I fondamenti della teoria della relatività generale[1]

A. Einstein

La teoria esposta nel seguito costituisce l'estensione più vasta pensabile della teoria indicata in generale al giorno d'oggi come "teoria della relatività"; quest'ultima la chiamo nel seguito "relatività speciale" per distinguerla dalla prima, e la assumo per nota. La generalizzazione della teoria della relatività è assai facilitata dalla forma che è stata data alla teoria della relatività speciale da Minkowski, il matematico che ha per primo riconosciuto chiaramente l'equivalenza formale delle coordinate spaziali e di quella temporale, e l'ha resa utilizzabile per la costruzione della teoria. Lo strumento matematico necessario per la teoria della relatività generale stava lì bell'e pronto nel "calcolo differenziale assoluto" che deriva dalle ricerche di Gauss, Riemann e Christoffel sulle varietà non euclidee, che è stato portato in un sistema da Ricci e Levi-Civita, ed è già stato applicato ai problemi della fisica teorica. Nella sezione B della presente dissertazione ho sviluppato nel modo più facile e diretto possibile tutti gli strumenti matematici per noi necessari, che non si possano presumere noti al fisico, di modo che per la comprensione della presente dissertazione non è necessario uno studio della letteratura matematica. Un pensiero riconoscente va infine a questo punto al mio amico, il matematico Grossmann, il quale con il suo aiuto non solo mi ha risparmiato lo studio della letteratura matematica relativa, ma mi ha anche sostenuto nelle ricerche sulle equazioni di campo della gravitazione.

A. Considerazioni di principio sul postulato della relatività

§1. Osservazioni sulla teoria della relatività speciale.

La teoria della relatività speciale si fonda sul seguente postulato, soddisfatto anche dalla meccanica di Galilei-Newton: se un sistema di coordinate K è scelto in modo tale che relativamente ad esso le leggi fisiche valgono nella loro forma più semplice, le *stesse* leggi valgono anche relativamente ad ogni altro sistema di coordinate K', assunto in moto di traslazione uniforme rispetto a K. Chiamiamo questo postulato "principio di relatività speciale". Attraverso la parola "speciale" si allude al fatto che il principio è ristretto al caso che K' compia un *moto di traslazione uniforme* rispetto a K, ma che l'equivalenza di K' e di K non si estende al caso di moto *non uniforme* di K' rispetto a K.

La teoria della relatività speciale si discosta quindi dalla meccanica classica non per il postulato di relatività, ma soltanto per il postulato della costanza della velocità della luce nel vuoto, dal quale, in congiunzione con il principio della relatività speciale, discendono in modo noto la relatività della simultaneità, come pure la trasformazione di Lorentz e le leggi con questa associate sul comportamento in moto dei corpi rigidi e degli orologi.

La modificazione che la teoria dello spazio e del tempo ha subito a causa della teoria della relatività speciale è veramente profonda; ma *un* punto importante rimane intatto. Infatti anche secondo la teoria della relatività speciale le leggi della geometria si devono interpretare direttamente come le leggi sulle possibili posizioni

[1] Die Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie, Annalen der Physik **49**, 769-822 (1916).

relative di corpi rigidi (a riposo), più in generale le leggi della cinematica come leggi che descrivono il comportamento di regoli e orologi. A due punti materiali prefissati di un corpo (rigido) a riposo corrisponde perciò sempre un segmento di lunghezza completamente determinata, indipendente dalla posizione e dall'orientamento del corpo, come pure dal tempo; a due prefissate posizioni delle lancette di un orologio a riposo rispetto ad un sistema di riferimento (consentito) corrisponde sempre un intervallo temporale di lunghezza determinata, indipendente dalla posizione e dal tempo. Si mostrerà subito che la teoria della relatività generale non può attenersi a questa semplice interpretazione fisica dello spazio e del tempo.

§2. Sulle ragioni che raccomandano un'estensione del postulato della relatività.

La meccanica classica e non meno la teoria della relatività speciale contengono un difetto epistemologico, che forse per la prima volta è stato esposto chiaramente da E. Mach. Lo spieghiamo con l'esempio seguente. Due corpi fluidi di uguale grandezza e tipo sono liberamente sospesi nello spazio vuoto a così grande distanza l'uno dall'altro (e da tutte le restanti masse) che si deve tener conto soltanto di quelle forze gravitazionali che le parti di *uno per volta* di questi corpi esercitano l'una sull'altra. La separazione dei corpi sia invariabile. Non compariranno moti relativi delle parti di uno dei corpi l'una rispetto all'altra. Ciascuna delle masse, però - giudicata da un osservatore a riposo relativamente all'altra massa - potrà ruotare con velocità angolare costante attorno alla linea congiungente delle masse (si tratta di un moto relativo constatabile delle due masse). Pensiamo ora di misurare le superfici dei due corpi S_1 ed S_2 per mezzo di un regolo (relativamente a riposo); risulta che la superficie di S_1 è una sfera, quella di S_2 un ellissoide di rotazione.

Chiediamo ora: per quale ragione i corpi S_1 ed S_2 si comportano diversamente? Una risposta a questa domanda può essere epistemologicamente soddisfacente[2] quando il fatto indicato come causa sia una *fatto sperimentale osservabile*; la legge di causalità ha il significato di un'asserzione riguardo al mondo dell'esperienza solo quando come cause ed effetti si hanno in ultima analisi soltanto *fatti osservabili.*

La meccanica di Newton non dà a questa domanda alcuna risposta soddisfacente. Essa dice infatti quanto segue. Le leggi della meccanica valgono ben per uno spazio R_1, rispetto al quale il corpo S_1 è a riposo, ma non rispetto ad uno spazio R_2, rispetto al quale S_2 è a riposo. Il legittimo spazio galileiano R_1, che viene così introdotto, è tuttavia una causa *del tutto fittizia*, non una cosa osservabile. E' quindi chiaro che la meccanica di Newton nel caso considerato soddisfa il requisito della causalità non realmente, ma solo in modo apparente, poiché rende responsabile la causa puramente fittizia R_1 per i comportamenti osservabili distinti dei corpi S_1 ed S_2.

Una risposta soddisfacente alla domanda su enunciata può soltanto suonare così: il sistema fisico costituito da S_1 e S_2 non mostra di per sè solo alcuna causa pensabile, alla quale si possa ricondurre il diverso comportamento di S_1 ed S_2. La causa deve quindi stare *fuori* da questo sistema. Si arriva all'idea che le leggi del moto generali, che determinano in particolare le forme di S_1 ed S_2, devono essere di tipo tale che il comportamento meccanico di S_1 ed S_2 dev'essere condizionato

[2]Una siffatta risposta epistemologicamente soddisfacente può sempre naturalmente rivelarsi *fisicamente* infondata, nel caso che essa sia in contraddizione con altre esperienze.

in modo del tutto essenziale dalle masse lontane, delle quali non abbiamo tenuto conto nel sistema trattato. Queste masse lontane (ed i loro moti relativi rispetto ai corpi considerati) vanno quindi viste come portatrici di cause in linea di principio osservabili per il comportamento diverso dei corpi da noi trattati; esse assumono il ruolo della causa fittizia R_1. Di tutti gli spazi pensabili in moto relativo arbitrario R_1, R_2 eccetera, non se ne deve considerare alcuno come privilegiato, per non far rinascere la suddetta obiezione epistemologica. Le *leggi della fisica devono essere di natura tale da valere rispetto ad un sistema di riferimento in moto arbitrario.* Giungiamo per questa via ad un allargamento del postulato della relatività.

Ma oltre a questo grave argomento epistemologico anche un ben noto fatto fisico parla a favore di un'estensione della teoria della relatività. Sia K un sistema di riferimento galileiano, cioè tale che rispetto ad esso (per lo meno nella regione tetradimensionale considerata) una massa abbastanza lontana dalle altre si muova di moto rettilineo ed uniforme. Sia K' un secondo sistema di coordinate, che sia rispetto a K in moto di traslazione *uniformemente accelerato.* Relativamente a K' una massa sufficientemente separata dalle altre esegue un moto accelerato in modo tale che la sua accelerazione, e la direzione dell'accelerazione, sono indipendenti dalla sua costituzione materiale e dal suo stato fisico.

Può un osservatore in quiete rispetto a K' trarre da qui la conclusione che egli si trova in un sistema di riferimento "realmente" accelerato? A questa domanda si deve rispondere negativamente; infatti il suddetto comportamento di una massa in moto libero relativamente a K' si può interpretare anche nel modo seguente. Il sistema di riferimento K' è non accelerato; nella regione spaziotemporale considerata regna tuttavia un campo di gravitazione, che provoca il moto accelerato del corpo relativamente a K'.

Quest'idea è resa possibile dal fatto che l'esperienza ci ha insegnato l'esistenza di un campo di forze (ossia del campo gravitazionale) il quale possiede la proprietà notevole di impartire a tutti i corpi la stessa accelerazione[3]. Il comportamento meccanico del corpo relativamente a K' è identico a come si presenta l'esperienza rispetto a sistemi, che siamo abituati a considerare come "in quiete" ovvero come "legittimi"; perciò anche dal punto di vista fisico è naturale assumere che i due sistemi K e K' si possono considerare entrambi con lo stesso diritto come "a riposo", ossia che essi sono ugualmente legittimi come sistemi di riferimento per la descrizione fisica dei processi.

Da queste riflessioni si vede che l'introduzione della relatività generale deve condurre parimenti ad una teoria della gravitazione; si può infatti "generare" un campo di gravitazione con il puro cambiamento del sistema di coordinate. E si vede anche immediatamente che il principio della costanza della velocità della luce nel vuoto deve subire una modificazione. Si riconosce infatti facilmente che il cammino di un raggio di luce rispetto a K' in generale dev'essere curvo, mentre la luce si propaga rispetto a K in linea retta e con velocità costante determinata.

§3. Il continuo spaziotemporale. Postulato della covarianza generale per le equazioni che devono esprimere le leggi naturali generali.

Nella meccanica classica e anche nella teoria della relatività speciale le coordinate dello spazio e del tempo hanno un significato fisico immediato. Che un

[3]Che il campo gravitazionale possieda questa proprietà con grande precisione, l'ha dimostrato sperimentalmente Eötvös.

evento puntuale abbia x_1 per la coordinata X_1 significa: la proiezione sull'asse X_1 dell'evento puntuale eseguita per mezzo di regoli rigidi secondo le regole della geometria euclidea si ottiene riportando x_1 volte un regolo determinato, il regolo unitario, dall'origine delle coordinate lungo l'asse X_1 (positivo). Che un punto abbia $x_4 = t$ per coordinata X_4 significa: un orologio campione, che sia costruito secondo prescrizioni determinate, posto a riposo rispetto al sistema di coordinate, che (in pratica) coincida spazialmente con l'evento puntuale, ha accumulato $x_4 = t$ periodi al verificarsi dell'evento puntuale[4].

Quest'idea dello spazio e del tempo è sempre presente ai fisici, anche se per lo più in modo inconscio, com'è riconoscibile chiaramente dal ruolo che questi concetti giocano nella fisica sperimentale; quest'idea il lettore la deve porre a fondamento anche della seconda considerazione dell'ultimo paragrafo, affinché si possa associare un senso a queste argomentazioni. Ma mostreremo ora che bisogna abbandonarla e sostituirla con una più generale per poter introdurre il postulato della relatività generale quando vale la relatività speciale, per il caso limite dell'assenza di un campo di gravitazione.

Introduciamo in uno spazio che sia libero da campi gravitazionali un sistema di riferimento galileiano $K(x, y, z, t)$, e inoltre un sistema di coordinate $K'(x', y', z', t')$ che ruoti uniformemente rispetto a K. Le origini dei due sistemi e i loro assi Z coincidano permanentemente. Mostreremo che per una misura spaziotemporale nel sistema K' la precedente determinazione del significato fisico di lunghezze e tempi non può stare più in piedi. Per ragioni di simmetria è chiaro che un cerchio attorno all'origine nel piano $X - Y$ di K può ugualmente essere considerato un cerchio nel piano $X' - Y'$ di K'. Pensiamo ora che la circonferenza e il diametro di questo cerchio siano misurati con un regolo unitario (infinitamente piccolo rispetto al raggio) e che si faccia il rapporto dei due risultati delle misure. Sa si compie questo esperimento con un regolo a riposo relativamente al sistema galileiano K, si ottiene come rapporto il numero π. *Il* risultato della determinazione compiuto con un regolo a riposo rispetto a K' sarà un numero maggiore di π. Lo si riconosce facilmente, quando si giudichi l'intero processo di misura dal sistema "a riposo" K e si consideri che il regolo disposto lungo la periferia subisce una contrazione di Lorentz, il regolo disposto radialmente invece no. Rispetto a K' non vale quindi la geometria euclidea; il concetto di coordinate prima fissato, che presuppone la validità della geometria euclidea, fa quindi cilecca rispetto al sistema K'. Altrettanto poco si può introdurre in K' un tempo che corrisponda alle necessità fisiche, che sia indicato da orologi a riposo in K', costruiti in modo uguale. Per riconoscerlo, si pensi di disporre rispettivamente nell'origine delle coordinate e sulla periferia del cerchio due orologi costruiti in modo uguale e di osservarli dal sistema "a riposo" K. Secondo un risultato noto della relatività speciale l'orologio disposto sulla periferia del cerchio - giudicato da K - ritarda rispetto all'orologio disposto nell'origine, poiché il primo orologio è in moto, il secondo no. Un osservatore che si trovi nell'origine comune delle coordinate, che sia in grado di osservare anche l'orologio che si trova sulla periferia mediante la luce, vedrà quindi ritardare l'orologio disposto sulla periferia rispetto a quello disposto presso di lui. Poiché egli non può risolversi a lasciar dipendere esplicitamente dal tempo la velocità della luce sul

[4] Assumiamo la constatabilità della "simultaneità" per eventi immediatamente prossimi in senso spaziale, ovvero - detto più precisamente - per l'immediata prossimità spaziotemporale (coincidenza), senza dare una definizione di questo concetto fondamentale.

cammino considerato, interpreterà la sua osservazione nel senso che l'orologio sulla periferia rallenta "davvero" rispetto a quello disposto nell'origine. Egli non potrà quindi fare a meno di definire il tempo in modo tale che la velocità d'avanzamento di un orologio dipenda dalla posizione.

Arriviamo quindi alla conclusione: nella teoria della relatività generale le quantità spaziali e temporali non sono definite in modo tale che le differenze di coordinate spaziali possano essere misurate immediatamente con il regolo campione unitario, e quelle temporali con l'orologio standard.

Il mezzo precedente per introdurre delle coordinate nel continuo spaziotemporale in una maniera definita quindi fallisce, e non pare che si offra alcun'*altra* via che permetta di adattare delle coordinate al mondo tetradimensionale in modo tale che con il loro impiego ci si debba aspettare una formulazione particolarmente semplice delle leggi naturali. Non resta quindi altra possibilità che assumere tutti i sistemi di coordinate pensabili[5] come in linea di principio ugualmente legittimi per la descrizione della natura. Si arriva così al postulato:

Le leggi generali della natura sono da esprimersi con equazioni che valgano per tutti i sistemi di coordinate, cioè che siano covarianti rispetto alle sostituzioni arbitrarie (generalmente covarianti).

E' chiaro che una fisica che obbedisce a questo postulato soddisfa il postulato di relatività generale. Infatti fra *tutte* le sostituzioni sono senz'altro comprese anche quelle che corrispondono a tutti i moti relativi del sistema di coordinate (tridimensionale). Che questo postulato della covarianza generale, che sottrae allo spazio ed al tempo l'ultimo residuo di oggettività fisica, sia un postulato naturale, risulta dalla seguente considerazione. Tutte le nostre constatazioni spaziotemporali derivano sempre dalla determinazione di coincidenze spaziotemporali. Se per esempio gli accadimenti consistessero soltanto nel moto di punti materiali, in ultima analisi non sarebbe osservabile nient'altro che gli incontri di due o più di questi punti. Anche i risultati delle nostre misure non sarebbero nient'altro che la constatazione di incontri siffatti di punti materiali del nostro regolo con altri punti materiali, ovvero coincidenze tra lancette di orologio e cifre sul quadrante, e considerati come eventi puntuali che si verificano nello stesso posto ed allo stesso tempo.

