Legge di Planck e ipotesi dei quanti di luce[1]

Bose (Università di Dacca, India)

(pervenuto il 2 luglio 1924)

Lo spazio delle fasi di un quanto di luce relativo ad un certo volume viene diviso in "celle" della dimensione h^3. Il numero delle possibili ripartizioni su queste celle dei quanti di luce di una radiazione definita macroscopicamente dà l'entropia e quindi tutte le proprietà termodinamiche della radiazione.

La formula di Planck per la ripartizione dell'energia nella radiazione del corpo nero costituisce il punto di partenza per la teoria dei quanti, che è stata sviluppata negli ultimi 20 anni e che ha portato ricchi frutti in tutti i campi della fisica. Dalla pubblicazione nell'anno 1901 sono stati presentati molti modi di derivazione di questa legge. Si è riconosciuto che le ipotesi fondamentali della teoria dei quanti sono incompatibili con le leggi dell'elettrodinamica classica. Tutte le derivazioni precedenti fanno uso della relazione

$$\rho_\nu d\nu = \frac{8\pi\nu^2 d\nu}{c^3} E,$$

cioè della relazione tra la densità di radiazione e l'energia media di un oscillatore, e fanno assunzioni sul numero dei gradi di libertà dell'etere, che interviene nell'equazione precedente (primo fattore del secondo membro). Questo fattore può tuttavia essere desunto solo dalla teoria classica. Questo è il punto insoddisfacente in tutte le derivazioni, e non c'è da stupirsi che vengano compiuti sempre nuovi tentativi di dare una derivazione che sia esente da questo difetto logico.

Una derivazione notevolmente elegante è stata data da Einstein. Questi ha riconosciuto il difetto logico di tutte le derivazioni fatte finora ed ha cercato di dedurre la formula indipendentemente dalla teoria classica. Partendo da assunzioni assai semplici sullo scambio d'energia tra molecole e campo di radiazione, egli trova la relazione

$$\rho_\nu = \frac{\alpha_{mn}}{e^{\frac{\varepsilon_m - \varepsilon_n}{kT}} - 1}.$$

Tuttavia, per portare questa formula in accordo con quella di Planck egli deve far uso della legge dello spostamento di Wien e del principio di corrispondenza di Bohr. La legge di Wien è fondata sulla teoria classica, ed il principio di corrispondenza assume che la teoria dei quanti coincida con la teoria classica in certi casi limite.

In tutti i casi le derivazioni non mi paiono abbastanza corrette dal punto di vista logico. Mi pare invece che l'ipotesi dei quanti di luce assieme alla meccanica statistica (come è stata adattata da Planck ai bisogni della teoria dei quanti) siano sufficienti per la derivazione della legge indipendentemente dalla teoria classica. Delineerò in breve il metodo in quanto segue.

La radiazione sia racchiusa nel volume V e sia data la sua energia totale E. Siano dati diversi tipi di quanti di numero rispettivamente N_s e d'energia $h\nu_s$ (s da 0 a ∞). L'energia totale E è quindi

$$E = \sum_s N_s h\nu_s = V \int \rho_\nu d\nu. \tag{1}$$

[1]Plancks Gesetz und Lichtquantenhypothese, Zeitschr. f. Phys. **26**, 178-181 (1924).

La soluzione del problema richiede quindi la determinazione degli N_s che determinano ρ_ν. Se noi possiamo dare la probabilità per ogni ripartizione caratterizzata da N_s arbitrari, la soluzione è determinata dalla condizione che questa probabilità debba essere massima mantenendo verificata la condizione aggiuntiva (1). Cercheremo ora questa probabilità.

Il quanto ha un momento dell'ammontare $h\nu/c$ nella direzione della sua propagazione. Lo stato istantaneo del quanto sarà caratterizzato dalle sue coordinate x, y, z e dai corrispondenti momenti p_x, p_y, p_z; queste sei quantità possono essere interpretate come coordinate di un punto in uno spazio esadimensionale, per il quale abbiamo la relazione

$$p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 = \left(\frac{h\nu}{c}\right)^2,$$

secondo la quale il punto suddetto è costretto a restare su una superficie cilindrica determinata dalla frequenza del quanto. All'intervallo di frequenza $d\nu_s$ appartiene in questo senso il volume di spazio delle fasi

$$\int dxdydzdp_xdp_ydp_z = V \cdot 4\pi \left(\frac{h\nu}{c}\right)^2 \frac{hd\nu}{c} = 4\pi \frac{h^3\nu^2}{c^3} V d\nu.$$

Se noi suddividiamo l'intero volume dello spazio delle fasi in celle di volume h^3, all'intervallo di frequenza $d\nu$ appartengono $4\pi V \left(\nu^2/c^3\right) d\nu$ celle. Riguardo al modo di questa suddivisione non si può dire niente di preciso. Tuttavia il numero totale delle celle dev'esser visto come il numero delle possibili configurazioni di un quanto nel volume dato. Per tener conto del fatto della polarizzazione appare offrirsi la moltiplicazione di questo numero per 2, di modo che per il numero delle celle appartenenti a $d\nu$ otteniamo $8\pi V\nu^2 d\nu/c^3$.

