La velocità della corrente d'energia nel campo elettromagnetico[1]

Hans-Georg Schöpf[2]

(Ricevuto il 5 Dicembre 1956)

Come v. Laue [1] ha osservato, la proprietà di un punto materiale di muoversi in un mezzo materiale assieme ad un'onda elettromagnetica deve essere invariante per trasformazioni di Lorentz. Ciò significa che in questo caso il rapporto tra la densità di corrente d'energia e la densità d'energia deve obbedire al teorema di Einstein di addizione delle velocità. (Adempimento della relazione $\mathfrak{S}/W$). Nel § 1 diamo le condizioni a ciò necessarie e sufficienti in primo luogo per un tensore d'energia-impulso arbitrario. Nel § 2 le applichiamo al tensore di Minkowski-Dällenbach, e mostriamo che per un campo di radiazione puro la relazione $\mathfrak{S}/W$ è soddisfatta. Inoltre nel § 3 dimostriamo che sono concepibili anche altre ipotesi per il tensore d'energia-impulso elettromagnetico per le quali ciò accade.

§ 1. La relazione $\mathfrak{S}/W$

È noto che con l'impiego delle coordinate di Minkowski la densità d'energia W, i vettori della densità di corrente d'energia $\mathfrak{S}$ e della densità d'impulso $\mathfrak{g}$ si riuniscono insieme al tensore spaziale degli sforzi σ nel tensore d'energia-impulso secondo lo schema seguente:

$$(T) = \left(\begin{array}{c|c} \sigma & -ic\mathfrak{g} \\ \hline -\frac{i}{c}\mathfrak{S} & W \end{array} \right) . \tag{1}$$

Diciamo che la relazione $\mathfrak{S}/W$ è soddisfatta quando la quantità

$$\mathfrak{w} = \mathfrak{S}/W \tag{2}$$

---

[1] Zeitschr. f. Phys. **148**, 417 (1957).

[2] *Institut für Theoretische Physik der Universität Greifswald.*

si trasforma secondo il teorema di Einstein di addizione delle velocità. Come Møller [2] ha dimostrato, per questo è necessario e sufficiente che la (1) soddisfi la relazione

$$T_{ik} = T_{4k}(T_{in}T_{4n})/(T_{4m}T_{4m}) \ . \tag{3}$$

Per escludere velocità superluminali si deve inoltre imporre

$$M^2 =_{\mathrm{Def}} T_{4m}T_{4m} > 0 \ . \tag{4}$$

Le componenti della tetravelocità corrispondenti a $\mathfrak{w}$ si possono allora scrivere nella forma

$$V_k = icT_{4k}/M \qquad k = 1,2,3,4 \ . \tag{5}$$

Dalla (3) risulta:

$$T_{ik}:T_{4k} = T_{in}:T_{4n} \ . \tag{6}$$

Partiamo dall'identità

$$T_{ik} = \frac{T_{ik}M}{icT_{4k}} V_k \ ; \tag{7}$$

allora la (6) mostra che la frazione al secondo membro non dipende dall'indice k, e possiamo scrivere

$$T_{ik} = U_i V_k \ , \tag{8}$$

dove le U_i sono componenti di un tetravettore, poiché ciò risulta per le V_k quando vale la (3). Se il tensore si presenta nella forma

$$T_{ik} = X_i Y_k \ , \tag{9}$$

ponendo

$$V_k = icY_k/(Y_n Y_n)^{1/2}$$

esso può essere portato alla forma (8). Poiché la (9) soddisfa in maniera più triviale la condizione (3) è quindi necessario e sufficiente per l'adempimento della relazione $\mathfrak{S}/W$ che il tensore sia rappresentabile come un prodotto diadico di due tetravettori, dove il secondo fattore, al fine d'escludere velocità superluminali, dev'essere di tipo temporale, come discende dalla (4). Quest'ultima ha per conseguenza l'esistenza d'un "sistema a riposo", nel quale tutte le componenti del tensore meno quelle dell'ultima colonna sono nulle. Inversamente se esiste un tale sistema le componenti tensoriali in un altro sistema di riferimento arbitrario si ottengono mediante una trasformazione di Lorentz a^0_{mn}:

$$T_{ik} = a^0_{in} a^0_{km} T^0_{nm} = a^0_{ni} T^0_{n4} a^0_{k4} \;;$$

ma poiché le a^0_{k4} sono proporzionali alle componenti della tetravelocità V_k di un osservatore a riposo nel sistema 0, arriviamo di nuovo alla forma (8), sicché l'esistenza di un "sistema a riposo" è anche sufficiente per l'adempimento della relazione $\mathfrak{S}/W$.