L'introduzione di un sistema di coordinate non serve a nient'altro che ad una descrizione più facile della totalità di tali coincidenze. Si associano all'universo quattro variabili spaziotemporali x_1, x_2, x_3, x_4 in modo tale che ad ogni evento puntuale corrisponda un sistema di valori delle variabili $x_1 \dots x_4$. A due eventi puntuali coincidenti corrisponde lo stesso sistema di valori delle variabili $x_1 \dots x_4$; cioè la coincidenza è caratterizzata dalla concordanza delle coordinate. Se al posto delle variabili $x_1 \dots x_4$ si introducono funzioni arbitrarie delle stesse x'_1, x'_2, x'_3, x'_4 come nuovo sistema di coordinate, in modo che i sistemi di valori si corrispondano univocamente, l'uguaglianza di tutte e quattro le coordinate è anche nel nuovo sistema l'espressione della coincidenza spaziotemporale di due eventi puntuali. Poiché tutte le nostre esperienze fisiche si possono ricondurre in fin dei conti a coincidenze siffatte, non esiste nessuna ragione per preferire certi sistemi di coordinate ad altri, quindi arriviamo al postulato della covarianza generale.

[5]Di certe restrizioni, che corrispondono al requisito di un coordinamento univoco e a quello della continuità, qui non diremo nulla.

§4. Relazione delle quattro coordinate con i risultati delle misure spaziali e temporali. Espressione analitica per il campo gravitazionale.

Non è mio scopo in questa dissertazione presentare la teoria della relatività generale con un minimo di assiomi come un sistema logico il più semplice possibile. È invece mio scopo principale sviluppare questa teoria in modo tale che il lettore avverta la naturalezza psicologica della via intrapresa, e che i postulati scelti a fondamento appaiano il più possibile confermati dall'esperienza. In questo senso si introduce ora il postulato:

Per regioni tetradimensionali infinitamente piccole la teoria della relatività nel senso ristretto dev'esser vera in un opportuno sistema di coordinate.

Lo stato di accelerazione del sistema di coordinate infinitamente piccolo ("locale") va scelto in modo tale che non compaia un campo di gravitazione; ciò è possibile per una regione infinitamente piccola. Siano $X_{1,}X_2, X_3$ le coordinate spaziali; sia X_4 la corrispondente coordinata temporale misurata con un opportuno campione[6]. Per una determinata orientazione del sistema di coordinate queste coordinate hanno, quando si pensi dato un piccolo regolo rigido come regolo di misura unitario, un significato fisico immediato nel senso della teoria della relatività speciale. L'espressione

$$ds^2 = -dX_1^2 - dX_2^2 - dX_3^2 + dX_4^2 \tag{1}$$

ha allora secondo la teoria della relatività speciale un valore, accertabile mediante misura dello spazio e del tempo, indipendente dall'orientazione del sistema di coordinate locali. Chiamiamo ds la lunghezza dell'elemento di linea che appartiene a due punti infinitamente vicini dello spazio tetradimensionale. Se il ds^2 che corrisponde all'elemento $(dX_1 \ldots .dX_4)$ è positivo, chiamiamo quest'ultimo con Minkowski temporale, nel caso contrario spaziale.

All'"elemento di linea" considerato, ovvero ai due eventi puntuali infinitamente vicini corrispondono anche determinati differenziali $dx_1 \ldots .dx_4$ delle coordinate tetradimensionali del sistema di riferimento scelto. Se a questo, nella posizione considerata, si associa anche un sistema "locale" del tipo di cui sopra, i dX_ν si potranno rappresentare con certe espressioni lineari omogenee dei dx_σ:

$$dX_\nu = \sum_\sigma \alpha_{\nu\sigma} dx_\sigma. \tag{2}$$

Se si sostituiscono queste espressioni nella (1), si ottiene

$$ds^2 = \sum_{\sigma\tau} g_{\sigma\tau} dx_\sigma dx_\tau, \tag{3}$$

dove le $g_{\sigma\tau}$ saranno funzioni delle x_σ, che non possono più dipendere dall'orientazione e dallo stato di moto del sistema di coordinate "locale"; dunque ds^2 è una quantità definita indipendentemente da ogni scelta particolare delle coordinate, accertabile mediante misure con regoli e orologi, che appartiene agli eventi puntuali

[6] L'unità temporale va scelta in modo tale che la velocità della luce nel vuoto - misurata nel sistema di coordinate "locale" - sia uguale ad 1.

considerati, infinitamente vicini in senso spaziotemporale. Le $g_{\sigma\tau}$ sono da scegliersi in modo tale che $g_{\sigma\tau} = g_{\tau\sigma}$; la sommatoria va estesa a tutti i valori di σ e τ, di modo che la somma consiste di 4×4 addendi, dei quali 12 sono a coppie uguali.

Il caso della teoria della relatività consueta risulta da quello trattato qui quando, grazie al comportamento particolare di $g_{\sigma\tau}$ in una regione finita, sia possibile scegliere in questa il sistema di riferimento in modo tale che le $g_{\sigma\tau}$ assumano i valori costanti

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{4}$$

Vedremo in seguito che la scelta di tali coordinate per regioni finite in generale non è possibile.

Dalle considerazioni dei §§2 e 3 risulta che le quantità $g_{\sigma\tau}$ sono da intendersi dal punto di vista fisico come quelle quantità che descrivono il campo di gravitazione rispetto al sistema di riferimento scelto. Assumiamo infatti che la teoria della relatività speciale valga con un'opportuna scelta delle coordinate per una certa regione tetradimensionale considerata. Le $g_{\sigma\tau}$ hanno pertanto i valori dati nella (4). Un punto materiale libero si muove allora rispetto a questo sistema di moto rettilineo uniforme. Se si introducono mediante una sostituzione arbitraria nuove coordinate spaziotemporali $x_1 \ldots . x_4$, le $g_{\mu\nu}$ in questo nuovo sistema non saranno più costanti, ma funzioni dello spazio e del tempo. Parimenti il moto del punto materiale libero si rappresenterà nelle nuove coordinate come curvilineo e non uniforme, e la legge di moto sarà indipendente dalla natura del punto materiale che si muove. Interpreteremo quindi questo moto come un moto sotto l'influenza di un campo di gravitazione. Vediamo l'apparire di un campo di gravitazione associato alla variabilità spaziotemporale delle $g_{\sigma\tau}$. Anche nel caso generale, quando non possiamo ottenere con un'opportuna scelta delle coordinate la validità della teoria della relatività speciale in una regione finita, ci atterremo all'ipotesi che le $g_{\sigma\tau}$ descrivano il campo gravitazionale.

La gravitazione, secondo la teoria della relatività generale, gioca pertanto un ruolo eccezionale rispetto alle restanti forze, in particolare a quelle elettromagnetiche, poiché le 10 funzioni $g_{\sigma\tau}$ che rappresentano il campo gravitazionale determinano allo stesso tempo le proprietà metriche dello spazio misurabile tetradimensionale.

B. Sussidi matematici per la costruzione di equazioni generalmente covarianti.

Poiché abbiamo visto in precedenza che il postulato di relatività generale porta all'ingiunzione che i sistemi di equazioni della fisica debbano essere covarianti rispetto a sostituzioni arbitrarie delle coordinate $x_1 \ldots . x_4$, dobbiamo considerare come si possano ottenere equazioni generalmente covarianti di questo tipo. Ci dedichiamo ora a questo problema puramente matematico; si mostrerà che per la sua soluzione l'invariante ds definito nell'equazione (3), che per analogia con la teoria di Gauss delle superfici abbiamo designato come "elemento di linea", gioca un ruolo fondamentale.

L'idea di base di questa teoria generalmente covariante è la seguente. Esistono certi oggetti ("tensori") definiti rispetto a ciascun sistema di coordinate mediante un certo numero di funzioni dello spazio, che saranno chiamate le "componenti" del tensore. Esistono certe regole secondo le quali queste componenti vengono calcolate in un nuovo sistema di coordinate, quando esse siano note per il sistema originario, e quando la trasformazione che collega i due sistemi sia nota. Gli oggetti designati come tensori sono inoltre caratterizzati dal fatto che le equazioni di trasformazione per le loro componenti sono lineari ed omogenee. Di conseguenza tutte le componenti si annullano nel sistema nuovo se si annullano tutte nel sistema originario. Se quindi una legge naturale viene formulata uguagliando a zero tutte le componenti di un tensore, essa è generalmente covariante; studiando le leggi di formazione dei tensori otterremo il mezzo per costruire tutte le leggi covarianti in senso generale.

§5. Tetravettore controvariante e covariante.

Tetravettore controvariante. L'elemento di linea è definito mediante le quattro "componenti" dx_ν la cui legge di trasformazione è espressa dall'equazione

$$dx'_\sigma = \sum_\nu \frac{\partial x'_\sigma}{\partial x_\nu} dx_\nu. \tag{5}$$

I dx'_σ si scrivono mediante un'espressione lineare ed omogenea in dx_ν; possiamo quindi considerare questi differenziali dx_ν delle coordinate come le componenti di un "tensore", che designamo in particolare come tetravettore controvariante. Ogni oggetto definito rispetto al sistema di coordinate mediante quattro quantità A^ν, che si trasformano con la stessa legge

$$A^{\sigma\prime} = \sum_\nu \frac{\partial x'_\sigma}{\partial x_\nu} A^\nu \tag{5a}$$

lo chiameremo sempre tetravettore controvariante. Dalla (5a) discende anche che le somme $(A^\sigma \pm B^\sigma)$ sono sempre componenti di un tetravettore, se A^σ e B^σ lo sono. Il risultato corrispondente vale per tutti i sistemi che si introdurranno in seguito come "tensori" (regola dell'addizione e sottrazione dei tensori).

Tetravettore covariante. Chiamiamo quattro quantità A_ν le componenti di un tetravettore covariante quando con scelta arbitraria del tetravettore controvariante B^ν si ha

$$\sum_\nu A_\nu B^\nu = \mathit{invariante}. \tag{6}$$

Da questa definizione discende la legge di trasformazione dei tetravettori covarianti. Se infatti al secondo membro dell'equazione

$$\sum_\sigma A'_\sigma B^{\sigma\prime} = \sum_\nu A_\nu B^\nu$$

si sostituisce B^ν con l'espressione che si ottiene invertendo l'equazione (5a)

$$\sum_\nu \frac{\partial x_\nu}{\partial x'_\sigma} B^{\sigma\prime},$$

risulta

$$\sum_\sigma B^{\sigma\prime} \sum_\nu \frac{\partial x_\nu}{\partial x'_\sigma} A_\nu = \sum_\sigma B^{\sigma\prime} A'_\sigma.$$

Poiché in questa equazione i $B^{\sigma\prime}$ si possono scegliere liberamente in modo indipendente l'uno dall'altro, da qui risulta la legge di trasformazione

$$A'_\sigma = \sum \frac{\partial x_\nu}{\partial x'_\sigma} A_\nu. \tag{7}$$

Osservazione sulla semplificazione del modo di scrivere l'espressione.

Un'occhiata alle equazioni di questo paragrafo mostra che si somma sempre su indici che compaiano due volte sotto un segno di sommatoria, per esempio l'indice ν nella (5), e *soltanto* su indici che compaiano due volte. È quindi possibile, senza pregiudicare la chiarezza, lasciar perdere il segno di sommatoria. Introduciamo perciò la regola: se un indice compare due volte in un termine di un'espressione, bisogna sempre eseguire la somma su di esso, a meno che non si indichi espressamente l'opposto.

La distinzione tra il tetravettore covariante e quello controvariante sta nella legge di trasformazione [rispettivamente (7) e (5)]. Entrambe le forme sono tensori nel senso dell'osservazione generale precedente; in ciò sta il loro significato. In conformità con Ricci e Levi-Civita si denoterà il carattere controvariante con l'indice in alto, quello covariante con l'indice in basso.

§6. Tensori di rango secondo e più alto.

Tensore controvariante. Formiamo tutti i 16 prodotti $A^{\mu\nu}$ delle componenti A^μ e B^ν di due tetravettori controvarianti

$$A^{\mu\nu} = A^\mu B^\nu; \tag{8}$$

allora per le (8) e (5a) $A^{\mu\nu}$ soddisfa la legge di trasformazione

$$A^{\sigma\tau\prime} = \frac{\partial x'_\sigma}{\partial x_\mu} \frac{\partial x'_\tau}{\partial x_\nu} A^{\mu\nu}. \tag{9}$$

Chiamiamo tensore controvariante di rango secondo un oggetto che rispetto ad un sistema di riferimento si scrive con 16 quantità (funzioni), che soddisfino la legge di trasformazione (9). Non tutti i tensori siffatti si possono formare da due tetravettori secondo la (8). Ma è facile dimostrare che 16 $A^{\mu\nu}$ dati arbitrariamente si possono rappresentare come la somma degli $A^\mu B^\nu$ di quattro coppie di tetravettori opportunamente scelte. Perciò quasi tutte le regole che valgono per un tensore di secondo rango definito dalla (9) si possono dimostrare nel modo più semplice a partire dal fatto che esse valgano per tensori particolari del tipo (8).

Tensore controvariante di rango qualsiasi. È chiaro che secondo le (8) e (9) si possono anche definire tensori controvarianti di rango terzo e superiore con 4^3 o più componenti. Risulta pure chiaro dalle (8) e (9) che in questo senso il tetravettore controvariante si può intendere come tensore controvariante di rango uno.

Tensore covariante. Se si formano invece i 16 prodotti $A_{\mu\nu}$ di due tetravettori *covarianti* A_μ e B_ν

$$A_{\mu\nu} = A_\mu B_\nu, \tag{10}$$

per essi vale la legge di trasformazione

$$A'_{\sigma\tau} = \frac{\partial x_\mu}{\partial x'_\sigma}\frac{\partial x_\nu}{\partial x'_\tau}A_{\mu\nu}. \tag{11}$$

Il tensore covariante di rango secondo è definito da questa legge di trasformazione. Tutte le osservazioni che sono state fatte precedentemente sui tensori controvarianti valgono anche per i tensori covarianti.

Osservazione. È conveniente trattare lo scalare (invariante) come un tensore di rango zero sia controvariante che covariante.

Tensore misto. Si può anche definire un tensore di rango secondo del tipo

$$A_\mu^\nu = A_\mu B^\nu, \tag{12}$$

che sia covariante rispetto all'indice μ, e controvariante rispetto all'indice ν. La sua legge di trasformazione è

$$A_\sigma^{\tau\,\prime} = \frac{\partial x'_\tau}{\partial x_\beta}\frac{\partial x_\alpha}{\partial x'_\sigma}A_\alpha^\beta. \tag{13}$$

Naturalmente esistono tensori misti con un numero a piacere di indici di carattere covariante e rispettivamente controvariante. Il tensore covariante e quello controvariante possono essere considerati come casi particolari di quello misto.

Tensori simmetrici. Un tensore controvariante o covariante di rango secondo o più alto si chiama *simmetrico* quando siano uguali due componenti che vanno l'una nell'altra per scambio di due indici qualsiansi. Il tensore $A^{\mu\nu}$ o $A_{\mu\nu}$ è quindi simmetrico, se per ogni combinazione degli indici si ha

$$A^{\mu\nu} = A^{\nu\mu}, \tag{14}$$

ovvero

$$A_{\mu\nu} = A_{\nu\mu}. \tag{14a}$$

Va osservato che la simmetria così definita è una proprietà indipendente dal sistema di riferimento. (Infatti, tenendo conto della (14), dalla (9) discende

$$A^{\sigma\tau\,\prime} = \frac{\partial x'_\sigma}{\partial x_\mu}\frac{\partial x'_\tau}{\partial x_\nu}A^{\mu\nu} = \frac{\partial x'_\sigma}{\partial x_\mu}\frac{\partial x'_\tau}{\partial x_\nu}A^{\nu\mu} = \frac{\partial x'_\tau}{\partial x_\mu}\frac{\partial x'_\sigma}{\partial x_\nu}A^{\mu\nu} = A^{\tau\sigma\,\prime}.$$

La penultima uguaglianza deriva dallo scambio degli indici di somma μ e ν (cioè da un puro cambio di notazione).

