Il tensore d'energia-impulso per il campo elettromagnetico nella materia che deriva dal teorema di Noether[1]

U.E. Schröder[2]

Institut für Theoretische Physik der Universität Frankfurt (Main)

(Z.Naturforsch. 24a, 1356-1361 (1969); ricevuto il 24-3-1969)

Usando il teorema di Noether si può dare una risposta alla questione spesso discussa riguardante il tensore d'energia-impulso del campo elettromagnetico nella materia. La separazione del sistema elettromagnetico dal sistema meccanico introdotta qui porta all'espressione asimmetrica del tensore d'energia-impulso. Dalla covarianza rispetto a trasformazioni di scala si conclude anche che la traccia del tensore d'energia-impulso è nulla.

1. Introduzione

Nella vecchia letteratura sono state avanzate diverse proposte[1-4] per il tensore d'energia-impulso del campo elettromagnetico nella materia, la discussione delle quali continua ancor oggi[5-21,22]. Dopo che inizialmente s'era preferita l'idea di Abraham di un tensore d'energia-impulso simmetrico, nel passato più prossimo l'interesse si è rivolto maggiormente al tensore asimmetrico introdotto da Minkowski[7,8], mentre in tempi più recenti è stata nuovamente discussa l'idea di Abraham[23].

Nella maggior parte delle nuove trattazioni di questo controverso problema si parte da una determinata situazione (intuitiva) di interazione del campo elettromagnetico con la materia e si costruisce poi la divergenza del tensore d'energia-impulso sommando le forze che intervengono. Per questo nei singoli lavori sono stati messi in rilievo criteri differenti[24].

---

[1]*Tradotto in collaborazione con L. Mihich.*

[2]*Temporaneamente all'Istituto di Fisica Teorica dell'Università di Karlsruhe, 75 Karlsruhe, Kaiserstraße 12.*

D’altronde si sa che, in conseguenza del teorema di Noether[25], la divergenza del tensore d’energia-impulso per un sistema chiuso è nulla quando il relativo integrale d’azione è invariante per trasformazioni del gruppo di Lorentz non omogeneo. Ciò suggerisce d’usare il teorema di Noether per la definizione del tensore d’energia-impulso del campo elettromagnetico nella materia in moto. Come s’è dimostrato in un lavoro precedente[26], dal teorema di Noether per un sistema chiuso discende il tensore d’energia-impulso simmetrico là indicato. Restringendosi ad un sottosistema si otteneva, per campi dotati di spin, anche una parte antisimmetrica del tensore d’energia-impulso.

Nel seguito si dimostrerà che l’impiego del teorema di Noether nel caso della separazione qui introdotta del sistema elettromagnetico dal sistema meccanico conduce al tensore d’energia-impulso asimmetrico di Minkowski. Nei paragrafi 2 e 3 verrà introdotta la separazione dei sottosistemi, e formulato il principio variazionale. Da qui segue nel paragrafo 4 il tensore d’energia-impulso per mezzi privi di isteresi indipendenti e dipendenti dal campo. Nell’ultimo paragrafo si dimostrerà infine che l’annullarsi della traccia del tensore d’energia-impulso elettromagnetico deriva dall’invarianza del sistema rispetto a trasformazioni di scala.

2. Separazione dei sistemi

Per ottenere il tensore d’energia-impulso del campo elettromagnetico secondo il metodo ricordato[26] si darà in primo luogo la separazione dei sottosistemi e si formulerà il principio variazionale dal quale discendono le equazioni fondamentali covarianti. La densità lagrangiana del sistema isolato materia e campo elettromagnetico si compone dei tre addendi