Lo stesso succede anche per la rappresentabilità del tensore nella forma

$$(T) = \left(\begin{array}{c|c} -\,g_i w_k & -ic\mathfrak{g} \\ \hline -\,\frac{i}{c}\,\mathfrak{w}W & W \end{array} \right) . \tag{10}$$

Si trova infatti facilmente una trasformazione di Lorentz che trasporta la (10) in un "sistema a riposo". D'altra parte si arriva dalla (8) alla forma (10) tenendo conto della (2) e mediante le relazioni

$$g_j = -\,U_j V_4/ic \;; \quad j,k \neq 4$$

$$T_{jk} = U_j V_k = (U_j w_k V_4)/ic = -\,g_j w_k \;.$$

Poiché allora la (10) è necessaria e sufficiente per l'adempimento della relazione $\mathfrak{S}/W$, si può proporre il metodo seguente, talvolta semplice da maneggiare: si costruiscano le quantità

$$w^j_k = icT_{jk}/T_{j4} \qquad k = 1,2,3 \quad j = 1,2,3,4 \;.$$

La relazione $\mathfrak{S}/W$ è soddisfatta quando per tutti i k vale

$$w^1_k = w^2_k = w^3_k = w^4_k = {}_{\mathrm{Def}}w_k \;,$$

dove velocità superluminali vanno naturalmente ancora scartate a posteriori.

Dalla forma che il tensore deve avere per soddisfare la relazione $\mathfrak{S}/W$ è immediatamente evidente che non solo la corrente d'energia è passibile d'una interpretazione cinematico-convettiva, ma che anche gli sforzi spaziali possono essere spiegati come un puro trasporto convettivo d'impulso. Ci si può quindi raffigurare un mezzo alle cui parti siano legati energia e impulso, e siano da queste trasportati, senza che le parti contigue interagiscano mutuamente, come accade in una corrente di materia incoerente. Nel caso speciale del tensore simmetrico si arriva alla forma del tensore d'energia-impulso cinematico, come in particolare si deve adoperare nel caso di corrente di materia incoerente,

$$T_{ik} = -\rho_0 V_i V_k$$

$$(T) = \left(\begin{array}{c|c} -\rho w_i w_k & -ic\rho\mathfrak{w} \\ \hline -ic\rho\mathfrak{w} & c^2\rho \end{array}\right) ,$$

con ρ, ρ_0 rispettivamente densità di massa e densità di massa a riposo.

§ 2. Applicazione al tensore di Minkowski-Dällenbach

Questo [3] ha la forma

$$M_{ik} = B_{is} H_{sk} + \delta_{ik} K \ . \tag{11}$$

In esso K è un invariante relativistico, mentre nei tensori antisimmetrici B ed H sono riassunti nel modo seguente i vettori tridimensionali $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{B}$ e $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{H}$ del campo elettromagnetico:

$$\begin{pmatrix} B_{23} & B_{31} & B_{12} \\ B_{41} & B_{42} & B_{43} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 & B_3 \\ iE_1 & iE_2 & iE_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} H_{23} & H_{31} & H_{12} \\ H_{41} & H_{42} & H_{43} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H_1 & H_2 & H_3 \\ iD_1 & iD_2 & iD_3 \end{pmatrix} \ . \tag{12}$$

Scritta per mezzo dei vettori di campo la (11) assume la forma

$$(M) = \left(\begin{array}{c|c} H_m B_n + E_m D_n - \delta_{mn}(\mathfrak{B}\cdot\mathfrak{H} - K) & -i(\mathfrak{D}\times\mathfrak{B}) \\ \hline -i(\mathfrak{E}\times\mathfrak{H}) & \mathfrak{D}\cdot\mathfrak{E} + K \end{array}\right) . \tag{13}$$