Tensori antisimmetrici. Un tensore controvariante di rango secondo, terzo o quarto si dice antisimmetrico quando due componenti, che vanno l'una nell'altra per scambio di due indici qualsiansi, siano *uguali* ed *opposte*. Il tensore $A^{\mu\nu}$ o $A_{\mu\nu}$ è quindi antisimmetrico, se si ha sempre

$$A^{\mu\nu} = -A^{\nu\mu}, \tag{15}$$

ovvero

$$A_{\mu\nu} = -A_{\nu\mu}. \tag{15a}$$

Delle 16 componenti $A^{\mu\nu}$ le quattro componenti $A^{\mu\mu}$ sono nulle; le rimanenti sono a coppie uguali ed opposte, sicché solo 6 componenti sono numericamente diverse (esavettore). Si vede parimenti che il tensore antisimmetrico $A^{\mu\nu\sigma}$ (rango terzo) ha solo quattro componenti numericamente distinte, e che il tensore antisimmetrico $A^{\mu\nu\sigma\tau}$ ne ha una sola. Tensori antisimmetrici di rango superiore al quarto non esistono in un continuo con quattro dimensioni.

§7. Moltiplicazione dei tensori.

Moltiplicazione esterna dei tensori. Dalle componenti di un tensore di rango z e di un tensore di rango z' si ottengono le componenti di un tensore di rango $z + z'$ se si moltiplicano a coppie tutte le componenti del primo per tutte le componenti del secondo. Si ottengono per esempio i tensori T dai tensori A e B di tipo diverso

$$T_{\mu\nu\sigma} = A_{\mu\nu}B_{\sigma},$$

$$T^{\alpha\beta\gamma\delta} = A^{\alpha\beta}B^{\gamma\delta},$$

$$T^{\gamma\delta}_{\alpha\beta} = A_{\alpha\beta}B^{\gamma\delta}.$$

La dimostrazione del carattere tensoriale di T si ottiene immediatamente dalle rappresentazioni (8), (10), (12) ovvero dalle regole di trasformazione (9), (11), (13). Le equazioni (8), (10), (12) sono loro stesse esempi di moltiplicazione esterna (di tensori di rango primo).

"*Contrazione*" *di un tensore misto.* Da ogni tensore misto si può formare un tensore d'un rango di due più piccolo, se si pongono uguali un indice covariante ed un indice controvariante e si somma su questo indice ("contrazione"). Per esempio dal tensore misto di rango quarto $A^{\gamma\delta}_{\alpha\beta}$ si ottiene il tensore misto di rango secondo

$$A^{\delta}_{\beta} = A^{\alpha\delta}_{\alpha\beta} \left(= \sum_{\alpha} A^{\alpha\delta}_{\alpha\beta} \right)$$

e da questo, ancora per contrazione, il tensore di rango nullo $A = A^{\beta}_{\beta} = A^{\alpha\beta}_{\alpha\beta}$.

La dimostrazione del fatto che il risultato della contrazione ha davvero carattere tensoriale si ottiene o dalla rappresentazione tensoriale secondo la generalizzazione della (12) assieme alla (6), o dalla generalizzazione della (13).

Moltiplicazione interna e mista dei tensori. Esse consistono nella combinazione della moltiplicazione esterna con la contrazione.

Esempi. - Dal tensore covariante di rango due $A_{\mu\nu}$ e dal tensore controvariante di rango uno B^{σ} formiamo mediante moltiplicazione esterna il tensore misto

$$D^{\sigma}_{\mu\nu} = A_{\mu\nu}B^{\sigma}$$

Per contrazione relativa agli indici ν, σ risulta il tetravettore covariante

$$D_\mu = D_{\mu\nu}^{\nu} = A_{\mu\nu} B^\nu .$$

Questo lo si chiama anche prodotto interno dei tensori $A_{\mu\nu}$ e B^σ. Analogamente dai tensori $A_{\mu\nu}$ e $B^{\sigma\tau}$ per moltiplicazione esterna e doppia contrazione si forma il prodotto interno $A_{\mu\nu}B^{\mu\nu}$. Mediante prodotto esterno e contrazione semplice si ottiene da $A_{\mu\nu}$ e $B^{\sigma\tau}$ il tensore misto di rango secondo $D_\mu^\tau = A_{\mu\nu}B^{\nu\tau}$. Si può opportunamente designare questa operazione come mista; infatti essa è esterna rispetto agli indici μ e τ, interna rispetto agli indici ν e σ.

Dimostriamo ora un teorema che è spesso utile per la verifica del carattere tensoriale. Per quanto mostrato prima $A_{\mu\nu}B^{\mu\nu}$ è uno scalare se $A_{\mu\nu}$ e $B^{\mu\nu}$ sono tensori. Ma affermiamo anche quanto segue. Se $A_{\mu\nu}B^{\mu\nu}$ è un invariante per ogni scelta del *tensore* $B^{\mu\nu}$, $A_{\mu\nu}$ ha carattere tensoriale.

Dimostrazione. - Per ipotesi per una sostituzione arbitraria si ha

$$A'_{\sigma\tau} B^{\sigma\tau\prime} = A_{\mu\nu} B^{\mu\nu} .$$

Ma per l'inversa della (9) si ha

$$B^{\mu\nu} = \frac{\partial x_\mu}{\partial x'_\sigma} \frac{\partial x_\nu}{\partial x'_\tau} B^{\sigma\tau\prime} .$$

Questa, sostituita nell'equazione precedente, dà

$$\left(A'_{\sigma\tau} - \frac{\partial x_\mu}{\partial x'_\sigma} \frac{\partial x_\nu}{\partial x'_\tau} A_{\mu\nu} \right) B^{\sigma\tau\prime} = 0.$$

Per una scelta arbitraria di $B^{\sigma\tau\prime}$ questa equazione può essere soddisfatta solo se la parentesi è uguale a zero, e da qui tenendo conto della (11) segue l'asserto.

Questo teorema vale analogamente per tensori di rango e carattere arbitrari; la dimostrazione si esegue sempre in modo analogo.

Il teorema si può dimostrare anche nella forma: se B^μ e C^ν sono vettori arbitrari, e se per ogni scelta di questi il prodotto interno

$$A_{\mu\nu} B^\mu C^\nu$$

è uno scalare, $A_{\mu\nu}$ è un tensore covariante. Quest'ultimo teorema vale anche quando si ha a che fare con l'enunciato particolare, che per scelta arbitraria del tetravettore B^μ il prodotto scalare

$$A_{\mu\nu} B^\mu B^\nu$$

è uno scalare, purché si sappia che $A_{\mu\nu}$ soddisfi la condizione di simmetria $A_{\mu\nu} = A_{\nu\mu}$. Infatti per la via data prima si dimostra il carattere tensoriale di $(A_{\mu\nu} + A_{\nu\mu})$, e da qui per la proprietà di simmetria discende il carattere tensoriale dello stesso $A_{\mu\nu}$. Anche questo teorema si generalizza agevolmente al caso di tensori covarianti e controvarianti di rango arbitrario.

Discende infine da quanto provato prima il teorema parimenti estendibile a tensori arbitrari: se la quantità $A_{\mu\nu}B^\nu$ per scelta arbitraria del tetravettore B^ν è un tensore di rango primo, $A_{\mu\nu}$ è un tensore di rango secondo. Se infatti C^ν è un tetravettore arbitrario, per il carattere tensoriale di $A_{\mu\nu}B^\nu$ il prodotto interno

$A_{\mu\nu}C^\mu B^\nu$ è uno scalare per scelta arbitraria dei due tetravettori C^μ e B^ν, e da qui segue l'asserto.

§8. Alcune proprietà del tensore fondamentale $g_{\mu\nu}$.

Il *tensore fondamentale covariante.* Nell'espressione invariante del quadrato dell'elemento di linea

$$ds^2 = g_{\mu\nu}dx_\mu dx_\nu$$

dx_μ gioca il ruolo di un vettore controvariante arbitrario. Poiché inoltre $g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}$, dalle considerazioni dell'ultimo paragrafo discende che $g_{\mu\nu}$ è un tensore covariante di rango secondo. Lo chiamiamo "tensore fondamentale". Nel seguito deriviamo alcune proprietà di questo tensore, che sono proprie di ogni tensore di rango secondo; tuttavia il ruolo particolare del tensore fondamentale nella nostra teoria, che ha la sua base fisica nella peculiarità delle azioni gravitazionali, porta con sè che le relazioni che s'otterranno siano per noi significative solo per il tensore fondamentale.

Il *tensore fondamentale controvariante.* Se nello schema del determinante dei $g_{\mu\nu}$ si forma il minore corrispondente ad ogni $g_{\mu\nu}$ e lo si divide per il determinante $g = |g_{\mu\nu}|$ dei $g_{\mu\nu}$, si ottengono certe quantità $g^{\mu\nu}(= g^{\nu\mu})$, riguardo alle quali dimostreremo che costituiscono un tensore controvariante.

Per una nota proprietà dei determinanti si ha

$$g_{\mu\sigma}g^{\nu\sigma} = \delta_\mu^\nu, \tag{16}$$

dove il simbolo δ_μ^ν significa 1 o 0, a seconda che sia $\mu = \nu$ oppure $\mu \neq \nu$. Al posto dell'espressione precedente per ds^2 possiamo anche scrivere

$$g_{\mu\sigma}\delta_\nu^\sigma dx_\mu dx_\nu,$$

ovvero per la (16) anche

$$g_{\mu\sigma}g_{\nu\tau}g^{\sigma\tau}dx_\mu dx_\nu.$$

Ma per le regole di moltiplicazione del paragrafo precedente le quantità

$$d\xi_\sigma = g_{\mu\sigma}dx_\mu$$

costituiscono un tetravettore covariante, e in particolare (poiché i dx_μ si possono scegliere a piacere) un tetravettore arbitrario. Sostituendolo nella nostra espressione otteniamo

$$ds^2 = g^{\sigma\tau}d\xi_\sigma d\xi_\tau.$$

Poiché questo è uno scalare per scelta arbitraria del vettore $d\xi_\sigma$ e $g^{\sigma\tau}$ è per definizione simmetrico negli indici σ e τ, dai risultati del paragrafo precedente discende che $g^{\sigma\tau}$ è un tensore controvariante. Dalla (16) discende ancora che anche δ_μ^ν è un tensore, che possiamo chiamare il tensore fondamentale misto.

Determinante del tensore fondamentale. Per la legge di moltiplicazione dei determinanti si ha

$$|g_{\mu\alpha}g^{\alpha\nu}| = |g_{\mu\alpha}||g^{\alpha\nu}|.$$

D'altra parte

$$|g_{\mu\alpha}g^{\alpha\nu}| = |\delta_\mu^\nu| = 1.$$

Ne discende quindi

$$|g_{\mu\nu}||g^{\mu\nu}| = 1. \tag{17}$$

Invariante di volume. Studiamo in primo luogo la legge di trasformazione del determinante $g = |g_{\mu\nu}|$. Per la (11) si ha

$$g' = \left| \frac{\partial x_\mu}{\partial x'_\sigma} \frac{\partial x_\nu}{\partial x'_\tau} g_{\mu\nu} \right|.$$

Da qui applicando due volte la regola di moltiplicazione dei determinanti s'ottiene

$$g' = \left| \frac{\partial x_\mu}{\partial x'_\sigma} \right| \left| \frac{\partial x_\nu}{\partial x'_\tau} \right| |g_{\mu\nu}| = \left| \frac{\partial x_\mu}{\partial x'_\sigma} \right|^2 g,$$

ovvero

$$\sqrt{g'} = \left| \frac{\partial x_\mu}{\partial x'_\sigma} \right| \sqrt{g}.$$

D'altra parte la legge di trasformazione dell'elemento di volume

$$d\tau' = \int dx_1 dx_2 dx_3 dx_4$$

è

$$d\tau' = \left| \frac{\partial x'_\sigma}{\partial x_\mu} \right| d\tau$$

per il noto teorema di Jacobi. Moltiplicando le ultime due equazioni si ottiene

$$\sqrt{g'}d\tau' = \sqrt{g}d\tau. \tag{18}$$

Al posto di $\sqrt{g}$ si introdurrà nel seguito la quantità $\sqrt{-g}$, che per il carattere iperbolico del continuo spaziotemporale ha sempre un valore reale. L'invariante $\sqrt{-g}d\tau$ è uguale alla grandezza dell'elemento di volume tetradimensionale misurato con regolo rigido e orologio nel senso della teoria della relatività speciale nel "sistema di riferimento locale".

Osservazione sul carattere del continuo spaziotemporale. La nostra ipotesi, che nell'infinitamente piccolo valga la teoria della relatività speciale porta con sè che ds^2 si possa sempre esprimere secondo la (1) mediante le quantità reali $dX_1 \ldots . dX_4$. Chiamiamo $d\tau_0$ l'elemento di volume "naturale" $dX_1 dX_2 dX_3 dX_4$; allora si ha

$$d\tau_0 = \sqrt{-g}d\tau. \tag{18a}$$

Se $\sqrt{-g}$ si annullasse in un punto del continuo tetradimensionale, ciò significherebbe che lì ad un volume finito in coordinate corrisponderebbe un volume "naturale" infinitamente piccolo. Ciò non può mai accadere. Infatti g non può cambiare di segno; assumeremo in conformità alla relatività speciale che g ha sempre un valore finito negativo. Questa è un'ipotesi sulla natura fisica del continuo considerato ed insieme una condizione sulla scelta delle coordinate.

Ma se $-g$ è sempre finito e positivo, è evidente che si può arrangiare a posteriori la scelta delle coordinate in modo che questa quantità sia uguale ad 1. Vedremo in seguito che con questa restrizione della scelta delle coordinate si può ottenere una considerevole semplificazione delle leggi di natura. Al posto della (18) compare semplicemente

$$d\tau' = d\tau,$$

e quindi, tenendo conto del teorema di Jacobi, risulta

$$\left| \frac{\partial x'_\sigma}{\partial x_\mu} \right| = 1. \tag{19}$$

Con questa scelta delle coordinate sono ammissibili solo sostituzioni delle coordinate di determinante 1.

Sarebbe tuttavia sbagliato credere che questa prescrizione significhi una parziale rinuncia al postulato della relatività generale. Noi non chiediamo: "Come sono le leggi di natura che siano covarianti rispetto a tutte le trasformazioni di determinante 1?". Chiediamo invece: "Come sono le leggi di natura a covarianza *generale*"? Solo dopo che queste sono state enunciate semplifichiamo la nostra espressione mediante una scelta particolare del sistema di riferimento.

Formazione di nuovi tensori con il tensore fondamentale. Per moltiplicazione interna, esterna e mista di un tensore per il tensore fondamentale si ottengono tensori di carattere e rango diversi. Esempio:

$$A^\mu = g^{\mu\sigma} A_\sigma,$$

$$A = g_{\mu\nu} A^{\mu\nu}.$$

In particolare si accennerà alle seguenti formazioni:

$$A^{\mu\nu} = g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} A_{\alpha\beta},$$

$$A_{\mu\nu} = g_{\mu\alpha} g_{\nu\beta} A^{\alpha\beta}$$

("complemento" del tensore covariante, o controvariante), e

$$B_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} g^{\alpha\beta} A_{\alpha\beta}.$$

Chiamiamo $B_{\mu\nu}$ il tensore ridotto appartenente ad $A_{\mu\nu}$. Analogamente

$$B^{\mu\nu} = g^{\mu\nu} g^{\alpha\beta} A_{\alpha\beta}$$

Si noti che $g^{\mu\nu}$ non è altro che il complemento di $g_{\mu\nu}$. Si ha infatti

$$g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} g_{\alpha\beta} = g^{\mu\alpha} \delta_\alpha^\nu = g^{\mu\nu}.$$

§9. Equazione della linea geodetica (ovvero del moto del punto).