$$\mathcal{L}' = \mathcal{L}_M + \mathcal{L}_E + \mathcal{L}_W \ .$$

In essa la parte $\mathcal{L}_M$ caratterizza il sistema materiale[27] e per quanto ci riguarda non c’è bisogno di definirla oltre, poiché per la suddivisione che s’introdurrà in seguito tra campo e mezzo basta postulare che la densità lagrangiana $\mathcal{L}_M$ sia indipendente dal potenziale elettromagnetico. La parte $\mathcal{L}_E$ dipende invece solo dal potenziale del campo elettromagnetico e descrive il campo elettromagnetico libero. Il termine $\mathcal{L}_W$ dipende sia dalle quantità che descrivono la materia che dal potenziale elettro-magnetico e descrive l’interazione tra sistema materiale e campo elettromagnetico. Per la derivazione delle equazioni di moto per il sistema materiale o, rispettivamente, delle equazioni di campo elettromagnetiche, si variano le coordinate del sistema materiale tenendo fisso il potenziale elettromagnetico, o rispettivamente il potenziale elettromagnetico tenendo fisse le coordinate. Le equazioni così risultanti, accoppiate (grazie a $\mathcal{L}_W$), descrivono il sistema complessivo. Poiché $\mathcal{L}_M$ e $\mathcal{L}_E$ contribuiscono solo alle variazioni che di volta in volta ad esse corrispondono, ne risultano le seguenti definizioni di due sottosistemi non isolati $\mathcal{L}_M + \mathcal{L}_W$ ed $\mathcal{L}_E + \mathcal{L}_W$.

Trattiamo il sistema isolato indicato con $\mathcal{L}'$ per quanto riguarda il campo elettromagnetico, senza addentrarci nelle equazioni di moto meccaniche (per esempio di particelle cariche). Quindi non si studierà più davvicino la densità $\mathcal{L}_M$. La densità lagrangiana $\mathcal{L}_E + \mathcal{L}_W$ dà per variazione rispetto al potenziale elettromagnetico A_μ le equazioni di Maxwell nella materia.

Mentre $\mathcal{L}'$ contrassegna una teoria per un sistema isolato, e secondo la teoria generale il tensore d’energia-impulso che ne deriva deve essere simmetrico, $\mathcal{L}_E + \mathcal{L}_W$ descrive la teoria di un sistema elettromagnetico non isolato nella materia, e quindi secondo il risultato precedente[28], il tensore d’energia-impulso che da essa si deriva non deve più esser simmetrico.

3. Le equazioni di Maxwell e la densità lagrangiana per il campo elettromagnetico nella materia

Le equazioni di Maxwell nella materia nella formulazione data da Minkowski si scrivono[29]

$$H^{\mu\nu}{}_{,\nu} = -s^{\mu}; \qquad \varepsilon^{\lambda\mu\nu\rho}\, B_{\mu\nu,\rho} = 0 \ .$$

Le quantità

$$H^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -D_1 & -D_2 & -D_3 \\ D_1 & 0 & -H_3 & H_2 \\ D_2 & H_3 & 0 & -H_1 \\ D_3 & -H_2 & H_1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad B^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_1 & -E_2 & -E_3 \\ E_1 & 0 & -B_3 & B_2 \\ E_2 & B_3 & 0 & -B_1 \\ E_3 & -B_2 & B_1 & 0 \end{pmatrix}$$

rappresentano il tensore di induzione elettromagnetica e il tensore d'intensità del campo elettromagnetico, $s^{\mu} = (\rho, \frac{1}{c}\mathbf{j})$ il vettore densità di corrente. Il simbolo $\varepsilon^{\lambda\mu\nu\rho}$ indica il tensore totalmente antisimmetrico del quart'ordine con gli elementi 0, ±1.

Le precedenti equazioni fondamentali del campo elettromagnetico determinano in maniera univoca l'evoluzione temporale di un processo a partire da uno stato iniziale se valgono inoltre le equazioni materiali $H^{\mu\nu} = f^{\mu\nu}(B^{\kappa\lambda})$, $s^{\mu} = g^{\mu}(B^{\kappa\lambda})$. La relazione tra i due tensori di campo viene rappresentata con il tensore materiale del quarto ordine $\lambda^{\kappa\lambda}{}_{\mu\nu}$:

$$H^{\kappa\lambda} = \frac{1}{2}\,\lambda^{\kappa\lambda}{}_{\mu\nu}B^{\mu\nu}. \tag{1}$$

