Geometria ed esperienza[1]

A. Einstein

La matematica gode rispetto a tutte le altre scienze di una particolare considerazione rispetto ad un punto; le sue leggi sono assolutamente certe e incontestabili, mentre tutte le altre scienze sono in una certa misura discutibili e sempre in pericolo di essere sovvertite dalla scoperta di nuovi fatti. D'altra parte i ricercatori di uno o di un altro campo non sogliono invidiare i matematici, quando essi ottengono le loro leggi non dal confronto con la realtà, ma solo da quello con la loro pura immaginazione. Non c'è da stupirsi, che si arrivi a conseguenze logiche tra loro in accordo, quando ci si è accordati sulle leggi fondamentali (assiomi) e sui metodi per mezzo dei quali da queste leggi fondamentali si debbano derivare altre leggi. Ma una grande considerazione per la matematica viene dal fatto che essa procura alle scienze esatte della natura una qualche misura di certezza, che non si potrebbe raggiungere senza la matematica.

A questo punto salta fuori un enigma, che ha assai disturbato i ricercatori di tutti i tempi. Com'è possibile che la matematica, che è un prodotto del pensiero umano indipendente da ogni altra esperienza, se la cavi così bene al confronto con l'esperienza? Può quindi la ragione umana senza l'esperienza mediante il puro pensiero penetrare a fondo nelle proprietà delle cose reali?

Su questo punto secondo me si deve rispondere in breve: laddove le leggi della matematica corrispondono alla realtà, esse non sono certe, e laddove sono certe, esse non corrispondono alla realtà. Piena chiarezza su questo stato dei fatti mi pare derivi in primo luogo da quella linea di pensiero sulla proprietà generali della matematica che è conosciuta sotto il nome di "assiomatica". Il progresso raggiunto dall'assiomatica sta nel fatto che con essa si separa nettamente il contenuto logico-formale da quello empirico o intuitivo; solo quello logico formale costituisce secondo l'assiomatica l'oggetto della matematica, e non il contenuto intuitivo o d'altro tipo accoppiato a quello logico-formale.

Trattiamo da questo punto di vista un qualunque assioma della geometria, per esempio il seguente: per due punti dello spazio passa sempre una e una sola retta. Come va interpretato questo assioma nel vecchio e nel nuovo senso?

Vecchia interpretazione. Tutti sanno che cosa è una retta e che cosa è un punto. Che questa conoscenza derivi da una facoltà dello spirito umano o dall'esperienza, da una cooperazione di entrambi o in qualche altro modo, il matematico non si cura di distinguere, ma lascia questa distinzione al filosofo. Fondato su questa conoscenza scontata per tutti i matematici, il suddetto assioma (come tutti gli altri assiomi) è evidente, cioè esso è l'espressione di una parte di questa conoscenza a priori.

Nuova interpretazione. La geometria tratta di oggetti, contrassegnati con le parole retta, punto, eccetera. Non si presuppone una qualche conoscenza o intuizione di questi oggetti, ma solo la validità, in ogni caso puramente formale, cioè liberata da ogni contenuto intuitivo ed empirico, di assiomi da assumersi, dei quali il suddetto è un esempio. Questi assiomi sono libere creazioni dello spirito umano. Tutte le altre leggi geometriche sono conseguenze logiche degli assiomi (assunti nominalisticamente). Gli assiomi definiscono primariamente gli oggetti, di cui la geometria

[1] Geometrie und Erfahrung, S.B. Preuss. Akad. Wiss. **5**, 1-8 (1921).

tratta. Schlick ha perciò assai appropriatamente definito gli assiomi nel suo libro sulla teoria della conoscenza come "definizioni implicite".

Questa concezione degli assiomi introdotta dalla moderna assiomatica depura la matematica da tutti gli altri elementi che non le appartengono, ed elimina così l'oscurità mistica, che prima circondava i fondamenti della matematica. Una tale concezione depurata rende tuttavia anche evidente che la matematica in quanto tale non è capace di dir nulla sia riguardo agli oggetti della rappresentazione intuitiva, sia riguardo agli oggetti della realtà. Per "punto", "retta", eccetera si devono intendere nella geometria assiomatica solo degli schemi concettuali privi di contenuto. Ciò che dà loro contenuto non appartiene alla matematica.