Poiché l'"elemento di linea" ds è una quantità definita in modo indipendente dalla scelta delle coordinate, anche la linea tracciata tra due punti P_1 e P_2 del continuo tetradimensionale, per la quale $\int ds$ è un estremo (linea geodetica) ha un significato indipendente dalla scelta delle coordinate. La sua equazione è

$$\delta \left\{ \int_{P_1}^{P_2} ds \right\} = 0. \tag{20}$$

Da questa equazione si trovano in modo noto eseguendo la variazione quattro equazioni differenziali totali, che determinano questa linea geodetica; questa derivazione troverà posto qui per completezza. Sia λ una funzione delle coordinate x_ν; questa definisca una famiglia di superfici, attraversate dalla linea geodetica cercata e da tutte le linee ad essa infinitamente vicine, tracciate tra i punti P_1 e P_2. Ognuna di queste curve si può quindi pensare definita in modo tale che le sue coordinate x_ν siano espresse in funzione di λ. Il simbolo δ corrisponda al passaggio da un punto della curva geodetica cercata a quel punto di una curva vicina, che corrisponde allo stesso λ. Allora la (20) si può sostituire con

$$\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \delta w d\lambda = 0, \; w^2 = g_{\mu\nu} \frac{dx_\mu}{d\lambda} \frac{dx_\nu}{d\lambda}. \tag{20a}$$

Poiché

$$\delta w = \frac{1}{w} \left\{ \frac{1}{2} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma} \frac{dx_\mu}{d\lambda} \frac{dx_\nu}{d\lambda} \delta x_\sigma + g_{\mu\nu} \frac{dx_\mu}{d\lambda} \delta \left(\frac{dx_\nu}{d\lambda} \right) \right\},$$

sostituendo δw nella (20a) e tenendo conto che

$$\delta \left(\frac{dx^\nu}{d\lambda} \right) = \frac{d\delta x_\nu}{d\lambda},$$

si ottiene con integrazione per parti

$$\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} d\lambda \kappa_\sigma \delta x_\sigma = 0, \; \kappa_\sigma = \frac{d}{d\lambda} \left\{ \frac{g^{\mu\nu}}{w} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \right\} - \frac{1}{2w} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma} \frac{dx_\mu}{d\lambda} \frac{dx_\nu}{d\lambda}. \tag{20b}$$

Poiché δx_σ può esser scelto in modo arbitrario, da qui discende l'annullarsi di κ_σ. Quindi

$$\kappa_\sigma = 0 \tag{20c}$$

sono le equazioni della linea geodetica. Se sulla linea geodetica considerata non si ha $ds = 0$, possiamo utilizzare come parametro λ la "lunghezza dell'arco" s misurata lungo la linea geodetica. Allora sarà $w = 1$, e al posto della (20c) si ottiene

$$g_{\mu\nu} \frac{d^2 x_\mu}{ds^2} + \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma} \frac{dx_\sigma}{ds} \frac{dx_\mu}{ds} - \frac{1}{2} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma} \frac{dx_\mu}{ds} \frac{dx_\nu}{ds} = 0,$$

ovvero per puro cambio di notazione

$$g_{\alpha\sigma}\frac{d^2x_\alpha}{ds^2}+\begin{bmatrix}\mu\nu\\ \sigma\end{bmatrix}\frac{dx_\mu}{ds}\frac{dx_\nu}{ds}=0, \tag{20d}$$

dove con Christoffel si è posto

$$\begin{bmatrix}\mu\nu\\ \sigma\end{bmatrix}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{\mu\sigma}}{\partial x_\nu}+\frac{\partial g_{\nu\sigma}}{\partial x_\mu}-\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma}\right). \tag{21}$$

Se si moltiplica infine la (20d) per $g^{\sigma\tau}$ (moltiplicazione esterna rispetto a τ, interna rispetto a σ), si ottiene in conclusione come forma finale dell'equazione della linea geodetica

$$\frac{d^2x_\tau}{ds^2}+\begin{Bmatrix}\mu\nu\\ \tau\end{Bmatrix}\frac{dx_\mu}{ds}\frac{dx_\nu}{ds}=0. \tag{22}$$

Qui si è posto con Christoffel

$$\begin{Bmatrix}\mu\nu\\ \tau\end{Bmatrix}=g^{\tau\alpha}\begin{bmatrix}\mu\nu\\ \alpha\end{bmatrix}. \tag{23}$$

§10. La formazione di tensori per derivazione.

Appoggiandoci all'equazione della linea geodetica possiamo derivare facilmente le leggi secondo le quali da tensori si possono formare nuovi tensori per derivazione. In tal modo saremo finalmente in grado di enunciare equazioni differenziali generalmente covarianti. Raggiungiamo lo scopo per applicazione ripetuta del seguente semplice teorema.

Sia data nel nostro continuo una curva, i punti della quale siano caratterizzati dalla distanza s lungo l'arco da un punto fisso sulla curva, e sia inoltre φ una funzione invariante dello spazio, sicché anche $d\varphi/ds$ è un invariante. La dimostrazione dipende dal fatto che sia $d\varphi$ che ds sono invarianti. Poiché

$$\frac{d\varphi}{ds}=\frac{\partial\varphi}{\partial x_\mu}\frac{dx_\mu}{ds},$$

anche

$$\psi=\frac{\partial\varphi}{\partial x_\mu}\frac{dx_\mu}{ds}$$

è un invariante, e ciò per tutte le curve che escono da un punto del continuo, cioè per scelta arbitraria del vettore dx_μ. Da qui discende immediatamente che

$$A_\mu=\frac{\partial\varphi}{\partial x_\mu} \tag{24}$$

è un tetravettore covariante (gradiente di φ).

Per il nostro teorema anche la derivata eseguita lungo una curva

$$\chi=\frac{d\psi}{ds}$$

è un invariante. Sostituendo ψ otteniamo immediatamente

$$\chi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_\mu \partial x_\nu} \frac{dx_\mu}{ds} \frac{dx_\nu}{ds} + \frac{\partial \varphi}{\partial x_\mu} \frac{d^2 x_\mu}{ds^2}.$$

Da qui non si può derivare subito l'esistenza di un tensore. Ma se stabiliamo che la curva, rispetto alla quale abbiamo eseguito la derivazione, sia una curva geodetica, otteniamo dalla (22) sostituendo $d^2 x_\nu / ds^2$:

$$\chi = \left\{ \frac{\partial^2_\varphi}{\partial x_\mu \partial x_\mu} - \left\{ \begin{matrix} \mu\nu \\ \tau \end{matrix} \right\} \frac{\partial \varphi}{\partial x_\tau} \right\} \frac{dx_\mu}{ds} \frac{dx_\nu}{ds}.$$

Dall'invertibilità dell'ordine di derivazione rispetto a μ e ν, e per il fatto che secondo le (23) e (21) la parentesi $\left\{ \begin{matrix} \mu\nu \\ \tau \end{matrix} \right\}$ è simmetrica rispetto a μ e ν, discende che l'espressione entro la parentesi è simmetrica in μ e ν. Poiché da un punto del continuo si può tracciare una linea geodetica in direzione arbitraria, e quindi dx_μ / ds è un tetravettore con rapporto tra le componenti determinabile a piacere, discende per i risultati del §7 che

$$A_{\mu\nu} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_\mu \partial x_\nu} - \left\{ \begin{matrix} \mu\nu \\ \tau \end{matrix} \right\} \frac{\partial \varphi}{\partial x_\tau} \tag{25}$$

è un tensore covariante di rango secondo. Abbiamo quindi ottenuto il risultato: dal tensore covariante di rango primo

$$A_\mu = \frac{\partial \varphi}{\partial x_\mu}$$

possiamo costruire per derivazione un tensore covariante di rango secondo

$$A_{\mu\nu} = \frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu} - \left\{ \begin{matrix} \mu\nu \\ \tau \end{matrix} \right\} A_\tau. \tag{26}$$

Chiamiamo il tensore $A_{\mu\nu}$ l'"*estensione*" del tensore A_μ. Possiamo dimostrare immediatamente che questa forma produce un tensore anche se il vettore A_μ non è rappresentabile come un gradiente. Per veder ciò osserviamo in primo luogo che

$$\psi \frac{\partial \varphi}{\partial x_\mu}$$

è un tetravettore covariante se ψ e φ sono scalari. Ciò è vero anche per la somma che consiste di quattro termini siffatti

$$S_\mu = \psi^{(1)} \frac{\partial \varphi^{(1)}}{\partial x_\mu} + . + . + \psi^{(4)} \frac{\partial \varphi^{(4)}}{\partial x_\mu},$$

nel caso che $\psi^{(1)} \varphi^{(1)} \ldots . \psi^{(4)} \varphi^{(4)}$ siano degli scalari. Ma ora è chiaro che ogni tetravettore covariante si può rappresentare nella forma S_μ. Se infatti A_μ è un tetravettore, le componenti del quale siano funzioni di x_ν date a piacere, basta porre (rispetto al sistema di coordinate scelto)

$$\psi^{(1)} = A_1, \varphi^{(1)} = x_1,$$
$$\psi^{(2)} = A_2, \varphi^{(2)} = x_2,$$
$$\psi^{(3)} = A_3, \varphi^{(3)} = x_3,$$
$$\psi^{(4)} = A_4, \varphi^{(4)} = x_4,$$

per ottenere che S_μ sia uguale ad A_μ.

Per dimostrare che $A_{\mu\nu}$ è un tensore anche se al secondo membro si sostituisce al posto di A_μ un tetravettore covariante arbitrario ci basta ora dimostrare che ciò accade per il tetravettore S_μ. Ma per quest'ultimo basta, come c'insegna uno sguardo al secondo membro della (26), eseguire la dimostrazione per il caso

$$A_\mu = \psi \frac{\partial \varphi}{\partial x_\mu}.$$

Il secondo membro della (25) moltiplicato per ψ

$$\psi \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_\mu \partial x_\nu} - \left\{ \begin{matrix} \mu\nu \\ \tau \end{matrix} \right\} \psi \frac{\partial \varphi}{\partial x_\tau}$$

ha carattere tensoriale. Parimenti

$$\frac{\partial \psi}{\partial x_\mu} \frac{\partial \varphi}{\partial x_\nu}$$

è un tensore (prodotto esterno di due tetravettori). Per addizione discende il carattere tensoriale di

$$\frac{\partial}{\partial x_\nu} \left(\psi \frac{\partial \varphi}{\partial x_\mu} \right) - \left\{ \begin{matrix} \mu\nu \\ \tau \end{matrix} \right\} \psi \frac{\partial \varphi}{\partial x_\tau}.$$

Pertanto, come insegna uno sguardo alla (26), si è ottenuta la dimostrazione richiesta per il tetravettore

$$\psi \frac{\partial \varphi}{\partial x_\mu},$$

e quindi per quanto mostrato prima per ogni tetravettore A_μ. - Per mezzo dell'estensione del tetravettore si può ottenere facilmente l'"estensione" di un tensore covariante di rango arbitrario; questa forma è una generalizzazione dell'estensione del tetravettore. Ci limitiamo ad esporre l'estensione del tensore di rango secondo, poiché la legge di formazione di questa si può già comprendere chiaramente.

Come già osservato, ogni tensore covariante di rango secondo si può rappresentare[7] come una somma di tensori del tipo $A_\mu B_\nu$. Sarà quindi sufficiente derivare

[7] Per moltiplicazione esterna di vettori con le componenti (scelte arbitrariamente) A_{11}, A_{12}, A_{13}, A_{14} e 1, 0, 0, 0 si ottiene il tensore con le componenti

$$\begin{matrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}$$

Per addizione di quattro tensori di questo tipo si ottiene il tensore $A_{\mu\nu}$ con componenti assegnate a piacere.

l'espressione dell'estensione per un siffatto tensore speciale. Per la (26) le espressioni

$$\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\sigma} - \left\{ \begin{matrix} \sigma\mu \\ \tau \end{matrix} \right\} A_\tau,$$

$$\frac{\partial B_\mu}{\partial x_\sigma} - \left\{ \begin{matrix} \sigma\mu \\ \tau \end{matrix} \right\} B_\tau$$

hanno carattere tensoriale. Per moltiplicazione esterna della prima per B_ν e della seconda per A_μ si ottiene ogni volta un tensore di rango terzo; la loro somma dà il tensore di rango terzo

$$A_{\mu\nu\sigma} = \frac{\partial A_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma} - \left\{ \begin{matrix} \sigma\mu \\ \tau \end{matrix} \right\} A_{\tau\nu} - \left\{ \begin{matrix} \sigma\nu \\ \tau \end{matrix} \right\} A_{\mu\tau}, \tag{27}$$

ove si è posto $A_{\mu\nu} = A_\mu B_\nu$. Poiché il secondo membro della (27) è lineare ed omogeneo rispetto ad $A_{\mu\nu}$ ed alle sue derivate prime, una tale legge di formazione non porta ad un tensore solo per un tensore del tipo $A_\mu B_\nu$ ma anche per una somma di tensori siffatti, e quindi per un tensore covariante arbitrario di secondo rango. Chiamiamo $A_{\mu\nu\sigma}$ l'estensione del tensore $A_{\mu\nu}$.

E' chiaro che la (26) e la (24) sono solo casi particolari della (27) (estensione del tensore di rango primo e di rango zero). Tutte le leggi di formazione particolari si possono riassumere nella (27) unita a moltiplicazioni tensoriali.

§11. Alcuni casi particolari di rilevante importanza.

Alcune leggi ausiliarie riguardanti il tensore fondamentale. Deriviamo ora alcune equazioni ausiliarie molto usate in seguito. Per la regola di derivazione dei determinanti si ha

$$dg = g^{\mu\nu} g dg_{\mu\nu} = -g_{\mu\nu} g dg^{\mu\nu}. \tag{28}$$

La seconda forma si giustifica mediante la precedente, se si tien conto che $g_{\mu\nu} g^{\mu'\nu} = \delta_\mu^{\mu'}$, che quindi $g_{\mu\nu} g^{\mu\nu} = 4$, e di conseguenza

$$g_{\mu\nu} dg^{\mu\nu} + g^{\mu\nu} dg_{\mu\nu} = 0.$$

Dalla (28) discende

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial \sqrt{-g}}{\partial x_\sigma} = \frac{1}{2} \frac{\partial \lg(-g)}{\partial x_\sigma} = \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma} = -\frac{1}{2} g_{\mu\nu} \frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x_\sigma}. \tag{29}$$

Da

$$g_{\mu\sigma} g^{\nu\sigma} = \delta_\mu^\nu$$

discende inoltre per derivazione

$$g_{\mu\sigma} dg^{\nu\sigma} = -g^{\nu\sigma} dg_{\mu\sigma}, \ \textit{ovvero} \ g_{\mu\sigma} \frac{\partial g^{\nu\sigma}}{\partial x_\lambda} = -g^{\nu\sigma} \frac{\partial g_{\mu\sigma}}{\partial x_\lambda}. \tag{30}$$

Per moltiplicazione mista con $g^{\sigma\tau}$ ovvero $g_{\nu\lambda}$ si ottiene da qui (con cambiamento di nome di indici)

$$dg^{\mu\nu} = -g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} dg_{\alpha\beta}, \quad \frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x_\sigma} = -g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x_\sigma} \tag{31}$$

ovvero

$$dg_{\mu\nu} = -g_{\mu\alpha} g_{\nu\beta} dg^{\alpha\beta}, \quad \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma} = -g_{\mu\alpha} g_{\nu\beta} \frac{\partial g^{\alpha\beta}}{\partial x_\sigma}. \tag{32}$$

La relazione (31) consente una trasformazione della quale dobbiamo fare un uso anche più frequente. Per la (21) si ha

$$\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x_\sigma} = \begin{bmatrix} \alpha\sigma \\ \beta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta\sigma \\ \alpha \end{bmatrix}. \tag{33}$$

Se questa si sostituisce nella seconda delle formule (31), si ottiene tenendo conto della (23)

$$\frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x_\sigma} = -\left(g^{\mu\tau} \begin{Bmatrix} \tau\sigma \\ \nu \end{Bmatrix} + g^{\nu\tau} \begin{Bmatrix} \tau\sigma \\ \mu \end{Bmatrix} \right). \tag{34}$$

Per sostituzione del secondo membro della (34) nella (29) si ottiene

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial \sqrt{-g}}{\partial x_\sigma} = \begin{Bmatrix} \mu\sigma \\ \mu \end{Bmatrix}. \tag{29a}$$

Divergenza del tetravettore covariante. Se si moltiplica la (26) per il tensore fondamentale controvariante $g^{\mu\nu}$ (moltiplicazione interna), il secondo membro dopo trasformazione del primo termine assume la forma

$$\frac{\partial}{\partial x_\nu} \left(g^{\mu\nu} A_\mu \right) - A_\mu \frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x_\nu} - \frac{1}{2} g^{\tau\alpha} \left(\frac{\partial g_{\mu\alpha}}{\partial x_\nu} + \frac{\partial g_{\nu\alpha}}{\partial x_\mu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\alpha} \right) g^{\mu\nu} A_\tau.$$

L'ultimo termine di questa espressione secondo la (31) e la (29) si può portare nella forma

$$\frac{1}{2} \frac{\partial g^{\tau\nu}}{\partial x_\nu} A_\tau + \frac{1}{2} \frac{\partial g^{\tau\mu}}{\partial x_\mu} A_\tau + \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial \sqrt{-g}}{\partial x_\alpha} g^{\tau\alpha} A_\tau.$$

Poiché il nome degli indici non conta, i primi due termini di questa espressione si elidono con il secondo della precedente; l'ultimo si può unire al primo dell'espressione precedente. Si ponga ora

$$g^{\mu\nu} A_\mu = A^\nu,$$

dove A^ν come A_μ è un vettore arbitrario, e si ottiene infine

$$\Phi = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x_\nu} \left(\sqrt{-g} A^\nu \right). \tag{35}$$

Questo scalare è la *divergenza* del vettore controvariante A^ν.

