Le onde gravitazionali[1][2]

A. Einstein

L'importante problema, come avvenga la propagazione del campo gravitazionale, è già stato da me trattato un anno e mezzo fa in un lavoro dell'Accademia[3]. Poichè tuttavia la mia esposizione di allora dell'argomento non è abbastanza chiara e inoltre è deturpata da un deplorevole errore di calcolo, devo ritornare qui sulla questione.

Come allora, anche qui mi limiterò a trattare il caso in cui il continuo spazio-temporale considerato differisca solo assai poco da un continuo "galileiano". Al fine di porre per tutti gli indici

$$g_{\mu\nu} = -\delta_{\mu\nu} + \gamma_{\mu\nu}, \tag{1}$$

scegliamo, come è usuale nella teoria della relatività speciale, la variabile tempo immaginaria pura, ponendo

$$x_4 = it,$$

dove t designa il "tempo-luce". Nella (1) si ha $\delta_{\mu\nu} = 1$ o rispettivamente $\delta_{\mu\nu} = 0$ a seconda che sia $\mu = \nu$ oppure $\mu \neq \nu$. I $\gamma_{\mu\nu}$ sono quantità piccole rispetto a 1, che rappresentano lo scostamento del continuo da quello in assenza di campo; essi costituiscono un tensore di rango due rispetto a trasformazioni di Lorentz.

§1. Soluzione delle equazioni approssimate del campo gravitazionale mediante i potenziali ritardati.

Partiamo dalle equazioni di campo valide per un sistema di coordinate arbitrario[4]

$$\begin{aligned}
&-\sum_{\alpha} \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \begin{Bmatrix} \mu\nu \\ \alpha \end{Bmatrix} + \sum_{\alpha} \frac{\partial}{\partial x_\nu} \begin{Bmatrix} \mu\alpha \\ \alpha \end{Bmatrix} \\
&+ \sum_{\alpha\beta} \begin{Bmatrix} \mu\alpha \\ \beta \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \nu\beta \\ \alpha \end{Bmatrix} - \sum_{\alpha\beta} \begin{Bmatrix} \mu\nu \\ \alpha \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha\beta \\ \beta \end{Bmatrix} \\
&= -\kappa \left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} T \right).
\end{aligned} \tag{2}$$

$T_{\mu\nu}$ è il tensore d'energia-impulso della materia, T il corrispondente scalare $\sum_{\alpha\beta} g^{\alpha\beta} T_{\alpha\beta}$. Se indichiamo come grandezze piccole di ordine n quelle che siano di grado n in $\gamma_{\mu\nu}$, quando nel calcolo dei due membri dell'equazione (2) ci si limiti ai termini di ordine più basso, si ottiene il sistema di equazioni approssimate

$$\sum_{\alpha} \left(\frac{\partial^2 \gamma_{\mu\nu}}{\partial x_\alpha^2} + \frac{\partial^2 \gamma_{\alpha\alpha}}{\partial x_\mu \partial x_\nu} - \frac{\partial^2 \gamma_{\mu\alpha}}{\partial x_\nu \partial x_\alpha} - \frac{\partial^2 \gamma_{\nu\alpha}}{\partial x_\mu \partial x_\alpha} \right) = 2\kappa \left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \delta_{\mu\nu} \sum_{\alpha} T_{\alpha\alpha} \right). \tag{2a}$$

[1] Über Gravitationswellen, Sitz. Preuss. Akad. Wiss. **8**, 154-167 (1918).

[2] Tradotto in collaborazione con L. Mihich.

[3] Queste Sitzungsber. 1916, p. 688 e segg..

[4] Prescindiamo qui dall'introduzione del "termine λ" (vedi queste Sitzungsber. 1916, p. 142 e segg.).

Se si moltiplica questa equazione per $-(1/2)\,\delta_{\mu\nu}$ e si somma su μ e ν, si ottiene subito (cambiando nome agli indici) l'equazione scalare

$$\sum_{\alpha\beta}\left(-\frac{\partial^2\gamma_{\alpha\alpha}}{\partial x_\beta^2}+\frac{\partial^2\gamma_{\alpha\beta}}{\partial x_\alpha\partial x_\beta}\right)=\kappa\sum_\alpha T_{\alpha\alpha}.$$

Se sommiamo questa equazione, moltiplicata per $\delta_{\mu\nu}$, all'equazione (2a), si elimina subito il secondo termine del secondo membro di quest'ultima. Il primo membro si può scrivere in modo chiaro, quando si introducano al posto dei $\gamma_{\mu\nu}$ le funzioni

$$\gamma'_{\mu\nu}=\gamma_{\mu\nu}-\frac{1}{2}\delta_{\mu\nu}\sum_\alpha\gamma_{\alpha\alpha}. \tag{3}$$

L'equazione assume allora la forma:

$$\sum_\alpha\frac{\partial^2\gamma'_{\mu\nu}}{\partial x_\alpha^2}-\sum_\alpha\frac{\partial^2\gamma'_{\mu\alpha}}{\partial x_\nu\partial x_\alpha}-\sum_\alpha\frac{\partial^2\gamma'_{\nu\alpha}}{\partial x_\mu\partial x_\alpha}+\delta_{\mu\nu}\sum_{\alpha\beta}\frac{\partial^2\gamma'_{\alpha\beta}}{\partial x_\alpha\partial x_\beta}=2\kappa T_{\mu\nu}. \tag{4}$$

