . \qquad (40)$$

Il primo termine è la reazione degli sforzi, l'altro il rinculo per la variazione dell'impulso della radiazione.

Per esprimere la densità di forza con le grandezze di campo di Maxwell la cosa migliore è ripartire da

$$L = -\,\Delta iv(T + \tau) = -\,\Delta iv\ [[FH]] - \Delta iv\tau. \qquad (41)$$

Si deve qui tuttavia osservare che $-\,\Delta iv\ [[FH]]$ non può essere trasformato senz'altro nel prodotto vettoriale $[\Delta ivH,F]$, perché per due esavettori qualsiansi F ed H vale (vedi Laue[3)], p. 80):

$$-\,\Delta iv_k[[FH]] + [\Delta ivF^*,H^*]_k - [\Delta ivH,F]_k$$
$$= -\frac{1}{2}\sum_{\alpha\beta}\left(H_{\alpha\beta}\frac{\partial}{\partial x_k}F_{\alpha\beta} - F_{\alpha\beta}\frac{\partial}{\partial x_k}H_{\alpha\beta}\right) = -\frac{1}{2}\sum_{\alpha\beta} H^2_{\alpha\beta}\frac{\partial}{\partial x_k}\frac{F_{\alpha\beta}}{H_{\alpha\beta}}\ . \qquad (42)$$

---

chiusa del campo nascosto, ed un momento angolare ad essa associato.

La somma che sta a destra si annulla quando H è una funzione lineare di F con coefficienti costanti di particolare simmetria, vale a dire $H_{\alpha\beta} = \sum_{\gamma\delta} \lambda^{\gamma\delta}_{\alpha\beta} F_{\gamma\delta}$ con $\lambda^{\gamma\delta}_{\alpha\beta} = \lambda^{\alpha\beta}_{\gamma\delta}$. Queste condizioni sono soddisfatte per i nostri tensori particolari F ed H, a meno della costanza dei $\lambda^{\gamma\delta}_{\alpha\beta}$, che al contorno del corpo, dove la densità per ipotesi deve scendere a zero con continuità, vanno viste come funzioni del punto. Perciò la somma nella (42) si annulla nella componente temporale $k = 4$, ma in generale non si annulla nelle componenti spaziali $k = 1,2,3$.

Tenendo conto di ciò dalla (41) e da $[\Delta iv H,F] = [SF]$ segue, per la densità di forza spaziale L_r (in sostanze isotrope):

$$L_r = \rho_{Ma}\cdot\mathfrak{E} + [j\mathfrak{B}] - \frac{1}{2}\,(E^2\mathrm{grad}\varepsilon + H^2\mathrm{grad}\mu) - \Delta iv_r\boldsymbol{\tau} \qquad (43)$$

e per la componente temporale, poiché $\Delta iv_4\boldsymbol{\tau} = 0$:

$$L_4 = -\,\Delta iv_4 T = [SF]_4 = \frac{i}{c}\,(j\mathfrak{E}). \qquad (44)$$

La forza aggiuntiva $-\,\Delta iv_r\boldsymbol{\tau}$ nella (43) non si può calcolare completamente con i risultati precedenti, poiché non tutti i $\boldsymbol{\tau}_{\alpha\beta}$ sono abbastanza conosciuti. Tuttavia ancora un contributo parziale può essere espresso con il campo di Maxwell, ossia (ad esempio per la prima componente) il termine

$$\frac{\partial}{\partial x_4}\boldsymbol{\tau}_{14} = \frac{\partial}{\partial x_4}(\boldsymbol{\tau}_{41} + T_{41} - T_{14}) = \frac{\partial}{\partial x_4}(T_{41} - T_{14}).$$

Dalle componenti (32) risulta allora

$$-\Delta iv_1\boldsymbol{\tau} = -\,\frac{\partial}{\partial x_4}\boldsymbol{\tau}_{14} - \sum_{\alpha=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\boldsymbol{\tau}_{1\alpha}$$

$$= \frac{\partial}{\partial t}[\mathfrak{D}\mathfrak{B}]_1 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}[\mathfrak{E}\mathfrak{H}]_1 - \sum_{\alpha=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\boldsymbol{\tau}_{1\alpha}. \qquad (45)$$

E' notevole che con la (45) venga rimossa una difficoltà che emerge nella teoria elementare degli sforzi di Maxwell. È noto che in essa si mantiene solo il primo termine $(\partial/\partial t)[\mathfrak{D}\mathfrak{B}]$ dell'espressione (45)[15], che anche nel vuoto non si annulla e che in questo caso per la (43) produrrebbe un'incomprensibile "forza

---

[15]*E per considerazioni energetiche ancora il termine aggiuntivo* $(1/2)\mathrm{grad}(E^2\frac{d\varepsilon}{d\sigma}\sigma)$ *(vedi R. Becker*[9]*, p. 62), che probabilmente è contenuto nell'ultima somma della* (45).

motrice del vuoto" del valore $L_r = (\partial/\partial t)\varepsilon_0\mu_0[\mathfrak{E}\mathfrak{H}] = (\partial/c^2\partial t)[\mathfrak{E}\mathfrak{H}]$. Si elude talvolta questo dilemma in modo alquanto arbitrario, sottraendo fin dall'inizio questa forza del vuoto dalla densità di forza (vedi R. Becker[9], p. 237). Proprio questa correzione interviene automaticamente mediante il secondo termine della (45).

