Alcune domande esplorative che riguardano la meccanica quantistica[1]

P. Ehrenfest a Leida (Olanda)

(ricevuto il 16 agosto 1932)

Alcune questioni e osservazioni a proposito di: A. L'unità immaginaria nell'equazione di Schrödinger e la teoria delle trasformazioni. - B. L'analogia difettosa tra fotone ed elettrone. - C. Il rendere più accessibile il calcolo spinoriale.

Sia consentito raccogliere nel seguito alcune domande, che si devono essere imposte a quasi tutti i docenti che abbiano da presentare introduttivamente la meccanica quantistica ad un uditorio interessato e disposto alla critica. Queste domande, in particolare quelle della presente esposizione, possono ben essere accantonate come "prive di senso", se si vuol stare comodi. La buona educazione addirittura lo esige. Allora qualcuno dovrà pur attirarsi l'antipatia, e porle tuttavia. Con la ferma fiducia che sempre si trovi un qualche ricercatore che possiede l'arte di rispondere in modo sensato, e cioè in modo chiaro e semplice, alle domande "prive di senso".

A. *L'unità immaginaria nell'equazione di Schrödinger e le relazioni di commutazione di Heisenberg-Born.* Vi è un complesso di scoperte grande e chiaramente comprensibile che porta a rappresentare il campo elettromagnetico mediante *due vettori reali* E, H o, se si vuole, mediante *un vettore complesso* $M = H + iE$, che allora soddisfa alle equazioni differenziali non reali:

$$\frac{1}{ic}\frac{\partial M}{\partial t} = \operatorname{rot} M, \tag{1}$$

$$\operatorname{div} M = i\rho. \tag{2}$$

In analogia con ciò si potrebbe ben, cioè in qualche modo assiomaticamente chiaro, comprendere perché le onde di de Broglie-Schrödinger richiedano almeno *due scalari reali* o la conveniente riunione di questi in *uno scalare complesso* ψ. *L'ulteriore* sdoppiamento per la trattazione secondo la meccanica ondulatoria dello spin Pauli l'ha fondato in modo completamente chiaro.

Osservazioni. 1. I primi lavori di de Broglie e di Schrödinger fanno supporre assai chiaramente la descrivibilità mediante *uno* scalare reale[2]. Quando in modo del tutto incidentale "per comodità" si introduce un fattore temporale complesso per trattare un'onda sinusoidale, si rileva espressamente che alla conclusione dei calcoli si deve prendere la parte reale[3]. In seguito ciò non è naturalmente più possibile, poiché il primo membro dell'equazione di Schrödinger ha ricevuto definitivamente il suo coefficiente immaginario[4]. La ricerca di come diversi autori abbiano in seguito trattato questo punto in varie esposizioni sotto forma di manuale non porta alcun aiuto[5].

[1]Einige die Quantenmechanik betreffende Erkundigungsfragen, Zeitschr. f. Phys. **78**, 555-559 (1932).

[2]L. de Broglie, Wellenmechanik, p. 64, 65, Leipzig 1929; E. Schrödinger, Abhandlungen zur Wellenmechanik, p. 25, Leipzig, Barth, 1927.

[3]E. Schrödinger, l.c. p. 57, nota 1.

[4]E. Schrödinger, l.c. p. 141, 142 e 169.

[5]Per esempio A. Sommerfeld, Wellenmechanischer Ergänzungsband pp. 8 e 46; H. Weyl, p. 44, J. Frenkel, p. 60. - Lo stesso Pauli (Müller-Pouillet, Vol. II, pp. 1820, 1821) pare qui che voglia evitare di "svegliare il can che dorme"!

2. Riguardo al ruolo dell'unità immaginaria nelle relazioni di commutazione e nell'intera teoria delle trasformazioni, sarei lieto di comprendere chiaramente in che modo già nella vecchia formulazione di Bohr del principio di corrispondenza il passaggio da serie di Fourier reali a serie esponenziali complesse significhi di più di una pura semplificazione della notazione.

B. *Limiti dell'analogia tra fotoni ed elettroni.* Nel caso di onde luminose rigorosamente monocromatiche il campo E, H fornisce per le diverse posizioni di un campo d'interferenza direttamente le probabilità relative per la presenza di un fotone, quindi il "numero" dei fotoni si distingue dall'energia da essi trasportata solo per il fattore da fissarsi $h\nu$. Ma quando si considera un campo di radiazione non monocromatico, questa corrispondenza chiara tra i valori *locali* di E ed H e la probabilità *locale* per la presenza di un fotone va perduta. Diventa necessario sviluppare prima un'analisi di Fourier del campo E, H, ossia un'operazione di integrazione essenzialmente non locale. Questo è un esempio di un difetto dell'analogia inaccettabile, ma tuttavia ancora modesto:

Per una *particella materiale* i valori della ψ che soddisfano le equazioni differenziali determinano direttamente la densità di probabilità locale per la presenza della particella. Di contro ciò *non* avviene riguardo al *fotone* per il campo $H + iE$ che soddisfa alle equazioni di Maxwell.