Queste equazioni però si possono semplificare notevolmente imponendo ai $\gamma'_{\mu\nu}$ che essi, oltre alle equazioni (4), debbano soddisfare le relazioni

$$\sum_\alpha\frac{\partial\gamma'_{\mu\alpha}}{\partial x_\alpha}=0. \tag{5}$$

A prima vista può sembrare strano che le 10 equazioni (4) per le 10 funzioni $\gamma'_{\mu\nu}$ possano essere affiancate arbitrariamente da altre quattro, senza che intervenga una sovradeterminazione. Ma la giustificazione di questo procedimento risulta chiara da quanto segue. Le equazioni (2) sono covarianti rispetto a sostituzioni arbitrarie, vale a dire sono soddisfatte per una scelta arbitraria del sistema di coordinate. Se introduco un nuovo sistema di coordinate i $g_{\mu\nu}$ del nuovo sistema dipendono dalle 4 funzioni arbitrarie che definiscono la trasformazione delle coordinate. Ora queste 4 funzioni possono essere scelte in modo tale che i $g_{\mu\nu}$ del nuovo sistema soddisfino quattro relazioni prescritte arbitrariamente. Pensiamole scelte in modo tale che nel caso dell'approssimazione che ci interessa coincidano con le equazioni (5). Queste ultime significano quindi una prescrizione da noi scelta secondo la quale va scelto il sistema di coordinate. Grazie alla (5) si ottengono in luogo delle (4) le semplici equazioni

$$\sum_\alpha\frac{\partial^2\gamma'_{\mu\nu}}{\partial x_\alpha^2}=2\kappa T_{\mu\nu}. \tag{6}$$

Dalle (6) si riconosce che il campo gravitazionale si propaga con la velocità della luce. I $\gamma_{\mu\nu}$ si possono calcolare, dati i $T_{\mu\nu}$, a partire da questi ultimi con il metodo dei potenziali ritardati. Siano x, y, z, x_4/i le coordinate reali del punto potenziato, per il quale si debbano calcolare i $\gamma'_{\mu\nu}$, x_0, y_0, z_0 le coordinate spaziali di un elemento di spazio dV_0, r la distanza spaziale tra quest'ultimo e il punto potenziato; si ha allora

$$\gamma'_{\mu\nu}=-\frac{\kappa}{2\pi}\int\frac{T_{\mu\nu}\left(x_0,y_0,z_0,t-r\right)}{r}dV_0. \tag{7}$$

§2. Le componenti dell'energia del campo gravitazionale.

Ho precedentemente[5] dato in forma esplicita le componenti dell'energia del campo gravitazionale nel caso in cui la scelta delle coordinate soddisfi la condizione

$$g = |g_{\mu\nu}| = 1,$$

che nel caso dell'approssimazione qui trattata si scriverebbe

$$\gamma = \sum_\alpha \gamma_{\alpha\alpha} = 0.$$

Questa però nel caso della nostra attuale scelta delle coordinate non è in generale soddisfatta. È perciò più semplice ottenere qui le componenti dell'energia con una trattazione a parte.

Occorre però tener presente la seguente difficoltà. Le nostre equazioni di campo (6) sono corrette solo al primo ordine, mentre le equazioni dell'energia - come è facile concludere - sono piccole al secondo ordine. Arriviamo però comodamente allo scopo con il procedimento seguente. Le componenti d'energia $\mathfrak{T}_\mu^\tau$ (della materia) e $\mathfrak{t}_\mu^\tau$ (del campo gravitazionale) secondo la teoria generale soddisfano le relazioni

$$\sum_\sigma \frac{\partial \mathfrak{T}_\mu^\sigma}{\partial x_\sigma} + \frac{1}{2}\sum_{\rho\sigma} \frac{\partial g^{\rho\sigma}}{\partial x_\mu}\mathfrak{T}_{\rho\sigma} = 0$$

$$\sum_\sigma \frac{\partial \left(\mathfrak{T}_\mu^\sigma + \mathfrak{t}_\mu^\sigma\right)}{\partial x_\sigma} = 0.$$

Da queste segue

$$\sum_\sigma \frac{\partial \mathfrak{t}_\mu^\sigma}{\partial x_\sigma} = \frac{1}{2}\sum_{\rho\sigma} \frac{\partial g^{\rho\sigma}}{\partial x_\mu}\mathfrak{T}_{\rho\sigma}.$$

Se portiamo il secondo membro, nel quale traiamo $\mathfrak{T}_{\rho\sigma}$ dalle equazioni di campo, nella forma del primo membro, otterremo i $\mathfrak{t}_\mu^\sigma$. Al secondo membro di questa equazione, nel caso dell'approssimazione trattata da noi, ambedue i fattori sono quantità piccole al primo ordine. Quindi per ottenere i $\mathfrak{t}_\mu^\sigma$ come quantità del secondo ordine, basta sostituire i due fattori al secondo membro con quantità del prim'ordine. Si possono quindi sostituire

$$\frac{\partial g^{\rho\sigma}}{\partial x_\mu} \text{ con } -\frac{\partial \gamma_{\rho\sigma}}{\partial x_\mu}$$

$$\text{e } \mathfrak{T}_{\rho\sigma} \text{ con } T_{\rho\sigma}.$$

Invece dei $\mathfrak{t}_\mu^\sigma$, introduciamo poi le quantità $t_{\rho\sigma}$, analoghe per quanto riguarda i caratteri degli indici a $T_{\rho\sigma}$, che per il grado di approssimazione qui richiesta differiscono dai $\mathfrak{t}_\sigma^\rho$ solo per il segno. Dobbiamo allora calcolare i $t_{\mu\sigma}$ con l'equazione

$$\sum_\sigma \frac{\partial t_{\mu\sigma}}{\partial x_\sigma} = \frac{1}{2}\sum_{\rho\sigma} \frac{\partial \gamma_{\rho\sigma}}{\partial x_\mu}T_{\rho\sigma}. \tag{8}$$

[5] Ann. d. Phys. **49**, 1916. Equazione (50).