"*Rotazione*" *del tetravettore (covariante).* Il secondo termine nella (26) è simmetrico negli indici μ e ν. Pertanto $A_{\mu\nu} - A_{\nu\mu}$ è un tensore (antisimmetrico) particolarmente facile a costruirsi. Si ottiene

$$B_{\mu\nu} = \frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu} - \frac{\partial A_\nu}{\partial x_\mu}. \tag{36}$$

Estensione antisimmetrica di un esavettore. Se si applica la (27) ad un tensore antisimmetrico di rango secondo $A_{\mu\nu}$ e si formano le espressioni che s'ottengono per permutazione ciclica degli indici μ, ν, σ, e si sommano queste tre espressioni, si ottiene il tensore di rango terzo

$$B_{\mu\nu\sigma} = A_{\mu\nu\sigma} + A_{\nu\sigma\mu} + A_{\sigma\mu\nu} = \frac{\partial A_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma} + \frac{\partial A_{\nu\sigma}}{\partial x_\mu} + \frac{\partial A_{\sigma\mu}}{\partial x_\nu}, \tag{37}$$

per il quale è facile dimostrare che è antisimmetrico.

Divergenza dell'esavettore. Se si moltiplica la (27) per $g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta}$ (moltiplicazione mista) si ottiene ancora un tensore. Il primo termine al secondo membro della (27) si può scrivere nella forma

$$\frac{\partial}{\partial x_\sigma}\left(g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta}A_{\mu\nu}\right) - g^{\mu\alpha}\frac{\partial g^{\nu\beta}}{\partial x_\sigma}A_{\mu\nu} - g^{\nu\beta}\frac{\partial g^{\mu\alpha}}{\partial x_\sigma}A_{\mu\nu}.$$

Se si sostituiscono $g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta}A_{\mu\nu\sigma}$ con $A^{\alpha\beta}_\sigma$, $g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta}A_{\mu\nu}$ con $A^{\alpha\beta}$, e si sostituiscono nello sviluppo del primo termine

$$\frac{\partial g^{\nu\beta}}{\partial x_\sigma} \text{ e } \frac{\partial g^{\mu\alpha}}{\partial x_\sigma}$$

con la (34), risulta al secondo membro della (27) un'espressione di sette termini, dei quali quattro si elidono. Rimane

$$A^{\alpha\beta}_\sigma = \frac{\partial A^{\alpha\beta}}{\partial x_\sigma} + \left\{ \begin{matrix} \sigma\kappa \\ \alpha \end{matrix} \right\} A^{\kappa\beta} + \left\{ \begin{matrix} \sigma\kappa \\ \beta \end{matrix} \right\} A^{\alpha\kappa}. \tag{38}$$

Questa è l'espressione per l'estensione di un tensore controvariante di rango secondo, che analogamente si può formare anche per tensori di rango più alto e più basso.

Osserviamo che in modo analogo si può formare l'estensione di un tensore misto A^α_μ:

$$A^\alpha_{\mu\sigma} = \frac{\partial A^\alpha_\mu}{\partial x_\sigma} - \left\{ \begin{matrix} \sigma\mu \\ \tau \end{matrix} \right\} A^\alpha_\tau + \left\{ \begin{matrix} \sigma\tau \\ \alpha \end{matrix} \right\} A^\tau_\mu. \tag{39}$$

Per contrazione della (38) rispetto agli indici β e σ (moltiplicazione interna per δ^σ_β) si ottiene il tetravettore covariante

$$A^\alpha = \frac{\partial A^{\alpha\beta}}{\partial x_\beta} + \left\{ \begin{matrix} \beta\kappa \\ \beta \end{matrix} \right\} A^{\alpha\kappa} + \left\{ \begin{matrix} \beta\kappa \\ \alpha \end{matrix} \right\} A^{\kappa\beta}.$$

Per la simmetria di $\left\{ \begin{matrix} \beta\kappa \\ \alpha \end{matrix} \right\}$ rispetto agli indici β e κ il terzo termine a secondo membro è nullo se $A^{\alpha\beta}$ è un tensore antisimmetrico, come assumeremo; il secondo termine si può trasformare con la (29a). Si ottiene così

$$A^\alpha = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial \left(\sqrt{-g} A^{\alpha\beta}\right)}{\partial x_\beta}. \tag{40}$$

Questa è l'espressione della divergenza di un esavettore controvariante.

Divergenza del tensore misto di rango secondo. Se eseguiamo la contrazione della (39) rispetto agli indici α e σ, tenendo conto della (29a) otteniamo

$$\sqrt{-g} A_\mu = \frac{\partial \left(\sqrt{-g} A_\mu^\sigma\right)}{\partial x_\sigma} - \left\{ \begin{matrix} \sigma\mu \\ \tau \end{matrix} \right\} \sqrt{-g} A_\tau^\sigma. \tag{41}$$

Se si introduce nell'ultimo termine il tensore controvariante $A^{\rho\sigma} = g^{\rho\tau} A_\tau^\sigma$, esso assume la forma

$$-\left[\begin{matrix} \sigma\mu \\ \rho \end{matrix} \right] \sqrt{-g} A^{\rho\sigma}.$$

Se poi il tensore $A^{\rho\sigma}$ è simmetrico, il termine si riduce a

$$-\frac{1}{2} \sqrt{-g} \frac{\partial g_{\rho\sigma}}{\partial x_\mu} A^{\rho\sigma}.$$

Se al posto di $A^{\rho\sigma}$ si fosse introdotto il tensore covariante parimenti simmetrico $A_{\rho\sigma} = g_{\rho\alpha} g_{\sigma\beta} A^{\alpha\beta}$, per la (31) l'ultimo termine avrebbe assunto la forma

$$\frac{1}{2} \sqrt{-g} \frac{\partial g^{\rho\sigma}}{\partial x_\mu} A_{\rho\sigma}.$$

Nel caso della simmetria considerata la (41) si può sostituire con entrambe le forme

$$\sqrt{-g} A_\mu = \frac{\partial \left(\sqrt{-g} A_\mu^\sigma\right)}{\partial x_\sigma} - \frac{1}{2} \frac{\partial g_{\rho\sigma}}{\partial x_\mu} \sqrt{-g} A^{\rho\sigma} \tag{41a}$$

e

$$\sqrt{-g} A_\mu = \frac{\partial \left(\sqrt{-g} A_\mu^\sigma\right)}{\partial x_\sigma} + \frac{1}{2} \frac{\partial g^{\rho\sigma}}{\partial x_\mu} \sqrt{-g} A_{\rho\sigma} \tag{41b}$$

delle quali faremo uso in seguito.

§12. Il tensore di Riemann-Christoffel.

Chiediamo ora quali tensori si possano ottenere dal tensore fondamentale dei $g_{\mu\nu}$ *unicamente* per derivazione. La risposta appare sulle prime a portata di mano. Si sostituisce nella (27) al posto del tensore $A_{\mu\nu}$ dato arbitrariamente il tensore fondamentale dei $g_{\mu\nu}$ e si ottiene così un nuovo tensore, l'estensione del tensore fondamentale. Si verifica tuttavia facilmente che quest'ultimo s'annulla identicamente. Si giunge tuttavia allo scopo nel modo seguente. Nella (27) si ponga

$$A_{\mu\nu} = \frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu} - \left\{ \begin{matrix} \mu\nu \\ \rho \end{matrix} \right\} A_\rho,$$

cioè l'estensione del tetravettore A_ν. Si ottiene allora il tensore di rango terzo

$$\begin{aligned} A_{\mu\sigma\tau} &= \frac{\partial^2 A_\mu}{\partial x_\sigma \partial x_\tau} \\ &- \left\{ \begin{matrix} \mu\sigma \\ \rho \end{matrix} \right\} \frac{\partial A_\rho}{\partial x_\tau} - \left\{ \begin{matrix} \mu\tau \\ \rho \end{matrix} \right\} \frac{\partial A_\rho}{\partial x_\sigma} - \left\{ \begin{matrix} \sigma\tau \\ \rho \end{matrix} \right\} \frac{\partial A_\mu}{\partial x_\rho} \\ &+ \left[-\frac{\partial}{\partial x_\tau} \left\{ \begin{matrix} \mu\sigma \\ \rho \end{matrix} \right\} + \left\{ \begin{matrix} \mu\tau \\ \alpha \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} \alpha\sigma \\ \rho \end{matrix} \right\} + \left\{ \begin{matrix} \sigma\tau \\ \alpha \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} \alpha\mu \\ \rho \end{matrix} \right\} \right] A_\rho. \end{aligned}$$

Quest'espressione invita a formare il tensore $A_{\mu\sigma\tau} - A_{\mu\tau\sigma}$. Allora i seguenti termini dell'espressione di $A_{\mu\sigma\tau}$ si elidono con quelli di $A_{\mu\tau\sigma}$: il primo termine, il quarto, ed anche l'ultimo termine entro le parentesi quadre; essi sono infatti simmetrici in σ e τ. Altrettanto vale per la somma del secondo e del terzo termine. Otteniamo quindi

$$A_{\mu\sigma\tau} - A_{\mu\tau\sigma} = B^\rho_{\mu\sigma\tau} A_\rho, \tag{42}$$

$$B^\rho_{\mu\sigma\tau} = -\frac{\partial}{\partial x_\tau} \left\{ \begin{matrix} \mu\sigma \\ \rho \end{matrix} \right\} + \frac{\partial}{\partial x_\sigma} \left\{ \begin{matrix} \mu\tau \\ \rho \end{matrix} \right\} - \left\{ \begin{matrix} \mu\sigma \\ \alpha \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} \alpha\tau \\ \rho \end{matrix} \right\} + \left\{ \begin{matrix} \mu\tau \\ \alpha \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} \alpha\sigma \\ \rho \end{matrix} \right\}. \tag{43}$$

Essenziale per questo risultato è il fatto che al secondo membro della (42) compaia soltanto A_ρ e non le sue derivate. Dal carattere tensoriale di $A_{\mu\sigma\tau} - A_{\mu\tau\sigma}$ assieme al fatto che A_ρ è un tetravettore arbitrario discende, per i risultati del §7, che $B^\rho_{\mu\sigma\tau}$ è un tensore (il tensore di Riemann-Christoffel).

Il significato matematico di questo risultato è il seguente. Quando il continuo è così fatto che vi è un sistema di coordinate rispetto al quale le $g_{\mu\nu}$ siano costanti, tutte le $R^\rho_{\mu\sigma\tau}$ sono nulle. Se invece del sistema di coordinate originario se ne sceglie uno nuovo a piacere, le $g_{\mu\nu}$ riferite a quest'ultimo non saranno costanti. Tuttavia il carattere tensoriale di $R^\rho_{\mu\sigma\tau}$ porta con sè che queste componenti si annullino tutte anche nel sistema di riferimento scelto a piacere. L'annullarsi del tensore di Riemann è quindi una condizione necessaria per provocare la costanza delle $g_{\mu\nu}$ con una scelta opportuna del sistema di riferimento[8].

Nel nostro problema ciò corrisponde al caso che per opportuna scelta del sistema di coordinate valga la teoria della relatività speciale in una regione finita. Per contrazione della (43) relativamente agli indici τ e ρ si ottiene il tensore covariante di rango secondo

$$\begin{aligned} B_{\mu\nu} &= R_{\mu\nu} + S_{\mu\nu}, \\ R_{\mu\nu} &= \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left\{ \begin{matrix} \mu\nu \\ \alpha \end{matrix} \right\} + \left\{ \begin{matrix} \mu\alpha \\ \beta \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} \nu\beta \\ \alpha \end{matrix} \right\}, \\ S_{\mu\nu} &= \frac{\partial \lg \sqrt{-g}}{\partial x_\mu \partial x_\nu} - \left\{ \begin{matrix} \mu\nu \\ \alpha \end{matrix} \right\} \frac{\partial \lg \sqrt{-g}}{\partial x_\alpha}. \end{aligned} \tag{44}$$

[8] I matematici hanno dimostrato che questa condizione è anche *sufficiente*.

Osservazione sulla scelta delle coordinate. Si è già osservato nel §8 in relazione all'equazione (18a) che si può aggiustare vantaggiosamente la scelta delle coordinate in modo che sia $\sqrt{-g} = 1$. Un'occhiata alle equazioni ottenute nei due paragrafi precedenti mostra che con una scelta siffatta le regole di formazione dei tensori conseguono una semplificazione significativa. Ciò vale in particolare per il tensore $B_{\mu\nu}$ or ora sviluppato, che gioca un ruolo fondamentale nella teoria che esporremo. La specializzazione della scelta delle coordinate considerata porta infatti con sè l'annullarsi di $S_{\mu\nu}$, sicché il tensore $B_{\mu\nu}$ si riduce ad $R_{\mu\nu}$.

Nel seguito darò tutte le relazioni nella forma semplificata che la suddetta specializzazione della scelta delle coordinate produce. È facile infatti ricondursi alle equazioni *generalmente* covarianti, se ciò appare richiesto in un caso particolare.

C. Teoria del campo gravitazionale.

§13. Equazione del moto d'un punto materiale nel campo di gravitazione. Espressione per le componenti di campo della gravitazione.

Un corpo in moto libero, non soggetto a forze esterne, secondo la teoria della relatività speciale si muove di moto rettilineo ed uniforme. Ciò vale anche nella teoria della relatività generale per una parte dello spazio tetradimensionale nella quale il sistema di coordinate K_0 si possa scegliere e venga scelto in modo che le $g_{\mu\nu}$ abbiano i valori costanti particolari dati nella (4).

Consideriamo ora proprio questo moto da un sistema di coordinate K_1 scelto a piacere. Il moto in K_1 viene giudicato, secondo le considerazioni del §2, avvenire in un campo gravitazionale. La legge del moto rispetto a K_1 si ottiene facilmente con l'argomento che segue. Riferita a K_0 la legge del moto è una retta tetradimensionale, quindi una linea geodetica. Poiché la linea geodetica è definita indipendentemente dal sistema di riferimento, la sua equazione sarà anche l'equazione del moto del punto materiale riferita a K_1. Se poniamo

$$\Gamma^\tau_{\mu\nu} = -\left\{ \begin{matrix} \mu\nu \\ \tau \end{matrix} \right\}, \tag{45}$$

l'equazione del moto del punto rispetto a K_1 si scrive

$$\frac{d^2 x_\tau}{ds^2} = \Gamma^\tau_{\mu\nu} \frac{dx_\mu}{ds} \frac{dx_\nu}{ds}. \tag{46}$$

Facciamo ora l'ipotesi molto naturale, che questo sistema di equazioni generalmente covariante determini il moto del punto nel campo gravitazionale anche quando non esista un sistema di riferimento K_0 rispetto al quale la teoria della relatività speciale valga in uno spazio finito. A quest'ipotesi siamo tanto più autorizzati, in quanto la (46) contiene solo derivate *prime* delle $g_{\mu\nu}$, tra le quali anche nel caso dell'esistenza di K_0 non sussiste alcuna relazione[9].