In generale gli elementi $\lambda^{\kappa\lambda}{}_{\mu\nu}$ possono dipendere dalle coordinate $x^{\mu} = (ct, x^1, x^2, x^3)$ e dalle intensità di campo $B^{\mu\nu}$. Se i $\lambda^{\kappa\lambda}{}_{\mu\nu}$ sono costanti la relazione tra $H^{\kappa\lambda}$ e $B^{\mu\nu}$ è lineare. Nel caso di mezzi isotropi, omogenei e indipendenti dal campo le componenti $\lambda^{\kappa\lambda}{}_{\mu\nu}$ in un sistema di riferimento che sia a riposo rispetto al mezzo hanno il seguente significato semplice: $\lambda^{01}{}_{01} = \lambda^{02}{}_{02} = \lambda^{03}{}_{03} = \varepsilon$, $\lambda^{23}{}_{23} = \lambda^{31}{}_{31} = \lambda^{12}{}_{12} = 1/\mu$, dove ε indica la costante dielettrica e μ la permeabilità nel sistema a riposo. Tutte le altre quantità $\lambda^{\kappa\lambda}{}_{\mu\nu}$ sono nulle. Nel vuoto è semplicemente $H^{\kappa\lambda} = B^{\kappa\lambda}$, $\lambda^{\kappa\lambda}{}_{\mu\nu} = 2\delta^{\kappa}_{\mu}\delta^{\lambda}_{\nu}$.

La teoria elettromagnetica in mezzi qualsiansi può essere descritta per mezzo della densità lagrangiana[30]

$$\mathcal{L}(x) = -\int\left(\frac{1}{2}\,H^{\mu\nu}\mathrm{d}B_{\mu\nu} + s^{\mu}\mathrm{d}A_{\mu}\right)$$

e delle equazioni materiali (1). Il suddetto integrale sarà esteso da uno stato iniziale su determinati valori intermedi dei tensori $B_{\mu\nu}$ e A_{μ} fino ad uno stato finale; per esempio, per il tensore B_{mn}, lungo una data curva di magnetizzazione. L'integrale $\int s^{\mu}\mathrm{d}A_{\mu}$ produce l'espressione più semplice $s^{\mu}A_{\mu}$ come caso particolare, quando la distribuzione di carica e di corrente s^{μ} è assunta indipendente dal potenziale A_{μ}. Dalla suddetta densità lagrangiana discende

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_{\mu}} = - s^{\mu}, \qquad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_{\mu,\nu}} = H^{\mu\nu}, \qquad \text{quindi} \qquad H^{\mu\nu}{}_{,\nu} = - s^{\mu}.$$

Per mezzi privi di isteresi $d\mathcal{L}_{E} = - \frac{1}{2} H^{\mu\nu} dB_{\mu\nu}$ è un differenziale esatto, poiché allora la densità $\mathcal{L}_{E}$ non dipende dal processo percorso. Nel caso di assenza di isteresi devono quindi valere le condizioni di integrabilità

$$\partial H^{\mu\nu}/\partial B^{\alpha\beta} = \partial H_{\alpha\beta}/\partial B_{\mu\nu} .$$

Con la (1) risulta

$$\frac{1}{2}\left\{ 2\lambda^{\mu\nu}{}_{\alpha\beta} + B^{\rho\sigma} \frac{\partial \lambda^{\mu\nu}{}_{\rho\sigma}}{\partial B^{\alpha\beta}} \right\} = \frac{1}{2}\left\{ 2\lambda_{\alpha\beta}{}^{\mu\nu} + B_{\rho\sigma} \frac{\partial \lambda_{\alpha\beta}{}^{\rho\sigma}}{\partial B_{\mu\nu}} \right\} ,$$

quindi la condizione

$$\lambda^{\mu\nu}{}_{\alpha\beta} - \lambda_{\alpha\beta}{}^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\left\{ B_{\rho\sigma} \frac{\partial \lambda_{\alpha\beta}{}^{\rho\sigma}}{\partial B_{\mu\nu}} - B^{\rho\sigma} \frac{\partial \lambda^{\mu\nu}{}_{\rho\sigma}}{\partial B^{\alpha\beta}} \right\} . \qquad (2)$$