Per sviluppare il secondo membro teniamo conto che per la (3) si deve porre

$$\gamma_{\mu\nu} = \gamma'_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\delta_{\mu\nu}\sum_\alpha \gamma'_{\alpha\alpha} = \gamma'_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\delta_{\mu\nu}\gamma', \tag{3a}$$

ed esprimiamo $T_{\rho\sigma}$ mediante i $\gamma'_{\rho\sigma}$ secondo la (6). Con una semplice sviluppo risulta[6]

$$\begin{aligned}\sum_\sigma \frac{\partial t_{\mu\sigma}}{\partial x_\sigma} = \sum_\sigma \frac{\partial}{\partial x_\sigma}\left[\frac{1}{4\kappa}\left(\sum_{\alpha\beta}\left(\frac{\partial\gamma'_{\alpha\beta}}{\partial x_\mu}\frac{\partial\gamma'_{\alpha\beta}}{\partial x_\sigma}\right) - \frac{1}{2}\frac{\partial\gamma'}{\partial x_\mu}\frac{\partial\gamma'}{\partial x_\sigma}\right)\right] \\ - \frac{1}{8\kappa}\sum_\sigma \frac{\partial}{\partial x_\sigma}\left[\delta_{\mu\sigma}\left(\sum_{\alpha\beta\lambda}\left(\frac{\partial\gamma'_{\alpha\beta}}{\partial x_\lambda}\right)^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\gamma'}{\partial x_\lambda}\right)^2\right)\right].\end{aligned}$$

Da ciò segue che possiamo soddisfare la legge dell'energia se poniamo

$$\begin{aligned}4\kappa t_{\mu\sigma} = \left(\sum_{\alpha\beta}\left(\frac{\partial\gamma'_{\alpha\beta}}{\partial x_\mu}\frac{\partial\gamma'_{\alpha\beta}}{\partial x_\sigma}\right) - \frac{1}{2}\frac{\partial\gamma'}{\partial x_\mu}\frac{\partial\gamma'}{\partial x_\sigma}\right) \\ - \frac{1}{2}\delta_{\mu\sigma}\left(\sum_{\alpha\beta\lambda}\left(\frac{\partial\gamma'_{\alpha\beta}}{\partial x_\lambda}\right)^2 - \frac{1}{2}\sum_\lambda\left(\frac{\partial\gamma'}{\partial x_\lambda}\right)^2\right).\end{aligned} \tag{9}$$

Ci si chiarisce il significato fisico di $t_{\mu\sigma}$ nel modo più semplice con il seguente ragionamento. I $t_{\mu\sigma}$ sono per il campo di gravitazione ciò che i $T_{\mu\sigma}$ sono per la materia. Ma per la materia ponderabile incoerente si ha, limitandosi a quantità del primo ordine:

$$T_{\mu\sigma} = T^{\mu\sigma} = \rho\frac{dx_\mu}{ds}\frac{dx_\sigma}{ds} \quad \left(ds^2 = -\sum_\nu dx_\nu^2\right), \tag{10}$$

dove ρ è lo scalare densità della materia. T_{11}, $T_{12}\ldots.T_{33}$ esprimono quindi componenti degli sforzi; T_{14}, T_{24}, T_{34} e rispettivamente T_{41}, T_{42}, T_{43} sono il vettore densità di impulso ovvero densità della corrente d'energia moltiplicato per $\sqrt{-1}$, T_{44} la densità di energia cambiata di segno. Analoga è l'interpretazione dei $t_{\mu\sigma}$ che si riferiscono al campo gravitazionale.

Come esempio si tratti in primo luogo il campo di una massa puntiforme M a riposo. Dalla (7) e dalla (10) discende

$$\gamma'_{44} = \frac{\kappa}{2\pi}\frac{M}{r}, \tag{11}$$

mentre tutti gli altri $\gamma'_{\mu\nu}$ si annullano. Si ottengono per i $g_{\mu\nu}$ secondo le (11), (3a) e (1) i valori determinati per primo da De Sitter

$$\begin{pmatrix} -1-\frac{\kappa}{4\pi}\frac{M}{r} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1-\frac{\kappa}{4\pi}\frac{M}{r} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1-\frac{\kappa}{4\pi}\frac{M}{r} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1+\frac{\kappa}{4\pi}\frac{M}{r} \end{pmatrix}. \tag{11a}$$

[6] L'errore prima menzionato nella mia precedente dissertazione consiste nel fatto che al secondo membro della (8) avevo posto $\frac{\partial\gamma'_{\rho\sigma}}{\partial x_\mu}$ invece di $\frac{\partial\gamma_{\rho\sigma}}{\partial x_\mu}$ Questo errore rende necessaria una rielaborazione del §2 e del §3 di quel lavoro.