Rispondiamo qui alla domanda, per quale classe di soluzioni delle equazioni di Maxwell il tensore (11) soddisfi la relazione $\mathfrak{S}/W$. Esso si dovrà quindi poter rappresentare nella forma

$$M_{ik} = X_i Y_k . \tag{9a}$$

Senza restringere la generalità supponiamo che siano

$$M_{11} \neq 0 , \quad M_{44} \neq 0 . \tag{14}$$

Questa proprietà si mantiene se mediante una rotazione spaziale otteniamo che sia

$$H_1 = E_1 = 0 , \tag{15}$$

cosa che è sempre possibile. Sarà allora

$$M_{12} = M_{13} = M_{42} = M_{43} = 0 . \tag{16}$$

Evidentemente le (16), (14) e (9a) possono essere soddisfatte simultaneamente solo se $Y_2 = Y_3 = 0$, cioè quando si ha anche

$$M_{22} = M_{33} = M_{23} = M_{32} = 0 . \tag{17}$$

Dalle prime due equazioni risulta tenendo conto delle (13) e (15)

$$B_2 H_2 + D_2 E_2 = B_3 H_3 + D_3 E_3 = \mathfrak{B}\cdot\mathfrak{H} - K = -M_{11} , \tag{18}$$

mentre dalle altre due risulta:

$$B_3 H_2 + D_3 E_2 = 0 , \tag{19}$$

$$B_2 H_3 + D_2 E_3 = 0 . \tag{20}$$

Ora è compatibile con le (14) e (15) che si possa scegliere il sistema di coordinate in modo che ancora sia

$$E_2 = 0 . \tag{21}$$

Allora discende dalle (18) e (14)

$$B_2 \neq 0 , \quad H_2 \neq 0 \tag{22}$$

e quindi dalla (19)

$$B_3 = 0 . \tag{23}$$

Con queste condizioni risulta dalla (18)

$$B_2 H_2 = \mathfrak{B}\cdot\mathfrak{H} = \mathfrak{B}\cdot\mathfrak{H} - K \ , \tag{24}$$

quindi

$$K = 0 \ . \tag{25}$$

Poiché K dev'essere un invariante relativistico, dal suo annullarsi in un sistema di coordinate discende il suo annullarsi in tutti. La (25) è quindi la prima condizione necessaria per la rappresentabilità del tensore nella forma (9a).

Ma ora nel nostro sistema particolare di coordinate è

$$\mathfrak{D}\cdot\mathfrak{E} = D_3 E_3 \ .$$

Con ciò risulta inoltre secondo le (18) e (23)

$$\mathfrak{D}\cdot\mathfrak{E} = \mathfrak{B}\cdot\mathfrak{H} \ . \tag{26}$$

Anche questa è una relazione invariante, ossia

$$H_{rs} B_{rs} = 0 \ . \tag{26a}$$

Con ciò è stata trovata una seconda condizione necessaria. Del resto nella teoria di Maxwell-Minkowski per campi privi d'isteresi $H_{rs} B_{rs}$ è proporzionale all'invariante K, sicché la (25) e la (26) coincidono.

Nel nostro sistema particolare di coordinate è inoltre

$$E_1 = E_2 = B_3 = 0 \ ,$$

sicché risulta

$$\mathfrak{E}\cdot\mathfrak{B} = 0 \ . \tag{27}$$

Anche questa è una relazione invariante, ossia

$$B_{rs} \tilde{B}_{rs} = 0 \ . \tag{27a}$$

La tilde indica il tensore duale. La (27) risulta quindi la terza condizione necessaria.

Ora al posto della (21) avremmo potuto anche scegliere

$$H_3 = 0 \ . \tag{28}$$

Mediante considerazioni analoghe avremmo potuto derivare ancora le (25) e (26). Avremmo inoltre trovato che allora avrebbe dovuto essere

$$D_2 = H_1 = H_3 = 0 \ , \tag{29}$$

dalle quali discende

$$\mathfrak{D}\cdot\mathfrak{H} = 0 \ . \tag{30}$$

Poiché anche questa è una relazione invariante, ossia

$$H_{rs}\tilde{H}_{rs} = 0 \ , \tag{30a}$$

abbiamo trovato così un'ultima condizione necessaria.