Se le $\Gamma^\tau_{\mu\nu}$ si annullano il punto si muove di moto rettilineo ed uniforme; queste quantità provocano quindi la deviazione del moto dall'uniformità. Esse sono le componenti del campo gravitazionale.

[9] Secondo il §12, solo tra le derivate seconde (e prime) sussistono le relazioni $B^\rho_{\mu\sigma\tau} = 0$.

§14. Le equazioni di campo della gravitazione in assenza di materia.

Distinguiamo nel seguito tra "gravitazione" e "materia" nel senso che tutto fuorché il campo gravitazionale si indicherà come "materia", quindi non solo la "materia" nel senso ordinario, ma anche il campo elettromagnetico.

Il nostro problema immediato è cercare le equazioni di campo della gravitazione in assenza di materia. Nel far ciò applicheremo ancora lo stesso metodo usato nel paragrafo precedente per determinare l'equazione di moto del punto materiale. Un caso particolare, nel quale le equazioni di campo cercate devono comunque essere soddisfatte è quello della teoria della relatività originaria, nella quale le $g_{\mu\nu}$ hanno certi valori costanti. Sia questo il caso in una certa regione finita rispetto ad un certo sistema di coordinate K_0. Rispetto a questo sistema sono nulle tutte le componenti $B^{\rho}_{\mu\sigma\tau}$ del tensore di Riemann [equazione (43)]. Esse si annullano quindi nella regione considerata anche rispetto ad ogni altro sistema di coordinate. Le equazioni cercate per il campo di gravitazione in assenza di materia devono quindi essere soddisfatte comunque quando tutte le $B^{\rho}_{\mu\sigma\tau}$ si annullano. Ma questa è comunque una condizione che si spinge troppo in là. E' chiaro infatti che per esempio il campo gravitazionale generato da un punto materiale nel suo circondario non si può "trasformar via" mediante nessuna scelta del sistema di coordinate, come accade invece nel caso di $g_{\mu\nu}$ costanti. Perciò è naturale richiedere per il campo di gravitazione privo di materia l'annullarsi del tensore simmetrico $B_{\mu\nu}$ derivato dal tensore $B^{\rho}_{\mu\sigma\tau}$. Si ottengono 10 equazioni per le 10 quantità $g_{\mu\nu}$, che sono soddisfatte in particolare quando tutte le $B^{\rho}_{\mu\sigma\tau}$ si annullano. Con la scelta del sistema di coordinate adottata da noi, tenendo conto della (44), queste equazioni per il campo privo di materia si scrivono

$$\frac{\partial \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}}{\partial x_{\alpha}} + \Gamma^{\alpha}_{\mu\beta}\Gamma^{\beta}_{\nu\alpha} = 0, \ \sqrt{-g} = 1. \tag{47}$$

Si deve osservare in proposito che la scelta di queste equazioni comporta il minimo di arbitrarietà. Infatti oltre a $B_{\mu\nu}$ non esiste nessun tensore di rango secondo che sia formato con $g_{\mu\nu}$ e con le sue derivate, che non contenga derivate superiori alle seconde e che sia lineare rispetto a queste ultime[10].

Il fatto che queste equazioni che derivano per via puramente matematica dal postulato di relatività generale assieme alle equazioni di moto (46) producano in prima approssimazione la legge di attrazione di Newton, in seconda approssimazione la spiegazione dell'anomalia nel moto del perielio scoperta da Leverrier (che rimane dopo l'applicazione delle correzioni perturbative), deve secondo me persuadere della correttezza fisica della teoria.

§15. Funzione di Hamilton per il campo gravitazionale, legge dell'energia e dell'impulso.

Per dimostrare che le equazioni di campo rispondono alla legge dell'energia e dell'impulso, la maniera più comoda è di scriverle nella forma hamiltoniana seguente:

$$\delta\left\{\int H d\tau\right\} = 0, \ H = g^{\mu\nu}\Gamma^{\alpha}_{\mu\beta}\Gamma^{\beta}_{\nu\alpha}, \ \sqrt{-g} = 1. \tag{47a}$$

[10] Propriamente ciò può essere sostenuto soltanto per il tensore $B_{\mu\nu} + \lambda g_{\mu\nu}(g^{\alpha\beta}B_{\alpha\beta})$, dove λ è una costante. Ma se si pone questo tensore uguale a zero si ritorna alle equazioni $B_{\mu\nu} = 0$.

Le variazioni si annullano ai confini dello spazio d'integrazione tetradimensionale considerato. Dobbiamo dimostrare in primo luogo che la forma (47a) è equivalente alle equazioni (47). A tale scopo consideriamo H come funzione di $g^{\mu\nu}$ e di

$$g_\sigma^{\mu\nu}\left(=\frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x_\sigma}\right)$$

Si ha

$$\delta H=\Gamma_{\mu\beta}^{\alpha}\Gamma_{\nu\alpha}^{\beta}\delta g^{\mu\nu}+2g^{\mu\nu}\Gamma_{\mu\beta}^{\alpha}\delta\Gamma_{\nu\alpha}^{\beta}=-\Gamma_{\mu\beta}^{\alpha}\Gamma_{\nu\alpha}^{\beta}\delta g^{\mu\nu}+2\Gamma_{\mu\beta}^{\alpha}\delta\left(g^{\mu\nu}\Gamma_{\nu\alpha}^{\beta}\right).$$

Ma

$$\delta\left(g^{\mu\nu}\Gamma_{\nu\alpha}^{\beta}\right)=-\frac{1}{2}\delta\left[g^{\mu\nu}g^{\beta\lambda}\left(\frac{\partial g_{\nu\lambda}}{\partial x_\alpha}+\frac{\partial g_{\alpha\lambda}}{\partial x_\nu}-\frac{\partial g_{\alpha\nu}}{\partial x_\lambda}\right)\right].$$

I termini che originano dai due ultimi addendi della parentesi tonda sono di segno opposto e vanno l'uno nell'altro (poiché il nome degli indici di somma è irrilevante) per scambio degli indici μ e β. Essi si cancellano tra loro nell'espressione per δH, poiché essi sono moltiplicati per la quantità $\Gamma_{\mu\beta}^{\alpha}$ simmetrica rispetto agli indici μ e β. Rimane da considerare soltanto il primo termine della parentesi tonda, sicché tenendo conto della (31) si ottiene

$$\delta H=-\Gamma_{\mu\beta}^{\alpha}\Gamma_{\nu\alpha}^{\beta}\delta g^{\mu\nu}-\Gamma_{\mu\beta}^{\alpha}\delta g_\alpha^{\mu\beta}.$$

Si ha quindi

$$\frac{\partial H}{\partial g^{\mu\nu}}=-\Gamma_{\mu\beta}^{\alpha}\Gamma_{\nu\alpha}^{\beta},\ \frac{\partial H}{\partial g_\sigma^{\mu\nu}}=\Gamma_{\mu\nu}^{\sigma}. \tag{48}$$

L'esecuzione della variazione nella (47a) produce il sistema di equazioni

$$\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(\frac{\partial H}{\partial g_\alpha^{\mu\nu}}\right)-\frac{\partial H}{\partial g^{\mu\nu}}=0, \tag{47b}$$

che per la (48) coincide con la (47), come volevasi dimostrare. - Se si moltiplica la (47b) per $g_\sigma^{\mu\nu}$, poiché

$$\frac{\partial g_\sigma^{\mu\nu}}{\partial x_\alpha}=\frac{\partial g_\alpha^{\mu\nu}}{\partial x_\sigma}$$

e di conseguenza

$$g_\sigma^{\mu\nu}\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(\frac{\partial H}{\partial g_\alpha^{\mu\nu}}\right)=\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(g_\sigma^{\mu\nu}\frac{\partial H}{\partial g_\alpha^{\mu\nu}}\right)-\frac{\partial H}{\partial g_\alpha^{\mu\nu}}\frac{\partial g_\alpha^{\mu\nu}}{\partial x_\sigma},$$

si ottiene l'equazione

$$\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(g_\sigma^{\mu\nu}\frac{\partial H}{\partial g_\alpha^{\mu\nu}}\right)-\frac{\partial H}{\partial x_\sigma}=0$$

ossia[11]

$$\frac{\partial t_\sigma{}^\alpha}{\partial x_\alpha}=0,\ -2\kappa t_\sigma{}^\alpha=g_\sigma^{\mu\nu}\frac{\partial H}{\partial g_\alpha^{\mu\nu}}-\delta_\sigma^\alpha H, \tag{49}$$

[11] La ragione dell'introduzione del fattore -2κ sarà evidente in seguito.

ovvero, per la (48), la seconda delle equazioni (47) e la (34)

$$\kappa t_\sigma^{\ \alpha} = \frac{1}{2}\delta_\sigma^\alpha g^{\mu\nu}\Gamma_{\mu\beta}^\alpha\Gamma_{\nu\alpha}^\beta - g^{\mu\nu}\Gamma_{\mu\beta}^\alpha\Gamma_{\nu\sigma}^\beta. \tag{50}$$

Va osservato che $t_\sigma^{\ \alpha}$ non è un tensore; tuttavia la (49) vale in ogni sistema di coordinate per il quale sia $\sqrt{-g} = 1$. Questa equazione esprime la legge di conservazione dell'impulso e dell'energia per il campo gravitazionale. Infatti l'integrazione di questa equazione su un volume V *tridimensionale* produce le quattro equazioni

$$\frac{d}{dx_4}\left\{\int t_\sigma^{\ 4} dV\right\} = \int \left(t_\sigma^{\ 1}\alpha_1 + t_\sigma^{\ 2}\alpha_2 + t_\sigma^{\ 3}\alpha_3\right) dS \tag{49a}$$

dove α_1, α_2, α_3 indicano i coseni direttori della normale interna di un elemento della superficie di contorno di area dS (nel senso della geometria euclidea). Si riconosce qui l'espressione delle leggi di conservazione nella forma consueta. Chiamiamo le quantità $t_\sigma^{\ \alpha}$ le "componenti dell'energia" del campo gravitazionale.

Darò le equazioni (47) ancora in una terza forma, che si presta particolarmente ad una comprensione vivida del nostro oggetto. Per moltiplicazione delle equazioni di campo (47) con $g^{\nu\sigma}$ queste si ottengono nella forma "mista". Si osservi che

$$g^{\nu\sigma}\frac{\partial\Gamma_{\mu\nu}^\alpha}{\partial x_\alpha} = \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(g^{\nu\sigma}\Gamma_{\mu\nu}^\alpha\right) - \frac{\partial g^{\nu\sigma}}{\partial x_\alpha}\Gamma_{\mu\nu}^\alpha,$$

quantità che per la (34) è uguale a

$$\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(g^{\nu\sigma}\Gamma_{\mu\nu}^\alpha\right) - g^{\nu\beta}\Gamma_{\alpha\beta}^\sigma\Gamma_{\mu\nu}^\alpha - g^{\sigma\beta}\Gamma_{\beta\alpha}^\nu\Gamma_{\mu\nu}^\alpha$$

ovvero (cambiando i nomi degli indici di somma)

$$\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(g^{\sigma\beta}\Gamma_{\mu\beta}^\alpha\right) - g^{\nu\beta}\Gamma_{\alpha\beta}^\sigma\Gamma_{\mu\nu}^\alpha - g^{\nu\sigma}\Gamma_{\mu\beta}^\alpha\Gamma_{\nu\alpha}^\beta.$$

Il terzo termine di questa espressione si cancella con il secondo addendo delle equazioni di campo (47); al posto del secondo termine di questa espressione, per la relazione (50), si può porre

$$\kappa\left(t_\mu^{\ \sigma} - \frac{1}{2}\delta_\mu^\sigma t\right),$$

ove $t = t_\alpha^\alpha$. Al posto delle equazioni (47) si ottiene

$$\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(g^{\sigma\beta}\Gamma_{\mu\beta}^\alpha\right) = -\kappa\left(t_\mu^{\ \sigma} - \frac{1}{2}\delta_\mu^\sigma t\right), \ \sqrt{-g} = 1. \tag{51}$$

§16. Forma generale delle equazioni di campo della gravitazione.

Le equazioni di campo per lo spazio privo di materia vanno paragonate alle equazioni

$$\Delta\varphi = 0$$

della teoria di Newton. Dobbiamo cercare le equazioni che corrispondono all'equazione di Poisson

$$\Delta\varphi = 4\pi\kappa\rho,$$

dove ρ indica la densità di materia.

La teoria della relatività speciale ha condotto al risultato che la massa inerziale non è nient'altro che energia, che trova la sue espressione matematica completa in un tensore simmetrico di rango secondo, il tensore dell'energia. Dovremo quindi introdurre anche nella teoria della relatività generale un tensore $T_\sigma{}^\alpha$ dell'energia della materia, che come le componenti dell'energia $t_\sigma{}^\alpha$ [equazioni (49) e (50)] del campo gravitazionale avranno carattere misto, ma che corrisponderanno ad un tensore covariante simmetrico[12].

Come questo tensore d'energia (analogamente alla densità ρ nell'equazione di Poisson) vada introdotto nelle equazioni di campo della gravitazione lo insegna il sistema di equazioni (51). Se si tratta infatti un sistema completo (per esempio il sistema solare), la massa totale del sistema, quindi anche la sua azione gravitazionale complessiva, dipenderà dall'energia totale del sistema, quindi dall'energia ponderabile e gravitazionale insieme. Ciò si potrà esprimere con il fatto che nella (51) al posto delle componenti dell'energia $t_\mu{}^\sigma$ del solo campo gravitazionale si introduca la somma delle componenti dell'energia della materia e del campo gravitazionale $t_\mu{}^\sigma + T_\mu{}^\sigma$. Si ottiene quindi invece della (51) l'equazione tensoriale

$$\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(g^{\sigma\beta}\Gamma^\alpha_{\mu\beta}\right) = -\kappa\left[\left(t_\mu{}^\sigma + T_\mu{}^\sigma\right) - \frac{1}{2}\delta^\sigma_\mu\,(t+T)\right],\ \sqrt{-g}=1, \tag{52}$$

dove si è posto $T = T^\mu_\mu$ (scalare di Laue). Queste sono, in forma mista, le equazioni di campo generali della gravitazione che si cercavano. Al posto della (47) risulta a ritroso il sistema

$$\frac{\partial\Gamma^\alpha_{\mu\nu}}{\partial x_\alpha} + \Gamma^\alpha_{\mu\beta}\Gamma^\beta_{\nu\alpha} = -\kappa\left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}T\right),\ \sqrt{-g}=1. \tag{53}$$

Si deve aggiungere che questa introduzione del tensore d'energia della materia non è giustificata mediante il solo postulato della relatività; infatti l'abbiamo ricavata dal requisito che l'energia del campo gravitazionale abbia un'azione gravitazionale, come ogni energia di tipo diverso. Ma il fondamento più solido per la scelta delle equazioni di cui sopra sta nel fatto che esse hanno per conseguenza che per le componenti dell'energia totale valgono delle equazioni di conservazione (dell'impulso e dell'energia), che sono in tutto analoghe alle (49) e (49*a*). Questo sarà dimostrato nel seguito.

---

[12] $g_{\alpha\tau}T_\sigma{}^\alpha = T_{\sigma\tau}$ e $g^{\sigma\beta}T_\sigma{}^\alpha = T^{\alpha\beta}$ dovranno essere tensori simmetrici.

§17. Le leggi di conservazione nel caso generale.