La velocità della luce c, che in generale è data dall'equazione

$$0 = ds^2 = \sum_{\mu\nu} g_{\mu\nu} dx_\mu dx_\nu,$$

risulta qui dalla relazione

$$\left(1 + \frac{\kappa}{4\pi}\frac{M}{r}\right)\left(dx^2 + dy^2 + dz^2\right) - \left(1 - \frac{\kappa}{4\pi}\frac{M}{r}\right) dt^2 = 0.$$

Quindi la velocità della luce

$$c = \sqrt{\frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{dt^2}} = 1 - \frac{\kappa}{4\pi}\frac{M}{r} \tag{12}$$

con la scelta delle coordinate da noi fatta dipende solo dalla posizione, non dalla direzione. Inoltre risulta dalla (11a) che piccoli corpi rigidi per variazione della posizione rimangono simili a se stessi, mentre la loro estensione lineare misurata in coordinate varia come $\left(1 - \frac{\kappa}{8\pi}\frac{M}{r}\right)$.

L'equazione (9) dà per i $t_{\mu\sigma}$ nel nostro caso

$$\begin{aligned} t_{\mu\sigma} &= \frac{\kappa M^2}{32\pi^2}\left(\frac{x_\mu x_\sigma}{r^6} - \frac{1}{2}\delta_{\mu\sigma}\frac{1}{r^4}\right) \text{ (per gli indici 1 - 3)} \\ t_{14} &= t_{24} = t_{34} = 0 \\ t_{44} &= -\frac{\kappa M^2}{64\pi^2} \cdot \frac{1}{r^4} \end{aligned} \tag{13}$$

I valori per i $t_{\mu\sigma}$ dipendono completamente dalla scelta delle coordinate, cosa che mi ha fatto notare già da tempo per lettera il sig. G . Nordström[7]. Con scelta delle coordinate conforme alla condizione $|g| = 1$, per la quale io nel caso della massa puntiforme ho precedentemente ottenuto le espressioni

$$g_{\mu\sigma} = -\delta_{\mu\sigma} - \frac{\kappa M}{4\pi}\frac{x_\mu x_\sigma}{r^3} \text{ (indici 1 - 3)}$$

$$g_{14} = g_{24} = g_{34} = 0$$

$$g_{44} = 1 - \frac{\kappa}{4\pi}\frac{M}{r},$$

tutte le componenti dell'energia del campo gravitazionale si annullano, se si calcolano fino al second'ordine con la formula

$$\kappa t_\sigma^\alpha = \frac{1}{2}\delta_\sigma^\alpha \sum_{\mu\nu\lambda\beta} g^{\mu\nu} \begin{Bmatrix} \mu\lambda \\ \beta \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \nu\beta \\ \lambda \end{Bmatrix} - \sum_{\mu\nu\lambda} g^{\mu\nu} \begin{Bmatrix} \mu\lambda \\ \alpha \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \nu\sigma \\ \lambda \end{Bmatrix}.$$

Si potrebbe sospettare che con opportuna scelta del sistema di riferimento sarebbe forse possibile portare a zero tutte le componenti dell'energia del campo gravitazionale, cosa che sarebbe assai notevole. Ma si può dimostrare facilmente che ciò non è vero in generale.

[7] Vedi anche E. Schrödinger, Phys. Zeitschr. 1918, I. p. 4.

§3. L'onda gravitazionale piana.

Per trovare le onde gravitazionali piane proponiamo di soddisfare le equazioni di campo (6) con

$$\gamma'_{\mu\nu} = \alpha_{\mu\nu} f\left(x_1 + ix_4\right). \tag{14}$$

Gli $\alpha_{\mu\nu}$ rappresentano costanti reali, f una funzione reale di $(x_1 + ix_4)$. Le equazioni (5) danno le relazioni

$$\begin{aligned} \alpha_{11} + i\alpha_{14} &= 0 \\ \alpha_{21} + i\alpha_{24} &= 0 \\ \alpha_{31} + i\alpha_{34} &= 0 \\ \alpha_{41} + i\alpha_{44} &= 0 \end{aligned}\,. \tag{15}$$

Se le condizioni (15) sono soddisfatte, la (14) rappresenta una possibile onda gravitazionale. Per capire più a fondo la sua natura fisica, calcoliamo la sua densità di corrente d'energia t_{41}/i. Sostituendo i $\gamma'_{\mu\nu}$ dati dalla (15) nell'equazione (9) si ottiene

$$\frac{t_{41}}{i} = \frac{1}{4\kappa} f'^2 \left[\left(\frac{\alpha_{22} - \alpha_{33}}{2} \right)^2 + \alpha_{23}^2 \right]. \tag{16}$$

La singolarità di questo risultato consiste nel fatto che delle sei costanti arbitrarie che (tenendo conto della (15)) intervengono nella (14), solo due compaiono nella (16). Un'onda per la quale $\alpha_{22} - \alpha_{33}$ e α_{23} siano nulli non trasporta alcuna energia. Questa circostanza si può ricondurre al fatto che una tale onda in un certo senso non ha nessuna esistenza reale, come risulta nel modo più semplice dal ragionamento seguente.

Notiamo in primo luogo che, tenendo conto della (15), lo schema dei coefficienti degli $\alpha_{\mu\nu}$ per un'onda priva di energia è il seguente:

$$(\alpha_{\mu\nu} =) \begin{matrix} \alpha & \beta & \gamma & i\alpha \\ \beta & \delta & 0 & i\beta \\ \gamma & 0 & \delta & i\gamma \\ i\alpha & i\beta & i\gamma & -\alpha \end{matrix}\,, \tag{17}$$

dove α, β, γ, δ indicano quattro numeri che si possono scegliere indipendentemente l'uno dall'altro.