Le condizioni (26), (27) e (30) sono ben familiari dalla teoria del campo di radiazione puro. Esse valgono per esempio anche nell'ottica dei cristalli, come si può capire dalla generalità dei nostri presupposti. Nel caso del tensore (11) le condizioni su citate sono assieme alla (25) non solo necessarie per l'adempimento della relazione $\mathfrak{S}/W$, ma anche sufficienti. Per dimostrarlo si deve prima mostrare che, se queste condizioni sono soddisfatte, e quando $\mathfrak{H}\cdot\mathfrak{B} = \mathfrak{E}\cdot\mathfrak{D} \neq 0$, è sempre possibile determinare un vettore tridimensionale $\mathfrak{n}$ ed un altro $\mathfrak{s}$, per i quali:

$$\mathfrak{B} = \mathfrak{n}\times\mathfrak{E} \ , \tag{31a}$$

$$\mathfrak{D} = -\mathfrak{n}\times\mathfrak{H} \ , \tag{31b}$$

$$\mathfrak{H} = \mathfrak{s}\times\mathfrak{D} \ , \tag{31c}$$

$$\mathfrak{E} = -\mathfrak{s}\times\mathfrak{B} \ . \tag{31d}$$

Per dimostrarlo si devono scegliere quelle tre equazioni, dalle quali $\mathfrak{n}$ ed $\mathfrak{s}$ possono essere determinati, e poi sostituire i valori trovati nella restante equazione, per verificare che è soddisfatta con l'utilizzo delle (26), (27) e (30). Rinunciamo a presentare questo calcolo.

Ora è evidentemente

$$\mathfrak{E}\cdot\mathfrak{s} = 0 \ , \quad \mathfrak{D}\cdot\mathfrak{n} = 0 \ , \tag{32}$$

dalle quali discende:

$$\mathfrak{E}\times\mathfrak{H} = \mathfrak{E}\times(\mathfrak{s}\times\mathfrak{D}) = W\mathfrak{s} \ , \tag{33}$$

$$\mathfrak{D}\times\mathfrak{B} = \mathfrak{D}\times(\mathfrak{n}\times\mathfrak{E}) = W\mathfrak{n} \ . \tag{34}$$

Infine si calcoli

$$\mathfrak{B}\cdot\mathfrak{H} = (\mathfrak{n}\times\mathfrak{E})\cdot(\mathfrak{s}\times\mathfrak{D}) = (\mathfrak{n}\cdot\mathfrak{s})(\mathfrak{E}\cdot\mathfrak{D}) \ ,$$

quindi:

$$\mathfrak{n}\cdot\mathfrak{s} = 1 \ . \tag{35}$$

Utilizzando le relazioni derivate si può dimostrare con passaggi algebrici alquanto lunghi e complicati, che pure rinunciamo a riprodurre, che la parte spaziale del nostro tensore, cioè

$$M_{ik} = H_i B_k + E_i D_k - \delta_{ik} W \qquad i,k = 1,2,3 \ , \tag{36}$$

si può portare nella forma

$$M_{ik} = -n_i s_k W \ . \tag{37}$$

Quindi il tensore complessivo ha la forma

$$(M) = \left(\begin{array}{c|c} -n_i s_k W & -i\mathfrak{n}W \\ \hline -i\mathfrak{s}W & W \end{array} \right) \ . \tag{38}$$

Poniamo

$$\mathfrak{n}W = c\mathfrak{g} \ , \quad \mathfrak{s} = \mathfrak{w}/c \ ;$$

allora esso assume la forma (10), che abbiamo riconosciuto come necessaria e sufficiente per la validità della relazione $\mathfrak{S}/W$.

Si deve tuttavia richiedere a parte che la velocità $\mathfrak{w}$ sia una velocità subluminale. Per ciò è necessario e sufficiente che sia

$$s^2 < 1 \ . \tag{39}$$

Per un mezzo isotropo questa condizione è soddisfatta quando

$$\varepsilon\mu > 1 \ . \tag{40}$$

In esso infatti, nel sistema a riposo del mezzo, si ha

$$\mathfrak{s}\times\mathfrak{D} = \varepsilon(\mathfrak{s}\times\mathfrak{E}) = \mathfrak{H} = \mathfrak{B}/\mu = (\mathfrak{n}\times\mathfrak{E})/\mu \ ,$$

quindi

$$\mathfrak{n} = \varepsilon\mu\mathfrak{s} \ . \tag{41}$$

Risulta allora mediante il prodotto scalare con $\mathfrak{s}$

$$\mathfrak{s}\cdot\mathfrak{n} = 1 = \varepsilon\mu s^2$$

e quindi l'asserto.