È facile ora calcolare la probabilità termodinamica di uno stato (definito macroscopicamente). Sia N^s il numero dei quanti che appartengono all'intervallo di frequenza $d\nu^s$. In quanti modi possono essere distribuiti tra le celle che appartengono a $d\nu^s$? Sia p_0^s il numero delle celle vuote, p_1^s il numero di quelle che contengono un quanto, p_2^s il numero delle celle che contengono due quanti, eccetera. Il numero delle possibili ripartizioni è allora

$$\frac{A^s!}{p_0^s!p_1^s!\dots}, \text{ dove } A^s = \frac{8\pi\nu^2 d\nu^s}{c^3},$$

e dove

$$N^s = 0 \cdot p_0^s + 1 \cdot p_1^s + 2 \cdot p_2^s \dots$$

è il numero dei quanti che appartengono a $d\nu^s$. La probabilità dello stato definito da tutti i p_r^s è evidentemente

$$\Pi_s \frac{A^s!}{p_0^s!p_1^s!\dots}.$$

Tenendo conto del fatto che possiamo trattare i p_r^s come numeri grandi, abbiamo

$$\lg W = \sum_s A^s \lg A^s - \sum_s \sum_r p_r^s \lg p_r^s,$$

dove

$$A^s = \sum_r p_r^s.$$

Quest'espressione dev'essere un massimo sotto la condizione aggiuntiva

$$E = \sum_s N^s h\nu^s; \;\; N^s = \sum_r r p_r^s.$$

L'esecuzione della variazione produce le condizioni

$$\sum_s \sum_r \delta p_r^s \left(1 + \lg p_r^s\right) = 0, \;\; \sum_s \delta N^s h\nu^s = 0,$$

$$\sum_r \delta p_r^s = 0, \;\; \delta N^s = \sum_r r \delta p_r^s.$$

Da qui segue

$$\sum_s \sum_r \delta p_r^s \left(1 + \lg p_r^s + \lambda^s\right) + \frac{1}{\beta} \sum_s h\nu^s \sum_r r \delta p_r^s = 0.$$

Pertanto si ottiene immediatamente

$$p_r^s = B^s e^{-\frac{r h\nu^s}{\beta}}.$$

Poiché

$$A^s = \sum_r B^s e^{-\frac{r h\nu^s}{\beta}} = B^s \left(1 - e^{-\frac{h\nu^s}{\beta}}\right)^{-1},$$

risulta

$$B^s = A^s \left(1 - e^{-\frac{h\nu^s}{\beta}}\right).$$

Si ha inoltre

$$N^s = \sum_r r p_r^s = \sum_r r A^s \left(1 - e^{-\frac{h\nu^s}{\beta}}\right) e^{-\frac{r h\nu^s}{\beta}}$$

$$= \frac{A^s e^{-\frac{h\nu^s}{\beta}}}{1 - e^{-\frac{h\nu^s}{\beta}}}.$$

Tenendo conto del valore su trovato di A^s è quindi

$$E = \sum_s \frac{8\pi h {\nu^s}^3 d\nu^s}{c^3} V \frac{e^{-\frac{h\nu^s}{\beta}}}{1 - e^{-\frac{h\nu^s}{\beta}}}.$$

Utilizzando il risultato precedente si trova inoltre

$$S = k \left[\frac{E}{\beta} - \sum_s A^s \lg \left(1 - e^{\frac{h\nu^s}{\beta}}\right)\right],$$

dalla quale, tenendo conto che $\partial S / \partial E = 1/T$, segue che $\beta = kT$. Se si sostituisce questo nell'equazione precedente per E si ottiene

$$E = \sum_s \frac{8\pi h {\nu^s}^3}{c^3} V \frac{1}{e^{\frac{h\nu^s}{kT}} - 1} d\nu^s,$$

equazione equivalente alla formula di Planck.

(tradotto da A. Einstein.)

Nota del traduttore. Secondo la mia opinione la derivazione di Bose della formula di Planck significa un progresso importante. Il metodo qui utilizzato produce anche la teoria quantistica dei gas ideali, come esporrò altrove.