Si consideri ora uno spazio privo di campi, il cui elemento di linea ds riferito a un sistema di coordinate scelto opportunamente (x'_1, x'_2, x'_3, x'_4) si possa scrivere nella forma

$$-ds^2 = dx'^2_1 + dx'^2_2 + dx'^2_3 + dx'^2_4. \tag{18}$$

Introduciamo ora nuove coordinate x_1, x_2, x_3, x_4 sulla base della sostituzione

$$x'_\nu = x_\nu - \lambda_\nu \phi\left(x_1 + ix_4\right). \tag{19}$$

I λ_ν indicano quattro costanti reali infinitesime, ϕ_ν una funzione reale dell'argomento $(x_1 + ix_4)$. Dalla (18) e dalla (19) segue, quando si trascurino quantità del secondo ordine rispetto a λ,

$$ds^2 = -\sum_\nu dx'^2_\nu = -\sum_\nu dx^2_\nu + 2\phi'\,(dx_1 + idx_4)\sum_\nu \lambda_\nu dx_\nu.$$

Da qui risultano per i corrispondenti $\gamma_{\mu\nu}$ i valori

$$\left(\frac{1}{\phi'}\gamma_{\mu\nu} =\right) \begin{array}{cccc} 2\lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & i\lambda_1 + \lambda_4 \\ \lambda_2 & 0 & 0 & i\lambda_2 \\ \lambda_3 & 0 & 0 & i\lambda_3 \\ i\lambda_1 + \lambda_4 & i\lambda_2 & i\lambda_3 & 2i\lambda_4 \end{array}$$

e quindi per i $\gamma'_{\mu\nu}$

$$\left(\frac{1}{\phi'}\gamma'_{\mu\nu} =\right) \begin{array}{cccc} \lambda_1 - i\lambda_4 & \lambda_2 & \lambda_3 & i\lambda_1 + \lambda_4 \\ \lambda_2 & -\lambda_1 - i\lambda_4 & 0 & i\lambda_2 \\ \lambda_3 & 0 & -\lambda_1 - i\lambda_4 & i\lambda_3 \\ i\lambda_2 + \lambda_4 & i\lambda_2 & i\lambda_3 & -\lambda_1 + i\lambda_4 \end{array}. \tag{20}$$

Se inoltre imponiamo che la funzione ϕ nella (19) sia legata alla funzione f nella (14) dalla relazione

$$\phi' = f, \tag{21}$$

risulta che, a meno del segno delle costanti, i $\gamma'_{\mu\nu}$ della (20) coincidono con i $\gamma'_{\mu\nu}$ delle (14) e (17).

Le onde gravitazionali che non trasportano energia si possono quindi generare a partire da un sistema privo di campi mediante una pura trasformazione di coordinate; la loro esistenza è (in questo senso) solo apparente. In senso proprio sono quindi reali solo quelle onde che procedono lungo l'asse x, che corrispondono a una propagazione delle quantità $\frac{\gamma'_{22}-\gamma'_{33}}{2}$ e γ'_{23} (ovvero delle quantità $\frac{\gamma_{22}-\gamma_{33}}{2}$ e γ_{23}). Questi due tipi non si differenziano tra di loro per la natura, ma solo per l'orientazione. Il campo d'onda dà luogo a deformazioni degli angoli nel piano ortogonale alla direzione di propagazione. Le densità della corrente d'energia, dell'impulso e dell'energia sono dati dalla (16).

§4. L'emissione di onde gravitazionali da parte di un sistema meccanico.

Consideriamo un sistema meccanico isolato, il cui baricentro coincida permanentemente con l'origine delle coordinate. Le variazioni che si verificano nel sistema siano così lente e la sua estensione spaziale sia così piccola, che il tempo-luce corrispondente alla distanza tra due punti materiali qualsiasi del sistema possa essere considerato infinitamente piccolo. Studiamo le onde gravitazionali inviate dal sistema nella direzione dell'asse x positivo.

L'ultima delle condizioni suddette comporta che per una distanza R abbastanza grande del punto potenziato dall'origine delle coordinate possiamo sostituire al posto della (7) l'equazione

$$\gamma'_{\mu\nu} = -\frac{\kappa}{2\pi R}\int T_{\mu\nu}\,(x_0, y_0, z_0, t - R)\,dV_0. \tag{7a}$$

Possiamo limitarci a considerare onde che trasportino energia; dobbiamo quindi, secondo i risultati del §3, costruire solo le componenti γ'_{23} e $(1/2)(\gamma'_{22} - \gamma'_{33})$. Gli integrali spaziali che compaiono al secondo membro della (7a) si possono sviluppare in un modo escogitato da M. Laue. Daremo qui esplicitamente solo il calcolo dell'integrale

$$\int T_{23} dV_0.$$

Se moltiplichiamo le due equazioni dell'impulso

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial T_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial T_{23}}{\partial x_3} + \frac{\partial T_{24}}{\partial x_4} &= \sigma, \\ \frac{\partial T_{31}}{\partial x_1} + \frac{\partial T_{32}}{\partial x_2} + \frac{\partial T_{33}}{\partial x_3} + \frac{\partial T_{34}}{\partial x_4} &= \sigma \end{aligned}$$

rispettivamente per $x_3/2$ e per $x_2/2$, le integriamo su tutto il sistema materiale e le sommiamo, si ottiene dopo una semplice trasformazione con integrazione per parti

$$-\int T_{23} dV_0 + \frac{1}{2}\frac{d}{dx_4}\left\{\int (x_3 T_{24} + x_2 T_{34})\, dV_0\right\} = 0.$$