§ 3. Altre proposte per il tensore d'energia-impulso elettromagnetico

Se, oltre al tensore (11), ne consideriamo uno della forma

$$\Theta_{ik} = g_{in} h_{km} M_{nm} \ , \tag{42}$$

sotto le stesse condizioni del tensore (11), cioè se valgono le (25), (26), (27) e (30), esso soddisfa la relazione $\mathfrak{S}/W$. Allora è infatti

$$\Theta_{ik} = g_{in} X_n h_{km} Y_m = X_i^* Y_k^* \ .$$

Richiediamo che nel sistema a riposo della materia $\mathfrak{S}$ e W abbiano la forma generale consueta; sarà allora:

$$\Theta^0_{4k} = M^0_{4k}$$

$$g^0_{4n} = \delta_{4n} \tag{43}$$

$$h^0_{km} = \delta_{km} = h_{km} \ . \tag{44}$$

Evidentemente passando al caso del vuoto anche il tensore g deve degenerare nel tensore unità. Quindi il tensore (11) non è il solo che per un campo di radiazione puro soddisfi la relazione $\mathfrak{S}/W$.

Se si cerca un tensore che inoltre sia simmetrico, nel sistema a riposo del mezzo si ha evidentemente da sostituire nella (38) il vettore $\mathfrak{n}$ con $\mathfrak{s}$. Se abbiamo un mezzo isotropo, utilizzando le (41), (36) e (37) possiamo scrivere:

$$(\Theta^0) = \left(\begin{array}{c|c} (1/\varepsilon\mu)\{H_i B_k + E_i D_k - \delta_{ik} W\} & -i(\mathfrak{E}\times\mathfrak{H}) \\ \hline -i(\mathfrak{E}\times\mathfrak{H}) & W \end{array}\right) \ . \tag{45}$$

Questo tensore, proposto per il sistema a riposo della materia, è simmetrico sotto l'ipotesi dell'isotropia del mezzo, e quindi è tale anche in tutti gli altri sistemi di riferimento. In un sistema di riferimento arbitrario si deve scrivere:

$$\Theta_{ik} = (1/\varepsilon\mu) M_{ik} - \frac{1 - (1/\varepsilon\mu)}{c^2} V_i V_r M_{rk} \ , \tag{46}$$

dove V_s sono le componenti della tetravelocità della materia. Nel sistema a riposo di questa è

$$V^0_s = \delta_{4s} ic \ ,$$

e quindi (46) va in (45). Come prima si vede che (46) soddisfa la relazione $\mathfrak{S}/W$ sotto le stesse condizioni come per (11).

Tuttavia non sosterremo affatto che il tensore (46) unisca i vantaggi della proposta di Minkowski e della simmetria, e quindi debba essere preso seriamente in considerazione come tensore d'energia-impulso elettromagnetico. Ricorderemo però che il tensore (46) è identico ad un "tensore d'energia della radiazione" proposto da Marx e Györgyi [4]. Esso risulta dal tensore di Abraham con l'addizione di un tensore aggiuntivo, che tien conto delle azioni di forza del campo sul dielettrico pretese dagli autori. In proposito si può naturalmente discutere. Invece è fuori discussione il fatto che il requisito che per un campo di radiazione puro il tensore debba soddisfare la relazione $\mathfrak{S}/W$ non dimostra che il tensore di Minkowski sia l'unico giusto, come pare venga espresso in taluni lavori. Senz'altro, per decidere sulla sua forma, bisognerebbe imporre al tensore ulteriori condizioni.

Bibliografia

[1] M. v. Laue: Z. Physik **128**, 387 (1950).

[2] C. Møller: The Theory of Relativity, § 62. Oxford 1952.

[3] W. Dällenbach: Ann. Physik **58**, 523 (1919).

[4] G. Marx, e G. Györgyi: Acta physica Hung. **3**, 213 (1954).