D'altra parte è certo che la matematica in generale, e in particolare la geometria, devono ringraziare per il loro sviluppo la necessità di sperimentare il comportamento delle cose reali. La parola geometria, che significa proprio "misurazione della terra", lo prova chiaramente. La misurazione della terra riguarda le possibilità delle posizioni relative di dati corpi naturali, cioè di parti del corpo della terra, nastri metrici, aste metriche, eccetera. È chiaro che il sistema di concetti della geometria assiomatica da solo non può fare alcuna affermazione sul comportamento di siffatti oggetti della realtà, che designeremo come i corpi rigidi della pratica. Per poter fare tali asserzioni, la geometria deve essere spogliata del suo carattere esclusivamente logico-formale, in modo che i vuoti schemi concettuali della geometria assiomatica siano subordinati ai fatti sperimentabili della realtà. Per realizzare ciò, occorre solo aggiungere la legge:

I corpi rigidi si comportano rispetto alle loro possibilità di posizionamento come corpi della geometria euclidea in tre dimensioni: quindi le leggi della geometria euclidea contengono affermazioni sul comportamento dei corpi rigidi della pratica.

La geometria così completata è evidentemente una scienza naturale; la possiamo a buon diritto considerare la più antica branca della fisica. Le sue affermazioni si fondano essenzialmente sull'induzione dall'esperienza, e non solamente su scelte logiche. Chiameremo la geometria così completata "geometria pratica" e la distingueremo nel seguito dalla "geometria assiomatica pura". La domanda, se la geometria pratica del mondo sia euclidea o meno, ha un significato preciso, e la sua risposta va ottenuta mediante l'esperienza. Tutte le misure di lunghezza della fisica sono geometria pratica in questo senso, ed anche le misure di lunghezza geodetiche ed astronomiche, purché si prenda in aiuto la legge sperimentale, che la luce si propaga in linea retta, e in linea retta nel senso della geometria pratica.

Alla concezione qui descritta della geometria attribuisco un significato particolare, perché senza di essa non sarebbe possibile fondare la teoria della relatività. Senza di essa risulterebbe impossibile il seguente ragionamento: in un sistema di riferimento rotante rispetto ad un sistema inerziale a causa della contrazione di Lorentz le leggi sulla configurazione di un corpo rigido non corrispondono alle regole della geometria euclidea; quindi ammettendo i sistemi non inerziali come sistemi ugualmente consentiti si deve abbandonare la geometria euclidea. Il passo distintivo nella transizione ad equazioni generalmente covarianti rimarrebbe sicuramente oscuro, se non si fosse scelta per fondamento la suddetta interpretazione. Se si respinge la corrispondenza tra i corpi della geometria assiomatica euclidea e i corpi rigidi della pratica, si perviene facilmente alla seguente concezione, che H. Poincaré ha sostenuto in modo particolarmente netto e profondo: tra tutte le geometrie assiomatiche pensabili la geometria euclidea si distingue per semplicità. Poiché la geometria assiomatica non comporta alcuna affermazione circa la realtà sperimentabile, ma ciò avviene solo per la geometria assiomatica congiunta a leggi fisiche, risulta possibile e ragionevole, come anche la realtà può mostrare, attenersi alla geometria euclidea. Pertanto si dovrebbe preferire una modificazione delle leggi fisiche ad una modificazione nella scelta della geometria assiomatica, nel caso che si mostri una contraddizione tra teoria ed esperienza. Se si respinge una corrispondenza tra i corpi rigidi della pratica e la geometria, non è possibile liberarsi facilmente dalla convenzione, che ci si debba attenere alla geometria euclidea come la più facile.

Perché Poincaré ed altri ricercatori rifiutano la naturale corrispondenza dei corpi rigidi della pratica e dei corpi della geometria? È ovvio, perché i corpi rigidi possibili in natura ad un esame più accurato si rivelano non rigidi, perché le loro proprietà geometriche, cioè le loro possibilità di configurazione relativa dipendono dalla temperatura, da forze esterne, eccetera. Così la corrispondenza originaria e immediata tra geometria e realtà fisica appare distrutta, e ci si sente ricondotti alla seguente concezione generale, che caratterizza il punto di vista di Poincaré. La geometria (G) non dice nulla riguardo al comportamento delle cose reali, ma questo accade solo per la geometria con il completamento (P) delle leggi fisiche. Simbolicamente possiamo dire che solo la somma $(G) + (P)$ soggiace al controllo dell'esperienza. Si possono quindi scegliere a piacimento (G), come pure parti di (P); tutte queste leggi sono convenzioni. È solo necessario, per evitare contraddizioni, scegliere il resto di (P) in modo tale che (G) e la totalità di (P) nel loro insieme dian conto correttamente dell'esperienza. Secondo questa concezione la geometria assiomatica e la parte delle leggi di natura assunte per convenzione sono epistemologicamente equivalenti.