Trasformiamo di nuovo l'ultimo integrale mediante l'equazione dell'energia

$$\frac{\partial T_{41}}{\partial x_1} + \frac{\partial T_{42}}{\partial x_2} + \frac{\partial T_{43}}{\partial x_3} + \frac{\partial T_{44}}{\partial x_4} = 0,$$

moltiplicando questa per $\frac{1}{2}x_2 x_3$, integrando e sviluppando con integrazione per parti. Otteniamo

$$-\frac{1}{2}\int (x_3 T_{42} + x_2 T_{43})\, dV_0 + \frac{1}{2}\frac{d}{dx_4}\left\{\int x_2 x_3 T_{44} dV_0\right\} = 0.$$

Se si sostituisce questa nell'equazione precedente si ottiene

$$\int T_{23} dV_0 = \frac{1}{2}\frac{d^2}{dx_4^2}\left\{\int x_2 x_3 T_{44} dV_0\right\},$$

ovvero, poiché $\frac{d^2}{dx_4^2}$ va sostituito da $-\frac{d^2}{dt^2}$, T_{44} dalla densità cambiata di segno $(-\rho)$ della materia:

$$\int T_{23} dV_0 = \frac{1}{2}\ddot{\mathfrak{J}}_{23}. \tag{22}$$

Si è introdotta l'abbreviazione

$$\mathfrak{J}_{\mu\nu} = \int x_\mu x_\nu \rho dV_0; \tag{23}$$

$\mathfrak{J}_{\mu\nu}$ sono le componenti del momento d'inerzia (variabile nel tempo) del sistema materiale. In modo analogo si ottiene

$$\int (T_{22} - T_{33})\, dV_0 = \frac{1}{2}\left(\ddot{\mathfrak{J}}_{22} - \ddot{\mathfrak{J}}_{33}\right). \tag{24}$$

Dalla (7a) risulta, tenendo conto delle (22) e (24)

$$\gamma'_{23} = -\frac{\kappa}{4\pi R}\ddot{\mathfrak{J}}_{23}, \tag{25}$$

$$\frac{\gamma'_{22} - \gamma'_{33}}{2} = -\frac{\kappa}{4\pi R}\left(\frac{\ddot{\mathfrak{J}}_{22} - \ddot{\mathfrak{J}}_{33}}{2}\right). \tag{26}$$

Per le (7a), (22), (24) gli $\mathfrak{J}_{\mu\nu}$ vanno presi al tempo $t - R$, quindi come funzioni di $t - R$, o per R grandi in vicinanza dell'asse x anche come funzioni di $t - x$. La (25) e la (26) rappresentano perciò onde gravitazionali, il cui flusso d'energia lungo l'asse x possiede per la (16) la densità

$$\frac{t_{41}}{i} = \frac{\kappa}{64\pi^2 R^2}\left[\left(\frac{\dddot{\mathfrak{J}}_{22} - \dddot{\mathfrak{J}}_{33}}{2}\right)^2 + \dddot{\mathfrak{J}}^2_{23}\right]. \tag{27}$$

Occupiamoci ora del problema di calcolare la radiazione totale emessa dal sistema mediante onde gravitazionali. Per risolvere questo problema, ci domandiamo dapprima quale sia l'irraggiamento di energia del sistema meccanico considerato lungo la direzione fissata dai coseni direttori α_ν. Questo problema si può risolvere per trasformazione o più in breve riconducendosi al seguente problema formale.

Sia $A_{\mu\nu}$ un tensore simmetrico (in tre dimensioni), α_ν un vettore. Cerchiamo uno scalare S che sia una funzione omogenea di secondo grado di $A_{\mu\nu}$ e di α_ν, che si riduca per $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = \alpha_3 = 0$ alla forma

$$\left(\frac{A_{22} - A_{33}}{2}\right)^2 + A_{23}^2.$$

Lo scalare cercato sarà una funzione degli scalari $\sum_\mu A_{\mu\mu}$, $\sum_{\mu\nu} A^2_{\mu\nu}$, $\sum_{\mu\nu} A_{\mu\nu}\alpha_\mu\alpha_\nu$, $\sum_{\mu\sigma\tau} A_{\mu\sigma}A_{\mu\tau}\alpha_\sigma\alpha_\tau$. Tenendo conto del fatto che gli ultimi due scalari si riducono per $\alpha_\nu = (1,0,0)$ ad A_{11} e rispettivamente a $\sum_\mu A^2_{1\mu}$, si trova, dopo qualche ragionamento, che lo scalare cercato è

$$\begin{aligned} S = &-\frac{1}{4}\left(\sum A_{\mu\mu}\right)^2 + \frac{1}{2}\sum_\mu A_{\mu\mu}\sum_{\rho\sigma} A_{\rho\sigma}\alpha_\rho\alpha_\sigma + \frac{1}{4}\left(\sum_{\rho\sigma} A_{\rho\sigma}\alpha_\rho\alpha_\sigma\right)^2 \\ &+ \frac{1}{2}\sum_{\mu\nu} A^2_{\mu\nu} - \sum_{\mu\sigma\tau} A_{\mu\sigma}A_{\mu\tau}\alpha_\sigma\alpha_\tau. \end{aligned} \tag{28}$$