Il difetto dell'analogia è tuttavia, s'intende, ben più profondo: le equazioni di Maxwell classiche rappresentano una genuina teoria di campo su un continuo tetradimensionale x, y, z, t. Nella concezione originale di de Broglie anche le "onde materiali" paiono volersi ordinare in una teoria di campo tetradimensionale, per la quale inoltre anche i semplici tipi di esperimenti di interferenza possono valere come chiara conferma. La fiducia nella possibilità di una tale teoria di campo ci è tuttavia (provvisoriamente?!) sottratta, poiché Schrödinger per l'interazione tra n elettroni deve ricorrere all'aiuto di una funzione ψ definita su uno "spazio delle configurazioni" a $3n$ dimensioni, e finora tutti i tentativi di ritornare in qualche modo al continuo tetradimensionale sono naufragati.[6] Si pone quindi la domanda: come si dovrà trattare "l'analogia tra fotone ed elettrone" nell'*introduzione* alla meccanica quantistica, poiché nello stato attuale della meccanica quantistica non ci si può permettere affatto il lusso di ignorare semplicemente questo paragone così enormemente vantaggioso dal punto di vista euristico?

Osservazioni. 1. L'operatore lineare $\sqrt{\Delta}$ derivato dall'operatore di Laplace Δ, che Landau e Peierls[7] hanno introdotto come strumento per la loro trattazione del fotone, non è naturalmente un operatore differenziale, ma un operatore integrale,

---

[6] Ci si abitua a dimenticare il profondo conflitto che qui appare con uno dei nostri più fondamentali convincimenti fisici, cioè con la convinzione che la macchina del mondo produce un gioco d'assieme diretto, primario, soltanto tra quelle quantità di stato che corrispondono a punti $txyz$ infinitamente vicini. L'equazione differenziale di Schrödinger per due elettroni richiede di contro un gioco d'assieme dei valori di ψ in una regione infinitesima del continuo $t\ x_1\ y_1\ z_1\ x_2\ y_2\ z_2$, nella quale

$$\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

può ben essere lungo molti chilometri. Dobbiamo sempre ricordarci daccapo che la teoria delle onde di Schrödinger è una *teoria dell'azione a distanza camuffata*, che la nostalgia ci fa prendere per una teoria dell'azione per prossimità multidimensionale. Certi esperimenti concettuali, escogitati da Einstein ma mai pubblicati, sono a questo proposito assai opportuni.

[7] L. Landau e H. Peierls, Zeitschr. f. Phys. **62**, 188 (1930).

quindi essenzialmente *non locale*[8]. Pertanto, quando questi autori confrontano le ψ, ψ^* di Schrödinger non più con $H+iE$, $H-iE$, ma con le loro F, F^*, si fa bene a tener scrupolosamente presente che la quantità di Schrödinger soddisfa la sua equazione *differenziale*, mentre la F di Landau-Peierls soddisfa invece l'equazione integrale (seducentemente elegante!):

$$\frac{1}{c}\dot{F} = -\sqrt{\Delta}F. \tag{3}$$

Ed ora l'ammissione spontanea di Peierls-Landau: "Non si può tuttavia definire $F^*(1/\sqrt{\Delta})F$ come densità di probabilità, poiché questa quantità non è definita positiva". Come se non ci fosse nient'altro da dire! Se capisco correttamente, ulteriori lavori connessi con questo non hanno prodotto mutamenti riguardo alla questione qui accennata[9].

2. Si dovrebbe poter capire chiaramente che cosa significa, che si possa misurare $\psi\psi^*$ e non la ψ stessa, mentre per il campo elettromagnetico oltre ad $1/2(E^2+H^2)$ si possono misurare anche E ed H stessi. Si tratta qui di una asimmetria che ci si deve aspettare permanga anche qualora si potesse rappresentare l'interazione *reciproca* tra "materia" e "campo elettromagnetico" nella teoria meglio di ora?

3. Tutte le virtuosistiche dissertazioni sull'analogia tra le equazioni di Maxwell da un lato e in particolare l'equazione di Dirac dall'altro non hanno, se vedo giusto, prodotto assolutamente niente.