Secondo me Poincaré con questa concezione ha ragione *sub specie aeterni*: l'idea di regolo di misura e anche l'idea di orologio ad essa coordinata nella teoria della relatività non trovano nel mondo reale un oggetto esattamente corrispondente. È chiaro anche che i corpi rigidi e l'orologio non giocano nell'edificio concettuale della fisica il ruolo di elementi irriducibili, ma solo il ruolo di immagini composte, che nella costruzione della fisica teorica non possono giocare alcun ruolo indipendente. È tuttavia mio convincimento che questi elementi concettuali allo stadio attuale di sviluppo della fisica teorica possono essere introdotti solo come concetti indipendenti; siamo infatti troppo lontani da una conoscenza dei fondamenti teorici della fisica atomica, da poter dare costruzioni teoriche esatte di quelle immagini.

Per quanto concerne poi l'obiezione, che in natura non si danno corpi realmente rigidi, e che quindi le proprietà da questi possedute non riguardano la realtà fisica, essa non è così profonda, come può apparire a un esame superficiale. Non è infatti così difficile definire lo stato fisico di un corpo di misura così precisamente, che il suo comportamento rispetto alle posizioni relative su altri corpi di misura sia abbastanza univoco, da poterlo prendere per corpo "rigido". Le asserzioni circa i corpi rigidi devono essere verificate con tali corpi.

Tutta la geometria pratica si fonda su una legge fondamentale derivante dall'esperienza, che ora ricorderemo. Chiameremo intervallo l'estensione tra due segni incisi su un corpo rigido della pratica. Pensiamo a due corpi rigidi della pratica e segnamo su ciascuno un intervallo. I due intervalli si diranno "uguali l'uno all'altro", quando i segni dell'uno possono essere mantenuti costantemente in coincidenza con i segni dell'altro. Introdurremo ora l'ipotesi:

Quando due intervalli si sono trovati uguali una volta e in qualche posto, essi sono uguali sempre e ovunque.

Non solo la geometria euclidea pratica, ma anche la sua generalizzazione più immediata, la geometria riemanniana pratica, e pertanto la teoria della relatività generale, si fondano su questa ipotesi. Dei fondamenti empirici, che parlano a favore dell'introduzione di questa ipotesi, ne ricorderò uno. Il fenomeno della propagazione della luce nello spazio vuoto associa ad ogni intervallo temporale locale un intervallo spaziale, ossia il corrispondente cammino percorso dalla luce avanti e indietro. Ne discende perciò che l'ipotesi prima introdotta per gli intervalli nella teoria della relatività deve valere anche per gli intervalli temporali dell'orologio. Essa può essere allora così formulata: dati due orologi ideali che camminano allo stesso modo a un qualche tempo e in qualche luogo (ove siano immediatamente contigui), essi camminano sempre allo stesso modo, indipendentemente da dove e da quando essi vengano confrontati in uno stesso luogo. Se questa legge per gli orologi naturali non fosse valida, le frequenze proprie dei singoli atomi di uno stesso elemento chimico non coinciderebbero così precisamente come risulta dall'esperienza. L'esistenza di righe spettrali nette costituisce una prova sperimentale convincente per l'anzidetta legge della geometria pratica. Proprio da queste righe risulta che possiamo parlare in modo sensato di una metrica nel senso di Riemann nel continuo spazio-temporale a quattro dimensioni.

La domanda, se questo continuo sia euclideo, o sia strutturato secondo lo schema generale riemanniano o altrimenti, è secondo la concezione qui trattata un'autentica domanda fisica, alla quale si deve rispondere mediante l'esperienza, non una domanda puramente sull'utilità di una convenzione da scegliersi. Le leggi della geometria riemanniana saranno valide quando le leggi delle posizioni di un corpo rigido della pratica tanto più esattamente coincideranno con quelle dei corpi della geometria euclidea, quanto più piccole siano le dimensioni della regione spazio-temporale considerata.

L'interpretazione fisica della geometria qui trattata non consente un'applicazione immediata a spazi dell'ordine di grandezza submolecolare. Una parte del suo significato si conserva tuttavia anche rispetto alle domande sulla costituzione delle particelle elementari. Si può cercare allora quali delle idee di campo, che sono state definite fisicamente per la descrizione del comportamento geometrico di corpi grandi rispetto alla molecola, abbiano ancora significato fisico quando si tratta di descrivere le particelle elementari elettriche che costituiscono la materia. Solo il risultato potrà decidere la correttezza del tentativo di attribuire alle idee fondamentali della geometria riemanniana una realtà fisica al di là del loro dominio di definizione fisico. Forse si potrà mostrare che questa estrapolazione è altrettanto poco appropriata quanto l'idea di temperatura per parti di un corpo di dimensioni molecolari.