È chiaro che S è la densità della radiazione gravitazionale uscente radialmente nella direzione (α_1,α_2,α_3), quando si ponga

$$A_{\mu\nu} = \frac{\sqrt{\kappa}}{8\pi R}\dddot{\mathfrak{J}}_{\mu\nu}. \tag{29}$$

Se, tenendo fissi gli $A_{\mu\nu}$, si esegue la media di S lungo tutte le direzioni dello spazio, si ottiene la densità media $\bar{S}$ della radiazione emessa. $\bar{S}$ moltiplicata per

$4\pi R^2$ è infine la perdita di energia per unità di tempo del sistema meccanico mediante onde gravitazionali. Il calcolo dà

$$4\pi R^2 \bar{S} = \frac{\kappa}{80\pi}\left[\sum_{\mu\nu} \dddot{\mathfrak{J}}_{\mu\nu}^{2} - \frac{1}{3}\left(\sum_{\mu} \dddot{\mathfrak{J}}_{\mu\mu}\right)^2\right]. \tag{30}$$

Si vede da questo risultato che un sistema meccanico che conservi permanentemente la simmetria sferica non può irraggiare, in contrasto con il risultato raggiunto per un errore di calcolo della precedente nota.

Dalla (27) è chiaro che la radiazione uscente non può diventare negativa in nessuna direzione, quindi certamente anche la radiazione totale. Già nella precedente dissertazione è stato sottolineato come il risultato finale di questa trattazione, che consentirebbe una perdita di energia dei corpi a causa dell'agitazione termica, debba suscitare il dubbio sulla validità generale della teoria. Pare che una teoria quantistica compiuta dovrebbe portare a una modifica anche della teoria della gravitazione.

§5. Effetto di onde gravitazionali su sistemi meccanici

Per completezza considereremo anche brevemente in che senso l'energia di onde gravitazionali possa trasferirsi a sistemi meccanici. Si riconsideri un sistema meccanico del tipo studiato nel §4. Lo stesso subisca l'azione di un'onda gravitazionale di lunghezza d'onda grande rispetto all'estensione del sistema. Per poter determinare l'incremento di energia del sistema ci riallacciamo all'equazione dell'energia-impulso della materia

$$\sum_{\sigma} \frac{\partial \mathfrak{T}_{\mu}^{\sigma}}{\partial x_\sigma} + \frac{1}{2}\sum_{\rho\sigma} \frac{\partial g^{\rho\sigma}}{\partial x_\mu}\mathfrak{T}_{\rho\sigma} = 0.$$

Integriamo quest'equazione su tutto il sistema per x_4 costante e otteniamo per $\mu = 4$ (legge dell'energia)

$$\frac{d}{dx_4}\left\{\int \mathfrak{T}_4^4 dV\right\} = -\frac{1}{2}\int dV \sum_{\rho\sigma} \frac{\partial g^{\rho\sigma}}{\partial x_4}\mathfrak{T}_{\rho\sigma}.$$

L'integrale del primo membro è l'energia E dell'intero sistema materiale. A primo membro compare quindi l'incremento temporale di questa energia. Se si esegue la derivazione rispetto al tempo reale, e al secondo membro ci si limita a ritenere i termini del secondo ordine di grandezza, si ottiene

$$\frac{dE}{dt} = \frac{1}{2}\int dV \sum_{\rho\sigma}\left(\frac{\partial \gamma_{\rho\sigma}}{\partial t} T_{\rho\sigma}\right). \tag{31}$$

Ora possiamo suddividere i $\gamma_{\rho\sigma}$ che rappresentano il campo gravitazionale in una parte corrispondente all'onda entrante $(\gamma_{\rho\sigma})_w$ e in una parte costante $(\gamma_{\rho\sigma})_v$, secondo l'equazione

$$\gamma_{\rho\sigma} = (\gamma_{\rho\sigma})_w + (\gamma_{\rho\sigma})_v\,. \tag{32}$$

In questo modo l'integrale del secondo membro della (31) si suddivide in una somma di due integrali, dei quali il primo esprime l'incremento di energia che deriva dall'onda. Solo di questo ci interessiamo qui; pertanto, per non complicare la notazione, interpreteremo la (31) nel senso che $\frac{dE}{dt}$ indicherà solo l'incremento di energia che deriva dall'onda e $\gamma_{\rho\sigma}$ la parte indicata sopra con $(\gamma_{\rho\sigma})_w$. Poichè $\gamma_{\rho\sigma}$ è una funzione della posizione lentamente variabile si può porre

$$\frac{dE}{dt} = \frac{1}{2}\sum_{\rho\sigma}\frac{\partial\gamma_{\rho\sigma}}{\partial t}\cdot\int T_{\rho\sigma}dV. \tag{33}$$

Sia l'onda agente una che trasporti energia, nella quale solo la componente $\gamma_{23}(= \gamma'_{23})$ del campo gravitazionale sia diversa da zero. Allora si ha per la (22)

$$\frac{dE}{dt} = \frac{1}{2}\frac{\partial\gamma_{23}}{\partial t}\frac{d^2\mathfrak{J}_{23}}{dt^2}. \tag{34}$$

Per una determinata onda e per un determinato processo meccanico si può quindi calcolare per integrazione l'energia ceduta dall'onda.