Da qui di deve concludere che in mezzi indipendenti dal campo si ha

$$\lambda^{\mu\nu}{}_{\alpha\beta} = \lambda_{\alpha\beta}{}^{\mu\nu}.$$

Dopo questa osservazione generale sulle proprietà del tensore materiale $\lambda^{\alpha\beta}{}_{\mu\nu}$ in mezzi privi di isteresi e indipendenti dal campo, passiamo alla densità lagrangiana più particolare

$$\mathcal{L}_{E} + \mathcal{L}_{W} = - \frac{1}{4} H^{\mu\nu} B_{\mu\nu} - s^{\mu} A_{\mu} .$$

Con le equazioni materiali (1) sarà

$$\mathcal{L} = - \frac{1}{8} \lambda^{\mu\nu}{}_{\rho\sigma} B^{\rho\sigma} B_{\mu\nu} - s^{\mu} A_{\mu} . \qquad (3)$$

Da qui segue

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_{\mu}} = - s^{\mu}$$

e[31]

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_{\kappa,\lambda}} = H^{\kappa\lambda} - \frac{1}{4} B^{\mu\nu} \left\{ (\lambda_{\mu\nu}{}^{\lambda\kappa} - \lambda^{\lambda\kappa}{}_{\mu\nu}) + \frac{1}{2} B_{\rho\sigma} \frac{\partial \lambda^{\rho\sigma}{}_{\mu\nu}}{\partial B_{\lambda\kappa}} \right\} .$$

Se si sostituisce la relazione (2) nell’ultima equazione s’ottiene

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_{\kappa,\lambda}} = H^{\kappa\lambda} + \frac{1}{8} B^{\mu\nu} B^{\rho\sigma} \frac{\partial \lambda^{\kappa\lambda}{}_{\rho\sigma}}{\partial B^{\mu\nu}} .$$

Quindi le equazioni di Maxwell $H^{\kappa\lambda}{}_{,\lambda} = - s^{\kappa}$ discendono dall'annullarsi delle derivate variazionali $[\mathcal{L}]_{A_\mu} = 0$ quando nel mezzo considerato siano soddisfatte le equazioni

$$\partial_\lambda \left\{ B^{\mu\nu} B^{\rho\sigma} \frac{\partial \lambda^{\kappa\lambda}{}_{\rho\sigma}}{\partial B^{\mu\nu}} \right\} = 0 , \qquad (4)$$

oppure, in particolare, quando il tensore $\lambda^{\kappa\lambda}{}_{\rho\sigma}$ sia indipendente dal campo, cioè sia

$$\frac{\partial \lambda^{\kappa\lambda}{}_{\rho\sigma}}{\partial B^{\mu\nu}} = 0. \qquad (5)$$

4. Il tensore d'energia-impulso del campo elettromagnetico in mezzi privi di isteresi

Supponiamo in primo luogo che il mezzo non dipenda dal campo, cioè che valga la (5), e calcoliamo il tensore d'energia-impulso dalla densità lagrangiana $\mathcal{L}_E = - \frac{1}{4} H^{\mu\nu} B_{\mu\nu}$ con l'impiego di

$$T^{\mu\nu} = \Theta^{\mu\nu} + \partial_\lambda \Phi^{\lambda\mu\nu} \quad \text{(vedi nota[32])}$$

con le definizioni

$$\Theta^{\mu\nu} = - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_{\kappa,\mu}} A_\kappa{}^{,\nu} + g^{\mu\nu} \mathcal{L} ,$$

$$\Phi^{\lambda\mu\nu} = \frac{1}{2}(H^{\lambda\mu\nu} + H^{\mu\nu\lambda} + H^{\nu\mu\lambda}) , \qquad H^{\lambda\mu\nu} = - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_{\rho,\lambda}} I_\rho^{\sigma\mu\nu} A_\sigma .$$