C. *Più comoda accessibilità del "calcolo spinoriale".* La ricca scorta di analogie tra vettori e campi vettoriali chiaramente assai diversi ha a più riprese molto aiutato lo sviluppo della meccanica e della fisica. La relativamente assai più ristretta scorta di analogie nel caso dei tensori di ordine due o più alto ha significato negli anni tra il 1900 e il 1905 un grande impedimento alla riflessione fisica. Lo si ravvisa nettamente con un esame dell'articolo di Abraham nell'Enciclopedia della matematica IV, 14, 1900! Perfino nella celebre trattazione di Minkowski della teoria della relatività speciale (1908) l'indicazione del campo tensoriale antisimmetrico del second'ordine come "vettore spazio-temporale del secondo tipo" lascia un po' a desiderare. Solo per primo il "Manuale di fisica dei cristalli" (1910) di Voigt e in particolare l'esposizione di Einstein del calcolo tensoriale assoluto nei "Fondamenti formali della teoria della relatività generale" (1914) segnano più o meno l'eliminazione di questo impedimento per il fisico, per quanto riguarda i *tensori*.

Ma adesso gli *spinori*?! Il fisico che conosce l'abbozzo che van der Waerden[10] ha dato[11] essenzialmente in connessione con Weyl (Gruppentheorie und Quantenmechanik) è per questo abbozzo sinceramente assai grato. Ma per ora manca pur sempre un *librettino*, dal quale si possa imparare *in modo facile* il calcolo spinoriale assieme al calcolo tensoriale.

Osservazioni. 1. Risulta pure comico, che i fisici dopo 20 anni di teoria della relatività speciale e 10 anni di quella generale apprendano soltanto ora dal lavoro di Pauli sulla meccanica ondulatoria dell'elettrone con spin e dal lavoro ad esso connesso di Dirac la notizia inquietante che lo spazio isotropo e l'universo di

[8] Vedi l.c. equazione (4).

[9] Vedi per esempio J. Solomon, Ann. de Phys. **16**, 411 (1931).

[10] Gött. Nachr. 1929, p. 100.

[11] Vedi anche B. van der Waerden, Gruppentheorische Methode in der Quantenmechanik, p. 82, Berlin, Julius Springer (1932); O. Laporte e G. Uhlenbeck, Phys. Rev. **37**, 1380 (1931).

Einstein-Minkowski possono essere popolati oltre che dai tensori anche dalla razza misteriosa degli spinori. Non solo si sarebbe generato per il primo spavento tutto lo schiamazzo sulla presunta “Maxwellizzabilità” delle equazioni di Dirac, ma anche il fin troppo acuto impiego dello spin dell’elettrone come “bussola giroscopica per il parallelismo a distanza di Einstein”, del quale per primo Fock[12] ha fatto piazza pulita, estendendo con la necessaria accuratezza l’apparato di calcolo del trasporto parallelo dai tensori *giustamente* agli spinori.

2. Non si potrebbe degnare qualcuno, che realmente domini questa materia, di esprimere in una forma leggibile anche per noi fisici vecchi ciò che è noto[13] per il gruppo delle *rotazioni reali*: in corrispondenza alla topologia del gruppo, le sue rappresentazioni irriducibili doppie e le quantità spinoriali che ad esse corrispondono, in particolare naturalmente per il gruppo delle rotazioni reali dello spazio *tetra*dimensionale? (Connessione tra tensori e quasispinori in questo caso.) Un riassunto chiaro, non professorale sarebbe assai desiderabile, in particolare se venisse data solo una traccia dei metodi di dimostrazione!

3. Non si potrebbe chiarire mediante una discussione competente fino a che punto è giusta la congettura di Weyl (Gruppentheorie und Quantenmechanik, p. 142), che in fisica giocano un ruolo fondamentale solo quei tensori, le cui componenti si trasformano secondo rappresentazioni *irriducibili* del gruppo delle rotazioni ovvero del gruppo di Lorentz? (Il tensore dell’energia e degli sforzi di un elettrone di Dirac fornisce, come ho sentito da Uhlenbeck, un controesempio.) Se si accettasse la congettura di Weyl, si desidererebbe che quel “librettino sul calcolo spinoriale e tensoriale” vi si attenesse.

4. È possibile che, nella classificazione delle relazioni fenomenologiche lineari omogenee nei cristalli, oltre ai tensori (vedi il libro prima citato di Voigt) giochino un ruolo anche gli spinori?

[12] Zeitschr. f. Phys. **57**, 261 (1929).

[13] vedi H. Weyl, Math. Zeitschr. **23**, 270 (1925); **24**, 328, 377, 789 (1926).