E' facile trasformare l'equazione (52) in modo che al secondo membro il secondo termine sparisca. Si contragga la (52) rispetto agli indici μ e σ e si sottragga dalla (52) l'equazione così ottenuta, moltiplicata per $1/2\delta_\mu^\sigma$. Risulta

$$\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(g^{\sigma\beta}\Gamma_{\mu\beta}^\alpha - \frac{1}{2}\delta_\mu^\sigma g^{\lambda\beta}\Gamma_{\lambda\beta}^\alpha\right) = -\kappa\left(t_\mu^{\ \sigma} + T_\mu^{\ \sigma}\right). \tag{52a}$$

Applichiamo a questa equazione l'operazione $\partial/\partial x_\sigma$. Risulta

$$\frac{\partial^2}{\partial x_\alpha \partial x_\sigma}\left(g^{\sigma\beta}\Gamma_{\mu\beta}^\alpha\right) = -\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x_\alpha \partial x_\sigma}\left[g^{\sigma\beta}g^{\alpha\lambda}\left(\frac{\partial g_{\mu\lambda}}{\partial x_\beta} + \frac{\partial g_{\beta\lambda}}{\partial x_\mu} - \frac{\partial g_{\mu\beta}}{\partial x_\lambda}\right)\right].$$

Il primo ed il terzo termine delle parentesi tonde danno contributi che si cancellano, come si riconosce se nel contributo del terzo termine si scambiano tra loro sia gli indici di somma α e σ, che β e λ. Il secondo termine si può trasformare con la (31) e si ottiene

$$\frac{\partial^2}{\partial x_\alpha \partial x_\sigma}\left(g^{\sigma\beta}\Gamma_{\mu\beta}^\alpha\right) = \frac{1}{2}\frac{\partial^3 g^{\alpha\beta}}{\partial x_\alpha \partial x_\beta \partial x_\mu}. \tag{54}$$

Il secondo termine a primo membro della (52a) dà

$$-\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x_\alpha \partial x_\mu}\left(g^{\lambda\beta}\Gamma_{\lambda\beta}^\alpha\right)$$

ovvero

$$\frac{1}{4}\frac{\partial^2}{\partial x_\alpha \partial x_\mu}\left[g^{\lambda\beta}g^{\alpha\delta}\left(\frac{\partial g_{\delta\lambda}}{\partial x_\beta} + \frac{\partial g_{\delta\beta}}{\partial x_\lambda} - \frac{\partial g_{\lambda\beta}}{\partial x_\delta}\right)\right].$$

Il termine che deriva dall'ultimo addendo delle parentesi tonde si annulla per la (29) con la scelta delle coordinate da noi adottata. Gli altri due si possono raccogliere e insieme danno per la (31)

$$-\frac{1}{2}\frac{\partial^3 g^{\alpha\beta}}{\partial x_\alpha \partial x_\beta \partial x_\mu},$$

sicché tenendo conto della (54) vale l'identità

$$\frac{\partial^2}{\partial x_\alpha \partial x_\sigma}\left(g^{\sigma\beta}\Gamma_{\mu\beta}^\alpha - \frac{1}{2}\delta_\mu^\sigma g^{\lambda\beta}\Gamma_{\lambda\beta}^\alpha\right) \equiv 0. \tag{55}$$

Dalle (55) e (52*a*) discende

$$\frac{\partial\left(t_\mu^{\ \sigma} + T_\mu^{\ \sigma}\right)}{\partial x_\sigma} = 0. \tag{56}$$

Dalle nostre equazioni di campo della gravitazione risulta quindi che le leggi di conservazione dell'impulso e dell'energia sono soddisfatte. Lo si vede nel modo più semplice dall'argomento che porta all'equazione (49a); solo si hanno da introdurre qui al posto delle componenti dell'energia $t_\mu{}^\sigma$ del campo gravitazionale le componenti dell'energia complessiva della materia e del campo gravitazionale.

§18. La legge di conservazione dell'energia e dell'impulso per la materia come conseguenza delle equazioni di campo.

Se si moltiplica la (53) per $\partial g^{\mu\nu}/\partial x_\sigma$ si ottiene per la via intrapresa nel §15, tenendo conto dell'annullarsi di

$$g_{\mu\nu}\frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x_\sigma}$$

l'equazione

$$\frac{\partial t_\sigma{}^\alpha}{\partial x_\alpha}+\frac{1}{2}\frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x_\sigma}T_{\mu\nu}=0,$$

ovvero tenendo conto della (56)

$$\frac{\partial T_\sigma{}^\alpha}{\partial x_\alpha}+\frac{1}{2}\frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x_\sigma}T_{\mu\nu}=0. \tag{57}$$

Un confronto con la (41b) mostra che questa equazione con la scelta adottata del sistema di coordinate non afferma altro che l'annullarsi della divergenza del tensore delle componenti d'energia della materia. Dal punto di vista fisico la comparsa del secondo termine a primo membro mostra che per la sola materia non valgono in senso proprio leggi di conservazione dell'energia e dell'impulso, o meglio valgono solo quando le $g^{\mu\nu}$ sono costanti, cioè quando le intensità di campo della gravitazione si annullano. Questo secondo termine è un'espressione per l'impulso e rispettivamente per l'energia che vengono trasmessi dal campo gravitazionale alla materia per unità di volume e di tempo. Ciò risulta più chiaro se al posto della (57) tenendo conto della (41) si scrive

$$\frac{\partial T_\sigma{}^\alpha}{\partial x_\alpha}=-\Gamma^\alpha_{\sigma\beta}T_\alpha{}^\beta. \tag{57a}$$

Il secondo membro esprime l'azione energetica del campo gravitazionale sulla materia.

Le equazioni di campo della gravitazione implicano quindi quattro equazioni che il processo materiale deve soddisfare. Esse producono interamente le equazioni del processo materiale quando quest'ultimo sia caratterizzabile mediante quattro equazioni differenziali mutuamente indipendenti[13].

D. I processi "materiali".

Gli strumenti matematici sviluppati in B ci pongono senz'altro in condizione di generalizzare le leggi fisiche della materia (idrodinamica, elettrodinamica di Maxwell) come risultano formulate nella teoria della relatività speciale in modo tale da adeguarsi alla teoria della relatività generale. Il principio di relatività generale non produce alcuna ulteriore restrizione delle possibilità; esso insegna invece

[13]Vedasi in proposito Hilbert, Nachr. d. K. Gesellsch. d. Wiss. zu Göttingen, Math.-Phys. Klasse, p. 3. 1915.

a conoscere esattamente l'influenza del campo gravitazionale su tutti i processi, senza che si debba introdurre alcuna nuova ipotesi di qualche tipo.

Questo stato di cose porta con sè che sulla natura fisica della materia (in senso stretto) non debbano introdursi ipotesi necessariamente definite. In particolare può restare aperta la questione, se le teorie del campo elettromagnetico e del campo gravitazionale costituiscano o no insieme una base sufficiente per la teoria della materia. Il postulato della relatività generale in proposito non può in linea di principio insegnare nulla. Deve risultare dallo sviluppo della teoria se l'elettromagnetismo e la gravitazione insieme possano produrre ciò che prima da soli non potevano ottenere.

§19. Equazioni di Eulero per fluidi adiabatici non viscosi.

Siano p e ρ due scalari, dei quali chiameremo il primo "pressione", il secondo "densità" di un fluido; tra di essi sussista un'equazione. Il tensore simmetrico controvariante

$$T^{\alpha\beta} = -g^{\alpha\beta} p + \rho \frac{dx_\alpha}{ds} \frac{dx_\beta}{ds} \tag{58}$$

è il tensore controvariante dell'energia di un fluido. Da esso deriva il tensore covariante

$$T_{\mu\nu} = -g_{\mu\nu} p + g_{\mu\alpha} \frac{dx_\alpha}{ds} g_{\mu\beta} \frac{dx_\beta}{ds} \rho, \tag{58a}$$

ed anche il tensore misto[14]

$$T_\sigma{}^\alpha = -\delta_\sigma^\alpha p + g_{\sigma\beta} \frac{dx_\beta}{ds} \frac{dx_\alpha}{ds} \rho. \tag{58b}$$

Se si sostituisce il secondo membro della (58b) nella (57a) si ottengono le equazioni idrodinamiche euleriane della teoria della relatività generale. Queste in linea di principio risolvono completamente il problema del moto; infatti le quattro equazioni (57a) assieme con la data equazione tra p e ρ e all'equazione

$$g_{\alpha\beta} \frac{dx_\alpha}{ds} \frac{dx_\beta}{ds} = 1$$

bastano, per $g_{\alpha\beta}$ dato, a determinare le 6 incognite

$$p,\ \rho, \frac{dx_1}{ds},\ \frac{dx_2}{ds},\ \frac{dx_3}{ds},\ \frac{dx_4}{ds}.$$

Se anche le $g_{\alpha\beta}$ sono incognite, si aggiungono le equazioni (53). Queste sono 11 equazioni per la determinazione di 10 funzioni $g_{\mu\nu}$, sicché esse appaiono sovradeterminate. Va però osservato che le equazioni (57a) sono già contenute nelle (53), e quindi queste ultime rappresentano solo 7 equazioni indipendenti. Questa indeterminazione ha la sua buona ragione nel fatto che l'accresciuta libertà nella scelta

[14] Per un osservatore comovente, che nell'infinitamente piccolo utilizzi un sistema di riferimento come nella relatività speciale, la densità d'energia $T_4{}^4$ è uguale a $\rho - p$. Da qui deriva la definizione di ρ. Quindi per un fluido incomprimibile ρ non è costante.

delle coordinate porta con sè che il problema resta matematicamente indeterminato in modo tale che si possono scegliere arbitrariamente tre funzioni dello spazio[15].

§20. Equazioni di campo elettromagnetiche di Maxwell per il vuoto.

Siano φ_ν le componenti di un tetravettore covariante, il tetravettore del potenziale elettromagnetico. Da esse formiamo secondo la (36) le componenti $F_{\rho\sigma}$ dell'esavettore covariante del campo elettromagnetico secondo il sistema di equazioni

$$F_{\rho\sigma} = \frac{\partial \varphi_\rho}{\partial x_\sigma} - \frac{\partial \varphi_\sigma}{\partial x_\rho}. \tag{59}$$

Dalla (59) segue che il sistema di equazioni

$$\frac{\partial F_{\rho\sigma}}{\partial x_\tau} + \frac{\partial F_{\sigma\tau}}{\partial x_\rho} + \frac{\partial F_{\tau\rho}}{\partial x_\sigma} = 0 \tag{60}$$

è soddisfatto; il suo primo membro, per la (37), è un tensore antisimmetrico di rango terzo. Il sistema (60) contiene essenzialmente 4 equazioni, che scritte come segue sono:

$$\frac{\partial F_{23}}{\partial x_4} + \frac{\partial F_{34}}{\partial x_2} + \frac{\partial F_{42}}{\partial x_3} = 0, \ \frac{\partial F_{34}}{\partial x_1} + \frac{\partial F_{41}}{\partial x_3} + \frac{\partial F_{13}}{\partial x_4} = 0,$$

$$\frac{\partial F_{41}}{\partial x_2} + \frac{\partial F_{12}}{\partial x_4} + \frac{\partial F_{24}}{\partial x_1} = 0, \ \frac{\partial F_{12}}{\partial x_3} + \frac{\partial F_{23}}{\partial x_1} + \frac{\partial F_{31}}{\partial x_2} = 0. \tag{60a}$$

Queste equazioni corrispondono al secondo sistema di equazioni di Maxwell. Lo si riconosce immediatamente ponendo

$$F_{23} = \mathfrak{h}_x, F_{31} = \mathfrak{h}_y, F_{12} = \mathfrak{h}_z, F_{14} = \mathfrak{e}_x, F_{24} = \mathfrak{e}_y, F_{34} = \mathfrak{e}_z. \tag{61}$$

Allora al posto delle (60a) si può porre, nella consueta notazione dell'analisi vettoriale tridimensionale

$$\frac{\partial \mathfrak{h}}{\partial t} + \operatorname{rot} \mathfrak{e} = 0, \operatorname{div} \mathfrak{h} = 0. \tag{60b}$$

Otteniamo il primo sistema di Maxwell per generalizzazione della forma data da Minkowski. Introduciamo l'esavettore controvariante corrispondente a $F_{\alpha\beta}$

$$F^{\mu\nu} = g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} F_{\alpha\beta} \tag{62}$$

ed il tetravettore controvariante J^μ della densità di corrente elettrica nel vuoto; allora tenendo conto della (40) scriviamo il sistema di equazioni invarianti rispetto a sostituzioni arbitrarie di determinante 1 (in conformità con la scelta delle coordinate adottata da noi):

[15] Rinunciando alla scelta delle coordinate secondo $g = -1$ si possono scegliere a piacere *quattro* funzioni dello spazio, corrispondenti alle quattro funzioni arbitrarie delle quali si può disporre liberamente nella scelta delle coordinate.

$$\frac{\partial F^{\mu\nu}}{\partial x_\nu} = J^\mu. \tag{63}$$

Se infatti poniamo

$$F^{23} = \mathfrak{h}'_x,\ F^{31} = \mathfrak{h}'_y,\ F^{12} = \mathfrak{h}'_z,\ F^{14} = -\mathfrak{e}'_x,\ F^{24} = -\mathfrak{e}'_y,\ F^{34} = -\mathfrak{e}'_z, \tag{64}$$

quantità che nel caso particolare della teoria della relatività speciale sono uguali ad $\mathfrak{h}_x \ldots . \mathfrak{e}_z$, ed inoltre

$$J^1 = \mathfrak{i}_x,\ J^2 = \mathfrak{i}_y,\ J^3 = \mathfrak{i}_z,\ J^4 = \rho,$$

si ottiene al posto della (63)

$$\operatorname{rot} \mathfrak{h}' - \frac{\partial \mathfrak{e}'}{\partial t} = \mathfrak{i},\ \operatorname{div} \mathfrak{e}' = \rho. \tag{63a}$$

Le equazioni (60), (62) e (63) costituiscono quindi la generalizzazione delle equazioni di Maxwell del vuoto per la determinazione da noi usata della scelta delle coordinate.

Le *componenti dell'energia del campo elettromagnetico.* Formiamo il prodotto interno

$$\kappa_\sigma = F_{\sigma\mu} J^\mu. \tag{65}$$

Con notazione tridimensionale le sue componenti per le (61) si scrivono

$$\kappa_1 = \rho \mathfrak{e}_x + [\mathfrak{i}, \mathfrak{h}]_x \ldots \kappa_4 = -(\mathfrak{i}, \mathfrak{e}). \tag{65a}$$

κ_σ è un tetravettore covariante le cui componenti sono uguali a meno l'impulso e rispettivamente l'energia per unità di volume e di tempo che vengono trasmessi dal campo elettromagnetico alle masse elettriche. Se le masse elettriche sono libere, cioè sotto la sola influenza del campo elettromagnetico, il tetravettore covariante κ_σ è nullo.

Per ottenere le componenti $T_\sigma{}^\nu$ del campo elettromagnetico abbiamo solo bisogno di dare all'equazione $\kappa_\sigma = 0$ la forma dell'equazione (57). Dalle (63) e (65) si ottiene

$$\kappa_\sigma = F_{\sigma\mu} \frac{\partial F^{\mu\nu}}{\partial x_\nu} = \frac{\partial}{\partial x_\nu}\left(F_{\sigma\mu} F^{\mu\nu}\right) - F^{\mu\nu} \frac{\partial F_{\sigma\mu}}{\partial x_\nu}.$$

Per la (60) il secondo termine a secondo membro ammette la trasformazione

$$F^{\mu\nu} \frac{\partial F_{\sigma\mu}}{\partial x_\nu} = -\frac{1}{2} F^{\mu\nu} \frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma} = -\frac{1}{2} g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} F_{\alpha\beta} \frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma},$$

espressione che per ragioni di simmetria si può anche scrivere

$$-\frac{1}{4}\left[g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} F_{\alpha\beta} \frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma} + g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} \frac{\partial F_{\alpha\beta}}{\partial x_\sigma} F_{\mu\nu}\right].$$

Ma quindi si può porre

$$-\frac{1}{4}\frac{\partial}{\partial x_\sigma}\left(g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta}F_{\alpha\beta}F_{\mu\nu}\right)+\frac{1}{4}F_{\alpha\beta}F_{\mu\nu}\frac{\partial}{\partial x_\sigma}\left(g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta}\right).$$

Il primo di questi termini si può scrivere in forma abbreviata

$$-\frac{1}{4}\frac{\partial}{\partial x_\sigma}\left(F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}\right);$$

eseguendo la derivazione, con qualche trasformazione, il secondo dà

$$-\frac{1}{2}F^{\mu\tau}F_{\mu\nu}g^{\nu\rho}\frac{\partial g_{\sigma\tau}}{\partial x_\sigma}.$$

Se si raccolgono insieme i tre termini calcolati si ottiene la relazione

$$\kappa_\sigma=\frac{\partial T_\sigma{}^\nu}{\partial x_\nu}-\frac{1}{2}g^{\tau\mu}\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma}T_\tau{}^\nu, \tag{66}$$

dove si è posto

$$T_\sigma{}^\nu=-F_{\sigma\alpha}F^{\nu\alpha}+\frac{1}{4}\delta_\sigma^\nu F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}. \tag{66a}$$

Quando κ_σ è nullo l'equazione (66) per la (30) è equivalente alla (57) ovvero (57a). Le $T_\sigma{}^\nu$ sono quindi le componenti d'energia del campo elettromagnetico. Per mezzo delle (61) e (64) si mostra facilmente che queste componenti dell'energia del campo elettromagnetico nel caso della teoria della relatività speciale danno le ben note espressioni di Maxwell-Poynting.