Poiché il campo elettromagnetico A^μ è un campo vettoriale, vale $I_\rho^{\sigma\mu\nu} = g_\rho^\mu g^{\sigma\nu} - g_\rho^\nu g^{\sigma\mu}$. La parte orbitale del tensore d'energia-impulso, grazie a

$$\frac{\partial \mathcal{L}_E}{\partial A_{\lambda,\mu}} = H^{\lambda\mu}$$

è data da

$$\Theta_{(E)}^{\mu\nu} = H^{\mu\lambda} A_\lambda{}^{,\nu} + g^{\mu\nu} \mathcal{L}_E .$$

La parte di spin deriva dalla quantità

$$\Phi^{\lambda\mu\nu}_{(E)} = H^{\lambda\mu}A^{\nu}.$$

Essa è

$$\partial_\lambda \Phi^{\lambda\mu\nu}_{(E)} = H^{\lambda\mu}{}_{,\lambda}A^{\nu} + H^{\lambda\mu}A^{\nu}{}_{,\lambda} = H^{\lambda\mu}A^{\nu}{}_{,\lambda} ,$$

quando, come per il momento si supporrà, non vi sia alcuna sorgente ($H^{\lambda\mu}{}_{,\lambda} = 0$). Sarà allora

$$T^{\mu\nu}_{(E)} = - \left\{ H^{\mu\lambda}B_{\lambda}{}^{\nu} + \frac{1}{4}\, g^{\mu\nu}H^{\kappa\lambda}B_{\kappa\lambda} \right\} . \qquad (6)$$

Questo è il tensore d'energia-impulso asimmetrico che è stato introdotto da Minkowski.

Secondo il teorema di Noether risulta ora

$$\partial_\mu T^{\mu\nu}_{(E)} = 0$$

nel caso in cui il tensore materiale $\lambda^{\alpha\beta}{}_{\rho\sigma}$ non dipenda esplicitamente dalle coordinate x^μ, quindi vi sia invarianza per traslazione.

Quando invece la densità lagrangiana $\mathcal{L}$ dipende esplicitamente da x^μ, in modo analogo a come accade nella dimostrazione del teorema di Noether, risulta la relazione

$$\partial_\mu T^{\mu\nu} = \partial\mathcal{L}/\partial x_\nu \quad \text{(vedi nota [33])}. \qquad (7)$$

Nel caso particolare in cui $\lambda^{\alpha\beta}{}_{\rho\sigma}$ dipenda esplicitamente da x^μ risulta allora

$$\partial_\mu T^{\mu\nu}_{(E)} = - \frac{1}{8}\, B^{\rho\sigma}B_{\kappa\mu}\, \frac{\partial}{\partial x_\nu}\, \lambda^{\kappa\mu}{}_{\rho\sigma} .$$

Se esistono sorgenti ($s^\mu(x) \neq 0$), il tensore d'energia-impulso che deriva da $\mathcal{L}_E + \mathcal{L}_W$ si scrive

$$T^{\mu\nu}_{(E+W)} = T^{\mu\nu}_{(E)} - g^{\mu\nu}s^{\rho}A_{\rho} + s^{\mu}A^{\nu}.$$

Se da questo si forma la divergenza e si confronta con il risultato secondo la relazione (7)

$$\partial_\mu T^{\mu\nu}_{(E+W)} = - \frac{1}{8}\, B^{\rho\sigma}B_{\kappa\mu}\, \frac{\partial}{\partial x_\nu}\, \lambda^{\kappa\mu}{}_{\rho\sigma} - A_\mu\, \frac{\partial s^\mu}{\partial x_\nu} ,$$

risulta

$$\partial_\mu T^{\mu\nu}_{(E)} + \frac{1}{8}\, B^{\rho\sigma}B_{\kappa\mu}\, \frac{\partial}{\partial x_\nu}\, \lambda^{\kappa\mu}{}_{\rho\sigma} = - s_\mu B^{\mu\nu}, \qquad (8)$$

cioè, in presenza di densità di corrente s^μ, la divergenza del tensore d'energia-impulso, aumentata di un addendo proporzionale a

$(\partial/\partial x_\nu)\lambda^{\kappa\mu}{}_{\rho\sigma}$, è uguale alla densità di forza

$$k^\nu = -\, s_\mu B^{\mu\nu} \equiv \left(\frac{1}{c}\mathbf{j}\cdot\mathbf{E},\ \rho\mathbf{E} + \frac{1}{c}\,[\mathbf{j}\times\mathbf{B}]\right) .$$

La relazione (8) risulta anche con un semplice calcolo, formando la divergenza di $T^{\mu\nu}_{(E)}$ dato dalla (6).