Meno problematica appare l'estensione dell'idea di geometria pratica a spazi di ordine di grandezza cosmico. Si può invero obiettare, che una costruzione fatta con regoli fissi si discosta tanto più dall'ideale di rigidità, quanto più grande è la sua estensione spaziale. Ma a questa obiezione ben difficilmente si può attribuire un significato di principio. Inoltre mi pare che anche la domanda, se l'universo sia spazialmente finito o no, sia una domanda del tutto sensata dal punto di vista della geometria pratica. Non ritengo affatto escluso che queste domande trovino una risposta da parte dell'astronomia in un tempo non troppo lontano. Ricordiamo a questo proposito che cosa insegna la teoria della relatività generale. Per essa esistono due possibilità.

1. L'universo è spazialmente infinito. Ciò è possibile solo se la densità media

spaziale della materia concentrata in stelle nello spazio dell'universo si annulla, cioè se il rapporto tra la massa totale delle stelle e il volume dello spazio nel quale essa è distribuita tanto più si approssima al valore zero, quanto più grande è lo spazio preso in considerazione.

2. L'universo è spazialmente finito. Ciò deve accadere quando si abbia una densità media di materia ponderabile diversa da zero. Il volume dello spazio dell'universo è tanto più grande, quanto più piccola è quella densità media.

Non voglio tralasciare di ricordare che si possono far valere argomenti teorici per la finitezza dell'universo. La teoria della relatività insegna che l'inerzia di un dato corpo è tanto più grande, quanto più massa ponderabile si trovi nelle sue vicinanze; appare perciò assai naturale ricondurre l'inerzia complessiva di un corpo all'interazione tra di esso e i restanti corpi dell'universo, come anche il peso secondo Newton va ricondotto interamente all'interazione tra i corpi. Si può derivare dalle equazioni della relatività generale che questa totale riduzione dell'inerzia all'interazione tra le masse - come ha proposto per esempio E. Mach - è possibile solo se il mondo è spazialmente finito.

A molti fisici e astronomi questo argomento non fà nessuna impressione. In fin dei conti solo l'esperienza può di fatto distinguere, quale delle due possibilità sia realizzata in natura; come può l'esperienza produrre una risposta? Sulle prime si può pensare che la densità media della materia si possa determinare dall'osservazione della parte dell'universo accessibile alla nostra percezione. Questa speranza è ingannevole. La distribuzione delle stelle osservabili è terribilmente irregolare, di modo che non possiamo in alcun modo tentare di porre la densità media della materia stellare dell'universo circa uguale alla densità media della Via Lattea. Inoltre si può - per quanto grande possa essere lo spazio esplorato - sempre supporre che al di là di questo spazio non ci siano più stelle. Una stima della densità media appare quindi esclusa.

Esiste tuttavia una seconda strada che mi pare più facilmente percorribile, sebbene anche questa comporti grosse difficoltà. Se ci chiediamo quali siano gli scostamenti che le conseguenze della relatività generale accessibili all'osservazione astronomica offrono rispetto alle conseguenze della teoria di Newton, notiamo che esiste uno scostamento che si dà in prossimità di una massa gravitazionale, come si è potuto confermare nel caso di Mercurio. Nel caso che l'universo sia spazialmente finito, si dà una secondo scostamento dalla teoria di Newton, che nel linguaggio della teoria di Newton si esprime così: il campo gravitazionale si comporta come se oltre alle masse ponderabili esistesse una densità di massa di segno negativo, distribuita uniformemente nello spazio. Poiché questa densità di massa fittizia dev'essere straordinariamente piccola, essa può essere osservabile solo in sistemi gravitanti di estensione molto grande.

Assumiamo di conoscere la distribuzione statistica delle stelle nella Via Lattea e le loro masse. Allora possiamo calcolare il campo gravitazionale secondo la legge di Newton, ed anche la velocità media che le stelle devono avere perché la Via Lattea, a causa delle interazioni tra le sue stelle, non collassi su se stessa, ma mantenga la sua estensione. Se ora le velocità medie reali delle stelle, che possiamo ben misurare, risultassero più piccole di quelle calcolate, si sarebbe ottenuta la prova che le attrazioni reali su grandi distanze sono più piccole che secondo la legge di Newton. Da una tale deviazione si potrebbe dimostrare indirettamente la finitezza dell'universo e stimare la sua estensione spaziale.