Abbiamo ora derivato le leggi più generali che soddisfano il campo gravitazionale e la materia, se si utilizza in modo coerente un sistema di coordinate per il quale $\sqrt{-g}=1$. Otteniamo in tal modo una semplificazione consistente delle formule e dei calcoli, senza dover rinunciare al requisito della covarianza generale: infatti troviamo le nostre equazioni specializzando il sistema di coordinate a partire da equazioni generalmente covarianti.

E' pur sempre non priva d'interesse formale la questione, se secondo la definizione generalizzata delle componenti dell'energia del campo gravitazionale e della materia valgano anche senza specializzazione del sistema di coordinate delle leggi di conservazione della forma dell'equazione (56) e anche equazioni di campo della forma (52) ovvero (52a), di modo che a primo membro vi sia una divergenza (nel senso consueto), a secondo membro la somma delle componenti dell'energia della materia e della gravitazione. Ho trovato che succedono tutte e due le cose. Credo tuttavia che non valga la pena di comunicare la mia trattazione abbastanza ponderosa su questo fatto, poiché non ne viene nulla di sostanzialmente nuovo.

E. §21. Teoria di Newton come prima approssimazione.

Come già più volte ricordato, la teoria della relatività speciale come caso particolare di quella generale è caratterizzata dal fatto che le $g_{\mu\nu}$ abbiano i valori costanti (4). Per quanto detto prima ciò significa trascurare completamente le azioni gravitazionali. Otteniamo un'approssimazione più vicina alla realtà se consideriamo il caso che le $g_{\mu\nu}$ si discostino dai valori (4) solo per quantità piccole (rispetto ad 1), mentre trascuriamo le quantità piccole di ordine secondo e più alto. (Primo punto di vista dell'approssimazione).

Assumeremo inoltre che nella regione spaziotemporale considerata le $g_{\mu\nu}$ con opportuna scelta delle coordinate tendano all'infinito spaziale verso i valori (4); trattiamo cioè campi gravitazionali che possono essere trattati come generati esclusivamente da materia che si trovi al finito.

Si potrebbe assumere che queste approssimazioni debbano condurre alla teoria di Newton. Si ha tuttavia bisogno ancora della trattazione approssimata delle equazioni fondamentali da un secondo punto di vista. Prendiamo in considerazione il moto di un punto materiale secondo le equazioni (46). Nel caso della teoria della relatività speciale le componenti

$$\frac{dx_1}{ds}, \frac{dx_2}{ds}, \frac{dx_3}{ds}$$

possono assumere valori arbitrari; ciò significa che si possono avere velocità arbitrarie

$$v = \left[\left(\frac{dx_1}{dx^4}\right)^2 + \left(\frac{dx_2}{dx^4}\right)^2 + \left(\frac{dx_3}{dx^4}\right)^2\right]^{1/2},$$

che devono essere inferiori alla velocità della luce nel vuoto $(v < 1)$. Se ci si restringe al caso che quasi esclusivamente si verifica nell'esperienza, che v sia piccola rispetto alla velocità della luce, ciò significa che le componenti

$$\frac{dx_1}{ds}, \frac{dx_2}{ds}, \frac{dx_3}{ds}$$

si devono trattare come quantità piccole, mentre dx_4/ds è uguale ad 1 a meno di quantità del second'ordine (secondo punto di vista dell'approssimazione).

Osserviamo ora che secondo il primo punto di vista dell'approssimazione le quantità $\Gamma^\tau_{\mu\nu}$ sono tutte quantità piccole almeno del prim'ordine. Un'occhiata alla (46) rivela quindi che in questa equazione per il secondo punto di vista dell'approssimazione si devono condiderare solo termini per i quali sia $\mu = \nu = 4$. Limitandosi ai termini di ordine più basso al posto della (46) si ottengono le equazioni

$$\frac{d^2 x_\tau}{dt^2} = \Gamma^\tau_{44},$$

dove si è posto $ds = dx_4 = dt$, ovvero limitandosi ai termini che per il primo punto di vista dell'approssimazione sono del prim'ordine:

$$\frac{d^2 x_\tau}{dt^2} = \begin{bmatrix} 44 \\ \tau \end{bmatrix} \ (\tau = 1, 2, 3)\,, \ \frac{d^2 x_4}{dt^2} = -\begin{bmatrix} 44 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Se si presuppone inoltre che il campo gravitazionale sia quasi statico, perché ci si restringe al caso che la materia che genera il campo gravitazionale si muova solo lentamente (in confronto alla velocità di propagazione della luce), si possono trascurare al secondo membro le derivate rispetto al tempo se confrontate con quelle rispetto alle coordinate spaziali, e si ottiene quindi

$$\frac{d^2 x_\tau}{dt^2} = -\frac{1}{2}\frac{\partial g_{44}}{\partial x_\tau} \ (\tau = 1, 2, 3)\,. \tag{67}$$

Questa è la legge del moto del punto materiale secondo la teoria di Newton, purché g_{44} giochi il ruolo del potenziale gravitazionale. È notevole in questo risultato che in prima approssimazione solo la componente g_{44} del tensore fondamentale determini il moto del punto materiale.

Utilizziamo ora le equazioni di campo (53). Va osservato in proposito che il tensore d'energia della "materia" sarà quasi esclusivamente determinato dalla densità ρ della materia in senso stretto, cioè dal secondo termine al secondo membro della (58) [rispettivamente (58a) o (58b)] . Se si forma l'approssimazione che ci interessa, tutte le componenti si annullano, meno la componente

$$T_{44} = \rho = T.$$

Al primo membro della (53) il secondo termine è piccolo del second'ordine; il primo dà nell'approssimazione che c'interessa

$$+\frac{\partial}{\partial x_1}\begin{bmatrix}\mu\nu\\1\end{bmatrix}+\frac{\partial}{\partial x_2}\begin{bmatrix}\mu\nu\\2\end{bmatrix}+\frac{\partial}{\partial x_3}\begin{bmatrix}\mu\nu\\3\end{bmatrix}-\frac{\partial}{\partial x_4}\begin{bmatrix}\mu\nu\\4\end{bmatrix}.$$

Per $\mu = \nu = 4$, trascurando i termini derivati rispetto al tempo, questo dà

$$-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 g_{44}}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 g_{44}}{\partial x_2^2}+\frac{\partial^2 g_{44}}{\partial x_3^2}\right) = -\frac{1}{2}\Delta g_{44}.$$

L'ultima delle equazioni (53) dà quindi

$$\Delta g_{44} = \kappa\rho. \tag{68}$$

Le equazioni (67) e (68) insieme sono equivalenti alla legge della gravitazione di Newton.

Per il potenziale gravitazionale risulta per le (67) e (68) l'espressione

$$-\frac{\kappa}{8\pi}\int\frac{\rho d\tau}{r}, \tag{68a}$$

mentre la teoria di Newton, con l'unità di tempo scelta da noi, dà

$$-\frac{K}{c^2}\int\frac{\rho d\tau}{r},$$

dove K è la costante $6,7.10^{-8}$ chiamata di solito costante di gravitazione. Per confronto si ha

$$\kappa = \frac{8\pi K}{c^2} = 1,87.10^{-27}. \tag{69}$$

§22. Comportamento dei regoli e degli orologi in campi gravitazionali statici. Curvatura dei raggi di luce. Moto del perielio delle orbite planetarie.

Per ottenere la teoria di Newton come prima approssimazione, delle 10 componenti $g_{\mu\nu}$ del potenziale gravitazionale ci basta calcolare g_{44}, poiché solo questa componente interviene nella prima approssimazione (67) dell'equazione di moto del punto materiale in un campo di gravitazione. Ma che anche altre componenti di $g_{\mu\nu}$ debbano scostarsi in prima approssimazione dai valori dati nella (4) lo si vede già dal fatto che queste sono soggette alla condizione $g = -1$.

Per un punto materiale generatore del campo che si trovi nell'origine del sistema di coordinate si ottiene in prima approssimazione la soluzione a simmetria radiale

$$\begin{aligned} &g_{\rho\sigma} = -\delta_{\rho\sigma} - \alpha \frac{x_\rho x_\sigma}{r^3} \ (\rho \text{ e } \sigma \text{ tra 1 e 3}) \\ &g_{\rho 4} = g_{4\rho} = 0 \ (\rho \text{ tra 1 e 3}) \\ &g_{44} = 1 - \frac{\alpha}{r}. \end{aligned} \tag{70}$$

$\delta_{\rho\sigma}$ è 1 o 0 a seconda che sia $\rho = \sigma$ o $\rho \neq \sigma$, r è la quantità

$$+\sqrt{(x_1^2 + x_2^2 + x_3^3}.$$

Per la (68a)

$$\alpha = \frac{\kappa M}{8\pi}, \tag{70a}$$

dove con M si indica la massa che genera il campo. È facile verificare che con questa soluzione le equazioni di campo sono soddisfatte in prima approssimazione (fuori dalla massa).

Studiamo ora l'influenza che le proprietà metriche dello spazio subiscono da parte del campo della massa M. Tra le lunghezze e i tempi ds misurati "localmente" (§4) e le differenze di coordinate sussiste sempre la relazione

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx_\mu dx_\nu.$$

Per un regolo campione disposto "parallelamente" all'asse x si deve porre per esempio

$$ds^2 = -1; \ dx_2 = dx_3 = dx_4 = 0,$$

quindi

$$-1 = g_{11} dx_1^2.$$

Se il regolo giace lungo l'asse x la prima delle equazioni (70) dà

$$g_{11} = -\left(1 + \frac{\alpha}{r}\right).$$

Dalle due relazioni discende in prima approssimazione

$$dx_1 = 1 - \frac{\alpha}{2r}. \tag{71}$$

Per la presenza del campo gravitazionale il regolo campione appare quindi accorciato dell'ammontare trovato rispetto al sistema di coordinate, quando esso sia disposto radialmente.

Analogamente si ottiene la sua lunghezza in coordinate nella direzione tangenziale, ponendo per esempio

$$ds^2 = -1; \; dx_1 = dx_3 = dx_4 = 0, \; x_1 = r, \; x_2 = x_3 = 0.$$

Si ottiene

$$-1 = g_{22} dx_2^2 = -dx_2^2. \tag{71a}$$

Per giacitura tangenziale il campo gravitazionale del punto materiale non ha quindi influenza sulla lunghezza del regolo.

Pertanto la geometria euclidea non vale neppure in prima approssimazione, se si assume un certo regolo come realizzazione dello stesso intervallo indipendentemente dalla sua posizione e dal suo orientamento. Un'occhiata alle (70a) e (69) mostra altresì come le deviazioni attese siano troppo piccole per poterle rendere osservabili nella misura della superficie terrestre.

Studiamo poi la velocità di avanzamento rispetto alla coordinata temporale di un orologio campione, che sia posto a riposo in un campo statico. Per un periodo dell'orologio si ha

$$ds = 1; \; dx_1 = dx_2 = dx_3 = 0.$$

Si ha quindi

$$dx_4 = \frac{1}{\sqrt{g_{44}}} = \frac{1}{\sqrt{1 + (g_{44} - 1)}} = 1 - \frac{g_{44} - 1}{2}$$

ovvero

$$dx_4 = 1 + \frac{\kappa}{8\pi} \int \frac{\rho d\tau}{r}. \tag{72}$$

L'orologio cammina più lentamente quando è posto in prossimità di masse ponderabili. Ne consegue che le righe spettrali della luce che ci arriva dalla superficie di stelle grandi ci devono apparire spostate verso l'estremo rosso dello spettro[16].

Studiamo inoltre il cammino dei raggi luminosi in un campo gravitazionale statico. Secondo la teoria della relatività speciale la velocità della luce è data dall'equazione

$$-dx_1^2 - dx_2^2 - dx_3^2 + dx_4^2 = 0,$$

e quindi nella teoria delle relatività generale dall'equazione

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx_\mu dx_\nu = 0. \tag{73}$$

Se la direzione, cioè il rapporto $dx_1 : dx_2 : dx_3$ è dato, l'equazione (73) fornisce le quantità

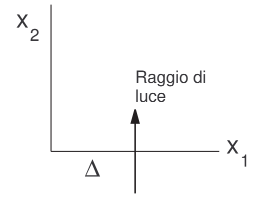
$$\frac{dx_1}{dx_4}, \; \frac{dx_2}{dx_4}, \; \frac{dx_3}{dx_4}$$

e quindi la velocità

$$\sqrt{\left(\frac{dx_1}{dx^4}\right)^2 + \left(\frac{dx_2}{dx^4}\right)^2 + \left(\frac{dx_3}{dx^4}\right)^2} = \gamma,$$

[16] A favore dell'esistenza di un effetto di questo tipo depongono secondo E. Freundlich le osservazioni su stelle fisse d'un certo tipo. Si attende una conferma definitiva di questo risultato.

definita nal senso della geometria euclidea. Si riconosce facilmente che i raggi di luce devono procedere curvi rispetto al sistema di coordinate nel caso che le $g_{\mu\nu}$ non siano costanti. Se n è una direzione perpendicolare alla propagazione della luce, il principio di Huygens dà che il raggio di luce [considerato nel piano (γ, n)] possiede



la curvatura $-\partial\gamma/\partial n$.

Studiamo la curvatura che subisce un raggio che passi alla distanza Δ da una massa M. Se si sceglie il sistema di coordinate secondo il disegno, la deflessione complessiva del raggio di luce (considerata positiva quando è concavo rispetto alla sorgente) è data con sufficiente approssimazione da

$$B = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial\gamma}{\partial x_1} dx_2,$$

mentre la (73) e la (70) danno

$$\gamma = \sqrt{-\frac{g_{44}}{g_{22}}} = 1 - \frac{\alpha}{2r}\left(1 + \frac{x_2^2}{r^2}\right).$$

Il calcolo dà

$$B = \frac{2\alpha}{\Delta} = \frac{\kappa M}{4\pi\Delta}. \tag{74}$$

Un raggio di luce che passi rasente al sole subisce quindi una deflessione di 1,7", uno rasente al pianeta Giove una deflessione di 0,02".

Se si calcola il campo gravitazionale con approssimazione superiore di un ordine, e quindi con la precisione corrispondente il moto orbitale di un punto materiale di massa infinitesima, si ottiene rispetto alle leggi di Keplero-Newton del moto dei pianeti una deviazione del tipo seguente. L'ellisse dell'orbita di un pianeta subisce nel verso del moto orbitale una lenta rotazione che ammonta a

$$\varepsilon = 24\pi^3 \frac{a^2}{T^2 c^2 (1 - e^2)} \tag{75}$$

per rivoluzione. In questa formula a indica il semiasse maggiore, c la velocità della luce nelle consuete unità, e l'eccentricità, T il periodo orbitale in secondi[17].

Il calcolo dà per il pianeta Mercurio una rotazione dell'orbita di 43" per secolo, che corrisponde esattamente alla constatazione degli astronomi (Leverrier); essi trovano infatti nel moto del perielio di questo pianeta un residuo della suddetta entità, non spiegabile con le perturbazioni dovute agli altri pianeti.

(Ricevuto il 20 marzo 1916.)

[17]Riguardo al calcolo rimando alle dissertazioni originali: A. Einstein, Sitzsungsber. d. Preuss. Akad. d. Wiss. **47**, p. 831. 1915. - K. Schwarzschild, Sitzsungsber. d. Preuss. Akad. d. Wiss. **7**, p. 189. 1916.