Dall'annullarsi della divergenza del tensore d'energia-impulso asimmetrico non si può concludere nulla riguardo all'assenza d'una interazione con la materia, poiché la densità lagrangiana

$$\mathcal{L}_E = -\,\frac{1}{4}\,H^{\mu\nu}B_{\mu\nu}$$

riguarda un sistema non isolato.

Come è stato stabilito in un lavoro precedente[26], si può considerare la divergenza del tensore momento angolare costruito secondo la definizione $M^{\lambda\mu\nu} = x^\nu T^{\lambda\mu} - x^\mu T^{\lambda\nu}$ come densità di momento angolare del campo. Quando il tensore d'energia impulso ha divergenza nulla, da $M^{\lambda\mu\nu}$ deriva la densità di momento angolare $\partial_\lambda M^{\lambda\mu\nu} = T^{\nu\mu} - T^{\mu\nu}$. Nel caso $\partial_\lambda T^{\lambda\nu} = k^\mu$ si ottiene

$$\partial_\lambda M^{\lambda\mu\nu} = x^\nu k^\mu - x^\mu k^\nu + T^{\nu\mu} - T^{\mu\nu}$$

con

$$T^{\nu\mu} - T^{\mu\nu} = H^{\mu\lambda}B_\lambda{}^\nu - H^{\nu\lambda}B_\lambda{}^\mu \neq 0 .$$

Il tensore d'energia-impulso simmetrico del sistema isolato si può scomporre in una parte di campo e in una parte materiale

$$T'^{\lambda\mu} = T^{\lambda\mu}_E + T^{\lambda\mu}_M .$$

Il teorema d'energia-impulso si scrive allora $\partial_\lambda T'^{\lambda\mu} = 0$. Con ciò vale[34]

$$\partial_\lambda T^{\lambda\mu}_E = -\partial_\lambda T^{\lambda\mu}_M = k^\mu ,$$

ossia la densità di forza dovuta a $T^{\lambda\mu}_E$ è compensata da quella prodotta da $T^{\lambda\mu}_M$. In conformità a ciò il momento angolare del sistema chiuso è nullo.

Se si lascia cadere la condizione (5), si ottiene secondo la (3) per mezzi privi di isteresi come parte orbitale del tensore d'energia-impulso

$$\Theta^{\mu\nu} = \left\{H^{\mu\lambda} + \frac{1}{8} B_{\alpha\beta}B^{\rho\sigma} \frac{\partial\lambda^{\mu\lambda}{}_{\rho\sigma}}{\partial B_{\alpha\beta}}\right\}A_{\lambda}{}^{,\nu} + g^{\mu\nu} \mathcal{L}_E .$$

La parte di spin sarà

$$\partial_\kappa \Phi^{\kappa\mu\nu} = \partial_\kappa\left\{\left(H^{\kappa\mu} + \frac{1}{8} B_{\alpha\beta}B^{\rho\sigma} \frac{\partial\lambda^{\kappa\mu}{}_{\rho\sigma}}{\partial B_{\alpha\beta}}\right)A^{\nu}\right\} .$$

Con la condizione (4) ed $s^\mu = 0$ risulta

$$\partial_\kappa \Phi^{\kappa\mu\nu} = \left(H^{\kappa\mu} + \frac{1}{8} B_{\alpha\beta}B^{\rho\sigma} \frac{\partial\lambda^{\kappa\mu}{}_{\rho\sigma}}{\partial B_{\alpha\beta}}\right)A^{\nu}{}_{,\kappa} .$$