§6. Risposta a un'obiezione sollevata dal sig. Levi-Civita.

Negli ultimi tempi in una serie di studi interessanti il sig. Levi-Civita ha contribuito al chiarimento di problemi della teoria della relatività generale. In uno di questi lavori[8] egli sostiene riguardo alle leggi di conservazione un punto di vista che si discosta dal mio e contesta sulla base di questo suo punto di vista la correttezza delle mie conclusioni circa l'irraggiamento di energia tramite onde gravitazionali. Sebbene nel frattempo con uno scambio di lettere abbiamo chiarito il problema in un modo sufficiente per entrambi, ritengo tuttavia opportuno, per l'interesse della questione, aggiungere qui alcune osservazioni generali sulle leggi di conservazione.

Si ammette in generale che, in conformità ai fondamenti della teoria della relatività generale, esista una tetraequazione valida per una scelta arbitraria del sistema di riferimento della forma

$$\sum_{\nu}\frac{\partial\left(\mathfrak{T}_\sigma^\nu + \mathfrak{t}_\sigma^\nu\right)}{\partial x_\nu} = 0 \ (\sigma = 1,2,3,4), \tag{35}$$

dove i $\mathfrak{T}_\sigma^\nu$ sono le componenti dell'energia della materia, i $\mathfrak{t}_\sigma^\nu$ sono funzioni dei $g_{\mu\nu}$ e delle loro derivate prime. Ma sussistono divergenze d'opinione sul fatto che si debbano assumere i $\mathfrak{t}_\sigma^\nu$ come le componenti dell'energia del campo gravitazionale. Questa divergenza la considero irrilevante, una pura questione di parole. Sostengo tuttavia che l'equazione anzidetta e non controversa comporti quelle semplificazioni della visione d'assieme, che costituiscono il pregio delle leggi di conservazione. Questo è evidente nel caso della quarta equazione ($\sigma = 4$), che io uso indicare come equazione dell'energia.

Sia dato un sistema materiale limitato spazialmente, fuori dal quale densità di materia e intensità dei campi elettromagnetici siano nulle. Raffiguriamoci una

[8]Accademia dei Lincei, Vol. XXVI, seduta del 1° aprile 1917.

superficie a riposo S che racchiuda l'intero sistema materiale. Si ottiene allora per integrazione della quarta equazione sullo spazio racchiuso da S:

$$(36)\quad -\frac{d}{dx_4}\left\{\int\left(\mathfrak{T}_4^4+\mathfrak{t}_4^4\right)dV\right\}=\int\left(\mathfrak{t}_4^1\cos(nx_1)+\mathfrak{t}_4^2\cos(nx_2)+\mathfrak{t}_4^3\cos(nx_3)\right)d\sigma.$$

Nessuno può essere costretto per un qualche motivo a designare $\mathfrak{t}_4^4$ come densità d'energia del campo gravitazionale e $(\mathfrak{t}_4^1,\mathfrak{t}_4^2,\mathfrak{t}_4^3)$ come componenti del flusso d'energia gravitazionale. Ma si può sostenere quanto segue: quando l'integrale spaziale di $\mathfrak{t}_4^4$ è piccolo rispetto a quello della densità di energia "materiale" $\mathfrak{T}_4^4$, il secondo membro rappresenta sicuramente la perdita in energia materiale del sistema. Solo questo è ciò che è stato usato nella dissertazione presente sulle onde gravitazionali, e nella mia precedente.

Il sig. Levi-Civita (e prima di lui con minor forza anche H. A. Lorentz) ha proposto una formulazione delle leggi di conservazione che si discosta dalla (35). Egli (e con lui anche altri colleghi) è contrario a dare rilevanza all'equazione (35) e contrario alla suddetta interpretazione, poiché i $\mathfrak{t}_\sigma^\mu$ non costituiscono un tensore. Questo lo si ammette; ma non capisco perché si debba attribuire significato fisico solo a quelle quantità che abbiano le proprietà di trasformazione delle componenti di un tensore. Necessario è soltanto che il sistema di equazioni valga per ogni scelta del sistema di riferimento, come succede per il sistema di equazioni (35). Levi-Civita propone la seguente formulazione della legge d'energia-impulso. Egli scrive le equazioni di campo della gravitazione nella forma

$$(37)\qquad T_{im}+A_{im}=0,$$

dove T_{im} è il tensore d'energia della materia e A_{im} è un tensore covariante, che dipende dai $g_{\mu\nu}$ e dalle loro prime due derivate rispetto alle coordinate. Gli A_{im} sono designati come le componenti dell'energia del campo gravitazionale.

Una obiezione logica contro una siffatta denominazione non può naturalmente essere sollevata. Ma trovo che dall'equazione (37) non possano esser tratte conclusioni del tipo di quelle che siamo abituati a trarre dalle leggi di conservazione. Ciò dipende dal fatto che per la (37) le componenti dell'energia totale sono nulle ovunque. Le equazioni (37) non escludono per esempio (a differenza delle equazioni (35)) che un sistema materiale si dissolva completamente nel nulla, senza lasciare una traccia. Infatti la sua energia totale è per la (37) (ma non per la (35)) uguale a zero sin dall'inizio; la conservazione di questi valori dell'energia non richiede l'esistenza permanente del sistema in una qualche forma.

Comunicato il 21 Febbraio.