L'indeterminazione dei $\tau_{\alpha\beta}$ che ancora restano nella (45) non disturba più quando costruiamo la risultante sull'intero corpo K:

$$\mathfrak{K} = \int_K L_r dv = -\int_K \Delta iv_r(T + \tau)dv.$$

Allora una parte di questo integrale di volume si può trasformare in un integrale di superficie esteso alla superficie F del corpo "esterna", che si sviluppa interamente nel vuoto, dove τ è nullo, e poiché per la simmetria di Θ si ha inoltre

$$\frac{\partial}{\partial x_4}(T + \tau)_{\alpha 4} = \frac{\partial}{\partial x_4}(T + \tau)_{4\alpha} = \frac{\partial}{\partial x_4}T_{4\alpha} = \frac{1}{c^2}\dot{\mathfrak{S}}_\alpha,$$

risulta:

$$\mathfrak{K} = \int_F \mathfrak{T}(\mathfrak{n})df - \int_K \frac{\dot{\mathfrak{S}}}{c^2}dv. \tag{46}$$

$\mathfrak{T}(\mathfrak{n})$ rappresenta lo sforzo risultante da T che agisce su F ($\mathfrak{n}$ è la normale alla superficie), ed ha la forma

$$\mathfrak{T}(\mathfrak{n}) = \mathfrak{E}(\mathfrak{D}\mathfrak{n}) + \mathfrak{H}(\mathfrak{B}\mathfrak{n}) - \frac{\mathfrak{n}}{2}(\mathfrak{E}\mathfrak{D} + \mathfrak{H}\mathfrak{B}),$$

dove ancora si può porre $\mathfrak{D} = \varepsilon_0\mathfrak{E}$ e $\mathfrak{B} = \mu_0\mathfrak{H}$, perché F giace interamente nel vuoto.

Per un sistema completo (cioè nessuna carica e nessuna corrente fuori dal corpo K) F può essere mandata all'infinito , e allora l'integrale di superficie si annulla e l'integrale di volume va esteso all'intero spazio:

$$\mathfrak{K} = -\frac{\partial}{\partial t}\int \frac{\mathfrak{S}}{c^2}dv = -\frac{\partial}{\partial t}\int \mathfrak{g}dv. \tag{47}$$

Questo è il rinculo che il corpo avverte, quando cambia l'impulso della radiazione dentro o fuori dal corpo, come per l'invio di un raggio di luce (legge del baricentro). Le (46) e (47) sono identiche alle formule della teoria di Maxwell (corrette riguardo alla forza del vuoto!). Esse risultano adesso del tutto spontaneamente, senza che si abbia prima da togliere la forza del vuoto dalla densità di forza con ragioni più o meno buone.

§ 8. Generalizzazione a mezzi qualsiansi

Non si può tacere il fatto che a una generalizzazione della nostra dimostrazione a mezzi con coefficienti ε e μ qualsiansi (dipendenti dalla temperatura) si oppongono alcune difficoltà, anche se forse non insuperabili. Una di queste consiste nel fatto che con dispersioni elettriche e magnetiche ovvero con effetti elettro- e magnetocalorici l'espressione (28), quindi $\Delta iv_4 \tau$, non s'annulla più, poiché essa nella (27) deve ora dare proprio la potenza dissipata in aggiunta. Infatti, per esempio l'effetto calorico di una sostanza paraelettrica, (suscettività χ proporzionale a $1/\vartheta$) sarà descritto dal termine $(\dot{\mathfrak{P}}\mathfrak{E})$, come si desume dalla termodinamica[9], secondo la quale una sostanza per variazione isoterma del campo cede il calore $dQ = - \vartheta \frac{d\chi}{d\vartheta} EdE$. Per $\chi = 1/\vartheta$ sarà quindi $dQ = \chi EdE = EdP$, e nell'unita' di tempo $dQ/dt = E\dot{P}$. Se ora, come in questo e in altri casi, la potenza del tensore τ non è nulla, la decomposizione $\Theta = T + \tau$, sulla quale si fondava la nostra dimostrazione, non appare più conforme ai fatti.

Un'altra difficoltà risulta dal fatto che, per coefficienti ε e μ dipendenti dalla temperatura, la quantità $(1/2)(\mathfrak{E}\mathfrak{D} + \mathfrak{H}\mathfrak{B})$ non rappresenta il contributo elettromagnetico all'energia interna ($=U_1$), ma quello all'energia libera.

Queste ed altre ragioni rendon vano il trasferimento per passi della dimostrazione su data a mezzi qualsiansi.

Würzburg, Physikal. Inst. d. Universität.

(Giunto in redazione il 9 maggio 1952.)