La somma delle parti orbitale e di spin dà

$$T^{\mu\nu} = - \left\{\left(H^{\mu\kappa} + \frac{1}{8} B_{\alpha\beta}B^{\rho\sigma} \frac{\partial\lambda^{\mu\kappa}{}_{\rho\sigma}}{\partial B_{\alpha\beta}}\right)B_{\kappa}{}^{\nu} + \frac{1}{4} g^{\mu\nu}H^{\kappa\lambda}B_{\kappa\lambda}\right\} .$$

Quando $\lambda^{\alpha\beta}{}_{\rho\sigma}$ non dipende esplicitamente da x^ν da qui segue con la (4) la densità di forza

$$\partial_\mu T^{\mu\nu} = - \frac{1}{8} B_{\alpha\beta}B^{\rho\sigma} \frac{\partial\lambda^{\mu\kappa}{}_{\rho\sigma}}{\partial B_{\alpha\beta}} B_{\kappa}{}^{\nu}{}_{,\mu} .$$

Per mezzi dipendenti dal campo l’interazione tra materia e campo elettromagnetico si esprime quindi già nell’equazione per il bilancio dell’energia-impulso.

Nell’ambito della teoria di campo classica ci si avvale per la definizione del tensore d’energia-impulso di un procedimento coerente e naturale che non fa alcun riferimento a modelli particolari di materia. La sola ipotesi nella quale interviene la struttura fisica del sistema è la possibilità di suddivisione della densità lagrangiana descritta nel paragrafo 2.

5 .Trasformazioni di scala e la traccia del tensore di energia-impulso elettromagnetico

Poiché la teoria elettromagnetica nel vuoto è covariante rispetto al gruppo conforme $C\supset P$ a 15 dimensioni, dal teorema di Noether si ricavano altre cinque leggi di conservazione[35], ma non a tutte queste può essere assegnato un significato immediatamente chiaro. Mostreremo nel seguito che l’annullarsi della traccia del tensore d’energia-impulso elettromagnetico dipende dalla covarianza delle equazioni fondamentali rispetto a trasformazioni di scala.

La teoria elettromagnetica nel vuoto è covariante rispetto alla trasformazione di scala $\delta x^{\mu} = \gamma x^{\mu}$, $\delta A_{\mu} = - \gamma A_{\mu}$. Da ciò discende secondo il teorema di Noether

$$[\mathscr{L}_E]^{\lambda}\bar{\delta}A_{\lambda} = \partial_{\mu}\left\{- \frac{\partial\mathscr{L}_E}{\partial A_{\lambda,\mu}} \delta A_{\lambda} - \delta x_{\nu}\Theta^{\mu\nu}_{(E)}\right\} ,$$

cioè con le equazioni di moto $[\mathscr{L}_E]^{\lambda} = 0$ e le espressioni di $\Theta^{\mu\nu}_{(E)}$ e di $T^{\mu\nu}_{(E)}$

$$T_{(E)\mu}^{\ \ \mu} = 0 .$$

La traccia del tensore d’energia-impulso si annulla per la covarianza delle equazioni elettrodinamiche rispetto alle trasformazioni $\delta x_{\mu} = \gamma x_{\mu}$.

Nella materia omogenea le equazioni di Maxwell si comportano ancora certamente in modo covariante rispetto alle trasformazioni $\delta x^{\mu} = \gamma x^{\mu}$, poiché le componenti $\lambda^{\alpha\beta}_{\ \ \mu\nu}$ allora non dipendono esplicitamente dalle coordinate, mentre le rimanenti quantità che compaiono nella densità lagrangiana sono le stesse che nel vuoto. Perciò la traccia del tensore d’energia-impulso deve annullarsi. Sia il tensore introdotto da Minkowski che quello di Abraham soddisfano questa condizione. Invece la traccia del tensore proposto da Einstein e Laub[4] non s’annulla. Ciò può essere sollevato come obiezione contro la proposta di Einstein e Laub.

La discussione mostra che la questione del tensore d’energia-impulso può essere ricondotta essenzialmente al problema di come si debba separare il sistema elettromagnetico dal sistema meccanico. Con la separazione introdotta qui si arriva secondo il teorema di Noether al tensore d’energia-impulso introdotto da Minkowski. In un altro contesto si può considerare opportuna un’altra separazione.

Ringrazio il Dr. H.D. Doebner per la revisione critica del manoscritto. Ringrazio inoltre il Dr. Hehl per due riferimenti bibliografici.

1) H. MINKOWSKI, Nachr. Akad. Wiss. Göttingen, Math.Phys. Kl., 53, [1908]; Math. Ann. **68**, 472 [1910].
2) W. DÄLLENBACH, Ann. Phys. **58**, 523 [1919].
3) M. ABRAHAM, Rendiconti Palermo, **28**, [1909]; **30**, [1910]; Ann. Phys. **44**, 537, [1914].
4) W.PAULI, Encycl. d. Math. Wiss. **5**, 665 [1920]; The theory of Relativity, Pergamon Press: New York 1958.
5) J.E. TAMM, J. Phys. USSR **1**, 439 [1939].
6) K.F.NOVOBATZY, Hung. Acta Phys. **1**, 25 [1949].
7) M. v. LAUE, Z. Phys. **128**, 387 [1950]; Die Relativitäts-theorie, 6[a] ed., vol. I, F. Vieweg & Sohn, Braunschweig 1955.
8) C. MØLLER, The Theory of Relativity, Clarendon Press, Oxford 1952.
9) F. BECK, Z. Phys. **134**, 136 [1953].
10) G MARX, G. GYÖRGYI, Acta Phys. Hung. **3**, 213 [1954].
11) G. GYÖRGYI, Acta Phys. Hung. **4**, 121 [1955].
12) G. MARX, K. NAGY, Acta Phys. Hung **4**, 297 [1955].
13) G.A. KLUITENBERG, S.R.DE GROOT, Physica **21**, 169 [1955].
14) E. SCHMUTZER, Ann. Phys. (6) **18**, 171 [1956].
15) G. GYÖRGYI, Am. J. Phys. **28**, 85 [1960].
16) C.L. TANG, J. MEIXNER, Phys. Fluids **4**, 148 [1961].
17) J. MEIXNER, Relativistic Thermodynamics of Irreversible Processes in a One Component Fluid in the Presence of Electromagnetic Fields, 1961, Radiation Laboratory, Department of Electrical Engineering, University of Michigan, report RL-184, 1961.
18) P. PENFIELD, H. HAUS, Electrodynamics of Moving Media, M.I.T. Press, Cambridge (Mass.) 1967.
19) S.R. DE GROOT, L.G. SUTTORP, Phys. Lett. **25A**, 103 [1967]; Physica **37**, 284; 297 [1968], **39**, 84 [1968].
20) W. SHOCKLEY, Proc. Nat. Acad. Sci. (USA) **60**, 807 [1968].
21) C.V. HEER, J.A. LITTLE, J.R. BUPP, Ann. Inst. Henri Poincaré **8A**, 311 [1968].
22) Non si pretende la completezza delle citazioni della bibliografia.

23) Gli argomenti pro e contro le varie idee non verranno qui discussi. Vedansi in proposito per esempio i riferimenti 7,8,10,18 e 20.

24) Vedi per esempio 7,10,18.

25) E. NOETHER, Nachr. Akad. Wiss. Göttingen, Math. Phys. Kl. **1918**, 235.

26) U.E. SCHRÖDER, Fortschr. Phys. **16**, 357 [1968].

27) Si può pensare per esempio alla densità lagrangiana di un sistema di particelle cariche libere.

28) Vedi [26], p.370.

29) Le componenti diverse da zero del tensore metrico sono $g^{00} = 1$, $g^{11} = g^{22} = g^{33} = -1$.

30) Seguiremo in proposito il lavoro di E. Schmutzer [14].

31) Si fa la variazione anche delle derivate del potenziale contenute in $H^{\mu\nu}$.

32) Vedi [26], Eq. (26).

33) $\partial\mathscr{L}/\partial x_\nu$ indica la derivata esplicita di $\mathscr{L}$ rispetto a x_ν.

34) Per semplicità si assume $\lambda^{\alpha\beta}{}_{\mu\nu}$ indipendente da x^μ.

35) E. BESSEL-HAGEN, Math. Ann. **84**, 258 [1921].